



PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA MECÂNICA | UFU



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DETERMINAÇÃO DOS PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO
DE UMA FUNÇÃO MULTI-MODAL POR MEIO DA
AVALIAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE**

ARTHUR HENRIQUE IASBECK

UBERLÂNDIA
12 DE SETEMBRO DE 2019

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho foi avaliar a influência dos palpites iniciais na obtenção da solução de um problema de otimização multi-modal. Para tal, os pontos de máximo, mínimo, e sela da função $f(x_1, x_2)$, Eq. 1, foram obtidos por meio da avaliação das condições de otimalidade, levando-se em consideração uma série de palpites iniciais distintos.

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_1) - x_1 \cos^2(x_2) - x_1 \quad (1)$$

2. CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Neste caso as condições necessárias de otimalidade, Eqs. 2 e 3, formam um sistema a partir do qual podem ser determinados x_1^* e x_2^* .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = F_1 = \sin(x_1) + x_1 \cos(x_1) - \cos^2(x_2) - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = F_2 = 2x_1 \cos(x_2) \sin(x_2) = 0 \quad (3)$$

A solução deste sistema não linear foi obtida a partir da implementação de uma rotina do Matlab® denominada `fsolve`. A utilização da mesma exige que as Eqs. 2 e 3 sejam definidas em um arquivo `.m` da seguinte forma (MathWorks, 2019a).

```
function F = firstDevSystem(x)
    F(1) = sin(x(1)) + x(1)*cos(x(1)) - (cos(x(2)))^2 - 1;
    F(2) = 2*x(1)*cos(x(2))*sin(x(2));
end
```

A rotina `fsolve` implementa internamente um método recursivo para solução de sistemas não lineares, o que implica que é necessário que lhe seja fornecido uma estimativa inicial para solução, neste caso representado por $x_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]$ (MathWorks, 2019a). Para obtenção de $x = [x_1^* \ x_2^*]$ e subsequente computação de $f(x_1^*, x_2^*)$ foi implementado o algoritmo introduzido abaixo.

```
x0 = [x01, x02];
x = fsolve(@firstDevSystem, x0);
f = x(1)*sin(x(1)) - x(1)*(cos(x(2)))^2 - x(1);
```

Uma vez determinados x_1^* e x_2^* , é preciso que a condição suficiente de otimalidade seja avaliada a partir da computação dos autovalores da matriz Hessiana H , Eq. 4. Para tal foi empregada a função `eig` (MathWorks, 2019b).

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}_{x=x^*} \quad (4)$$

Caso os autovalores da matriz Hessiana sejam todos positivos, é possível afirmar que (x_1^*, x_2^*) é um ponto de mínimo. Caso sejam todos negativos, (x_1^*, x_2^*) consiste num ponto de máximo. Caso outra configuração seja obtida para os autovalores da matriz Hessiana, é possível concluir que (x_1^*, x_2^*) é um ponto de sela.

Para que seja possível computar a matriz Hessiana, é necessário que as derivadas introduzidas em sua definição sejam elaboradas, Eqs. 5 a 8.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2\cos(x_1) - x_1\sin(x_1) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2x_1(\cos^2(x_2) - \sin^2(x_2)) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\cos(x_2)\sin(x_2) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2\cos(x_2)\sin(x_2) \quad (8)$$

3. COMPUTAÇÃO DE x_1^* E x_2^*

Resumidamente, a computação das Eqs. 2 e 3 através da implementação da função `fsolve`, possibilita a determinação do ponto (x_1^*, x_2^*) , enquanto a avaliação dos autovalores da matriz Hessiana, Eq. 4, indica se (x_1^*, x_2^*) é um ponto de máximo, mínimo, ou sela. No entanto, como discutido anteriormente, o emprego da rotina `fsolve` exige que seja proposta uma estimativa inicial para a solução do problema de otimização.

Para que fosse possível avaliar a influência de $x_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]$ na solução do problema de otimização, foi proposta uma discretização dos domínios de x_1 e x_2 . As análises introduzidas no presente trabalho foram realizadas considerando-se $0 \leq x_1, x_2 \leq 15$. Para garantir que $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$ assumissem valores distribuídos ao longo de todo o domínio, foi adotada uma discretização do mesmo em n elementos para que em seguida fossem implementadas todas as combinações possíveis entre $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$.

