1 Rappels

1.1 Théorème des accroissements finis

Lemme 1.1 *Si f est définie sur un intervalle ouvert I et $\exists x_0 \in I$tel que f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 et f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 1.1 La réciproque est fausse. La dérivée s'annule en x_0 n'implique pas que la fonction admet un extremum en x_0, mais que la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0.

Exemple 1.1 La fonction $f(x) = x^3$. Sa dérivée s'annule en $x_0 = 0$, mais le point $(0, 0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum de la courbe.

Remarque 1.2 La fonction peut présenter un minimum en x_0 et pourtant ne pas être dérivable en ce point.

Exemple 1.2 La fonction $x \mapsto |x|$ a un minimum en $x_0 = 0$ mais n'est pas dérivable en 0.

Remarque 1.3 La condition I intervalle ouvert est indispensable.

Exemple 1.3 La fonction $x \mapsto x$ a un maximum en 1 sur $I = [0; 1]$ intervalle fermé, mais sa dérivée à gauche en 1 ne s'annule pas.

Théorème 1.1 *de Rolle*
Soit une fonction $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 *des accroissements finis*
Soit une fonction $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur$]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Théorème 1.3 *f dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.*

La réciproque est fausse. Contre-exemple : $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Cela signifie que la notion de dérivabilité est plus contraignante que celle de continuité. La propriété de dérivabilité est plus forte que celle de continuité. Il y a moins de fonctions dérivables que de fonctions continues.

2 Dérivée seconde, convexité

La notion de convexité est très importante.

- Un ensemble (figure géométrique plane) est dit convexe, si, quels que soient deux points A et B de cet ensemble, le segment $[A; B]$ tout entier est inclus dans cet ensemble. Exemples : verres convexes, concaves.
- Une fonction $f : I$ intervalle $\to \mathbb{R}$ est convexe sur I si son surgraphe est convexe. Schéma.
- Une fonction $f : I$ intervalle $\to \mathbb{R}$ est concave sur I si son sousgraphe est convexe.

Si une fonction est dérivable deux fois, la dérivée seconde est notée $f''(x)$.

Définition 2.1 *Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I, admettant sur I une dérivée seconde.*
f est convexe (resp. strictement convexe) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$).

Sur l'intervalle I, la courbe est tout entière au dessus de ses tangentes.

Définition 2.2 *Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I, admettant sur I une dérivée seconde.*
f est concave (resp. strictement concave) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0$ (resp. $f''(x) < 0$).

Sur l'intervalle I, la courbe est tout entière en dessous de ses tangentes.

Définition 2.3 *Si $f''(x_0) = 0$ et $f''(x)$ change de signe en $x_0 \in I$, alors la courbe change de convexité et traverse sa tangente en x_0. On dit que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe de f.*

Etudier le sens de variation d'une fonction dérivable, c'est déterminer les intervalles de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels elle est croissante et, par conséquent, ceux sur lesquels elle est décroissante, ce qui nécessite l'étude du signe de sa dérivée (première). De même, étudier la concavité (on peut dire aussi la convexité) d'une fonction deux fois dérivable, c'est déterminer les intervalles de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels elle est convexe et, par conséquent, ceux sur lesquels elle est concave, ce qui nécessite l'étude du signe de sa dérivée seconde.

Exemples de fonctions, représentations graphiques correspondantes illustrant les situations suivantes :

- $f(x) = x^3$, on a $\forall x,\ f'(x) \geq 0$, et $f''(0) = 0$, la courbe est localement 'plate' en $x = 0$,
- $f(x) = e^x$, on a $\forall x,\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$, f est croissante convexe,
- $f(x) = e^{-x}$, on a $\forall x,\ f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$, f est décroissante convexe,
- $f(x) = (x-1)^2$, on a $f'(1) = 0$, et $\forall x,\ f''(x) > 0$, f est convexe et a un minimum en $x = 1$,
- $f(x) = \ln x$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$, f est croissante concave,
- $f(x) = -e^x,\ f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$, f est décroissante concave,
- $f(x) = -(x-2)^2$, on a $f'(2) = 0$, et $\forall x,\ f''(x) < 0$, f est concave et a un maximum en $x = 2$.

