

Trabalho Prático 1

Levitador Magnético

Arthur Mesquita Santos
Julián Andrés Pacheco García
Felipe Augusto Cruz Sousa
Heloisa Silva Rosa

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Belo Horizonte – MG – Brasil

INTRODUÇÃO

Conceituação física do problema

Um sistema físico pode ser entendido como a interação entre grandezas físicas e/ou forças fundamentais com elementos físicos, sob certas condições que podem ou não ser controladas e estipuladas. Ou seja, trata-se da observação de um fenômeno físico em um ambiente controlado, ou não, com o objetivo de estudar ou analisar seu comportamento.

Um levitador magnético é um sistema físico constituído pela interação entre uma esfera magnética e um eletroímã fixado no topo da estrutura, o sistema mantém os objetos no ar por meio da força de um campo magnético (esse efeito é conhecido como levitação magnética).

O sistema funciona aplicando tensão a um eletroímã, o que gera um campo magnético capaz de produzir uma força vertical que contrabalança o peso do objeto. Essa força pode ser controlada pela variação da tensão, permitindo que o objeto permaneça em uma posição determinada.

As aplicações desse sistema incluem, entre outras, seu uso em trens de levitação magnética, na manipulação de materiais radioativos em reatores de fissão nuclear, e na exposição de produtos como joias ou calçados.



Figura SEQ Figura * ARABIC 1: Levitador Magnético

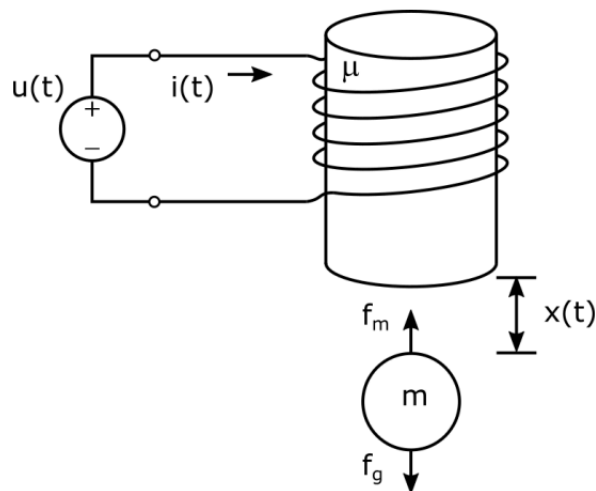


Trem magnético (exemplo de uso)



Exposição de joyería (exemplo de uso)

1.1 Análise mecânica do sistema



A esfera fica suspensa verticalmente.

A distância entre o eletroímã e a esfera é dada por $x(t)$

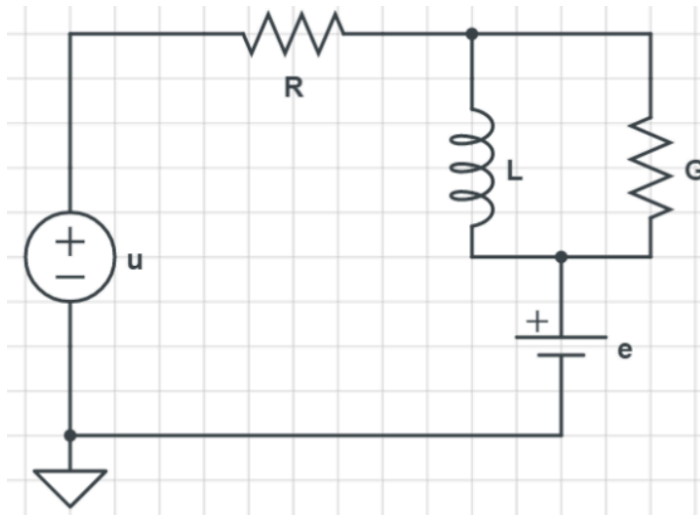
A esfera sofre uma força apontando verticalmente para cima através da força magnética f_m

Ao mesmo tempo, ela sofre uma força apontando verticalmente para baixo através da força peso mg

O objetivo do sistema é manter a esfera em equilíbrio, isto é, em uma altura fixa, controlando a corrente elétrica no eletroímã.

1.2 Análise do circuito elétrico do sistema

O eletroímã consiste, basicamente, em um **indutor com resistência**. Quando aplicada uma tensão $u(t)$, uma corrente $i(t)$ flui pela bobina e gera o campo magnético responsável pela força de levitação.



Elementos do circuito:

Fonte de tensão $u(t)$: o controlador envia esse sinal.

Resistência R : representa as perdas internas da bobina.

Indutância $L(x)$: representa o campo magnético gerado, que **depende da posição x** da esfera.