Os dados introduzidos na Tab. 1 foram obtidos considerando-se $n = 5$. À última coluna da tabela foram atribuídos os valores -1, 0 e 1, indicando que (x_1^*, x_2^*) é um ponto de mínimo, de sela, ou de máximo respectivamente. Neste caso, $[0 \ 3,75 \ 7,5 \ 11,25 \ 15]$ são os valores que podem ser atribuídos a $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$. Como todas as combinações possíveis entre estas variáveis foram adotadas, há 25 configurações distintas para x_0 . Os dados obtidos para $n = 20$ são introduzidos no Anexo A, Tab. 2.

Tabela 1: Avaliação das soluções obtidas quando $n = 5$.

| $x_{1,0}$ | $x_{2,0}$ | x_1^* | x_2^* | $f(x_1^*, x_2^*)$ | $H(x_1^*, x_2^*)$ |
|-----------|-----------|---------|---------|-------------------|-------------------|
| 0,00 | 0,00 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | -1 |
| 0,00 | 3,75 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,00 | 7,50 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,00 | 11,25 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,00 | 15,00 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 3,75 | 0,00 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 3,75 | 3,75 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 3,75 | 7,50 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 3,75 | 11,25 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 3,75 | 15,00 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 7,50 | 0,00 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 7,50 | 3,75 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 7,50 | 7,50 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 7,50 | 11,25 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 7,50 | 15,00 | 7,7230 | 15,7080 | -7,7892 | 0 |
| 11,25 | 0,00 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 11,25 | 3,75 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 11,25 | 7,50 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 11,25 | 11,25 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 11,25 | 15,00 | 11,2620 | 15,7080 | -33,3887 | -1 |
| 15,00 | 0,00 | 14,0658 | 0,0000 | -14,1016 | 0 |
| 15,00 | 3,75 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 15,00 | 7,50 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 15,00 | 11,25 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 15,00 | 15,00 | 14,0658 | 15,7080 | -14,1016 | 0 |

Avaliando os dados introduzidos na Tab. 1, fica clara a influência dos palpites iniciais na determinação dos pontos ótimos. Os resultados indicam que o método empregado pela função `fsolve` para determinação de x_1^* e x_2^* converge, na maioria das vezes, para o ponto ótimo mais próximo de $(x_{1,0}, x_{2,0})$. Além disso, a avaliação da última coluna da tabela indica que o atendimento das condições necessárias de otimalidade não garante a obtenção de um ponto de mínimo e nem de máximo, como já era esperado.

Nas Figs. 1, 2 e 3 são reproduzidos graficamente tanto a função $f(x_1, x_2)$, quanto os pontos (x_1^*, x_2^*) de máximo, mínimo, e de sela, apresentados respectivamente em vermelho, preto e amarelo. Neste caso assumiu-se $n = 20$ e todos os pontos ótimos contidos no intervalo adotado foram determinados.