Remarque 2.1 La notion de convexité existe pour des fonctions non dérivables deux fois. Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est nécessairement continue, et même dérivable à droite et à gauche en tout point de I. Cela se traduit par le fait que sa courbe est tout entière au dessus de ses demi-tangentes sur I, de ses tangentes si f est dérivable.
De même, une fonction concave sur un intervalle ouvert I est nécessairement dérivable à droite et à gauche en tout point de I. Cela se traduit par le fait que sa courbe est tout entière en dessous de ses demi-tangentes sur I.

Exemple 2.1 La fonction $f(x) = |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.1 Régularité d'une fonction

On a étudié en analyse des fonctions qui ont les propriétés suivantes, énumérées dans l'ordre de **régularité** croissante (smoothness en anglais) :

• Fonction définie en tout point d'un intervalle, discontinue en certains points, et donc, évidemment non dérivable en ces points.

Exemple 2.2 Les fonctions constantes par morceaux (ou fonctions en escalier), comme la fonction de répartition d'une variable discrète.

• Fonction définie et continue en tout point d'un intervalle. On dit que cette fonction est **de classe** $\boldsymbol{C^0}$. Notez qu'une telle fonction peut être non dérivable en certains points. En ces points, la courbe n'admet pas de tangente. Aux points « de raccord » les segments n'ont pas la même pente.

Exemple 2.3 Les fonctions affines par morceaux, représentées par une ligne brisée, comme la fonction de répartition d'une variable statistique continue, non dérivable aux bornes des classes.

La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

• Fonction définie et dérivable en tout point d'un intervalle.

• Fonction définie et dérivable et dont la dérivée est continue en tout point d'un intervalle. On dit que cette fonction est **de classe** $\boldsymbol{C^1}$.

• Fonction définie et dérivable 2 fois et dont la dérivée seconde est continue en tout point d'un intervalle. On dit que cette fonction est de classe C^2.

• Fonction définie et dérivable n fois et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue en tout point d'un intervalle. On dit que cette fonction est de classe C^n.

• Fonction définie et infiniment dérivable en tout point d'un intervalle. On dit que cette fonction est de classe C^∞.

Exemple 2.4 La fonction exponentielle.

Plus une fonction admet de dérivées (première, seconde : la dérivée de la dérivée, troisième : la dérivée de la dérivée seconde, ...), plus elle est **régulière** (smooth en anglais).

3 Fonctions à 2 variables

3.1 Généralités

Soit une fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$

On peut l'interpréter comme une fonction qui, à tout point du plan affine, associe l'altitude en ce point. Sa représentation graphique sera donc une surface (un "relief") ou une nappe de l'espace affine de dimension 3.

On va s'intéresser aux extrema : maxima et minima de cette fonction, sommets et creux de la surface, ainsi qu'à d'autres notions traduisant des particularités de ce relief.

On étendra la notion d'intégrale à ces fonctions, et on en donnera une interprétation.

