

Corrigé TD1 - Compléments sur l'étude des fonctions

Corrigé de l'exercice 2

1)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 11x - 3.$$

La fonction f est un polynôme, qui est donc de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle est en particulier continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 11,$$

et,

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72.$$

On a donc f'' qui est un polynôme du second degré. Pour étudier la convexité de f , il faut trouver les solutions de $f''(x) = 0$. Pour se faire, on calcule le déterminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 12 \times (-72) \\ &= 144 + 3456 \\ &= 3600 \\ &\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 60\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, on a deux solutions, qui sont données par :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-12) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 - 60}{24} \\ &= \boxed{-2}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-12) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 + 60}{24} \\ &= \boxed{3}\end{aligned}$$

De plus, on a $f''(0) = 12 \times 0^2 - 12 \times 0 - 72 = -72$, ce qui nous donne le signe du polynôme de part et d'autre des solutions. On peut donc résumer ces informations dans le tableau ci-dessous :

| x | $-\infty$ | -2 | 3 | $+\infty$ |
|----------|----------------|------|----------------|----------------|
| $f''(x)$ | + | 0 | 0 | + |
| f est | <i>convexe</i> | | <i>concave</i> | <i>convexe</i> |

2) L'équation de la tangente d'une fonction f en un point a s'écrit sous la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ainsi, on peut déduire les équations de tangentes aux points d'inflexions comme étant :

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \\ &= 99(x + 2) - 137 \\ &= \boxed{99x + 61}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\ &= -151(x - 3) - 267 \\ &= \boxed{-151x + 186}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

$$f(x) = x \times 0.5^x = xe^{x \ln(0.5)}$$

• On sait que $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc par stabilité du produit, f est également $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. La fonction f est donc continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= (1 + x \ln(0.5)) e^{x \ln(0.5)}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5)^2 e^{x \ln(0.5)} + \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= (2 + x \ln(0.5)) \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow (1 + x \ln(0.5)) e^{x \ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow (1 + x \ln(0.5)) = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^{x \ln(0.5)} = 0}_{\text{impossible, car } e^x > 0} \\ &\Rightarrow x \ln(0.5) = -1 \\ &\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{\ln(0.5)} \simeq 1.44} \end{aligned}$$

Or, on a également $f'(0) = 1$, et $f'(2) = (1 + 2 \ln(0.5)) 0.5^2 \simeq -0.10$, ce qui veut dire que la dérivée change de signe de part et d'autre du point critique x_1 . Ainsi, on a bien un extremum en x_1 , plus

spécifiquement, il s'agit d'un maximum car on passe d'une dérivée positive à négative (càd que la fonction est croissante puis décroissante).

- Pour étudier la convexité de f , on résout :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2 + x \ln(0.5)) \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{\ln(0.5)} \simeq 2.89}$$

De plus, $f''(0) \simeq -0.70$, et $f''(3) \simeq 0.007$. La fonction est donc concave avant x_2 et convexe après.

- Pour finir, on peut calculer la valeur de notre maximum : $f(x_1) = -\frac{1}{\ln(0.5)} e^{-1} = -\frac{1}{\ln(0.5)e}$. Il est également facile de voir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Finalement, il est possible de résumer toutes ces informations dans le tableau ci-dessous :

| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{\ln(0.5)}$ | $-\frac{2}{\ln(0.5)}$ | $+\infty$ |
|----------|----------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\frac{-1}{\ln(0.5)e}$ | | 0 |
| $f''(x)$ | | − | 0 | + |
| f est | <i>concave</i> | | | <i>convexe</i> |

Corrigé de l'exercice 4

$$g(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc en tant que produit de fonctions, g est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$. On peut donc en particulier la dériver deux fois sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_*^+$:

$$g'(x) = \frac{4}{4x} \times \frac{1}{x} + \ln(4x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1 - \ln(4x)}{x^2}},$$

et,

$$g''(x) = -\frac{4}{4x} \times \frac{1}{x^2} + (1 - \ln(4x)) \times \left(-\frac{2x}{x^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^3} + (1 - \ln(4x)) \times \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2 \ln(4x) - 3}{x^3}}.$$

- Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned}
 g'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1 - \ln(4x)}{x^2} = 0 \\
 &\Rightarrow 1 - \ln(4x) = 0 \\
 &\Rightarrow \ln(4x) = 1 \\
 &\Rightarrow 4x = e^1 \\
 &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e}{4} \simeq 0.68}
 \end{aligned}$$

De plus, on a $g'(\frac{e}{8}) = \frac{1 - \ln(4 \times \frac{e}{8})}{(\frac{e}{8})^2} = \frac{1 - \ln(e) + \ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} = \frac{\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} > 0$ et $g'(\frac{e}{2}) = \frac{1 - \ln(4 \times \frac{e}{2})}{(\frac{e}{2})^2} = -\frac{\ln(2)}{(\frac{e}{2})^2} < 0$. La dérivée étant croissante puis décroissante, g admet un maximum en $x_0 = \frac{e}{4}$.