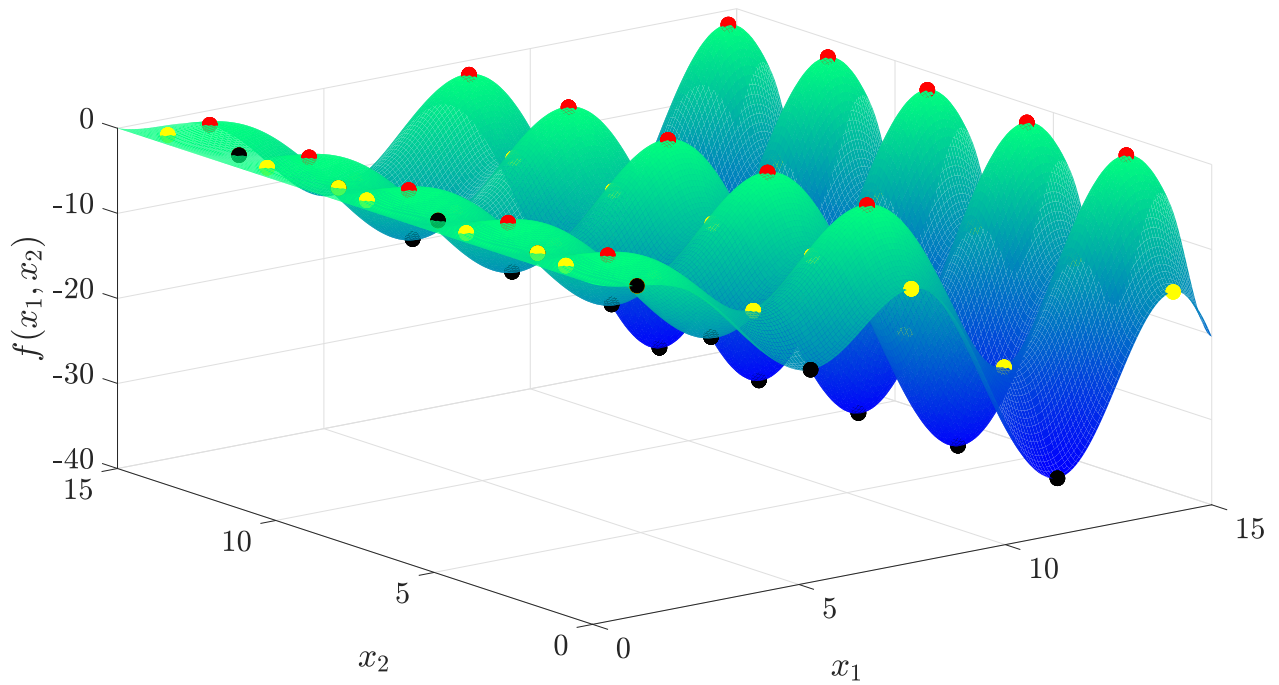


Figura 1: Representação gráfica (vista frontal) dos pontos ótimos determinados a partir da avaliação das condições necessárias de otimalidade considerando-se $n = 20$. Os pontos de máximo, mínimo e de sela estão representados respectivamente em vermelho, preto e amarelo.