A saída do circuito é a corrente $i(t)$, que depende da entrada $u(t)$, mas também da posição da esfera, uma vez que a proximidade da esfera altera o campo magnético e, portanto, a indutância do sistema. Isso cria uma realimentação dinâmica: a posição influencia o campo, o campo influencia a força, e a força afeta a posição.

1.3 Análise geral

O movimento da esfera altera o campo magnético, o que altera a indutância.

Além disso, a velocidade da esfera também interfere no circuito pela força eletromotriz $Bl(i, x) \cdot \frac{dx}{dt}$ (efeito de movimento no campo magnético).

A corrente elétrica gerada no circuito induz uma força magnética que atua sobre a esfera, provocando seu movimento. Isso caracteriza um sistema acoplado, em que a parte elétrica e a parte mecânica estão interligadas de forma dinâmica.

2.0 Equacionamento do sistema

O sistema do levitador magnético possui duas variáveis principais:

Corrente elétrica no eletroímã: $i(t)$

Posição da esfera magnética: $x(t)$

As equações que modelam essas duas variáveis são:

Corrente (lei das malhas):

$$\dot{i} = \frac{u}{L(x)} - \frac{R}{L(x)} i - \frac{Bl(i,x)}{L(x)} \dot{x}$$

Movimento da esfera (segunda lei de Newton):

$$\ddot{x} = g - \frac{f_m(i,x)}{m}$$

Onde:

Constantes

- $L(x) = \frac{1}{kx}$ -> indutância
- $f_m(i, x) = \frac{ki^2}{x^2}$ -> força magnética
- $Bl(i, x) = \frac{2ki}{x}$ -> força eletromotriz

$$\begin{aligned} m &= 0,073 \text{ Kg} \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\ k &= 6,51 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^2/\text{A}^2 \\ R &= 11 \text{ }\Omega \\ x_0 &= 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_0 &= 0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3.0 Cálculo do Ponto de Equilíbrio

Dadas as fórmulas:

$$f_m(i, x) = \frac{ki^2}{x^2} \text{ , no equilíbrio: } f_m = \frac{m}{g}$$

a. Cálculo de i_0 :

$$\frac{ki_0^2}{x_0^2} = mg \rightarrow i_0 = \sqrt{\frac{mgx_0^2}{k}}$$

Aplicando os valores:

$$m = 0,073 \text{ Kg}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$k = 6,51 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$$

$$x_0 = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Resultado: $i_0 = 0.868 \text{ A}$

b. Cálculo da tensão de equilíbrio u_0 :

$$u_0 = R \cdot i_0$$

$$R = 11 \Omega$$

$$i_0 = 0.868 \text{ A}$$

Resultado: $u_0 = 9.55 \text{ V}$

4.0 Condições iniciais com perturbação

Em sistemas físicos, especialmente em sistemas dinâmicos não lineares como o levitador magnético, condições iniciais são os valores iniciais das variáveis do sistema no tempo $t_0=0$.

Aplicando uma perturbação iremos iniciar o sistema quase no equilíbrio, mas com margem para observar se o sistema irá oscilar, estabilizar ou desestabilizar.

Posição inicial $x(0)$

Velocidade inicial $\dot{x}(0)$

Corrente inicial $i(0)$

Tensão de entrada $u(0)$

Aplicando uma perturbação de 1% na posição inicial:

$$\epsilon = 0,01 \cdot x_0 = 8,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$x(0) = x_0 + \epsilon = 8,585 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Condições:

$$x(0) = x_0 + \epsilon$$

$$v(0) = 0$$

$$i(0) = i_0$$

5.0 Controlador PID

O objetivo em implementar um controlador PID neste sistema é estabilizar a posição da esfera no ponto de equilíbrio X_0 , de modo a corrigir perturbações implicadas ao sistema. O PID irá ajustar a tensão(t) aplicada no eletroímã com base no erro da posição.

a. Variável de erro

Define-se o erro como a diferença entre a posição de $x_{ref}(t)$, correspondente ao ponto de equilíbrio x_0 , e a posição atual da esfera (t):

$$e(t) = x_{ref}(t) - x(t)$$

Nesta prática, será assumido um valor constante de referência: $x_{ref} = x_0$

b. Equação do controlador PID

A equação clássica do PID é:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Onde:

K_p : ganho proporcional

K_i : ganho integral

K_d : ganho derivativo

$u(t)$: tensão de controle aplicada à bobina

$e(t)$: erro de posição

c. Valores utilizados

Os valores dos ganhos foram escolhidos empiricamente para simulação com um modelo não linearizado do sistema:

- $K_p = 190$
- $K_i = 20$
- $K_d = 20$

6.0 Entregas do TC01

Atividade 01 - Sintonizando o PID

Encontre um conjunto de parâmetros para o PID que estabilize o sistema para a condição $x(0) = x_0 + \epsilon$, onde epsilon é uma pequena perturbação na posição inicial ($< 3\%$). Uma vez obtido o controlador faça:

Sintonização do PID com pequena perturbação inicial na posição

O controlador foi sintonizado **empiricamente**, e que o modelo utilizado é **não linear**, com variáveis fortemente acopladas, justificando o uso de simulação numérica com `solve_ivp`.

