

## Corrigé TD1 - Compléments sur l'étude des fonctions

### Corrigé de l'exercice 2

1)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 11x - 3.$$

La fonction  $f$  est un polynôme, qui est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Elle est en particulier continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 11,$$

et,

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72.$$

On a donc  $f''$  qui est un polynôme du second degré. Pour étudier la convexité de  $f$ , il faut trouver les solutions de  $f''(x) = 0$ . Pour se faire, on calcule le déterminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 12 \times (-72) \\ &= 144 + 3456 \\ &= 3600 \\ &\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 60\end{aligned}$$

Puisque  $\Delta > 0$ , on a deux solutions, qui sont données par :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-12) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 - 60}{24} \\ &= \boxed{-2}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-12) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 + 60}{24} \\ &= \boxed{3}\end{aligned}$$

De plus, on a  $f''(0) = 12 \times 0^2 - 12 \times 0 - 72 = -72$ , ce qui nous donne le signe du polynôme de part et d'autre des solutions. On peut donc résumer ces informations dans le tableau ci-dessous :

| $x$      | $-\infty$      | $-2$ | $3$            | $+\infty$ |
|----------|----------------|------|----------------|-----------|
| $f''(x)$ | +              | 0    | 0              | +         |
| $f$ est  | <i>convexe</i> |      | <i>concave</i> |           |

2) L'équation de la tangente d'une fonction  $f$  en un point  $a$  s'écrit sous la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ainsi, on peut déduire les équations de tangentes aux points d'inflexions comme étant :

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) \\ &= 99(x + 2) - 137 \\ &= \boxed{99x + 61}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\ &= -151(x - 3) - 267 \\ &= \boxed{-151x + 186}. \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 3

$$f(x) = x \times 0.5^x = xe^{x \ln(0.5)}$$

• On sait que  $x \mapsto x$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et  $x \mapsto e^x$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , donc par stabilité du produit,  $f$  est également  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . La fonction  $f$  est donc continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= (1 + x \ln(0.5)) e^{x \ln(0.5)}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} + x \ln(0.5)^2 e^{x \ln(0.5)} + \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} \\ &= (2 + x \ln(0.5)) \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow (1 + x \ln(0.5)) e^{x \ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow (1 + x \ln(0.5)) = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^{x \ln(0.5)} = 0}_{\text{impossible, car } e^x > 0} \\ &\Rightarrow x \ln(0.5) = -1 \\ &\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{\ln(0.5)} \simeq 1.44} \end{aligned}$$

Or, on a également  $f'(0) = 1$ , et  $f'(2) = (1 + 2 \ln(0.5)) 0.5^2 \simeq -0.10$ , ce qui veut dire que la dérivée change de signe de part et d'autre du point critique  $x_1$ . Ainsi, on a bien un extremum en  $x_1$ , plus

spécifiquement, il s'agit d'un maximum car on passe d'une dérivée positive à négative (càd que la fonction est croissante puis décroissante).

- Pour étudier la convexité de  $f$ , on résout :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2 + x \ln(0.5)) \ln(0.5) e^{x \ln(0.5)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{\ln(0.5)} \simeq 2.89}$$

De plus,  $f''(0) \simeq -0.70$ , et  $f''(3) \simeq 0.007$ . La fonction est donc concave avant  $x_2$  et convexe après.

- Pour finir, on peut calculer la valeur de notre maximum :  $f(x_1) = -\frac{1}{\ln(0.5)} e^{-1} = -\frac{1}{\ln(0.5)e}$ . Il est également facile de voir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On a donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

Finalement, il est possible de résumer toutes ces informations dans le tableau ci-dessous :

| $x$      | $-\infty$      | $-\frac{1}{\ln(0.5)}$  | $-\frac{2}{\ln(0.5)}$ | $+\infty$      |
|----------|----------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| $f'(x)$  | +              | 0                      | −                     |                |
| $f(x)$   | $-\infty$      | $\frac{-1}{\ln(0.5)e}$ |                       | 0              |
| $f''(x)$ |                | −                      | 0                     | +              |
| $f$ est  | <i>concave</i> |                        |                       | <i>convexe</i> |