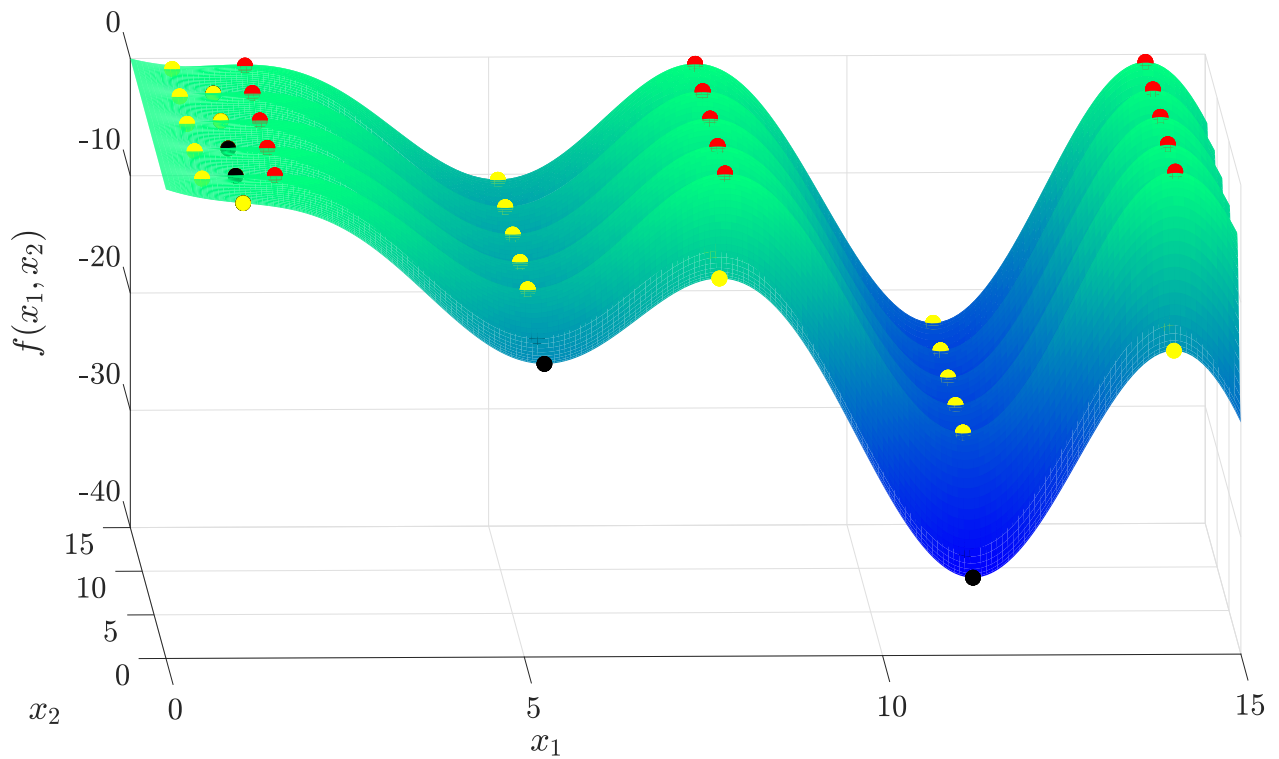


Figura 2: Representação (vista lateral) gráfica dos pontos ótimos determinados a partir da avaliação das condições necessárias de otimalidade considerando-se $n = 20$. Os pontos de máximo, mínimo e de sela estão representados respectivamente em vermelho, preto e amarelo.

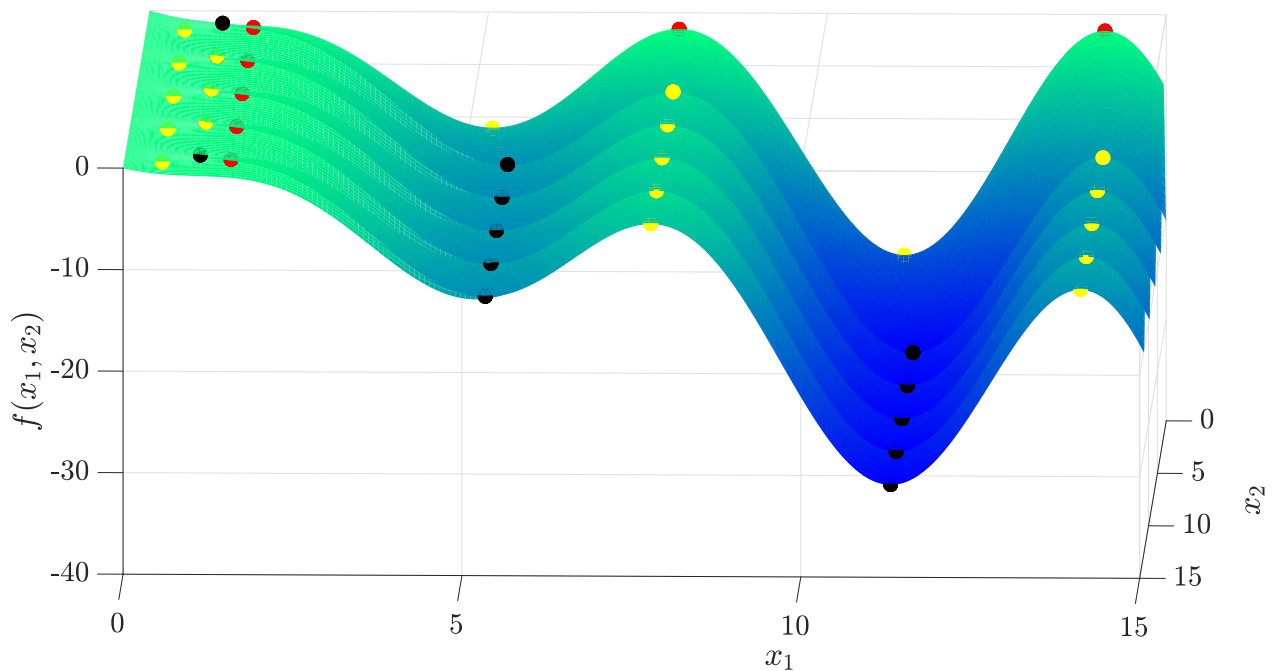


Figura 3: Representação gráfica (vista inferior) dos pontos ótimos determinados a partir da avaliação das condições necessárias de otimalidade considerando-se $n = 20$. Os pontos de máximo, mínimo e de sela estão representados respectivamente em vermelho, preto e amarelo.