- Pour étudier la convexité de f , on résout :

$$\begin{aligned}
 g''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2\ln(4x) - 3}{x^3} = 0 \\
 &\Rightarrow 2\ln(4x) - 3 = 0 \\
 &\Rightarrow \ln(4x) = \frac{3}{2} \\
 &\Rightarrow 4x = e^{\frac{3}{2}} \\
 &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4} \simeq 1.12}
 \end{aligned}$$

Or, on voit que $g''(\frac{e}{4}) = \frac{2\ln(4 \times \frac{e}{4}) - 3}{(\frac{e}{4})^3} = \frac{-1}{(\frac{e}{4})^3} < 0$ et $g''(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}) = \frac{2\ln(4 \times \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}) - 3}{(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4})^3} = \frac{1}{(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4})^3} > 0$.

- Pour finir, on peut calculer la valeur du maximum : $g(\frac{e}{4}) = \frac{\ln(4 \times \frac{e}{4})}{\frac{e}{4}} = \frac{1}{\frac{e}{4}} = \frac{4}{e} \simeq 1.47$. Et voir que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée entre le logarithme et la fonction identité. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| x | 0 | $\frac{e}{4}$ | $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|---------------|-----------------------------|-----------|
| $g'(x)$ | + | 0 | - | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\frac{4}{e}$ | | 0 |
| $g''(x)$ | | - | 0 | + |
| g est | | concave | | convexe |

Corrigé de l'exercice 5

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$


1) La fonction f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \boxed{\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}}, \end{aligned}$$

et résoudre

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow \text{impossible car } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante et n'admet pas d'extrema. Or, en se rappelant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on voit que f admet deux asymptotes horizontales car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. On peut maintenant dresser le tableau de variation :

| | |
|---------|--|
| x | $-\infty$ $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> 0  1 </div> |

2) Si on note $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = (1 + e^{-x})^2$, la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 + e^{-x})^2 - e^{-x} \times 2(-e^{-x})(1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1^2 + e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x} - 2e^{-2x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \boxed{\frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^4}}. \end{aligned}$$

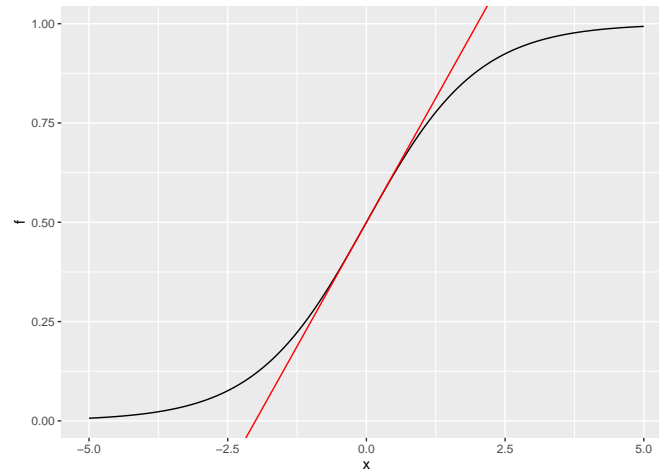
Pour étudier la convexité de f , on résout :

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^4} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} - e^{-x} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} = e^{-x} \\
&\Rightarrow \boxed{x = 0},
\end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est bijective. De plus, $f(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$, donc $x_0 = (0, \frac{1}{2})$. La tangente en ce point a pour équation :

$$\begin{aligned}
y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= \frac{e^0}{(1 + e^0)^2}(x - 0) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3) Ci-dessous, le graph de la fonction f (en noir) et la tangente en x_0 (en rouge) :



4) On a vu que f est bornée par 1 donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