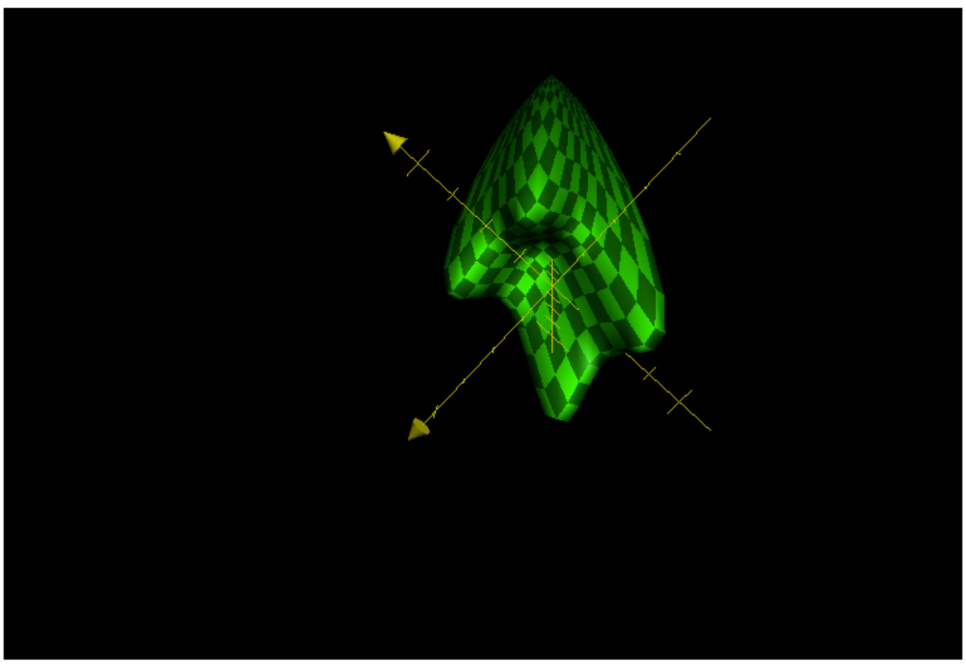

Figure 1 – $z = \frac{1}{10}[(x-3)(x-2)(x+1)(x+3) + (y-4)(y-2)(y+1)(y+4] + 1$

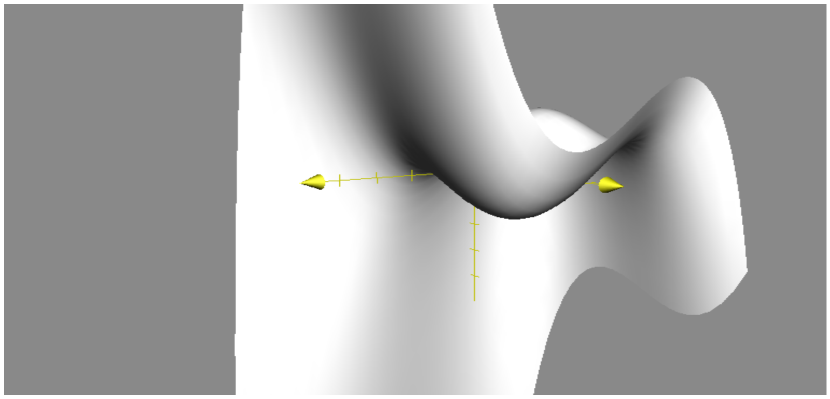

FIGURE 2 – $z = \frac{1}{10}[(x+3)(x+1)(x-3) + (y+1)(y-4)(y-2)] + 1$

3.2 Dérivation - Extrema

3.2.1 Dérivées partielles

Définition 3.1 *Soit la fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$.

On appelle ***dérivées partielles*** *de f par rapport à x, resp. par rapport à y, si elles existent, les dérivées respectives des fonctions* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *et* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{array}$.

On les note respectivement

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad ou \quad f'_x(x,y) \qquad et \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad ou \quad f'_y(x,y)$$

Définition 3.2 *Si la fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles, on appelle* ***gradient*** *de f le vecteur des dérivées partielles de f. On note* $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$

Définition 3.3 *Si la fonction f admet des dérivées partielles premières, les* ***points critiques*** *de f sont les points qui annulent le gradient de f, i.e. les solutions de* $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}_2$.

De même qu'aux points qui annulent la dérivée première d'une fonction réelle d'une variable réelle $f(x)$, la courbe admet une droite tangente horizontale, **aux points critiques d'une fonction à deux variables, la surface admet un plan tangent horizontal**.
En ces points la fonction n'admet un extremum que si la courbe (resp. la surface) reste d'un côté/ne traverse pas sa droite (resp. son plan) tangent.

