

ELETROMAGNETISMO COMPUTACIONAL

TRABALHO COMPUTACIONAL 4

Simulação de Problemas Eletrostáticos

Exemplo de um eletropropulsor

Objetivo: Nesta aula iremos compreender um pouco sobre a utilização do método de elementos finitos na resolução de um problema eletrostático axissimétrico.

Exemplo de aplicação: Para uma melhor compreensão da utilização do FEn-iCS em problemas de eletrostática, siga o tutorial do capacitor apresentado na aula anterior. Diferentemente do problema do capacitor, o problema a ser apresentado aqui tem simetria axissimétrica. Como resultado, devemos encontrar uma forma fraca axissimétrica para o problema de modo similar ao que foi apresentado no problema magnetostático da bobina.

O propulsor eletrostático:

Uma aplicação interessante de campos eletrostáticos é a propulsão de veículos espaciais, sobretudo pequenos satélites (1-100 kg). Ao invés de queimar o combustível para gerar impulso a partir da expansão dos gases, os propulsores eletrostáticos aceleram partículas carregadas, gotículas ou íons o que permite uma maior eficiência. O princípio de funcionamento do propulsor é apresentado na fig. 1

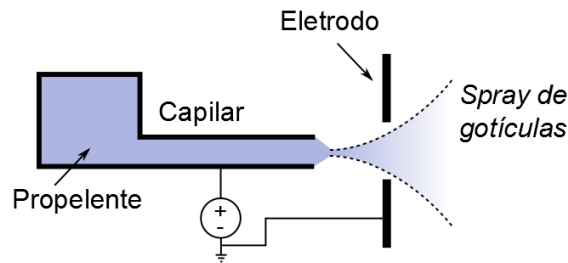


FIGURE 1. Esquemático de um propulsor eletrostático

Na ausência do campo elétrico, a tensão superficial na superfície do propelente ao final do tubo capilar fará com que o líquido permaneça em repouso. Aplicando-se uma diferença de potencial entre o capilar e o eletrodo (em forma de anel), as cargas positivas existentes no líquido se moverão em direção à superfície no capilar. A densidade superficial de carga na superfície do líquido (ρ_{sup}) será proporcional à componente normal do campo elétrico (E_n) sobre a superfície (condição de interface). A força de atração entre a densidade superficial e o eletrodo irá deformar a superfície do líquido. Com a deformação, as cargas se moverão para a região

deformada aumentando o campo elétrico naquela região (efeito de pontas). A mudança da geometria da superfície modifica também a tensão superficial de modo a encontrar um novo ponto de equilíbrio [1].

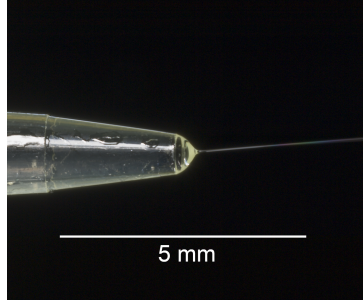


FIGURE 2. “Cone de Taylor” Foto por Robert Lamberts - The New Zealand Institute for Plant and Food Research Ltd.

Entretanto se o campo elétrico atingir um valor crítico, o sistema se tornará instável e o líquido será expelido. A forma como a superfície se deforma é conhecida como cone de Taylor e é ilustrada na fig. 2. A instabilidade ocorre aproximadamente quando

$$(1) \quad E_n > \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2\epsilon_0 R}}$$

onde γ é a tensão superficial do líquido, e R é o raio do tubo capilar [2].

A tensão necessária para o gerar o campo elétrico crítico pode ser obtida aproximando-se o eletrodo por um plano condutor infinito [2]. Nesse caso a tensão será dada por.

$$(2) \quad V = \sqrt{\frac{\gamma R_c}{\epsilon_0}} \ln \left(\frac{4d}{R_c} \right)$$

onde R_c é o raio de curvatura da superfície do líquido sem a presença do campo elétrico e d é a distância entre o capilar e o eletrodo.

Fundamentos físicos

O problema eletrodinâmico do eletrospray é dominado pelo campo eletrostático gerado pela diferença de potencial elétrico entre os eletrodos e o emissor, pois a corrente envolvida na emissão do propelente é muito baixa, na ordem de μA [3], resultando em efeitos magnéticos induzidos baixos [4], e a diferença de potencial elétrico entre o emissor e os eletrodos é alta, na ordem de kV [3]. O conjunto de equações que governa o fenômeno são a Lei de Faraday, a Lei de Gauss e a equação de conservação de carga, conforme indicado nas seguintes equações [5, 6]:

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_e,$$

$$(5) \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

onde ρ_e é a densidade volumétrica de carga, \mathbf{E} é o campo elétrico, ϵ é a permissividade do meio e \mathbf{J} é a densidade superficial de corrente [5].