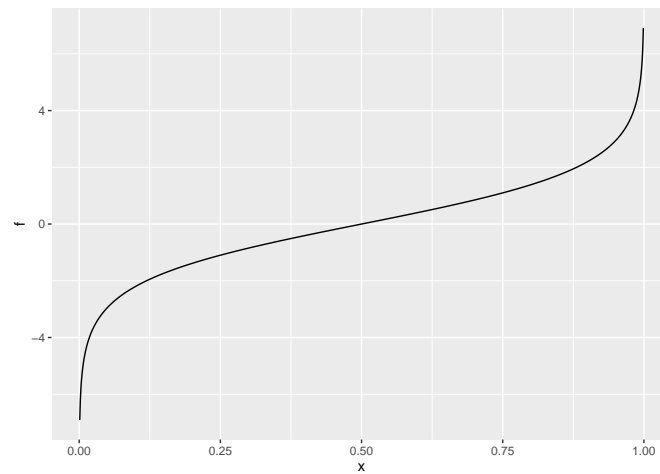
5)

$$\begin{aligned}
f(x) = 0.7 &\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0.8 \\
&\Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{5}{4} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\
&\Rightarrow \boxed{x = \ln(4)}.
\end{aligned}$$

6) On a vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. De plus, f est continue et $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, c'est à dire f est strictement monotone. Ainsi, f est une bijection entre \mathbb{R} et $]0, 1[$. On pose $y = f(x)$:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{y} - 1 \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1 - y}{y} \\
&\Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) \\
&\Rightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right) \\
&\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)}.
\end{aligned}$$

f^{-1} est la fonction réciproque de f , définie sur $]0, 1[$ et à valeurs dans \mathbb{R} , dont le graph est donné ci-dessous :



Corrigé TD 2 - Extrema des fonctions à deux variables

Corrigé de l'exercice 7

$$f(x, y) = xy$$

- 1) Pour donner l'expression du gradient de f , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= y\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= x\end{aligned}$$

Ainsi le gradient s'écrit $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, et il s'annule en $(x_0, y_0) = (0, 0)$, qui est l'unique point critique.

- 2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y) \\ &= 1.\end{aligned}$$

On constate bien que $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, ce qui est attendu d'après le théorème de Schwarz, puisque la fonction f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc en particulier ses dérivées partielles secondes sont continues. On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a donc un cas très particulier où la matrice Hessienne est identique, quelque soient les points (x, y) en laquelle elle est évaluée.

3) Ainsi on a en particulier :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le déterminant de cette matrice est donné par :

$$\begin{aligned}\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \times 0 - 1 \times 1 \\ &= -1 \leq 0.\end{aligned}$$

Et d'après le cours, on sait qu'un déterminant négatif indique que (x_0, y_0) est un **point selle**.

Corrigé de l'exercice 6

$$f(x, y) = \frac{1}{120} (3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 3y^4 - 4y^3 - 72y^2)$$

$$1) \left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{10} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = \frac{1}{10} (x+2)(x-1)(x-3) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{10} (y^3 - y^2 - 12y) = \frac{1}{10} y(y+3)(y-4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} (x+2)(x-1)(x-3) \\ y(y+3)(y-4) \end{pmatrix}$$

2) Définition des points critiques : voir ci-dessus.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \\ y(y+3)(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ y = 0 \text{ ou } y = -3 \text{ ou } y = 4 \end{cases}$$

Il y a neuf points critiques (x et y ne dépendent pas l'un de l'autre) :

$$A(-2; 0), B(-2; -3), C(-2; 4), D(1; 0), E(1; -3), F(1; 4), G(3; 0), H(3; -3), I(3; 4)$$

$$3) \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{10} (3x^2 - 4x - 5) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{10} (3y^2 - 2y - 12) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 f(x, y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3x^2 - 4x - 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2y - 12 \end{pmatrix}$$

4)

$$\boxed{A(-2; 0)} \quad \nabla^2 f(-2; 0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; 0)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = -1,8 < 0 \quad \Rightarrow A \text{ est un point-selle.}$$

$$\boxed{B(-2; -3)} \quad \nabla^2 f(-2; -3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; -3)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = 3,15 > 0 \quad \Rightarrow B \text{ est un extremum.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2; -3) = 1,5 > 0 \quad \Rightarrow B \text{ est un minimum}$$

$$\text{et } f(-2; -3) = -\frac{449}{120} \simeq -3,74$$

$$\boxed{C(-2; 4)} \quad \nabla^2 f(-2; 4) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; 4)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = 4,2 > 0 \quad \Rightarrow C \text{ est un extremum.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2; 4) = 1,5 > 0 \quad \Rightarrow C \text{ est un minimum}$$