4. CONCLUSÕES

No presente trabalho as condições suficientes e necessárias de otimalidade foram empregadas na determinação dos pontos ótimos da função $f(x_1, x_2)$ para que fosse possível avaliar a influência de x_0 na computação de x^* . Dentro do intervalo adotado nesta análise foram determinados todos os pontos de mínimo, máximo e sela presentes, a partir do emprego da função `fsolve` e da variação dos valores atribuídos a x_0 . Foi possível concluir por meio da análise dos resultados obtidos que os valores de x_1^* e x_2^* dependem diretamente de $x_{1,0}$ e $x_{2,0}$.

REFERÊNCIAS

LOBATO, Fran Sérgio. *Notas de aula: Otimização Clássica*. 12 de Agosto de 2019.

MATHWORKS. *Solve system of nonlinear equations - MATLAB fsolve*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fsolve.html>. Acesso em: 4 de Setembro de 2019.

MATHWORKS. *Eigenvalues and eigenvectors - MATLAB eig*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/eig.html>. Acesso em: 4 de Setembro de 2019.

ANEXO A

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|---------|-----|
| 0,0000 | 0,0000 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | -1 |
| 0,0000 | 0,7895 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 1,5789 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 2,3684 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 3,1579 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | 0 |
| 0,0000 | 3,9474 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 4,7368 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 5,5263 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 6,3158 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | -1 |
| 0,0000 | 7,1053 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 7,8947 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 8,6842 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 9,4737 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | 0 |
| 0,0000 | 10,2632 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 11,0526 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 11,8421 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 12,6316 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 0,0000 | 13,4211 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 14,2105 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 0,0000 | 15,0000 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 0,0000 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | 0 |
| 0,7895 | 0,7895 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 1,5789 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 2,3684 | 0,5560 | 1,5708 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 3,1579 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | 0 |
| 0,7895 | 3,9474 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 4,7368 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 5,5263 | 0,5560 | 4,7124 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 6,3158 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | -1 |
| 0,7895 | 7,1053 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 7,8947 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 8,6842 | 0,5560 | 7,8540 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 9,4737 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | -1 |
| 0,7895 | 10,2632 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 11,0526 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 11,8421 | 0,5560 | 10,9956 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 12,6316 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | 0 |
| 0,7895 | 13,4211 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 0,7895 | 14,2105 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|---------|-----|
| 0,7895 | 15,0000 | 0,5560 | 14,1372 | -0,2625 | 0 |
| 1,5789 | 0,0000 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 0,7895 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 1,5789 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 1,5789 | 2,3684 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 3,1579 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 3,9474 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 4,7368 | 1,5708 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 1,5789 | 5,5263 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 6,3158 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 7,1053 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 7,8947 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 1,5789 | 8,6842 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 9,4737 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 10,2632 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 11,0526 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 1,5789 | 11,8421 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 12,6316 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | 0 |
| 1,5789 | 13,4211 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 1,5789 | 14,2105 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 1,5789 | 15,0000 | 1,0769 | 15,7080 | -1,2056 | 0 |
| 2,3684 | 0,0000 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 0,7895 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 1,5789 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 2,3684 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 3,1579 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 3,9474 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | 0 |
| 2,3684 | 4,7368 | 1,5708 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 5,5263 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | 0 |
| 2,3684 | 6,3158 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | 0 |
| 2,3684 | 7,1053 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 7,8947 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 8,6842 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 9,4737 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | 0 |
| 2,3684 | 10,2632 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 11,0526 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 11,8421 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 12,6316 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 2,3684 | 13,4211 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 14,2105 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 2,3684 | 15,0000 | 1,0769 | 15,7080 | -1,2056 | -1 |
| 3,1579 | 0,0000 | 1,0769 | 0,0000 | -1,2056 | 0 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|----------|-----|
| 3,1579 | 0,7895 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 1,5789 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 2,3684 | 1,5708 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 3,1579 | 1,0769 | 3,1416 | -1,2056 | 0 |
| 3,1579 | 3,9474 | 1,5708 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 4,7368 | 1,5708 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 5,5263 | 1,5708 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 6,3158 | 1,0769 | 6,2832 | -1,2056 | -1 |
| 3,1579 | 7,1053 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 7,8947 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 8,6842 | 1,5708 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 9,4737 | 1,0769 | 9,4248 | -1,2056 | 0 |
| 3,1579 | 10,2632 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 11,0526 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 11,8421 | 1,5708 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 12,6316 | 1,0769 | 12,5664 | -1,2056 | -1 |
| 3,1579 | 13,4211 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 14,2105 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 3,1579 | 15,0000 | 1,5708 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 3,9474 | 0,0000 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 0,7895 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 1,5789 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 2,3684 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 3,1579 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 3,9474 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 4,7368 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 5,5263 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 6,3158 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 7,1053 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 7,8947 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 8,6842 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 9,4737 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 10,2632 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 11,0526 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 11,8421 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 12,6316 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 3,9474 | 13,4211 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 14,2105 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 3,9474 | 15,0000 | 5,0997 | 17,2788 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 0,0000 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 0,7895 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 1,5789 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|----------|-----|