#### Corrigé de l'exercice 4

$$g(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$$

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ , donc en tant que produit de fonctions,  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$ . On peut donc en particulier la dériver deux fois sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_*^+$  :

$$g'(x) = \frac{4}{4x} \times \frac{1}{x} + \ln(4x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1 - \ln(4x)}{x^2}},$$

et,

$$g''(x) = -\frac{4}{4x} \times \frac{1}{x^2} + (1 - \ln(4x)) \times \left(-\frac{2x}{x^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^3} + (1 - \ln(4x)) \times \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2 \ln(4x) - 3}{x^3}}.$$

- Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned}
 g'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1 - \ln(4x)}{x^2} = 0 \\
 &\Rightarrow 1 - \ln(4x) = 0 \\
 &\Rightarrow \ln(4x) = 1 \\
 &\Rightarrow 4x = e^1 \\
 &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e}{4} \simeq 0.68}
 \end{aligned}$$

De plus, on a  $g'(\frac{e}{8}) = \frac{1 - \ln(4 \times \frac{e}{8})}{(\frac{e}{8})^2} = \frac{1 - \ln(e) + \ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} = \frac{\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} > 0$  et  $g'(\frac{e}{2}) = \frac{1 - \ln(4 \times \frac{e}{2})}{(\frac{e}{2})^2} = -\frac{\ln(2)}{(\frac{e}{2})^2} < 0$ . La dérivée étant croissante puis décroissante,  $g$  admet un maximum en  $x_0 = \frac{e}{4}$ .

- Pour étudier la convexité de  $f$ , on résout :

$$\begin{aligned}
 g''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2\ln(4x) - 3}{x^3} = 0 \\
 &\Rightarrow 2\ln(4x) - 3 = 0 \\
 &\Rightarrow \ln(4x) = \frac{3}{2} \\
 &\Rightarrow 4x = e^{\frac{3}{2}} \\
 &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4} \simeq 1.12}
 \end{aligned}$$

Or, on voit que  $g''(\frac{e}{4}) = \frac{2\ln(4 \times \frac{e}{4}) - 3}{(\frac{e}{4})^3} = \frac{-1}{(\frac{e}{4})^3} < 0$  et  $g''(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}) = \frac{2\ln(4 \times \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}) - 3}{(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4})^3} = \frac{1}{(\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4})^3} > 0$ .

- Pour finir, on peut calculer la valeur du maximum :  $g(\frac{e}{4}) = \frac{\ln(4 \times \frac{e}{4})}{\frac{e}{4}} = \frac{1}{\frac{e}{4}} = \frac{4}{e} \simeq 1.47$ . Et voir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  par croissance comparée entre le logarithme et la fonction identité. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| $x$      | 0         | $\frac{e}{4}$ | $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|---------------|-----------------------------|-----------|
| $g'(x)$  | +         | 0             | -                           |           |
| $g(x)$   | $-\infty$ | $\frac{4}{e}$ |                             | 0         |
| $g''(x)$ |           | -             | 0                           | +         |
| $g$ est  |           | concave       |                             | convexe   |

## Corrigé de l'exercice 5

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$


1) La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  donc on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \boxed{\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}}, \end{aligned}$$

et résoudre

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow \text{impossible car } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante et n'admet pas d'extrema. Or, en se rappelant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , on voit que  $f$  admet deux asymptotes horizontales car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . On peut maintenant dresser le tableau de variation :

|         |  |
|---------|--|
| $x$     | $-\infty$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>  |
| $f'(x)$ | +  |
| $f(x)$  | <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> <span>0</span> <span style="flex-grow: 1; text-align: center;">  </span> <span>1</span> </div> |

2) Si on note  $u(x) = e^{-x}$  et  $v(x) = (1 + e^{-x})^2$ , la dérivée seconde de  $f$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 + e^{-x})^2 - e^{-x} \times 2(-e^{-x})(1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1^2 + e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x} - 2e^{-2x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-x})^4} \\ &= \boxed{\frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^4}}. \end{aligned}$$

