Département S.T.I.D. - IUT de Paris **2020-2021**
Option Math - S3

Corrigé TD1 - Compléments sur l'étude des fonctions

Corrigé de l'exercice 2

1)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 11x - 3.$$

La fonction f est un polynôme, qui est donc de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle est en particulier continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 11,$$

et,

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72.$$

On a donc f'' qui est un polynôme du second degré. Pour étudier la convexité de f, il faut trouver les solutions de $f''(x) = 0$. Pour se faire, on calcule le déterminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 12 \times (-72)\\ &= 144 + 3456\\ &= 3600\\ &\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 60\end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, on a deux solutions, qui sont données par :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-12) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 12}\\ &= \frac{12 - 60}{24}\\ &= \boxed{-2}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-12) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 12}\\ &= \frac{12 + 60}{24}\\ &= \boxed{3}\end{aligned}$$

De plus, on a $f''(0) = 12 \times 0^2 - 12 \times 0 - 72 = -72$, ce qui nous donne le signe du polynôme de part et d'autre des solutions. On peut donc résumer ces informations dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f est		*convexe*		*concave*		*convexe*	

2) L'équation de la tangeante d'une fonction f en un point a s'écrit sous la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ainsi, on peut déduire les équations de tangeantes aux points d'inflexions comme étant :

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \\ &= 99(x + 2) - 137 \\ &= \boxed{99x + 61}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\ &= -151(x - 3) - 267 \\ &= \boxed{-151x + 186}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

$$f(x) = x \times 0.5^x = xe^{x \ln(0.5)}$$

• On sait que $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc par stabilité du produit, f est également $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. La fonction f est donc continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= \big(1 + x \ln(0.5)\big) e^{x \ln(0.5)}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5)^2 e^{x \ln(0.5)} + \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= \big(2 + x \ln(0.5)\big) \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \big(1 + x \ln(0.5)\big) e^{x \ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow \big(1 + x \ln(0.5)\big) = 0 \;\; \textbf{ou} \quad \underbrace{e^{x \ln(0.5)} = 0}_{\text{impossible, car } e^x > 0} \\ &\Rightarrow x \ln(0.5) = -1 \\ &\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{\ln(0.5)} \simeq 1.44} \end{aligned}$$

Or, on a également $f'(0) = 1$, et $f'(2) = (1 + 2\ln(0.5))0.5^2 \simeq -0.10$, ce qui veut dire que la dérivée change de signe de part et d'autre du point critique x_1. Ainsi, on a bien un extremum en x_1, plus spécifiquement, il s'agit d'un maximum car on passe d'une dérivée positive à négative (càd que la fonction est croissante puis décroissante).

• Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Rightarrow \big(2 + x\ln(0.5)\big)\ln(0.5)e^{x\ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{\ln(0.5)} \simeq 2.89} \end{aligned}$$

De plus, $f''(0) \simeq -0.70$, et $f''(3) \simeq 0.007$. La fonction est donc concave avant x_2 et convexe après.

• Pour finir, on peut calculer la valeur de notre maximum : $f(x_1) = -\frac{1}{\ln(0.5)}e^{-1} = -\frac{1}{\ln(0.5)e}$. Il est également facile de voir que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On a donc une asymptote horizontale d'équation y = 0.

Finalement, il est possible de résumer toutes ces informations dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{ln(0.5)}$		$\frac{-2}{ln(0.5)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1}{ln(0.5)e}$		$\searrow$		0
$f''(x)$			$-$		0	$+$	
f est			*concave*			*convexe*	