$$\text{et } f(-2; 4) = -6,6$$

$$\begin{aligned}
\boxed{D(1;0)} \quad \nabla^2 f(1;0) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;0)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = 0,72 > 0 \quad \Rightarrow D \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;0) &= -0,6 < 0 \quad \Rightarrow D \text{ est un maximum} \\
\text{et } f(1;0) &= -\frac{37}{120} \simeq 0,31
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{E(1;-3)} \quad \nabla^2 f(1;-3) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;-3)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = -1,26 < 0 \quad \Rightarrow E \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{F(1;4)} \quad \nabla^2 f(1;4) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;4)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = -1,68 < 0 \quad \Rightarrow F \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{G(3;0)} \quad \nabla^2 f(3;0) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;0)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = -1,2 < 0 \quad \Rightarrow G \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{H(3;-3)} \quad \nabla^2 f(3;-3) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;-3)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = 2,1 > 0 \quad \Rightarrow H \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;-3) &= 1 > 0 \quad \Rightarrow H \text{ est un minimum} \\
\text{et } f(3;-3) &= -2,7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{I(3;4)} \quad \nabla^2 f(3;4) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;4)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = 2,8 > 0 \quad \Rightarrow I \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;4) &= 1 > 0 \quad \Rightarrow I \text{ est un minimum} \\
\text{et } f(3;4) &= -\frac{667}{120} \simeq -5,56
\end{aligned}$$

5) a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ car f est définie pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) \in \mathbb{R}^2$

c) Pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f(x, y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

d) Le théorème de Schwarz dit que si f admet des dérivées secondes continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Corrigé de l'exercice 9

$$f(x, y) = xy^2 - y + e^{xy}$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \boxed{y^2 + ye^{xy}};$$

et,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \boxed{2xy - 1 + xe^{xy}}.$$

On cherche donc les solutions de $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + ye^{xy} \\ 2xy - 1 + xe^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour cela travaillons d'abord sur la première équation :

$$\begin{aligned} y^2 + ye^{xy} = 0 &\Rightarrow y(y + e^{xy}) = 0 \\ &\Rightarrow e^{xy} = -y \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow xy = \ln(-y) \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln(-y)}{y} \quad \text{ou} \quad \boxed{y = 0}. \end{aligned}$$

A l'aide de la seconde équation on déduit que, si $y = 0$, alors :

$$\begin{aligned} 2x \times 0 + xe^{x \times 0} - 1 = 0 &\Rightarrow x \times 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1}, \end{aligned}$$

et si $x = \frac{\ln(-y)}{y}$, alors :

$$\begin{aligned} 2y \times \frac{\ln(-y)}{y} + \frac{\ln(-y)}{y} e^{\frac{\ln(-y)}{y} \times y} - 1 = 0 &\Rightarrow 2\ln(-y) + \frac{\ln(-y)}{y} \times (-y) = 1 \\ &\Rightarrow 2\ln(-y) - \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow -y = e^1 \\ &\Rightarrow \boxed{y = -e}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de x , on déduit ainsi que $x = \frac{\ln(-y)}{y} = \frac{\ln(-(-e))}{-e} = \boxed{-\frac{1}{e}}$.

Nous avons donc deux points critiques, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{e}, -e)$. Gardons en tête pour la suite des calculs, que $e^{x_0 y_0} = e^{1 \times 0} = 1$, et également $e^{x_1 y_1} = e^{-\frac{1}{e} \times (-e)} = e^1 = e$.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} (y^2 + ye^{xy}) \\ &= \boxed{y^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2xy + xe^{xy} - 1) \\ &= \boxed{2x + x^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + ye^{xy}) \\ &= \boxed{2y + e^{xy} + xye^{xy}}.\end{aligned}$$

On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & 2y + e^{xy} + xye^{xy} \\ 2y + e^{xy} + xye^{xy} & 2x + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 & 0 + 1 + 0 \\ 0 + 1 + 0 & 2 + 1^2 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 0 \times 3 - 1 \times 1 = -1 < 0$.
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle. De plus :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} (-e)^2 \times e & 2(-e) + e + e \\ 2(-e) + e + e & 2(-\frac{1}{e}) + (-\frac{1}{e})^2 \times e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_1, y_1)) = e^3 \times (-\frac{1}{e}) - 0 \times 0 = -e^2 < 0$.
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle.