Parâmetros utilizados:

python

$K_p, K_i, K_d = 190.0, 20.0, 20.0$

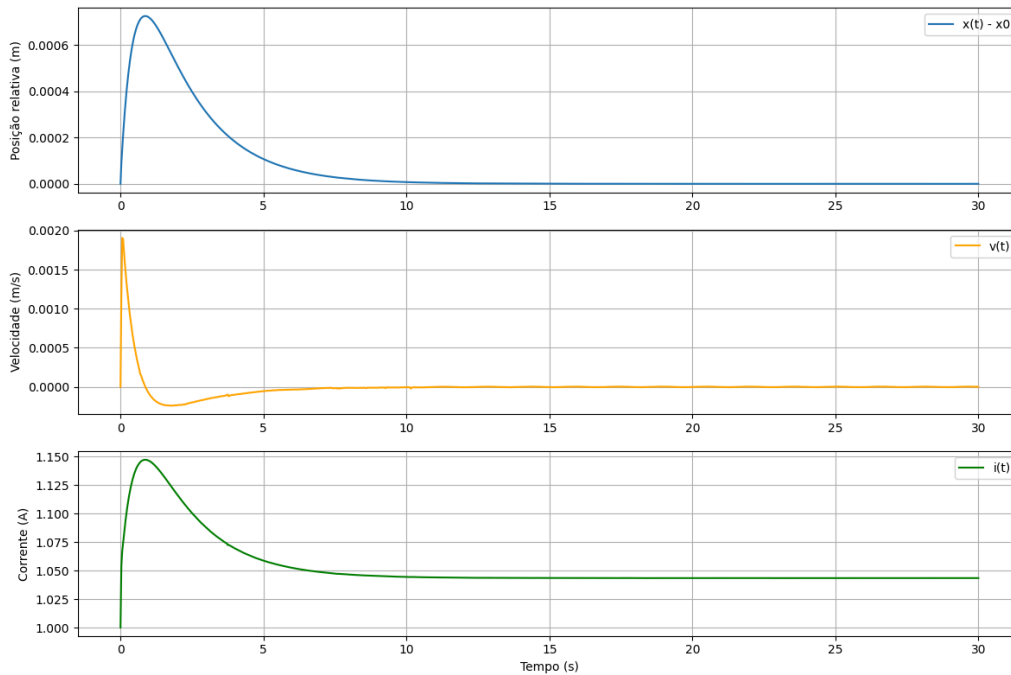


Gráfico da posição (esquerda): mostra que o sistema retorna ao ponto de equilíbrio $x_0=0,01$ m após 10 segundos.

Gráfico da corrente (esquerda): mostra a corrente elétrica no circuito, que permanece abaixo de 2 A, como exigido.

- Apresente a nova representação em espaço de estados.
- Reavalie a faixa de valores de ϵ na qual o sistema é estável.
- Para um ϵ constante, avalie a estabilidade do sistema em relação a sd .

Representação em espaço de estados

A representação em espaço de estados é uma forma matemática de se modelar sistemas dinâmicos, sendo possível descrever um sistema através de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, organizadas em forma matricial. Ou seja, em substituição a escrever uma única equação complexa (como uma equação de segunda ordem), o sistema é dividido em variáveis de estado (por exemplo: posição, velocidade, corrente...) e observa-se como cada uma evolui com o tempo.