Corrigé de l'exercice 4

$$g(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc en tant que produit de fonctions, g est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$. On peut donc en particulier la dériver deux fois sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{4x} \times \frac{1}{x} + \ln(4x) \times \big(-\frac{1}{x^2}\big) \\ &= \boxed{\frac{1 - \ln(4x)}{x^2}}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{4}{4x} \times \frac{1}{x^2} + (1 - \ln(4x)) \times \big(-\frac{2x}{x^4}\big) \\ &= -\frac{1}{x^3} + (1 - \ln(4x)) \times \big(-\frac{2}{x^3}\big) \\ &= \boxed{\frac{2\ln(4x) - 3}{x^3}}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1-\ln(4x)}{x^2} = 0 \\
&\Rightarrow 1-\ln(4x) = 0 \\
&\Rightarrow \ln(4x) = 1 \\
&\Rightarrow 4x = e^1 \\
&\Rightarrow \boxed{x = \frac{e}{4} \simeq 0.68}
\end{aligned}$$

De plus, on a $g'(\frac{e}{8}) = \dfrac{1-\ln(4\times\frac{e}{8})}{(\frac{e}{8})^2} = \dfrac{1-\ln(e)+\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} = \dfrac{\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} > 0$ et $g'(\frac{e}{2}) = \dfrac{1-\ln(4\times\frac{e}{2})}{(\frac{e}{8})^2} = -\dfrac{\ln(2)}{(\frac{e}{2})^2} < 0$. La dérivée étant croissante puis décroissante, g admet un maximum en $x_0 = \dfrac{e}{4}$.

• Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$\begin{aligned}
g''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2\ln(4x)-3}{x^3} = 0 \\
&\Rightarrow 2\ln(4x)-3 = 0 \\
&\Rightarrow \ln(4x) = \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow 4x = e^{\frac{3}{2}} \\
&\Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4} \simeq 1.12}
\end{aligned}$$

Or, on voit que $g''(\frac{e}{4}) = \dfrac{2\ln(4\times\frac{e}{4})-3}{(\frac{e}{4})^3} = \dfrac{-1}{(\frac{e}{4})^3} < 0$ et $g''(\frac{e^2}{4}) = \dfrac{2\ln(4\times\frac{e^2}{4})-3}{(\frac{e^2}{4})^3} = \dfrac{1}{(\frac{e^2}{4})^3} > 0$.

• Pour finir, on peut calculer la valeur du maximum : $g(\frac{e}{4}) = \dfrac{\ln(4\times\frac{e}{4})}{\frac{e}{4}} = \dfrac{1}{\frac{e}{4}} = \dfrac{4}{e} \simeq 1.47$. Et voir que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée entre le logarithme et la fonction identitée. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

x	0		$\frac{e}{4}$		$\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$			0
$g''(x)$			$-$		0	$+$	
g est			*concave*			*convexe*	

Corrigé de l'exercice 5

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1) La fonction f est $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ donc on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \boxed{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}, \end{aligned}$$

et résoudre

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow \text{impossible car } e^{x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante et n'admet pas d'extrema. Or, en se rappelant que $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on voit que f admet deux asymptotes horizontales car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On peut maintenant dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

2) Si on note $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = (1+e^{-x})^2$, la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1+e^{-x})^2 - e^{-x} \times 2(-e^{-x})(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1^2 + e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x} - 2e^{-2x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 - e^{-2x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \boxed{\frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^4}}. \end{aligned}$$

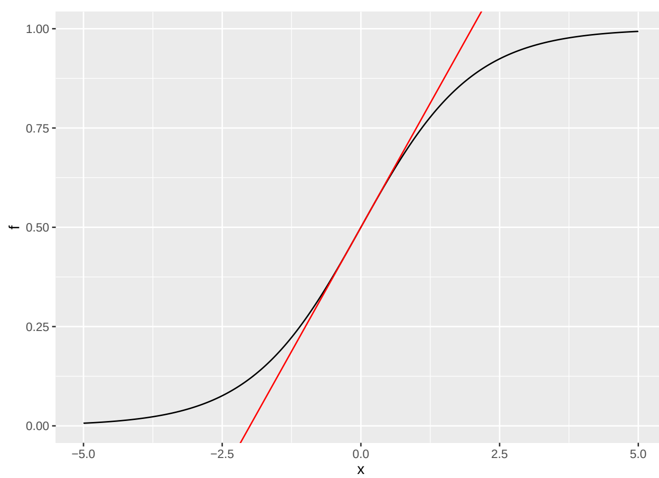
Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^4} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} - e^{-x} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} = e^{-x} \\
&\Rightarrow \boxed{x = 0},
\end{aligned}
$$

car la fonction exponentielle est bijective. De plus, $f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$, donc $x_0 = (0, \frac{1}{2})$. La tangente en ce point a pour équation :