3) On a :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 1 \times 0^2 - 0 + 1 \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \left(-\frac{1}{e}\right) \times (-e)^2 - (-e) + e \\ &= -e + e + e \\ &= \boxed{e}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9

$$f(x, y) = xy^2 - y + e^{xy}$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \boxed{y^2 + ye^{xy}};$$

et,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \boxed{2xy - 1 + xe^{xy}}.$$

On cherche donc les solutions de $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + ye^{xy} \\ 2xy - 1 + xe^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour cela travaillons d'abord sur la première équation :

$$\begin{aligned} y^2 + ye^{xy} &= 0 \Rightarrow y(y + e^{xy}) = 0 \\ &\Rightarrow e^{xy} = -y \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow xy = \ln(-y) \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln(-y)}{y} \quad \text{ou} \quad \boxed{y = 0}. \end{aligned}$$

A l'aide de la seconde équation on déduit que, si $y = 0$, alors :

$$\begin{aligned} 2x \times 0 + xe^{x \times 0} - 1 &= 0 \Rightarrow x \times 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1}, \end{aligned}$$

et si $x = \frac{\ln(-y)}{y}$, alors :

$$\begin{aligned} 2y \times \frac{\ln(-y)}{y} + \frac{\ln(-y)}{y} e^{\frac{\ln(-y)}{y} \times y} - 1 &= 0 \Rightarrow 2 \ln(-y) + \frac{\ln(-y)}{y} \times (-y) = 1 \\ &\Rightarrow 2 \ln(-y) - \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow -y = e^1 \\ &\Rightarrow \boxed{y = -e}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de x , on déduit ainsi que $x = \frac{\ln(-y)}{y} = \frac{\ln(-(-e))}{-e} = \boxed{-\frac{1}{e}}$.

Nous avons donc deux points critiques, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{e}, -e)$. Gardons en tête pour la suite des calculs, que $e^{x_0 y_0} = e^{1 \times 0} = 1$, et également $e^{x_1 y_1} = e^{-\frac{1}{e} \times (-e)} = e^1 = e$.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} (y^2 + y e^{xy}) \\ &= \boxed{y^2 e^{xy}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2xy + x e^{xy} - 1) \\ &= \boxed{2x + x^2 e^{xy}}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + y e^{xy}) \\ &= \boxed{2y + e^{xy} + x y e^{xy}}. \end{aligned}$$

On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & 2y + e^{xy} + x y e^{xy} \\ 2y + e^{xy} + x y e^{xy} & 2x + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 & 0 + 1 + 0 \\ 0 + 1 + 0 & 2 + 1^2 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 0 \times 3 - 1 \times 1 = -1 < 0$.
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle. De plus :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} (-e)^2 \times e & 2(-e) + e + e \\ 2(-e) + e + e & 2(-\frac{1}{e}) + (-\frac{1}{e})^2 \times e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_1, y_1)) = e^3 \times (-\frac{1}{e}) - 0 \times 0 = -e^2 < 0$.
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle.

3) On a :

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 1 \times 0^2 - 0 + 1 \\ &= \boxed{1}.\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}f(x_1, y_1) &= (-\frac{1}{e}) \times (-e)^2 - (-e) + e \\ &= -e + e + e \\ &= \boxed{e}.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$, telle que :

$$f(x, y) = x(\ln x)^2 + xy^2$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= (\ln x)^2 + x \times \frac{1}{x} \times 2 \ln x + y^2 \\ &= \boxed{(\ln x)^2 + 2 \ln x + y^2}\end{aligned}$$

et,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \boxed{2xy}$$

Cherchons maintenant les points tels que $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (\ln x)^2 + 2 \ln x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'équation $2xy = 0$ n'est vérifiée que si $x = 0$ ou $y = 0$. Or $x = 0$ est impossible car la fonction est définie sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. Cependant si $y = 0$, alors :

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 + 2 \ln x + 0^2 = 0 &\Rightarrow \ln x(\ln x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x + 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = e^0 \quad \text{ou} \quad \ln x = -2 \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = e^{-2}} \end{aligned}$$

On a donc deux points critiques $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_1, y_1) = (e^{-2}, 0)$.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{1}{x} \times 2 \ln x + \frac{2}{x} \\ &= \boxed{\frac{2 \ln x + 2}{x}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \boxed{2x},$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ &= \boxed{2y}. \end{aligned}$$

On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2 \ln x + 2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

et le déterminant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 2 > 0$. De plus, on a $Tr(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 2 + 2 = 4 > 0$, la fonction f admet donc un minimum local en

(x_0, y_0) .

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} \frac{2 \times (-2) + 2}{e^{-2}} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le determinant de cette matrice est donné par $\det(\nabla^2 f(x_1, y_1)) = -2e^2 \times 2e^{-2} - 0 \times 0 = -4e^0 = -4 < 0$. Ainsi, (x_1, y_1) est un point selle de la fonction.

