Corrigé TD1 - Compléments sur l'étude des fonctions

Corrigé de l'exercice 2

1)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 11x - 3.$$

La fonction f est un polynôme, qui est donc de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle est en particulier continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 11,$$

et,

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72.$$

On a donc f'' qui est un polynôme du second degré. Pour étudier la convexité de f, il faut trouver les solutions de $f''(x) = 0$. Pour se faire, on calcule le déterminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-12)^2 - 4 \times 12 \times (-72) \\ &= 144 + 3456 \\ &= 3600 \\ &\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 60 \end{aligned}$$

Puisque $\Delta > 0$, on a deux solutions, qui sont données par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-12) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 - 60}{24} \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-12) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 12} \\ &= \frac{12 + 60}{24} \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

De plus, on a $f''(0) = 12 \times 0^2 - 12 \times 0 - 72 = -72$, ce qui nous donne le signe du polynôme de part et d'autre des solutions. On peut donc résumer ces informations dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f est		*convexe*		*concave*		*convexe*	

2) L'équation de la tangeante d'une fonction f en un point a s'écrit sous la forme :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ainsi, on peut déduire les équations de tangeantes aux points d'inflexions comme étant :

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(-2)(x-(-2)) + f(-2) \\ &= 99(x+2) - 137 \\ &= \boxed{99x + 61}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= -151(x-3) - 267 \\ &= \boxed{-151x + 186}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

$$f(x) = x \times 0.5^x = xe^{x\ln(0.5)}$$

• On sait que $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc par stabilité du produit, f est également $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. La fonction f est donc continue et infiniment dérivable. Ainsi, on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln(0.5)} + x\ln(0.5)e^{x\ln(0.5)} \\ &= \big(1 + x\ln(0.5)\big)e^{x\ln(0.5)}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \ln(0.5)e^{x\ln(0.5)} + x\ln(0.5)^2e^{x\ln(0.5)} + \ln(0.5)e^{x\ln(0.5)} \\ &= \big(2 + x\ln(0.5)\big)\ln(0.5)e^{x\ln(0.5)}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \big(1 + x\ln(0.5)\big)e^{x\ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow \big(1 + x\ln(0.5)\big) = 0 \ \ \textbf{ou} \quad \underbrace{e^{x\ln(0.5)} = 0}_{\text{impossible, car } e^x > 0} \\ &\Rightarrow x\ln(0.5) = -1 \\ &\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{\ln(0.5)} \simeq 1.44} \end{aligned}$$

Or, on a également $f'(0) = 1$, et $f'(2) = (1 + 2\ln(0.5))0.5^2 \simeq -0.10$, ce qui veut dire que la dérivée change de signe de part et d'autre du point critique x_1. Ainsi, on a bien un extremum en x_1, plus spécifiquement, il s'agit d'un maximum car on passe d'une dérivée positive à négative (càd que la fonction est croissante puis décroissante).

• Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Rightarrow \big(2 + x\ln(0.5)\big)\ln(0.5)e^{x\ln(0.5)} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{\ln(0.5)} \simeq 2.89} \end{aligned}$$

De plus, $f''(0) \simeq -0.70$, et $f''(3) \simeq 0.007$. La fonction est donc concave avant x_2 et convexe après.

• Pour finir, on peut calculer la valeur de notre maximum : $f(x_1) = -\frac{1}{\ln(0.5)}e^{-1} = -\frac{1}{\ln(0.5)e}$. Il est également facile de voir que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On a donc une asymptote horizontale d'équation y = 0.

Finalement, il est possible de résumer toutes ces informations dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{ln(0.5)}$		$\frac{-2}{ln(0.5)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1}{ln(0.5)e}$	$\searrow$			0
$f''(x)$		$-$			0	$+$	
f est		*concave*				*convexe*	

Corrigé de l'exercice 4

$$g(x) = \frac{\ln(4x)}{x}$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, donc en tant que produit de fonctions, g est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$. On peut donc en particulier la dériver deux fois sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}*^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{4x} \times \frac{1}{x} + \ln(4x) \times \big(-\frac{1}{x^2}\big) \\ &= \boxed{\frac{1 - \ln(4x)}{x^2}}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{4}{4x} \times \frac{1}{x^2} + (1 - \ln(4x)) \times \big(-\frac{2x}{x^4}\big) \\ &= -\frac{1}{x^3} + (1 - \ln(4x)) \times \big(-\frac{2}{x^3}\big) \\ &= \boxed{\frac{2\ln(4x) - 3}{x^3}}. \end{aligned}$$

• Pour trouver d'éventuels extrema, on résout :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1-\ln(4x)}{x^2} = 0 \\ &\Rightarrow 1 - \ln(4x) = 0 \\ &\Rightarrow \ln(4x) = 1 \\ &\Rightarrow 4x = e^1 \\ &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e}{4} \simeq 0.68} \end{aligned}$$

De plus, on a $g'(\frac{e}{8}) = \dfrac{1-\ln(4\times\frac{e}{8})}{(\frac{e}{8})^2} = \dfrac{1-\ln(e)+\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} = \dfrac{\ln(2)}{(\frac{e}{8})^2} > 0$ et $g'(\frac{e}{2}) = \dfrac{1-\ln(4\times\frac{e}{2})}{(\frac{e}{8})^2} = -\dfrac{\ln(2)}{(\frac{e}{2})^2} < 0$. La dérivée étant croissante puis décroissante, g admet un maximum en $x_0 = \dfrac{e}{4}$.

• Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{2\ln(4x)-3}{x^3} = 0 \\ &\Rightarrow 2\ln(4x) - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \ln(4x) = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow 4x = e^{\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{4} \simeq 1.12} \end{aligned}$$

Or, on voit que $g''(\frac{e}{4}) = \dfrac{2\ln(4\times\frac{e}{4})-3}{(\frac{e}{4})^3} = \dfrac{-1}{(\frac{e}{4})^3} < 0$ et $g''(\frac{e^2}{4}) = \dfrac{2\ln(4\times\frac{e^2}{4})-3}{(\frac{e^2}{4})^3} = \dfrac{1}{(\frac{e^2}{4})^3} > 0$.

• Pour finir, on peut calculer la valeur du maximum : $g(\frac{e}{4}) = \dfrac{\ln(4\times\frac{e}{4})}{\frac{e}{4}} = \dfrac{1}{\frac{e}{4}} = \dfrac{4}{e} \simeq 1.47$. Et voir que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée entre le logarithme et la fonction identitée. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

x	0		$\frac{e}{4}$		$\frac{e^{\frac{3}{2}}}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$		$\searrow$	0
$g''(x)$			$-$		0	$+$	
g est			*concave*			*convexe*	

Corrigé de l'exercice 5

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1) La fonction f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc on peut calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \boxed{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}, \end{aligned}$$

et résoudre

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} = 0 \\ &\Rightarrow \text{impossible car } e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante et n'admet pas d'extrema. Or, en se rappelant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on voit que f admet deux asymptotes horizontales car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On peut maintenant dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

2) Si on note $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = (1+e^{-x})^2$, la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1+e^{-x})^2 - e^{-x} \times 2(-e^{-x})(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1^2 + e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x} - 2e^{-2x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x} \times (1 - e^{-2x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \boxed{\frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^4}}. \end{aligned}$$

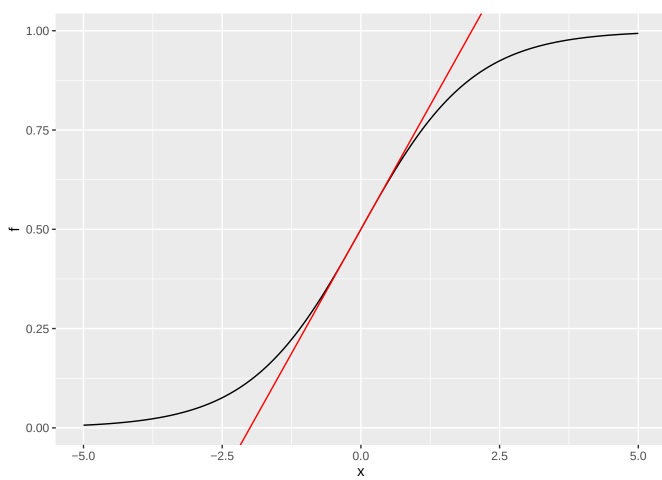
Pour étudier la convexité de f, on résout :

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^4} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} - e^{-x} = 0 \\
&\Rightarrow e^{-3x} = e^{-x} \\
&\Rightarrow \boxed{x = 0},
\end{aligned}
$$

car la fonction exponentielle est bijective. De plus, $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$, donc $x_0 = (0, \dfrac{1}{2})$. La tangente en ce point a pour équation :

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= \frac{e^0}{(1+e^0)^2}(x - 0) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

3) Ci-dessous, le graph de la fonction f (en noir) et la tangente en x_0 (en rouge) :



4) On a vu que f est bornée par 1 donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

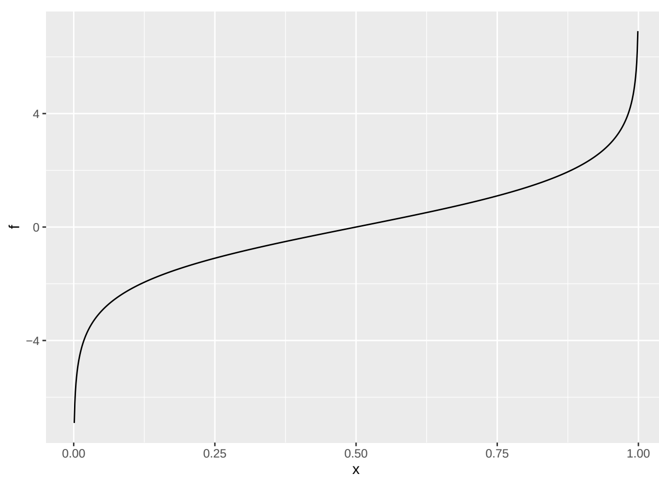
5)

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0.7 &\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} = 0.8 \\
&\Rightarrow 1 + e^{-x} = \frac{5}{4} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow -x = \ln(\frac{1}{4}) \\
&\Rightarrow \boxed{x = \ln(4)}.
\end{aligned}
$$

6) On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. De plus, f est continue et $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, c'est à dire f est strictement monotone. Ainsi, f est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$. On pose $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{1+e^{-x}} &\Rightarrow 1+e^{-x} = \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{y} - 1 \\
&\Rightarrow e^{-x} = \frac{1-y}{y} \\
&\Rightarrow -x = \ln(\frac{1-y}{y}) \\
&\Rightarrow x = \ln(\frac{y}{1-y}) \\
&\Rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = \ln(\frac{y}{1-y})}.
\end{aligned}
$$

f^{-1} est la fonction réciproque de f, définie sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont le graph est donné ci-dessous :



Corrigé TD 2 - Extrema des fonctions à deux variables

Corrigé TD 3 - Intégrales doubles