TD 1 - Compléments sur l'étude des fonctions

Exercice 1

Pour les fonctions **(1)**, **(2)**, **(4)** et **(5)**, calculer les dérivées première et seconde, et tracer la courbe sur l'intervalle I. Pour les fonctions **(3)** et **(6)**, calculer les dérivées première et seconde en $a = 0$, et tracer la courbe sur l'intervalle $[-1; 1]$.

(1) $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $I = [1; 2]$

(2) $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $I = [-2; -1]$

(3) $f(x) = x^2$ et $a = 0$

(4) $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $I = [-2; -1]$

(5) $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $I = [1; 2]$

(6) $f(x) = 4 - x^2$ et $a = 0$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 11x - 3$.

1) Etudier la convexité de la fonction f.

2) Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en chacun de ses éventuels points d'inflexion.

Exercice 3

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f(x) = x \times 0,5^x$ (extrema, points d'inflexion, asymptotes).

Exercice 4

Etudier et représenter graphiquement la fonction $g(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x}$ (extrema, points d'inflexion, asymptotes).

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$. Une fonction de cette forme est appelée fonction logistique.

1) Etude et tableau de variation de cette fonction. Limites à l'infini, asymptotes.

2) Montrer que cette fonction a un point d'inflexion x_0, et calculer ses coordonnées. Calculer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe au point d'inflexion x_0.

3) Faire la représentation graphique de cette fonction. Tracer (T_0).

4) Combien de solutions l'équation $f(x) = 2$ a t-elle ? Eventuellement, résoudre cette équation.

5) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0.8$ a t-elle ? Eventuellement, résoudre cette équation.

6) Déterminer $f(\mathcal{D}_f)$. Justifier le fait que la fonction f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ dans $f(\mathcal{D}_f)$.
On pose $y = f(x)$. Exprimer x en fonction de y et déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f, ainsi que ses ensembles de départ et d'arrivée.

TD 2 - Extrema des fonctions à deux variables

Exercice 6

Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{120}\left(3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 3y^4 - 4y^3 - 72y^2\right)$.

1) Calculer les dérivées partielles de f, puis donner $\nabla f(x,y)$ le gradient de f.
Aide : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x+2)(x-1)(x-3)$.

2) Donner la définition des points critiques de f, puis les calculer.

3) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis donner $\nabla^2 f(x,y)$ la matrice hessienne de f.

4) Quelle est la nature de chaque point critique trouvé dans la question **2)** ? Justifier soigneusement.

5) **a)** Donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la fonction f. Quel est son domaine de définition ?

b) A quel ensemble $\nabla f(x,y)$ appartient-il ?

c) A quel ensemble $\nabla^2 f(x,y)$ appartient-elle ?

d) Que dit le théorème de Schwarz ?

Exercice 7

Équation d'une chips Pringles : paraboloïde hyperbolique, profilée ainsi pour éviter qu'elles s'envolent dans l'usine et minimiser la casse lors du transport.
Soit la fonction $f(x,y) = xy$.

1) Calculer $\nabla f(x,y)$ le gradient de f, donner la définition des points critiques de f. Montrer que cette fonction n'a qu'un point critique, le calculer.

2) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis donner $\nabla^2 f(x,y)$ la matrice hessienne de f.

3) Quelle est la nature du point critique trouvé dans la question **1)** ? Justifier soigneusement.

Exercice 8

Soit la fonction $f(x,y) = 2x^3y - 3x^2 - y^2$

1) Mêmes questions **1), 2), 3)** et **4)** que dans l'exercice **6**.

2) Calculer la valeur de la fonction f aux points critiques.

Exercice 9

Soit la fonction $f(x,y) = xy^2 - y + e^{xy}$

1) Déterminer les points critiques de cette fonction.
Rédiger : définir les points critiques avant de les calculer.
La difficulté de cet exercice réside dans la résolution du système, qui n'est pas linéaire. Cette résolution doit être traitée très rigoureusement, les calculs algébriques, avec soin.
Les solutions s'expriment simplement et ne nécessitent pas la calculatrice.

2) Déterminer la nature de chacun de ces points critiques.