3) Calculons la valeur de la fonction évaluée aux points critiques :

$$\begin{aligned}f(x_0, y_0) &= 1 \times (\ln 1)^2 + 1 \times 0^2 \\ &= \boxed{0},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= e^{-2} \times (\ln e^{-2})^2 + e^{-2} \times 0^2 \\ &= \boxed{4e^{-2}}.\end{aligned}$$

Corrigé exercice 12

Soit la fonction $f(x, y) = 2x^2 - 8xy^2 - \frac{16}{3}y^3 + 8y^2 - 8$

$$1) \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 8y^2 \\ -16xy - 16y^2 + 16y \end{pmatrix}$$

Les points critiques de f sont les points qui annulent $\nabla f(x, y)$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 8y^2 = 0 \\ -16xy - 16y^2 + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^2 \\ -32y^3 - 16y^2 + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y^2 \\ 16y(-2y^2 - y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y = 0,5 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Les points critique sont $A(0; 0)$, $B(0,5; 0,5)$ et $C(2; -1)$.

$$2) \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -16y \\ -16y & -16x - 32y + 16 \end{pmatrix}$$

$$3) \bullet \text{ En } A : \nabla^2 f(0; 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; 0) = 4 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0; 0) = 16 > 0$ et $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} = 4 \times 16 - 0 \times 0 = 64 > 0 \Leftrightarrow$ minimum relatif
en A et $f_{\min}(x, y) = f(A) = -8$.

- En B : $\nabla^2 f(0, 5; 0, 5) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 5; 0, 5) = 4 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 5; 0, 5) = -8 < 0$ sont de signes contraires \Rightarrow point-selle en B .

- En C : $\nabla^2 f(2; -1) = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2; -1) = 4 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2; -1) = 16 > 0$ et $\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 16 \end{vmatrix} = 4 \times 16 - 16 \times 16 = -192 < 0 \Leftrightarrow$
point-selle en C .

Corrigé TD 3 - Intégrales doubles

Corrigé exercice 13

Soit la fonction $f(x, y) = k$, définie sur $\mathcal{D} = [1, 9] \times [6, 10]$.

1) On a :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_6^{10} \left(\int_1^9 k dx \right) dy \\ &= \int_6^{10} [kx]_1^9 dy \\ &= \int_6^{10} 9k - k dy \\ &= 8 \int_6^{10} k dy \\ &= 8 [ky]_6^{10} \\ &= 8(10k - 6k) \\ &= 32k\end{aligned}$$

Donc pour avoir une intégrale égale à 1, il faut que $k = \frac{1}{32}$.

Corrigé exercice 14

Soit la fonction $f(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2}$, définie sur $\mathcal{D} = [10, 20] \times [-1, 1]$.

1) On a :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{10}^{20} \frac{e^{-y}}{x^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[-\frac{e^{-y}}{x} \right]_{10}^{20} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{-e^{-y}}{20} + \frac{e^{-y}}{10} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{e^{-y}}{20} dy \\ &= \frac{1}{20} [-e^{-y}]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{20} (-e^{-1} + e^1) \\ &= \boxed{\frac{1}{20} \left(e - \frac{1}{e} \right)}.\end{aligned}$$

1) Or, si on avait calculé :

$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \right]_{10}^{20} \\ &= \frac{-1}{20} + \frac{1}{10} \\ &= \boxed{\frac{1}{20}},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{-y} dy &= [-e^{-y}]_{-1}^1 \\ &= (-e^{-1} + e^1) \\ &= (e - \frac{1}{e}).\end{aligned}$$

On remarque que

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_{10}^{20} \frac{1}{x^2} dx \times \int_{-1}^1 e^{-y} dy,$$

ce qui est une conséquence du théorème de Fubini sachant que la fonction peut s'écrire comme un produit $f(x, y) = \frac{1}{x^2} \times e^{-y} = g(x) \times h(y)$.

Corrigé exercice 15

Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - 2xy$, définie sur $\mathcal{D} = [0, 2] \times [1, 4]$.