3.2.2 Dérivées partielles secondes

Définition 3.4 *Si chacune des dérivées partielles premières d'une fonction réelle à deux variables réelles admet elle-même des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y, alors*

$$\begin{array}{llll}
\textit{La dérivée de } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \textit{ par rapport à } x : & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) & \textit{est notée} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\
\textit{La dérivée de } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \textit{ par rapport à } y : & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) & \textit{est notée} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\
\textit{La dérivée de } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \textit{ par rapport à } x : & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) & \textit{est notée} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\
\textit{La dérivée de } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \textit{ par rapport à } y : & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) & \textit{est notée} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}
\end{array}$$

Théorème 3.1 Théorème de Schwarz

Si la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles secondes* ***continues****, alors*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

Définition 3.5 *Si la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$ *admet des dérivées partielles secondes, on appelle* ***matrice hessienne*** *de f la matrice des dérivées partielles secondes de f.*
On note

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Si, de plus, les dérivées partielles secondes de f sont continues, d'après le théorème de Schwarz, $\nabla^2 f(x,y)$ est symétrique.

Définition 3.6 *On appelle* ***hessien*** *d'une fonction réelle à deux variables réelles, le déterminant de la matrice hessienne de f :*

$$\det \nabla^2 f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x}$$

Si, de plus, les dérivées partielles secondes de f sont continues, d'après le théorème de Schwarz,

$$\det \nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

3.2.3 Conditions d'extrémalité

Théorème 3.2 *Soient une application* $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) \end{array}$ *deux fois dérivable*

et (x_0, y_0) *un point critique de* f $(\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}_2)$, *alors*

(1) *Si* $\det\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) > 0$ *alors* f *admet un extremum local en* (x_0, y_0).

- **(i)** *Si* $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0 \quad \left(ou \; \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} < 0 \right)$ *alors* f *admet un* ***maximum*** *local en* (x_0, y_0),
- **(ii)** *Si* $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0 \quad \left(ou \; \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} > 0 \right)$ *alors* f *admet un* ***minimum*** *local en* (x_0, y_0).

(2) *Si* $\det\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) < 0$ *alors* (x_0, y_0) *est un* ***point-selle***.

(3) *Si* $\det\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) = 0$ *alors on ne peut pas conclure.*

Remarque 3.1 Lorsque la matrice hessienne est une matrice symétrique, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, son déterminant est $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$. S'il est positif, alors $ac - b^2 > 0 \Leftrightarrow ac > b^2 \geqslant 0 \Rightarrow ac > 0$, c'est-à-dire a et c sont de même signe et $\neq 0$. D'où les conditions **(i)** et **(ii)**.

On en déduit les deux possibilités suivantes :

(i) $a + c > 0$

(ii) $a + c < 0$.

Définition 3.7 *La* **trace** *d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.*
Si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *alors la trace de* A *est notée* $\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A})$ *et* $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

On peut donc traduire les conditions par :

(i) Si $\mathrm{Tr}\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) > 0$, alors f admet un **minimum local** en (x_0, y_0).

(ii) Si $\mathrm{Tr}\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) < 0$, alors f admet un **maximum local** en (x_0, y_0).

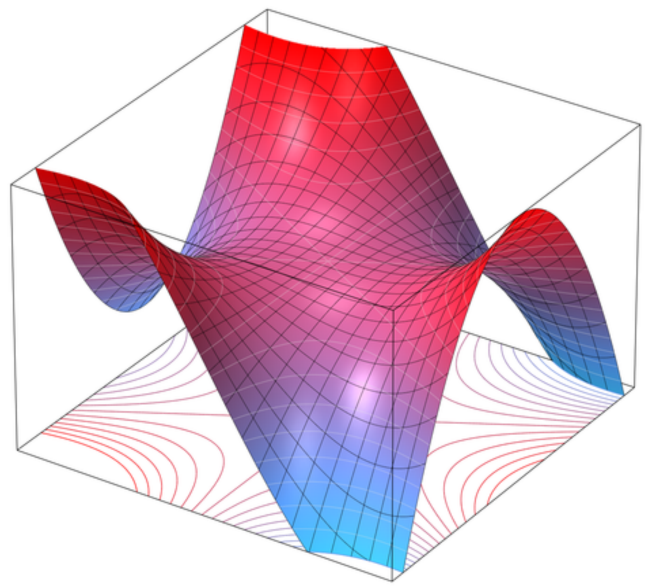

FIGURE 3 – Théorème 3.2 cas **(3)**, exemple : la selle de singe : $z = x^3 - 3xy^2$