O sistema do levitador magnético possui quatro variáveis de estado:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ x(t) \\ v(t) \\ E(t) \end{bmatrix}$$

Onde:

- $i(t)$: corrente elétrica na bobina (A)
- $x(t)$: posição da esfera (m)
- $v(t)=x'(t)$: velocidade da esfera (m/s)
- $E(t)$: integral do erro de posição — usada no termo integrativo do controle (m·s)

A dinâmica do sistema é dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ x \\ v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L(x)} (-Ri - Bl(i, x) \cdot v + u(t)) \\ v \\ g - \frac{f_m(i, x)}{m} \\ x - x_0 \end{bmatrix}$$

$L(x) = \frac{k}{x}$ é a indutância dependente da posição

$f_m(i, x) = \frac{k}{2} \cdot \frac{i^2}{x^2}$ é a força magnética

$Bl(i, x) = \frac{k}{2} \cdot \frac{i}{x^2}$ é o fator de força eletromagnética

$u(t) = u_0 + \Delta u(t)$: tensão aplicada na bobina, controlada por um PID

Esse modelo em espaço de estados **não é linearizado**. Utilizou-se a **forma completa não linear** para manter a fidelidade ao comportamento físico do sistema, que apresenta dependência não linear da corrente e da posição sobre a força magnética e a indutância.

Análise de estabilidade

Para verificar a estabilidade do sistema, foram aplicadas perturbações na posição de equilíbrio x_0 variando de -3% a 3%. Assim, as condições iniciais foram ajustadas para representar essa faixa de erro. Por exemplo, para uma perturbação de -3% a 3%, a condição inicial da posição foi definida como:

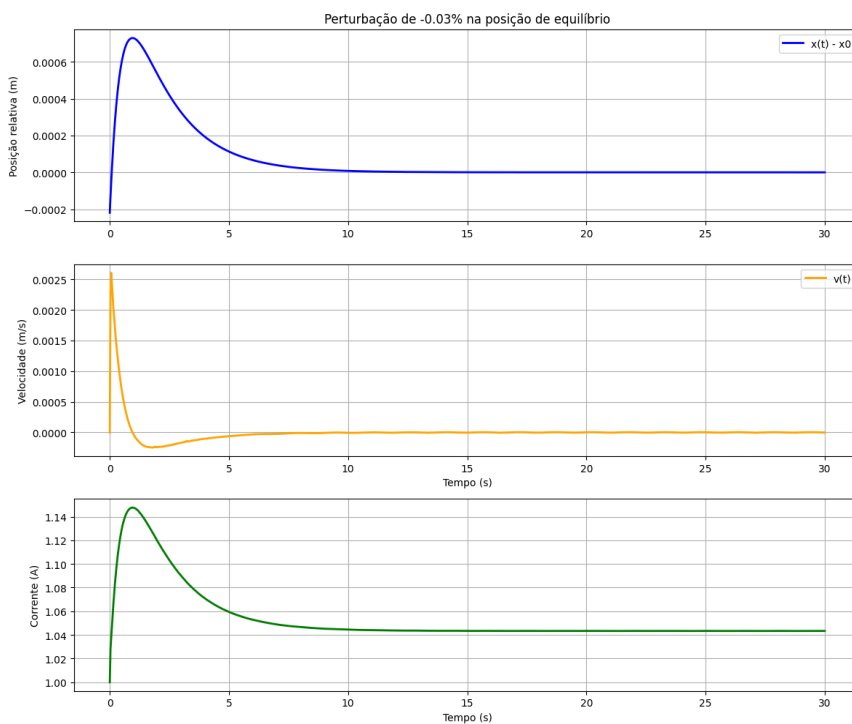
$$x(0) = x_0 (1 + \epsilon) \quad \text{com} \quad \epsilon \in [-0.03, 0.03]$$

O sistema, controlado por um PID com parâmetros **Kp=190, Ki=20 e Kd=20**, foi simulado utilizando o integrador **solve_ivp**, considerando o modelo não linear completo do levitador magnético.

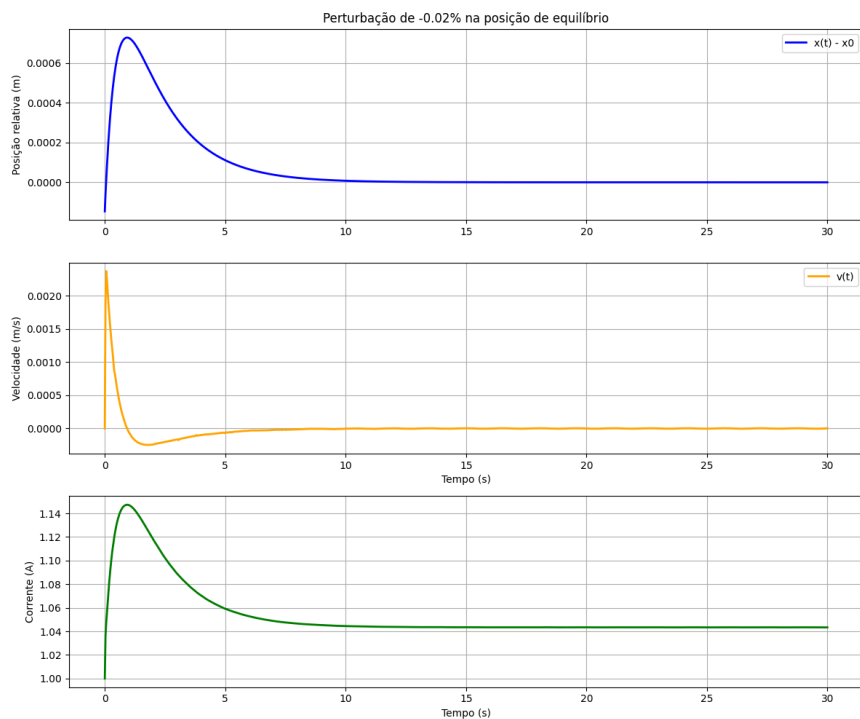
O gráfico da posição ao longo do tempo evidencia que, para perturbações dentro do intervalo de $\pm 3\%$ em relação a x_0 , o sistema retorna ao seu ponto de equilíbrio com um comportamento oscilatório amortecido, demonstrando estabilidade assintótica. Em outras palavras, mesmo quando a posição inicial é alterada de -3% a 3%, a resposta converge para x_0 à medida que o tempo passa.