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= \frac{e^0}{(1+e^0)^2}(x - 0) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

3) Ci-dessous, le graph de la fonction f (en noir) et la tangente en x_0 (en rouge) :



4) On a vu que f est bornée par 1 donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

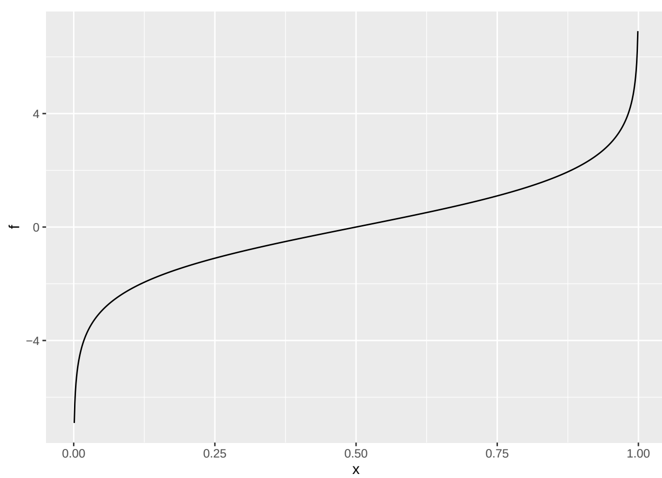
5)

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0.7 &\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} = 0.8 \\
&\Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{5}{4} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow -x = \ln(\frac{1}{4}) \\
&\Rightarrow \boxed{x = \ln(4)}.
\end{aligned}
$$

6) On a vu que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. De plus, f est continue et $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, c'est à dire f est strictement monotone. Ainsi, f est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$. On pose $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{1+e^{-x}} &\Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{y} - 1 \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1-y}{y} \\
&\Rightarrow -x = \ln(\frac{1-y}{y}) \\
&\Rightarrow x = \ln(\frac{y}{1-y}) \\
&\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \ln(\frac{y}{1-y})}.
\end{aligned}
$$

f^{-1} est la fonction réciproque de f, définie sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont le graph est donné ci-dessous :



Corrigé TD 2 - Extrema des fonctions à deux variables

Corrigé de l'exercice 7

$$f(x,y) = xy$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f, on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy)\\ &= y\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy)\\ &= x\end{aligned}$$

Ainsi le gradient s'écrit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, et il s'annule en $(x_0, y_0) = (0,0)$, qui est l'unique point critique.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

et,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(y) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

On constate bien que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, ce qui est attendu d'après le théorème de Schwarz, puisque la fonction f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc en particulier ses dérivées partielles secondes sont continues. On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

On a donc un cas très particulier où la matrice Hessienne est identique, quelque soient les points (x,y) en laquelle elle est évaluée.

3) Ainsi on a en particulier :

$$
\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

et le determinant de cette matrice est donné par :

$$
\begin{aligned}
\det\left(\nabla^2 f(x_0, y_0)\right) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 \times 0 - 1 \times 1 \\
&= -1 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Et d'après le cours, on sait qu'un déterminant négatif indique que (x_0, y_0) est un **point selle**.

Corrigé de l'exercice 6

$f(x,y) = \dfrac{1}{120}\left(3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 3y^4 - 4y^3 - 72y^2\right)$

1)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(x^3-2x^2-5x+6\right)=\dfrac{1}{10}(x+2)(x-1)(x-3)\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(y^3-y^2-12y\right)=\dfrac{1}{10}y(y+3)(y-4)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\nabla f(x,y)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}(x+2)(x-1)(x-3)\\ y(y+3)(y-4)\end{pmatrix}$$

2) Définition des points critiques : voir ci-dessus.