3.3 Intégrales doubles

Théorème 3.3 Théorème de Fubini *pour le calcul d'une intégrale double* $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ *:*

(i) *Quand le domaine* $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$, φ_1 *et* φ_2 *étant deux fonctions définies sur* $[a;b]$,

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x$$

(ii) *Quand le domaine* $\mathcal{D} = [a;b] \times [c;d]$ *est un* ***pavé****,*

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}y$$

(iii) *Quand le domaine* $\mathcal{D} = [a;b] \times [c;d]$ ***et*** *que la fonction s'écrit* $f(x,y) = g(x) \times h(y)$,

$$\iint_{\mathcal{D}} g(x) \times h(y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \left[\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\right] . \left[\int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y\right]$$

3.3.1 Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$

On sait que $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ n'admet pas de primitive.
On peut toutefois calculer cette intégrale, sans connaître la primitive de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soit l'intégrale double sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ tout entier, définie par $J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad (1)$

Étape 1 On démontre que $J = I^2$.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} \text{ d}x \text{ d}y \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \text{ d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \text{ d}y \right) = I^2$$

On va donc calculer J, puis on en déduira $I = \sqrt{J}$.

Étape 2 Pour calculer J, on va d'abord intégrer la fonction sur un disque de centre O et de rayon R, puis on fera tendre R vers $+\infty$. En effet, quand $R \to +\infty$ le disque $\mathcal{D}(O, R)$ couvre $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Soit l'intégrale double $J(R)$ sur le domaine $\mathcal{D}(O, R)$:

$$J(R) = \iint_{\mathcal{D}(O,R)} e^{-(x^2+y^2)} \text{ d}x \text{ d}y$$

On calcule $J(R)$ à l'aide d'un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y) en coordonnées polaires (r, θ).

(a) On écrit le changement de variables : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Le changement d'élément différentiel : $\text{d}x \text{ d}y = r \text{ d}r \text{ d}\theta$

On définit $\mathcal{D}(O, R)$ en coordonnées polaires, $\mathcal{P}$ étant le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\mathcal{D}(O, R) = \left\{ M \in \mathcal{P} / \|\overrightarrow{OB}\| \leqslant R \right\} = \{ M(r; \theta) \in \mathcal{P} /\ r \leqslant R \}$$

(b) On effectue le changement de variables dans l'intégrale $J(R) = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}(O,R)} e^{-(x^2+y^2)} \text{ d}x \text{ d}y$:

On remarque que $x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ car $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$J(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r \text{ d}r \text{ d}\theta \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^{2\pi} \text{d}\theta \right) \left(\int_0^R e^{-r^2} r \text{ d}r \right)$$

(c) Calcul de $J(R)$:

$$\int_0^{2\pi} \text{d}\theta = \int_0^{2\pi} 1 \text{ d}\theta = \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$\displaystyle\int_0^R e^{-r^2} r \text{ d}r$ se calcule à l'aide d'un changement de variables :

- Le changement de variable est $t = r^2$
- Le changement d'élément différentiel est $\text{d}t = 2r \text{ d}r$

- Le changement de bornes est $\begin{array}{ll} r: & 0 \to R \\ t: & 0 \to R^2 \end{array}$

D'où $\displaystyle\int_0^R e^{-r^2} r \text{ d}r = \int_0^{R^2} e^{-t} \text{ d}t = \Big[-e^{-t} \Big]_0^{R^2} = -e^{-R^2} + e^0 = 1 - e^{-R^2}$

On en déduit $J(R) = 2\pi \left(1 - e^{-R^2} \right)$.

Étape 3 Calcul de J

$J(R)$ admet une limite quand $R \to +\infty$ et $J = \lim\limits_{R \to +\infty} J(R) = \lim\limits_{R \to +\infty} 2\pi \left(1 - e^{-R^2}\right) = 2\pi$

Étape 4 Calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$

On a vu que $J = I^2$, alors $I = \sqrt{J} = \sqrt{2\pi}$.

$$\text{On a démontré que } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

Exemple 3.1 La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité de la loi normale réduite centrée. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. La démonstration précédente explique le coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.