- 1) Un pavé de sommets $(0, 1)$, $(0, 4)$, $(2, 4)$ et $(2, 1)$.
- 2) La fonction f est une composition de fonctions usuelles, parmi lesquelles seule la fonction inverse $\frac{1}{y}$ est non définie pour la valeur $y = 0$. Or $0 \notin [1, 4]$, donc f est définie sur \mathcal{D} .
- 3)

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_1^4 \frac{x^2}{y} - 2xy dy \right) dx \\ &= \int_0^2 [x^2 \ln y - xy^2]_1^4 dx \\ &= \int_0^2 x^2 \ln 4 - 16x - (0 - x) dx \\ &= \int_0^2 x^2 \ln 4 - 15x dx \\ &= \left[\frac{\ln 4}{3} x^3 - \frac{15}{2} x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{\ln 4}{3} \times 2^3 - \frac{15}{2} \times 2^2 - 0 \\ &= \boxed{\frac{8 \ln 4}{3} - 30}.\end{aligned}$$

- 4) D'après le théorème de Fubini, nous aurions aussi pu calculer l'intégrale en commençant par intégrer sur x pour obtenir le même résultat. C'est à dire :

$$\int_1^4 \left(\int_0^2 \frac{x^2}{y} - 2xy \, dx \right) dy = \boxed{\frac{8 \ln 4}{3} - 30}.$$

Corrigé exercice 17

Soit la fonction $f(x, y) = \frac{4x}{y} - \frac{y}{x^2}$, définie sur $\mathcal{D} = [2, 5] \times [1, 3]$.

- 1) La fonction f est une composition de fonctions usuelles, parmi lesquelles seules les fonction inverses $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{x^2}$ sont non définies pour les valeur $y = 0$ et $x = 0$. Or $0 \notin [1, 3]$, et $0 \notin [2, 5]$, donc f est définie sur \mathcal{D} .
- 2)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy &= \int_2^5 \left(\int_1^3 \frac{4x}{y} - \frac{y}{x^2} \, dy \right) dx \\ &= \int_2^5 \left[4x \ln y - \frac{y^2}{2x^2} \right]_1^3 dx \\ &= \int_2^5 4x \ln 3 - \frac{9}{2x^2} - 4x \ln 1 + \frac{1}{2x^2} \, dx \\ &= \int_2^5 4x \ln 3 - \frac{4}{x^2} \, dx \\ &= \left[\frac{4 \ln 3}{2} x^2 + \frac{4}{x} \right]_2^5 \\ &= 2 \ln 3 \times 25 + \frac{4}{5} - 2 \ln 3 \times 4 + 2 \\ &= \boxed{42 \ln 3 + \frac{14}{5}}. \end{aligned}$$

Corrigé exercice 18

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ et } \frac{3,2}{x} \leq y \leq -x^2 + 4, 2x \right\}$ et les fonctions $f(x, y) = 1$ et $g(x, y) = 3x - 2y$.

- 1) Voir figure 1. La fonction bordant le domaine inférieurement est un morceau d'hyperbole, et supérieurement est un morceau de parabole.

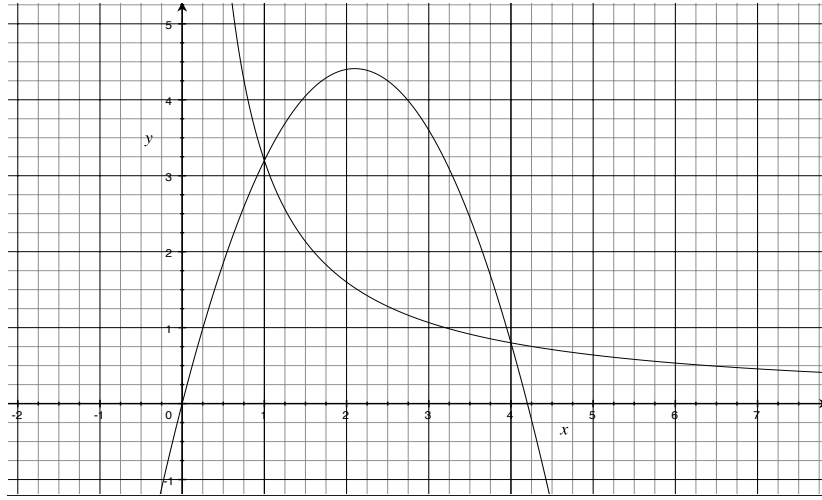


FIGURE 1 – Domaine Exercice 18

$$\begin{aligned}
 2) \quad V &= \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^4 \left[\int_{\frac{3,2}{x}}^{-x^2+4,2x} 1 \, dy \right] dx = \int_1^4 \left[y \right]_{y=\frac{3,2}{x}}^{y=-x^2+4,2x} dx \\
 &= \int_1^4 \left(-x^2 + 4,2x - \frac{3,2}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4,2\frac{x^2}{2} - 3,2\ln(x) \right]_1^4 \simeq \boxed{6,06}.
 \end{aligned}$$