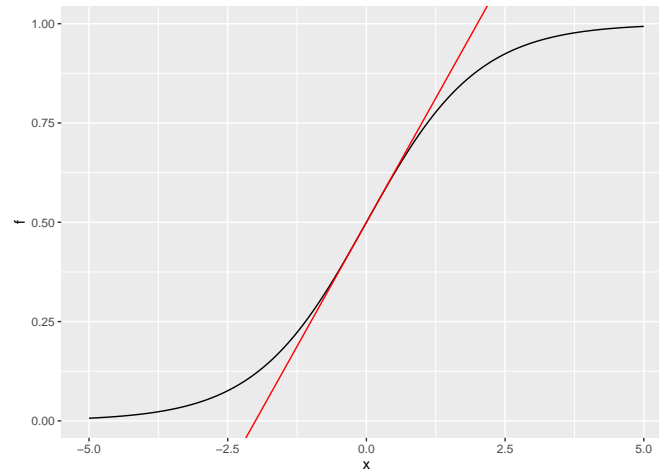
Pour étudier la convexité de  $f$ , on résout :

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^4} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} - e^{-x} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} = e^{-x} \\
&\Rightarrow \boxed{x = 0},
\end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est bijective. De plus,  $f(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$ , donc  $x_0 = (0, \frac{1}{2})$ . La tangente en ce point a pour équation :

$$\begin{aligned}
y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= \frac{e^0}{(1 + e^0)^2}(x - 0) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**3)** Ci-dessous, le graph de la fonction  $f$  (en noir) et la tangente en  $x_0$  (en rouge) :



**4)** On a vu que  $f$  est bornée par 1 donc  $f(x) = 2$  n'a pas de solution.

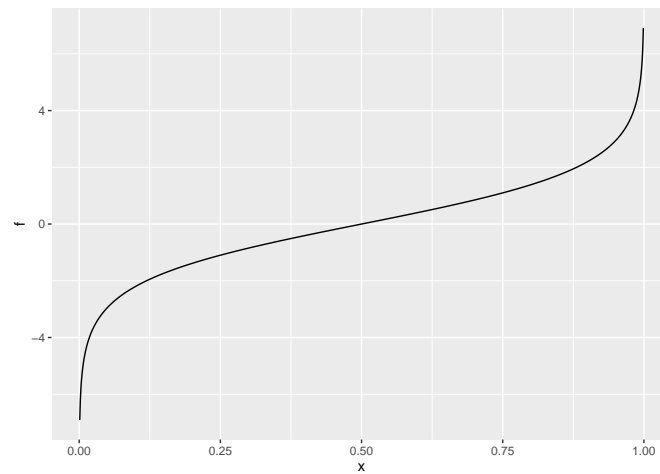
**5)**

$$\begin{aligned}
f(x) = 0.7 &\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0.8 \\
&\Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{5}{4} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\
&\Rightarrow \boxed{x = \ln(4)}.
\end{aligned}$$

**6)** On a vu que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . De plus,  $f$  est continue et  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , c'est à dire  $f$  est strictement monotone. Ainsi,  $f$  est une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $]0, 1[$ . On pose  $y = f(x)$  :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{y} - 1 \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1 - y}{y} \\
&\Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) \\
&\Rightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right) \\
&\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right)}.
\end{aligned}$$

$f^{-1}$  est la fonction réciproque de  $f$ , définie sur  $]0, 1[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dont le graph est donné ci-dessous :



Corrigé TD 2 - Extrema des fonctions à deux variables

Corrigé de l'exercice 7

$$f(x, y) = xy$$

- 1) Pour donner l'expression du gradient de  $f$ , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= y\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= x\end{aligned}$$

Ainsi le gradient s'écrit  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ , et il s'annule en  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , qui est l'unique point critique.

- 2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de  $f$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x) \\ &= 1,\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y) \\ &= 1.\end{aligned}$$

On constate bien que  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ , ce qui est attendu d'après le théorème de Schwarz, puisque la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  et donc en particulier ses dérivées partielles secondes sont continues. On peut donc en déduire la matrice Hessienne de  $f$  :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a donc un cas très particulier où la matrice Hessienne est identique, quelque soient les points  $(x, y)$  en laquelle elle est évaluée.

3) Ainsi on a en particulier :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le déterminant de cette matrice est donné par :

$$\begin{aligned}\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \times 0 - 1 \times 1 \\ &= -1 \leq 0.\end{aligned}$$

Et d'après le cours, on sait qu'un déterminant négatif indique que  $(x_0, y_0)$  est un **point selle**.