Da mesma forma, a corrente apresenta um decaimento controlado, mantendo-se dentro dos limites seguros, sem exceder a corrente máxima de 2 A. Esse comportamento reforça a estabilidade da dinâmica completa do sistema.

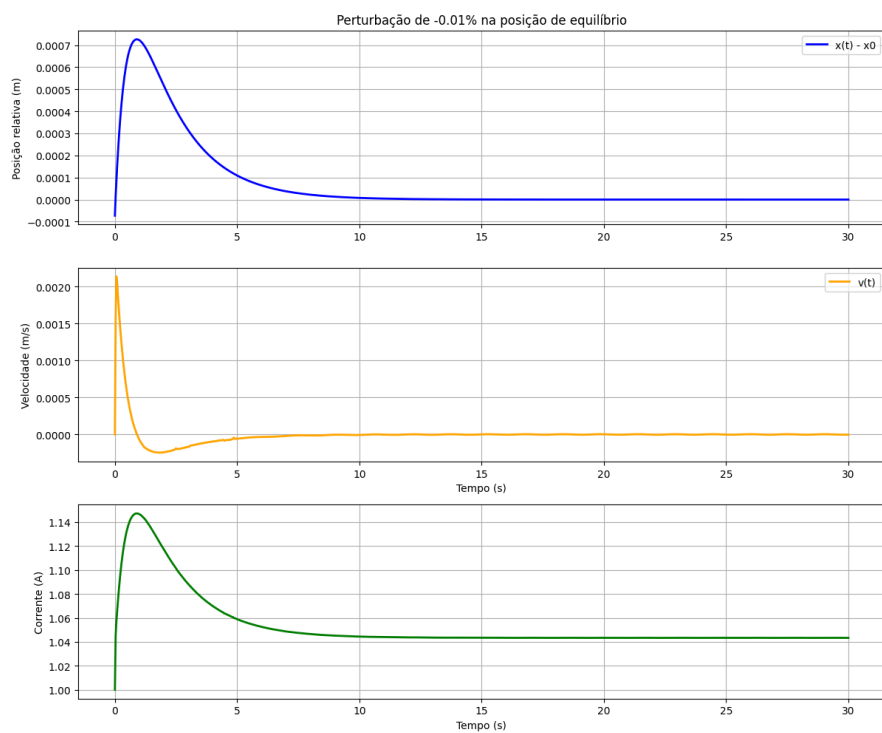
Análise com erro de -3% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