3) Calculer la valeur de la fonction en chacun de ces points critiques.

Exercice 10

Soit la fonction $f(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2 = x\ln^2 x + xy^2$.

1) Déterminer les points critiques de cette fonction.
Rédiger : définir les points critiques avant de les calculer.
La difficulté de cet exercice réside dans la résolution du système, qui n'est pas linéaire. Cette résolution doit être traitée très rigoureusement, les calculs algébriques, avec soin.
Les solutions s'expriment simplement et ne nécessitent pas la calculatrice.

2) Déterminer la nature de chacun de ces points critiques.

3) Calculer la valeur de la fonction en chacun de ces points critiques.

Exercice 11

Soit la fonction $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. On appelle sa représentation graphique la "selle de singe". Elle présente un point dit dégénéré qui n'est ni un extremum, ni un point-selle.

1) Montrer que cette fonction n'a qu'un point critique, le calculer.

2) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis donner $\nabla^2 f(x,y)$ la matrice hessienne de f.

3) Quelle est la nature du point critique trouvé dans la question **1)** ? Justifier soigneusement.

Exercice 12

Soit la fonction $f(x,y) = 2x^2 - 8xy^2 - \dfrac{16}{3}y^3 + 8y^2 - 8$

1) Calculer $\nabla f(x,y)$ le gradient de f. Donner les points critiques de f.

2) Calculer $\nabla^2 f(x,y)$ la matrice hessienne de f.

3) Quelle est la nature de chaque point critique trouvé dans la question **1)** ?

4) Calculer la valeur de la fonction en chacun de ces points critiques.

TD 3 - Intégrales doubles

Exercice 13

Soit $\mathcal{D} = [1;9] \times [6;10]$ et $f(x,y) = k$.

1) A quoi k doit-il être égal pour que $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 1$?

Exercice 14

Soit $\mathcal{D} = [10;20] \times [-1;1]$ et $f(x,y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2}$.

1) Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

2) Calculer $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-y}\ \mathrm{d}y$. Que remarque-t-on ?

Exercice 15

Soit le domaine $\mathcal{D} = [0;2] \times [1;4]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} - 2xy$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathcal{D}$.

3) Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

4) Que dit le théorème de Fubini ?

Exercice 16

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant -\dfrac{3}{2}\ x + 10\right\}$ et les fonctions $f(x,y) = 2$ et $g(x,y) = 2x - y + 3$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) Calculer $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

3) Calculer $J = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 17

Soit le domaine $\mathcal{D} = [2;5] \times [1;3]$ et la fonction $f(x,y) = \dfrac{4x}{y} - \dfrac{y}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathcal{D}$.

2) Calculer $I = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 18

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ et } \dfrac{3,2}{x} \leqslant y \leqslant -x^2 + 4,2x\right\}$ et les fonctions $f(x,y) = 1$ et $g(x,y) = 3x - 2y$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) Calculer $V = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$. Donner une interprétation de V.

3) Calculer $W = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 19

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4 \text{ et } \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}\right\}$
et la fonction $f(x,y) = -3x + y$.

Calculer $J = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 20

Soit le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, la fonction $f(x,y) = 1$ et $C = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}$.

2) Donner une interprétation géométrique de C.

2) On veut calculer $C = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ par le changement de variable des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

3) Réécrire $\mathcal{D}$ à l'aide des coordonnées polaires. Qu'est ce que $\mathcal{D}$?

3) Donner une interprétation de C.

4) Calcul de C : faire le changement d'élément différentiel, préciser les bornes entre lesquelles r et θ varient, calculer l'intégrale C.

Exercice 21

On veut calculer $K = \displaystyle\iint_{D(O;1)} \left(3\left(x^2 + y^2\right) - 1\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ sur le disque de centre O et de rayon 1.

1) Exprimer les coordonnées cartésiennes $(x;y)$ en fonction des coordonnées polaires $(r;\theta)$.

2) Donner la définition de $D(O;1)$ à l'aide des coordonnées cartésiennes, puis à l'aide des coordonnées polaires.

3) Calculer K après changement de variables cartésiennes en polaires. Détailler le changement d'élément differentiel.