| 4,7368 | 2,3684 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 3,1579 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 3,9474 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 4,7368 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 5,5263 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 6,3158 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 7,1053 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 7,8947 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 8,6842 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 9,4737 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 10,2632 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 11,0526 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 11,8421 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 12,6316 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 4,7368 | 13,4211 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 14,2105 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 4,7368 | 15,0000 | 5,2808 | 15,7080 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 0,0000 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 0,7895 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 1,5789 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 2,3684 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 3,1579 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 3,9474 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 4,7368 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 5,5263 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 6,3158 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 7,1053 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 7,8947 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 8,6842 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 9,4737 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 10,2632 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 11,0526 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 11,8421 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 12,6316 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 5,5263 | 13,4211 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 14,2105 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 5,5263 | 15,0000 | 5,2808 | 15,7080 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 0,0000 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 0,7895 | 5,2808 | 0,0000 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 1,5789 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 2,3684 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 3,1579 | 5,2808 | 3,1416 | -15,0120 | -1 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|----------|-----|
| 6,3158 | 3,9474 | 5,0997 | 1,5708 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 4,7368 | 5,0997 | 4,7124 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 5,5263 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 6,3158 | 5,2808 | 6,2832 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 7,1053 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 7,8947 | 5,0997 | 7,8540 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 8,6842 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 9,4737 | 5,2808 | 9,4248 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 10,2632 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 11,0526 | 5,0997 | 10,9956 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 11,8421 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 12,6316 | 5,2808 | 12,5664 | -15,0120 | -1 |
| 6,3158 | 13,4211 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 14,2105 | 5,0997 | 14,1372 | -9,8217 | 0 |
| 6,3158 | 15,0000 | 5,2808 | 15,7080 | -15,0120 | -1 |
| 7,1053 | 0,0000 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 0,7895 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 1,5789 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 2,3684 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 3,1579 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 3,9474 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 4,7368 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 5,5263 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 6,3158 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 7,1053 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 7,8947 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 8,6842 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 9,4737 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 10,2632 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 11,0526 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 11,8421 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 12,6316 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 7,1053 | 13,4211 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 14,2105 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 7,1053 | 15,0000 | 7,7230 | 15,7080 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 0,0000 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 0,7895 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 1,5789 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 2,3684 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 3,1579 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 3,9474 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 4,7368 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|--------|---------|---------|-----|
| 7,8947 | 5,5263 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 6,3158 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 7,1053 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 7,8947 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 8,6842 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 9,4737 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 10,2632 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 11,0526 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 11,8421 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 12,6316 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 7,8947 | 13,4211 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 14,2105 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 7,8947 | 15,0000 | 7,7230 | 15,7080 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 0,0000 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 0,7895 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 1,5789 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 2,3684 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 3,1579 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 3,9474 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 4,7368 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 5,5263 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 6,3158 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 7,1053 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 7,8947 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 8,6842 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 9,4737 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 10,2632 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 11,0526 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 11,8421 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 12,6316 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 8,6842 | 13,4211 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 14,2105 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 8,6842 | 15,0000 | 7,7230 | 15,7080 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 0,0000 | 7,7230 | 0,0000 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 0,7895 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 1,5789 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 2,3684 | 7,8540 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 3,1579 | 7,7230 | 3,1416 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 3,9474 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 4,7368 | 7,8540 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 5,5263 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 6,3158 | 7,7230 | 6,2832 | -7,7892 | 0 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|---------|---------|----------|-----|