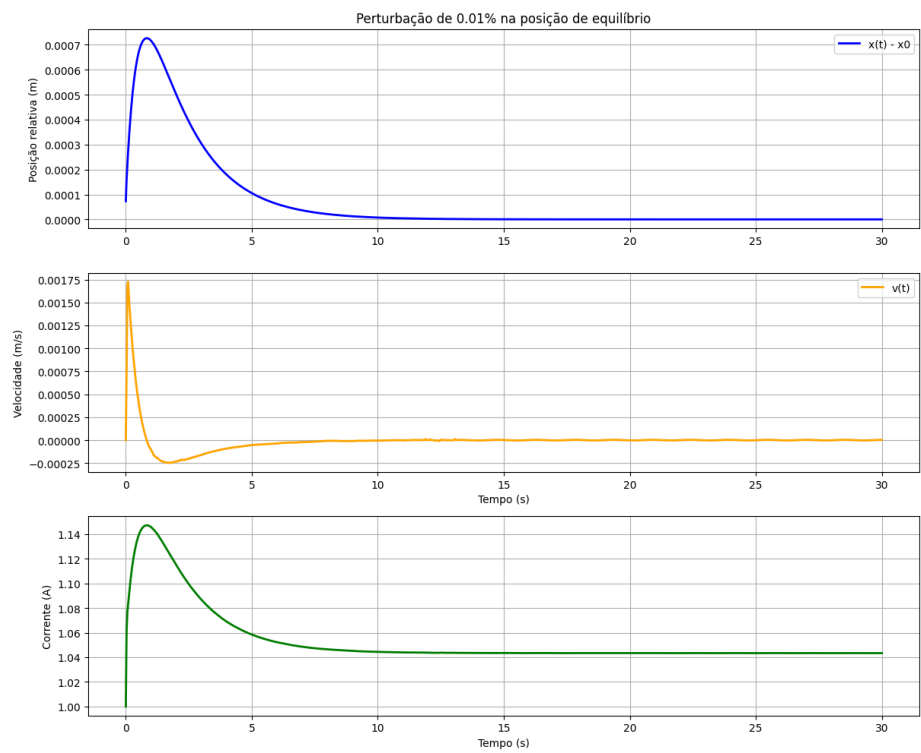
Análise com erro de -2% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



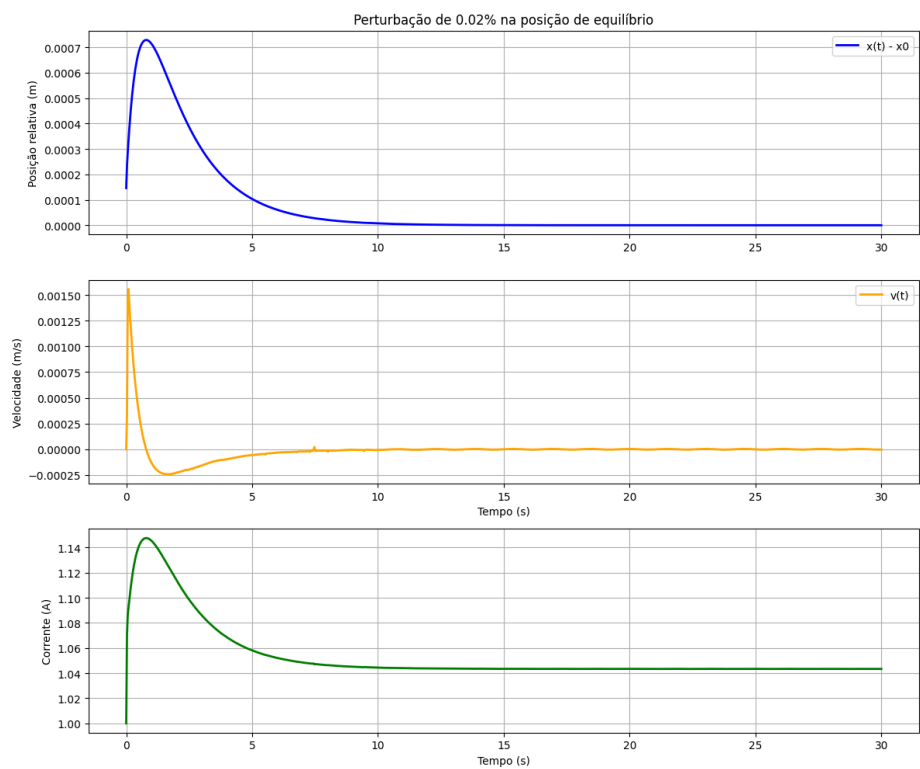
Análise com erro de -1% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



