Tarefa 5 – Teoria dos Grafos

Arthur do Prado Labaki – 11821BCC017

7.1 –

O numero de guardas vai depender sempre do formato da galeria. Sendo a galeria um grafo G, as praças como os vértices e corredores as arestas, o número máximo de guardas vai ser a metade do numero de vértices, porém o número mínimo vai depender exclusivamente do formato do grafo G. Por exemplo, grafo bipartido completo Km,n tem uma cobertura de vértices mínima de tamanho $\beta(K_{m,n}) = \min(m,n)$.

9.1 –

Um emparelhamento num grafo G não-dirigido é um conjunto M de arestas dotado da propriedade: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M. Com isso, vértices do grafo (Vg, H) serão emparelhadas se, e somente se, dado o vértice, $d_H(v) \leq 1$.

9.2 –

O numero de arestas de um emparelhamento máximo será n/2, sendo n o número de vértices. Caso n seja ímpar, o número de arestas será (n-1)/2.

9.3 –

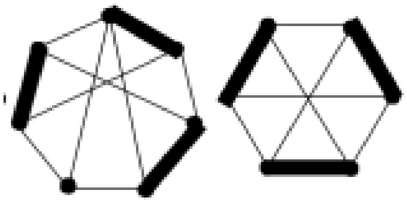
Dado um grafo bipartido G(a,b) completo, o número de emparelhamento será o número de vértices do menor lado, ou seja, se a < b, a cardinalidade do emparelhamento = a.

9.4 –

O emparelhamento máximo de um caminho é sempre n/2, caso o numero de vértices do caminho seja ímpar, (n-1)/2. O mesmo ocorre para os circuitos.

9.5 –

Emparelhamentos perfeitos só existem se o numero de vértices do grafo for par, pois um emparelhamento é perfeito se todo vértice do grafo é extremidade de alguma aresta do emparelhamento, logo um grafo com n(G) ímpar nunca terá emparelhamento perfeito, pois sobrara sempre um vértice que não poderá ter arestas emparelhadas.

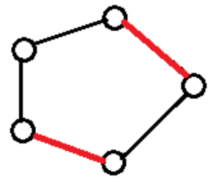


G_2 G_3

9.8 –

Não, grafos regulares com número de vértices impares nunca terão emparelhamento perfeito.

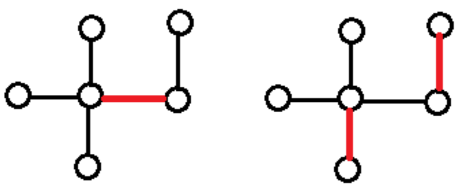
Grafo 2-Regular



9.14 –

Não, em arvores, nem todo emparelhamento maximal é máximo.

Maximal Máximo

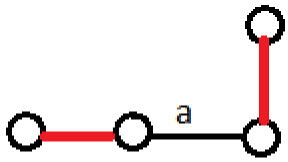


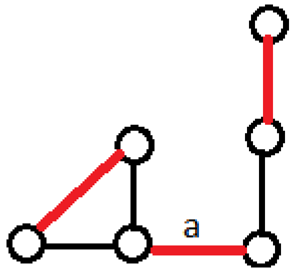
9.17 –

Sendo M e M’ dois emparelhamentos num grafo G, o grafo H (VG, M ∪ M’) seria o mesmo grafo que G, pois tem os mesmos vértices e, além disso o M∪M’ seriam todas as arestas emparelhadas, logo todas. Já o grafo a o grafo (VG, M ⊕ M’), em que A ⊕ B = (A ∪ B) / (A ∩ B) serial um grafo em que nunca teria um emparelhamento, pois retiramos os emparelhamentos possíveis do grafo G.

9.18 –

As pontes inferem que sempre ou nunca os emparelhamentos dependem dela, ou seja, sempre ou nunca elas serão usadas no emparelhamento, dependendo do grafo.





Usando o exemplo, no primeiro grafo, a ponte a nunca vai ser usada para o emparelhamento perfeito, já no segundo caso, ela sempre será usada para o emparelhamento perfeito.

9.19 –

Floresta é um grafo não dirigido sem circuitos, ou seja, cada uma de suas arestas são uma ponte. Com isso todos os vértices terão a características do emparelhamento com pontes (visto no exercício passado) e, com isso, só existira no máximo um único grafo perfeito, com um número selecionado de arestas.

9.22 –

Um caminho de aumento é um caminho alternado que inicia e termina em vértices livres (não emparelhados). Com isso, sendo P um caminho de aumento para um emparelhamento M, M ⊕ EP será um emparelhamento, pois M ⊕ EP será uma parte do caminho P, com os emparelhamentos M relacionados.

9.26 –

M é um emparelhamento e (v0, v1, . . . , vk) é um passeio cujas arestas estão alternadamente em M e fora de M e v0 e vk não estão saturados por M. A é o conjunto das arestas do passeio, M ⨁ A pode não ser um emparelhamento, pois como o passeio tem arestas intercaladas de emparelhamento, M ⨁ A vai resultar em emparelhamento somente se o passeio realizar um circuito, caso contrario , não será um emparelhamento.

9.33 –

Sendo M um emparelhamento e K uma cobertura tal que |M| = |K|, e um emparelhamento M satura um vértice v se ∂(v) ∩ M 6= ∅, ou seja, se alguma aresta de M incide em v. É possível comprovar que M satura K, pois todas as arestas de M incidem em K, pois são iguais (|M| = |K|).

9.36 –

Suponha que um grafo G tem um emparelhamento perfeito e, para todo vértice v, o grafo G – v tem exatamente um componente com número ímpar de vértices, pois um emparelhamento perfeito só existe se G tiver o numero de vértices par.

10.9 –