| 9,4737 | 7,1053 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 7,8947 | 7,8540 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 8,6842 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 9,4737 | 7,7230 | 9,4248 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 10,2632 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 11,0526 | 7,8540 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 11,8421 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 12,6316 | 7,7230 | 12,5664 | -7,7892 | 0 |
| 9,4737 | 13,4211 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 14,2105 | 7,8540 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 9,4737 | 15,0000 | 7,7230 | 15,7080 | -7,7892 | 0 |
| 10,2632 | 0,0000 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 0,7895 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 1,5789 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 2,3684 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 3,1579 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 3,9474 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 4,7368 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 5,5263 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 6,3158 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 7,1053 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 7,8947 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 8,6842 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 9,4737 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 10,2632 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 11,0526 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 11,8421 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 12,6316 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 10,2632 | 13,4211 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 14,2105 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 10,2632 | 15,0000 | 11,2620 | 15,7080 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 0,0000 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 0,7895 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 1,5789 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 2,3684 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 3,1579 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 3,9474 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 4,7368 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 5,5263 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 6,3158 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 7,1053 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 7,8947 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|---------|---------|----------|-----|
| 11,0526 | 8,6842 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 9,4737 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 10,2632 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 11,0526 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 11,8421 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 12,6316 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 11,0526 | 13,4211 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 14,2105 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 11,0526 | 15,0000 | 11,2620 | 15,7080 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 0,0000 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 0,7895 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 1,5789 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 2,3684 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 3,1579 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 3,9474 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 4,7368 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 5,5263 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 6,3158 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 7,1053 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 7,8947 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 8,6842 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 9,4737 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 10,2632 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 11,0526 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 11,8421 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 12,6316 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 11,8421 | 13,4211 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 14,2105 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 11,8421 | 15,0000 | 11,2620 | 15,7080 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 0,0000 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 0,7895 | 11,2620 | 0,0000 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 1,5789 | 11,1741 | 1,5708 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 2,3684 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 3,1579 | 11,2620 | 3,1416 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 3,9474 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 4,7368 | 11,1741 | 4,7124 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 5,5263 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 6,3158 | 11,2620 | 6,2832 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 7,1053 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 7,8947 | 11,1741 | 7,8540 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 8,6842 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 9,4737 | 11,2620 | 9,4248 | -33,3887 | -1 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|---------|---------|----------|-----|
| 12,6316 | 10,2632 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 11,0526 | 11,1741 | 10,9956 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 11,8421 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 12,6316 | 11,2620 | 12,5664 | -33,3887 | -1 |
| 12,6316 | 13,4211 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 14,2105 | 11,1741 | 14,1372 | -22,1706 | 0 |
| 12,6316 | 15,0000 | 11,2620 | 15,7080 | -33,3887 | -1 |
| 13,4211 | 0,0000 | 14,0658 | 0,0000 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 0,7895 | 14,1372 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 1,5789 | 14,1372 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 2,3684 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 3,1579 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 3,9474 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 4,7368 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 5,5263 | 14,0658 | 6,2832 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 6,3158 | 14,0658 | 6,2832 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 7,1053 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 7,8947 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 8,6842 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 9,4737 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 10,2632 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 11,0526 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 11,8421 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 12,6316 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 13,4211 | 13,4211 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 14,2105 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 13,4211 | 15,0000 | 14,0658 | 15,7080 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 0,0000 | 14,0658 | 0,0000 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 0,7895 | 14,1372 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 1,5789 | 14,1372 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 2,3684 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 3,1579 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 3,9474 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 4,7368 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 5,5263 | 14,0658 | 6,2832 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 6,3158 | 14,0658 | 6,2832 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 7,1053 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 7,8947 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 8,6842 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 9,4737 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 10,2632 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 11,0526 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |

Tabela 2: Resultados obtidos para $n = 20$.

| $x_0(1)$ | $x_0(2)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | f | H |
|----------|----------|---------|---------|----------|-----|
| 14,2105 | 11,8421 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 12,6316 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 14,2105 | 13,4211 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 14,2105 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 14,2105 | 15,0000 | 14,0658 | 15,7080 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 0,0000 | 14,0658 | 0,0000 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 0,7895 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 1,5789 | 14,1372 | 1,5708 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 2,3684 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 3,1579 | 14,0658 | 3,1416 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 3,9474 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 4,7368 | 14,1372 | 4,7124 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 5,5263 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 6,3158 | 14,0658 | 6,2832 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 7,1053 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 7,8947 | 14,1372 | 7,8540 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 8,6842 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 9,4737 | 14,0658 | 9,4248 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 10,2632 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 11,0526 | 14,1372 | 10,9956 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 11,8421 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 12,6316 | 14,0658 | 12,5664 | -14,1016 | 0 |
| 15,0000 | 13,4211 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 14,2105 | 14,1372 | 14,1372 | 0,0000 | 1 |
| 15,0000 | 15,0000 | 14,0658 | 15,7080 | -14,1016 | 0 |

5. ANEXO B

Código utilizado na computação de x_1^* e x_2^* .

```
clc; clear; close all;

nData = 20;

results = zeros(nData^2,5);
x0Values = linspace(0,15,nData);
fValues = zeros(nData);
x1Values = zeros(nData);
x2Values = zeros(nData);
maxValues = zeros(nData);
minValues = zeros(nData);
noneValues = zeros(nData);
H = zeros(2);
k = 1;

opt = optimoptions('fsolve','Display','off');

for i = 1:nData
    for j = 1:nData
        x0 = [x0Values(i), x0Values(j)];
        x = fsolve(@firstDevSystem,x0,opt);
        f = x(1)*sin(x(1)) - x(1)*(cos(x(2)))^2 - x(1);

        H(1,1) = 2*cos(x(1)) - x(1)*sin(x(1));
        H(1,2) = 2*cos(x(2))*sin(x(2));
        H(2,1) = H(1,2);
        H(2,2) = 2*x(1)*((cos(x(2)))^2 - (sin(x(2)))^2);

        lambda = eig(H);

        results(k,1) = x0Values(i);
        results(k,2) = x0Values(j);
        results(k,3) = x(1);
        results(k,4) = x(2);
        results(k,5) = f;

        if all(all(lambda > 0))
            results(k,6) = -1;
            minValues(i,j) = f;
            maxValues(i,j) = 1;
            noneValues(i,j) = 1;
        elseif all(all(lambda < 0))
            results(k,6) = 1;
            minValues(i,j) = 1;
            maxValues(i,j) = f;
            noneValues(i,j) = 1;
        else
            results(k,6) = 0;
            minValues(i,j) = 1;
```

```

        maxValues(i,j) = 1;
        noneValues(i,j) = f;
    end

    fValues(i,j) = f;
    x1Values(i,j) = x(1);
    x2Values(i,j) = x(2);

    k = k + 1;
end
end

%%
close all; clc;

% Apresentando grafico de f no intervalo adotado 0 < x1, x2 < 15
h = figure;
x = linspace(0,15,200);
y = linspace(0,15,200);
[X,Y] = meshgrid(x, y);
Z = X.*sin(X) - X.*(cos(Y)).^2 - X;
s = surf(X,Y,Z);
s.EdgeColor = 'none';

sizeAxis = axis;

hold on;
plot3(x1Values,x2Values,minValues,'.k','MarkerSize',40);
plot3(x1Values,x2Values,maxValues,'.r','MarkerSize',40);
plot3(x1Values,x2Values,noneValues,'.y','MarkerSize',40);

colormap winter;
fullScreen;
sizeAxis(1:4) = [0 15 0 15];
axis(sizeAxis);
set(gca,'FontSize',25);
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex');
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
zlabel('f(x_1, x_2)');
printI('3d1');

% Salvando os dados da execucao em um arquivo excel
x01 = results(:,1);
x02 = results(:,2);
x1 = results(:,3);
x2 = results(:,4);
f = results(:,5);
H = results(:,6);
resultsTable = table(x01, x02, x1, x2, f, H);

excelFile = 'tabelas/results.xlsx';
writetable(resultsTable,excelFile);

```

```
function F = firstDevSystem(x)
    F(1) = sin(x(1)) + x(1)*cos(x(1)) - (cos(x(2)))^2 - 1;
    F(2) = 2*x(1)*cos(x(2))*sin(x(2));
end
```