Quarta Lista de Exercícios: Simulando variáveis aleatórias

Exercício 1. Escreva uma função para gerar n valores de uma variável aleatória X que possui a seguinte lei de probabilidade: $P(X = 1) = 1/3$ e $P(X = 2) = 2/3$. Em seguinda, utilize $n = 100$ em sua função e determine a proporção de valores que são iguais a 2. Obtenha a proporção também para $n = 1000$ e para $n = 10000$.

Exercício 2. Escreva uma função cuja entrada é um vetor de probabilidades $c(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (logo a soma de todas as entradas deve ser 1) de uma variável X em que $P(X = i) = p_i$ e que a saída retorne um valor dessa variável X.

Exercício 3. Seja X uma variável aleatória que possui distribuição Geométrica de parâmetro p, isto é,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uma interpretação para X é: vamos executar um experimento de sucesso ou fracasso até obtermos o primeiro sucesso. Assim, se o primeiro sucesso veio na k-ésima realização do experimento, podemos afirmar que as $(k - 1)$ primeiras realizações do experimento foram fracassos (isso acontece com probabilidade $(1 - p)^{k-1}$) e a k-ésima realização foi sucesso. Escreva uma função cuja entrada seja o parâmetro p e que a saída retorne um valor gerado da variável X.

Considere agora a variável Y que indica o número de tentativas necessárias para se obter k sucessos de igual probabilidade p ao fim de n experimentos de sucesso/fracasso. É possível provar que a lei de probabilidade de Y é dada por:

$$P(Y = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1 - p)^{n-k}, \; n = k, k + 1, \ldots.$$

Escreva uma função cujas entradas são p e k e que a saída retorne um valor de Y. Use sua função com $p = 4/7$ e $k = 3$, para estimar $P(Y > 8)$.

Dica: para gerar um valor de Y, tente relacionar essa variável com a variável X.

Exercício 4. Escreva uma função cuja entrada seja um número natural n e que a saída retorne n valores gerados de uma variável aleatória contínua X cuja função de distribuição acumulada é

$$F(x) = \frac{x^2 + x}{2}, \; 0 \leq x \leq 1.$$

Em seguinda, utilize $n = 10000$ em sua função para fornecer estimativas para $P(X < 0.7)$ e para $E[X]$.