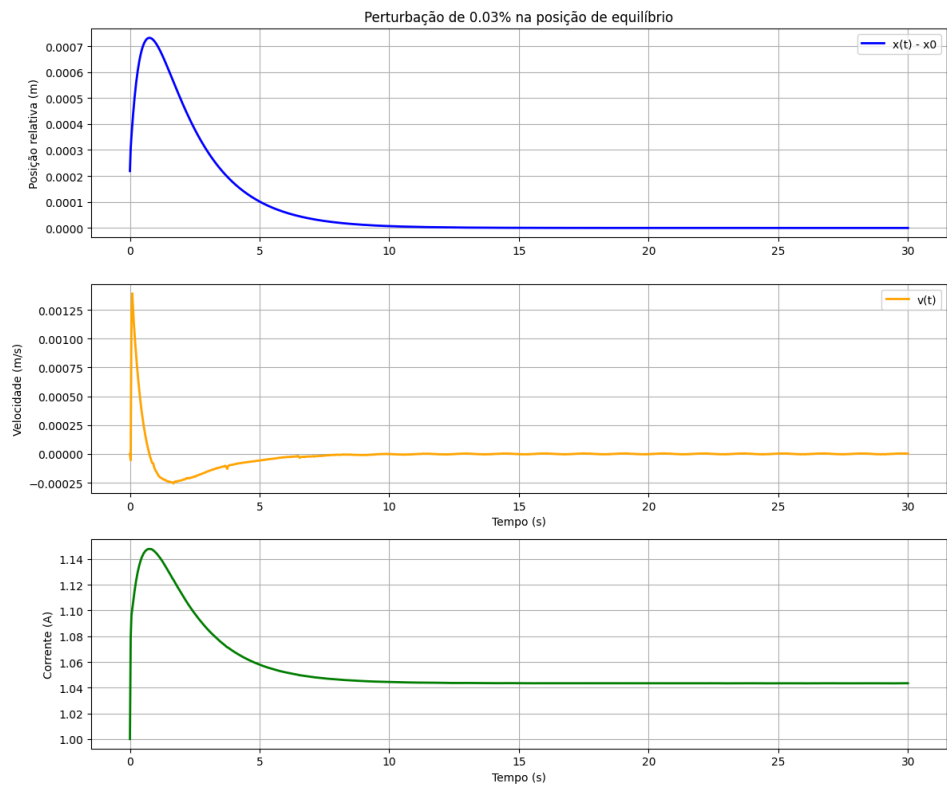
Análise com erro de +1% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



Análise com erro de +2% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



Análise com erro de +3% referente ao valor de x_0 no equilíbrio:



Foi estipulado como restrição de projeto que a perturbação inicial na posição (ϵ) não ultrapassasse 3% de x_0 . A análise dos resultados de simulação demonstrou que, para perturbações variando de -3% a 3% de x_0 , o controlador é capaz de restabelecer a posição de equilíbrio da esfera sem que a corrente supere o limite máximo de 2 A. Em resumo, variações na posição dentro do intervalo de $\pm 3\%$ de x_0 não provocam saturação nem comprometem a estabilidade do sistema, evidenciando a robustez do controlador para essa determinada faixa de operação.

Atividade 02 - Adicionando incerteza à malha de realimentação

Assuma que o sistema responsável por medir a posição da peça em levitação tenha uma incerteza que pode ser modelada como um ruído aditivo com distribuição normal de média zero e desvio padrão $sd = 0.1u_0$. Para esse caso faça:

Representação em espaço de estados

As variáveis de estado do sistema permanecem as mesmas da atividade anterior:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ x(t) \\ v(t) \\ E(t) \end{bmatrix}$$

O sistema dinâmico é dado por:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{E} \end{bmatrix}$$

Onde:

- $i(t)$: corrente elétrica na bobina (A)
- $x(t)$: posição da esfera (m)
- $v(t)=\dot{x}(t)$: velocidade da esfera (m/s)
- $E(t)$: integral do erro de posição — usada no termo integrativo do controle (m·s)

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L(x)}\dot{i} - \frac{Bl(i,x)}{L(x)}v + \frac{u_0 + K_p e + K_i E + K_d v}{L(x)} \\ v \\ g - \frac{f_m(i,x)}{m} \\ e \end{bmatrix} \quad \text{com } e \approx x - (1 + \epsilon)x_0$$

no código \mathbf{x} é na verdade \mathbf{x} + o ruído gaussiano

Análise de estabilidade

A estabilidade do sistema depende da escolha adequada dos parâmetros do controlador PID e das características não lineares do sistema. Na análise de estabilidade, considera-se ainda a perturbação utilizada na atividade anterior, agora com a adição de um ruído gaussiano.

A análise formal da estabilidade exigiria a linearização completa do sistema e o cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana. Contudo, o controlador PID pode contribuir para a estabilização do sistema, desde que seus parâmetros sejam sintonizados corretamente. No entanto, o controlador PID não é suficientemente robusto para estabilizar a bolinha no levitador em todas as condições.

Se o ruído gaussiano for pequeno, é provável que o controlador consiga estabilizar a bolinha no planador.

Para quaisquer valores das constantes K_p , K_i , K_d , o comportamento do sistema nunca é totalmente estável. No exemplo abaixo, foram utilizados os valores 250, 40 e 40, respectivamente. O ruído foi definido como 0,1 vezes a variância, e a condição inicial do sistema é a mesma da atividade anterior.