Interprétation de V : c'est le volume du "cylindre" de base \mathcal{D} et de hauteur 1.

$$\begin{aligned}
 3) \quad W &= \iint_{\mathcal{D}} (3x-2y) \, dx \, dy = \int_1^4 \left[\int_{\frac{3,2}{x}}^{-x^2+4,2x} (3x-2y) \, dy \right] dx = \int_1^4 \left[3xy - y^2 \right]_{y=\frac{3,2}{x}}^{y=-x^2+4,2x} dx \\
 &= \int_1^4 \left[3x(-x^2+4,2x) - (-x^2+4,2x)^2 - \left(3x\left(\frac{3,2}{x}\right) - \left(\frac{3,2}{x}\right)^2 \right) \right] dx \\
 &= \int_1^4 \left[-3x^3 + 3 \times 4,2x^2 - (x^4 - 2 \times 4,2x^3 + 4,2^2x^2) - 3 \times 3,2 + \frac{3,2^2}{x^2} \right] dx \\
 &= \int_1^4 \left[-3x^3 + 12,6x^2 - x^4 + 8,4x^3 - 17,64x^2 - 9,6 + \frac{10,24}{x^2} \right] dx \\
 &= \int_1^4 \left[-x^4 + 5,4x^3 - 5,04x^2 - 9,6 + \frac{10,24}{x^2} \right] dx = \left[-\frac{x^5}{5} + 5,4\frac{x^4}{4} - 5,04\frac{x^3}{3} - 9,6x - \frac{10,24}{x} \right]_1^4 \\
 &= -7,68 - (-20,37) = \boxed{12,69}
 \end{aligned}$$

Corrigé exercice 18

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \right\}$ et la fonction $f(x, y) = -3x + y$.

- 1) Voir le domaine ci-dessous, compris entre les droites noires (contraintes sur l'axe x), et les courbes rouge et bleue (contraintes sur l'axe y).

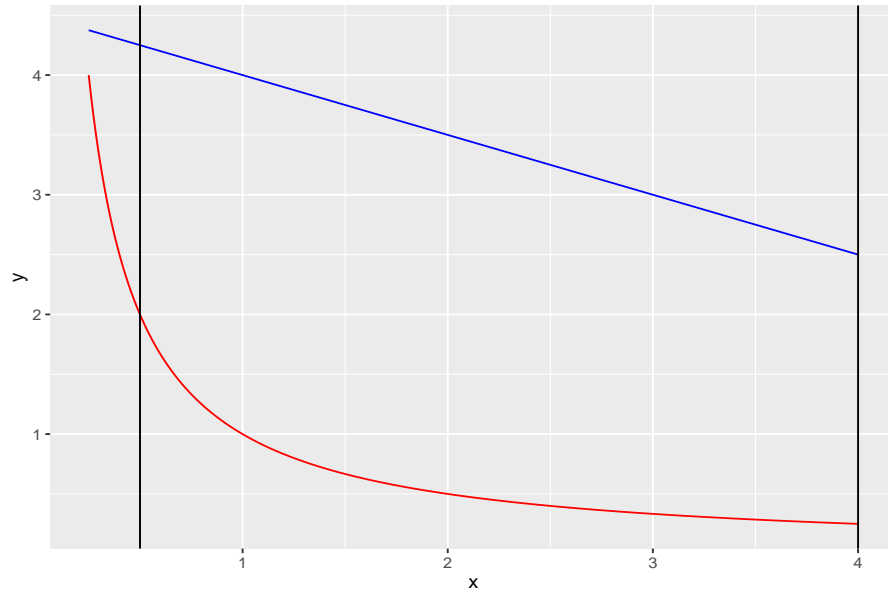


FIGURE 2 – Domaine Exercice 19

2)

$$\begin{aligned}
 J &= \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^4 \left[\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}} -3x + y \, dy \right] dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^4 \left[-3xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}}^{y=-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}} dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^4 -3x \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \right)^2 + 3x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} \, dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{3}{2}x^2 - \frac{27}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{81}{8} + \frac{9}{4}x + 3 + \frac{1}{2x^2} \, dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{13}{8}x^2 - \frac{63}{2}x + \frac{105}{8} + \frac{1}{2x^2} \, dx \\
 &= \left[\frac{13}{24}x^3 - \frac{63}{4}x^2 + \frac{105}{8}x - \frac{1}{2x} \right]_{\frac{1}{2}}^4 \\
 &= \boxed{-168,651}.
 \end{aligned}$$