### Corrigé de l'exercice 6

$$f(x, y) = \frac{1}{120} (3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 3y^4 - 4y^3 - 72y^2)$$

$$1) \left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{10} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = \frac{1}{10} (x+2)(x-1)(x-3) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{10} (y^3 - y^2 - 12y) = \frac{1}{10} y(y+3)(y-4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} (x+2)(x-1)(x-3) \\ y(y+3)(y-4) \end{pmatrix}$$

2) Définition des points critiques : voir ci-dessus.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \\ y(y+3)(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ y = 0 \text{ ou } y = -3 \text{ ou } y = 4 \end{cases}$$

Il y a neuf points critiques ( $x$  et  $y$  ne dépendent pas l'un de l'autre) :

$$A(-2; 0), B(-2; -3), C(-2; 4), D(1; 0), E(1; -3), F(1; 4), G(3; 0), H(3; -3), I(3; 4)$$

$$3) \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{10} (3x^2 - 4x - 5) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{10} (3y^2 - 2y - 12) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 f(x, y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3x^2 - 4x - 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2y - 12 \end{pmatrix}$$

4)

$$\boxed{A(-2; 0)} \quad \nabla^2 f(-2; 0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; 0)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = -1,8 < 0 \quad \Rightarrow A \text{ est un point-selle.}$$

$$\boxed{B(-2; -3)} \quad \nabla^2 f(-2; -3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; -3)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = 3,15 > 0 \quad \Rightarrow B \text{ est un extremum.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2; -3) = 1,5 > 0 \quad \Rightarrow B \text{ est un minimum}$$

$$\text{et } f(-2; -3) = -\frac{449}{120} \simeq -3,74$$

$$\boxed{C(-2; 4)} \quad \nabla^2 f(-2; 4) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(-2; 4)) = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = 4,2 > 0 \quad \Rightarrow C \text{ est un extremum.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2; 4) = 1,5 > 0 \quad \Rightarrow C \text{ est un minimum}$$

$$\text{et } f(-2; 4) = -6,6$$

$$\begin{aligned}
\boxed{D(1;0)} \quad \nabla^2 f(1;0) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;0)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = 0,72 > 0 \quad \Rightarrow D \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;0) &= -0,6 < 0 \quad \Rightarrow D \text{ est un maximum} \\
\text{et } f(1;0) &= -\frac{37}{120} \simeq 0,31
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{E(1;-3)} \quad \nabla^2 f(1;-3) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;-3)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = -1,26 < 0 \quad \Rightarrow E \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{F(1;4)} \quad \nabla^2 f(1;4) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(1;4)) &= \begin{vmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = -1,68 < 0 \quad \Rightarrow F \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{G(3;0)} \quad \nabla^2 f(3;0) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;0)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{vmatrix} = -1,2 < 0 \quad \Rightarrow G \text{ est un point-selle.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{H(3;-3)} \quad \nabla^2 f(3;-3) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;-3)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{vmatrix} = 2,1 > 0 \quad \Rightarrow H \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;-3) &= 1 > 0 \quad \Rightarrow H \text{ est un minimum} \\
\text{et } f(3;-3) &= -2,7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{I(3;4)} \quad \nabla^2 f(3;4) &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{pmatrix} \\
\det(\nabla^2 f(3;4)) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,8 \end{vmatrix} = 2,8 > 0 \quad \Rightarrow I \text{ est un extremum.} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3;4) &= 1 > 0 \quad \Rightarrow I \text{ est un minimum} \\
\text{et } f(3;4) &= -\frac{667}{120} \simeq -5,56
\end{aligned}$$

5) a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$  car  $f$  est définie pour tout  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

b) Pour  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nabla f(x, y) \in \mathbb{R}^2$

c) Pour  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nabla^2 f(x, y) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

d) Le théorème de Schwarz dit que si  $f$  admet des dérivées secondes continues, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

## Corrigé de l'exercice 9

$$f(x, y) = xy^2 - y + e^{xy}$$

1) Pour donner l'expression du gradient de  $f$ , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \boxed{y^2 + ye^{xy}};$$

et,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \boxed{2xy - 1 + xe^{xy}}.$$