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(x+2)(x-1)(x-3)=0\\ y(y+3)(y-4)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3\\ y=0 \text{ ou } y=-3 \text{ ou } y=4\end{array}\right.$$

Il y a neuf points critiques (x et y ne dépendent pas l'un de l'autre) :

$A(-2;0), B(-2;-3), C(-2;4), D(1;0), E(1;-3), F(1;4), G(3;0), H(3;-3), I(3;4)$

3)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(3x^2-4x-5\right)\\[2ex]\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{1}{10}\left(3y^2-2y-12\right)\\[2ex]\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\nabla^2 f(x,y)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}\left(3x^2-4x-5\right) & 0\\ 0 & \left(3y^2-2y-12\right)\end{pmatrix}$$

4)

$\boxed{A(-2;0)}$ $\quad\nabla^2 f(-2;0)=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & -1,2\end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(-2;0)\right)=\begin{vmatrix}1,5 & 0\\ 0 & -1,2\end{vmatrix}=-1,8<0$ $\qquad\Rightarrow A$ est un point-selle.

$\boxed{B(-2;-3)}$ $\quad\nabla^2 f(-2;-3)=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 2,1\end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(-2;-3)\right)=\begin{vmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 2,1\end{vmatrix}=3,15>0$ $\qquad\Rightarrow B$ est un extremum.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2;-3)=1,5>0$ $\qquad\Rightarrow B$ est un minimum

et $f(-2;-3)=-\dfrac{449}{120}\simeq-3,74$

$\boxed{C(-2;4)}$ $\quad\nabla^2 f(-2;4)=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 2,8\end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(-2;4)\right)=\begin{vmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 2,8\end{vmatrix}=4,2>0$ $\qquad\Rightarrow C$ est un extremum.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2;4)=1,5>0$ $\qquad\Rightarrow C$ est un minimum

et $f(-2;4)=-6,6$

$\boxed{D(1;0)}$ $\nabla^2 f(1;0) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(1;0)\right) = \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = 0,72 > 0$ $\Rightarrow D$ est un extremum.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;0) = -0,6 < 0$ $\Rightarrow D$ est un maximum et $f(1;0) = -\dfrac{37}{120} \simeq 0,31$

$\boxed{E(1;-3)}$ $\nabla^2 f(1;-3) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(1;-3)\right) = \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = -1,26 < 0$ $\Rightarrow E$ est un point-selle.

$\boxed{F(1;4)}$ $\nabla^2 f(1;4) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(1;4)\right) = \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = -1,68 < 0$ $\Rightarrow F$ est un point-selle.

$\boxed{G(3;0)}$ $\nabla^2 f(3;0) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(3;0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = -1,2 < 0$ $\Rightarrow G$ est un point-selle.

$\boxed{H(3;-3)}$ $\nabla^2 f(3;-3) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(3;-3)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = 2,1 > 0$ $\Rightarrow H$ est un extremum.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;-3) = 1 > 0$ $\Rightarrow H$ est un minimum et $f(3;-3) = -2,7$

$\boxed{I(3;4)}$ $\nabla^2 f(3;4) = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix}$

$\det\left(\nabla^2 f(3;4)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = 2,8 > 0$ $\Rightarrow I$ est un extremum.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;4) = 1 > 0$ $\Rightarrow I$ est un minimum et $f(3;4) = -\dfrac{667}{120} \simeq -5,56$

5) a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ car f est définie pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla f(x,y) \in \mathbb{R}^2$

c) Pour $(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ \nabla^2 f(x,y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

d) Le théorème de Schwarz dit que si f admet des dérivées secondes continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Corrigé de l'exercice 9

$$f(x,y) = xy^2 - y + e^{xy}$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f, on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \boxed{y^2 + ye^{xy}};$$

et,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \boxed{2xy - 1 + xe^{xy}}.$$