Fig. 1 - Dados da esfera

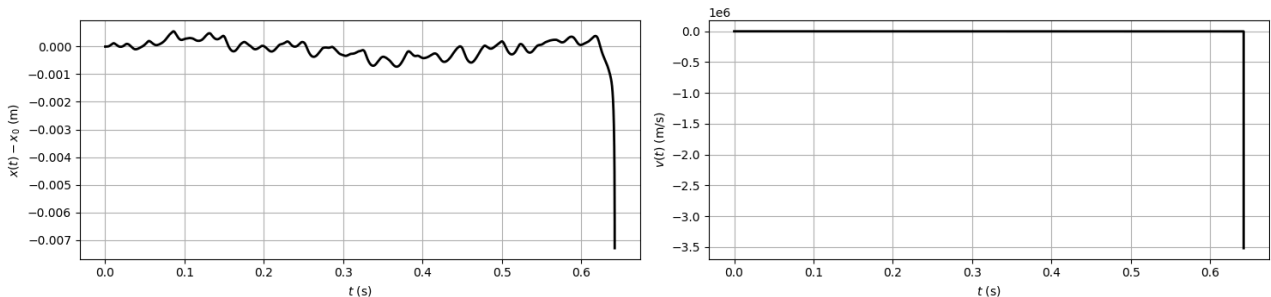
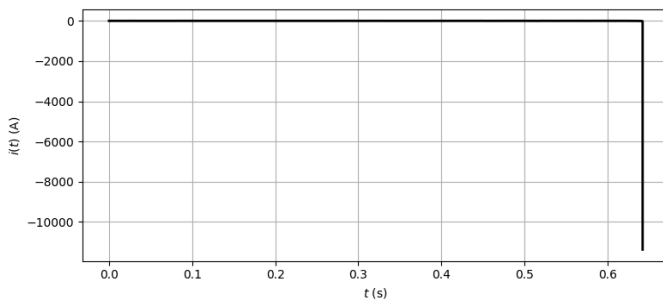


Fig. 2 - Dados da fonte



Em uma simulação cujo ruído seja $0.001 \times$ variância, e as constantes do PID igual às anteriores, o comportamento do sistema é:

Fig. 1 - Dados da esfera

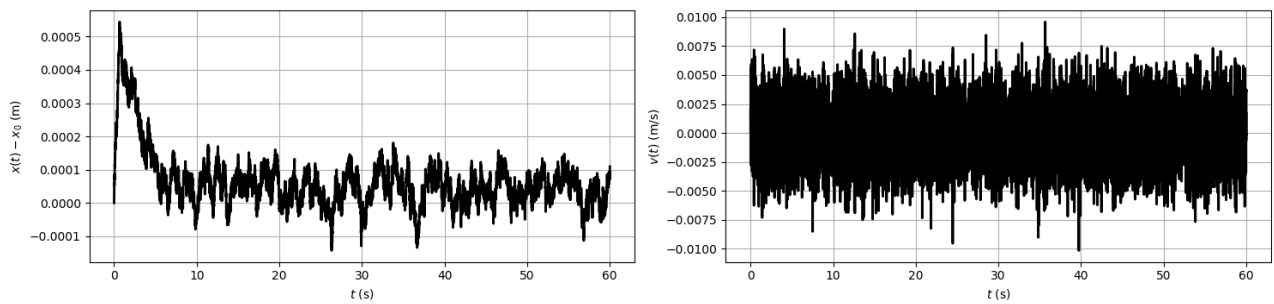
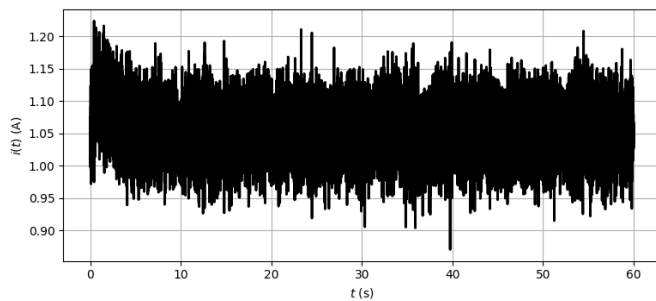


Fig. 2 - Dados da fonte



O comportamento é instável porém de pequena variação para o ruído gaussiano pequeno.

Embora o controlador PID ofereça uma forma simples de tentativa de estabilização, ele não é adequado para sistemas altamente não lineares e sensíveis a ruído, como o levitador magnético. Sua eficácia é limitada em presença de perturbações, e mesmo pequenos ruídos podem comprometer a estabilidade do sistema. Para alcançar um controle mais robusto e confiável, seria necessário explorar estratégias de controle mais avançadas, como controle adaptativo ou controle robusto.