On cherche donc les solutions de  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + ye^{xy} \\ 2xy - 1 + xe^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pour cela travaillons d'abord sur la première équation :

$$\begin{aligned} y^2 + ye^{xy} = 0 &\Rightarrow y(y + e^{xy}) = 0 \\ &\Rightarrow e^{xy} = -y \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow xy = \ln(-y) \quad \text{ou} \quad y = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln(-y)}{y} \quad \text{ou} \quad \boxed{y = 0}. \end{aligned}$$

A l'aide de la seconde équation on déduit que, si  $y = 0$ , alors :

$$\begin{aligned} 2x \times 0 + xe^{x \times 0} - 1 = 0 &\Rightarrow x \times 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x = 1}, \end{aligned}$$

et si  $x = \frac{\ln(-y)}{y}$ , alors :

$$\begin{aligned} 2y \times \frac{\ln(-y)}{y} + \frac{\ln(-y)}{y} e^{\frac{\ln(-y)}{y} \times y} - 1 = 0 &\Rightarrow 2\ln(-y) + \frac{\ln(-y)}{y} \times (-y) = 1 \\ &\Rightarrow 2\ln(-y) - \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow \ln(-y) = 1 \\ &\Rightarrow -y = e^1 \\ &\Rightarrow \boxed{y = -e}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de  $x$ , on déduit ainsi que  $x = \frac{\ln(-y)}{y} = \frac{\ln(-(-e))}{-e} = \boxed{-\frac{1}{e}}$ .

Nous avons donc deux points critiques,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  et  $(x_1, y_1) = (-\frac{1}{e}, -e)$ . Gardons en tête pour la suite des calculs, que  $e^{x_0 y_0} = e^{1 \times 0} = 1$ , et également  $e^{x_1 y_1} = e^{-\frac{1}{e} \times (-e)} = e^1 = e$ .

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de  $f$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} (y^2 + ye^{xy}) \\ &= \boxed{y^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2xy + xe^{xy} - 1) \\ &= \boxed{2x + x^2 e^{xy}},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + ye^{xy}) \\ &= \boxed{2y + e^{xy} + xye^{xy}}.\end{aligned}$$

On peut donc en déduire la matrice Hessienne de  $f$  :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & 2y + e^{xy} + xye^{xy} \\ 2y + e^{xy} + xye^{xy} & 2x + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

Ainsi on a en particulier :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 & 0 + 1 + 0 \\ 0 + 1 + 0 & 2 + 1^2 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par  $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 0 \times 3 - 1 \times 1 = -1 < 0$ .  
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle. De plus :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} (-e)^2 \times e & 2(-e) + e + e \\ 2(-e) + e + e & 2(-\frac{1}{e}) + (-\frac{1}{e})^2 \times e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et le déterminant de cette matrice est donné par  $\det(\nabla^2 f(x_1, y_1)) = e^3 \times (-\frac{1}{e}) - 0 \times 0 = -e^2 < 0$ .  
D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point selle.

3) On a :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 1 \times 0^2 - 0 + 1 \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \left(-\frac{1}{e}\right) \times (-e)^2 - (-e) + e \\ &= -e + e + e \\ &= \boxed{e}. \end{aligned}$$

## Corrigé de l'exercice 11

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

1) Pour donner l'expression du gradient de  $f$ , on commence par calculer ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \boxed{3x^2 - 3y^2}$$

et,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \boxed{-6xy}$$

Ainsi le gradient s'écrit  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$ , et il s'annule en  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , qui est l'unique point critique.

2) Calculons à présent les dérivées partielles secondes de  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 3y^2) \\ &= \boxed{6x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} (-6xy) \\ &= \boxed{-6x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (-6xy) \\ &= \boxed{-6y},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 3y^2) \\ &= \boxed{-6y}.\end{aligned}$$

On constate bien que  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ , ce qui est attendu d'après le théorème de Schwarz, puisque la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  et donc en particulier ses dérivées partielles secondes sont continues. On peut donc en déduire la matrice Hessienne de  $f$  :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

**3)** Ainsi on a en particulier :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et le déterminant de cette matrice est donné par  $\det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) = 0 \times 0 - 0 \times 0 = 0$

D'après le cours, on sait qu'il s'agit donc d'un point indéterminé. Ni un extremum, ni un point selle.

Corrigé TD 3 - Intégrales doubles