On cherche donc les solutions de $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + ye^{xy} \\ 2xy - 1 + xe^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2xy - 1 + 0 \end{pmatrix}$. Pour cela travaillons d'abord sur la première équation :

$$\begin{aligned} y^2 + ye^{xy} = 0 &\Rightarrow y(y + e^{xy}) = 0 \\ &\Rightarrow e^{xy} = -y \quad ou \quad y = 0 \\ &\Rightarrow xy = \ln(-y) \quad ou \quad y = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln(-y)}{y} \quad ou \quad \boxed{y = 0}. \end{aligned}$$

A l'aide de la seconde équation on déduit que, si $y = 0$, alors :

$$\begin{aligned} 2x \times 0 + xe^{x\times 0} - 1 = 0 &\Rightarrow x \times 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1}, \end{aligned}$$

et si $x = \frac{\ln(-y)}{y}$, alors :

$$\begin{aligned} 2y \times \frac{\ln(-y)}{y} + \frac{\ln(-y)}{y} e^{\frac{\ln(-y)}{y}\times y} - 1 = 0 &\Rightarrow 2\ln(-y) + \frac{\ln(-y)}{y} \times (-y) = 1 \\ &\Rightarrow 2\ln(-y) - \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow -y = e^1 \\ &\Rightarrow \boxed{y = -e}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de x, on déduit ainsi que $x = \frac{\ln(-y)}{y} = \frac{\ln(-(-e))}{-e} = \boxed{-\frac{1}{e}}$. Nous avons donc deux points critiques, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{e}, -e)$. Gardons en tête pour la suite des calculs, que $e^{x_0 y_0} = e^{1\times 0} = 1$, et également $e^{x_1 y_1} = e^{-\frac{1}{e}\times(-e)} = e^1 = e$.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + ye^{xy}\right)\\ &= \boxed{y^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + xe^{xy} - 1\right)\\ &= \boxed{2x + x^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + ye^{xy}\right)\\ &= \boxed{2y + e^{xy} + xye^{xy}}.\end{aligned}$$

On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & 2y + e^{xy} + xye^{xy} \\ 2y + e^{xy} + xye^{xy} & 2x + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 & 0+1+0 \\ 0+1+0 & 2+1^2 \times 1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le determinant de cette matrice est donné par $\det\left(\nabla^2 f(x_0, y_0)\right) = 0 \times 3 - 1 \times 1 = -1 < 0$. D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle. De plus :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} (-e)^2 \times e & 2(-e) + e + e \\ 2(-e) + e + e & 2(-\frac{1}{e}) + (-\frac{1}{e})^2 \times e \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le determinant de cette matrice est donné par $\det\left(\nabla^2 f(x_1, y_1)\right) = e^3 \times (-\frac{1}{e}) - 0 \times 0 = -e^2 < 0$. D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle.

3) On a :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 1 \times 0^2 - 0 + 1 \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= (-\frac{1}{e}) \times (-e)^2 - (-e) + e \\ &= -e + e + e \\ &= \boxed{e}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 11

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

1) Pour donner l'expression du gradient de f, on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \boxed{3x^2 - 3y^2}$$

et,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \boxed{-6xy}$$

Ainsi le gradient s'écrit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$, et il s'annule en $(x_0, y_0) = (0, 0)$, qui est l'unique point critique.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(3x^2 - 3y^2\right) \\ &= \boxed{6x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-6xy\right) \\ &= \boxed{-6x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-6xy)\\ &= \boxed{-6y},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 3y^2\right)\\ &= \boxed{-6y}.\end{aligned}$$

On constate bien que $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, ce qui est attendu d'après le théorème de Schwarz, puisque la fonction f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc en particulier ses dérivées partielles secondes sont continues. On peut donc en déduire la matrice Hessienne de f :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

3) Ainsi on a en particulier :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et le determinant de cette matrice est donné par det $\left(\nabla^2 f(x_0, y_0)\right) = 0 \times 0 - 0 \times 0 = 0$
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point indéterminé. Ni un extremum, ni un point selle.

Corrigé TD 3 - Intégrales doubles