Neste trabalho, aplica-se uma versão simplificada considerando fluidos de baixa condutividade, permitindo que o problema eletrodinâmico seja reduzido à equação eletrostática de Laplace [7]:

$$(6) \quad \nabla \cdot \epsilon \nabla \phi = 0,$$

onde ϕ é o potencial elétrico.

Usando o modelo simplificado apresentado em [7], é possível explorar a axissimetria do problema, conforme ilustrado na fig. 3. Dessa forma, pode-se construir uma forma fraca axissimétrica para encontrar o potencial elétrico dentro do domínio Ω . Repare que em [7] o problema elétrico é resolvido apenas uma vez e o campo elétrico é mantido constante durante a simulação de escoamento do fluido. Embora essa seja uma simplificação grosseira, ela permite validar a condição de campo crítico, essencial para a formação do cone de Taylor.

Parte prática

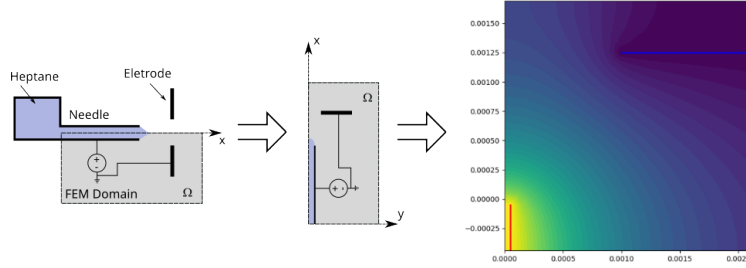


FIGURE 3. Representação do eletropulsor como um problema axissimétrico em 2D

Considere os parâmetros descritos na Tab. 1

Descrição	Parâmetro	Valor
Diâmetro do tubo capilar	$2R$	0.12mm
Distância entre o tubo e o eletrodo	d	6mm
Raios do eletrodo	R_a	2mm
	R_b	9mm

TABLE 1. Parâmetros do propulsor eletrostático

Considere também que o propelente é a Formamida (CH_3NO), com $\gamma = 0,05\text{N/m}$, $\epsilon_r = 84$ e que o raio de curvatura do propelente na saída do capilar, R_c , é igual ao raio do capilar ($R_c = R$). Construa um modelo axissimétrico para simular o problema na situação de instabilidade. Descreva o modelo (forma fraca e condições de contorno escolhidas) e apresente os resultados no relatório. Encontre o valor da tensão que satisfaz a condição de campo elétrico crítico para a formação do cone de Taylor. Compare a simulação com as expressões analíticas apresentadas em (1) e (2).

Por fim, repare que as linhas de fluxo de \mathbf{D} apontam para o eletrodo, ou seja, uma gotícula que se desprenda do tubo será acelerada até o eletrodo e, se nada for feito, ela permanecerá lá. Isso significa que o impulso total resultante seria nulo. Para evitar esse problemas, poderíamos usar uma fonte pulsante. Assim a força cessaria quando a partícula estivesse próxima ao eletrodo. Outra forma de fazer isso é adicionar um sistema neutralizador na saída do propulsor da figura 1. Pesquise e descubra como esse sistema funciona.

O problema dinâmico no propulsor eletrostático:

A solução do problema de escoamento do fluido no propulsor eletrostático é um problema multifísico que envolve não apenas a solução das equações de Maxwell, mas também as equações de Navier–Stokes [7]. As equações de Navier–Stokes modelam o problema fluidodinâmico representando o fluido como um meio contínuo e são obtidas por meio da conservação da massa, do momento e da energia no fluido.

Em princípio, as equações de Maxwell e as equações de Navier–Stokes deveriam ser resolvidas simultaneamente uma vez que a variação da geometria do fluido ao longo do tempo influenciaria a distribuição do campo elétrico na região de interesse. Já o campo elétrico, por sua vez, modificaria a força elétrica sobre o fluido. Dessa forma teríamos um problema multifísico acoplado. Entretanto, pequenas variações na distribuição do fluido podem não ocasionar variações significativas na configuração do campo elétrico. Dessa forma, uma primeira aproximação para o problema consiste em considerar os problemas multifísicos desacoplados, ou seja, primeiramente é resolvido o problema eletrostático e em seguida, a força elétrica é incorporada às equações de Navier–Stokes. Mesmo com essa simplificação, a solução do problema não é trivial e outros métodos numéricos podem ser mais eficientes que o FEM [7].

Com o intuito de ilustrar o comportamento dinâmico do propulsor eletrostático, consideraremos o caso simplificado de uma única gotícula viajando no eixo de simetria do propulsor. Assumindo que a geometria esférica da gotícula não se modifique durante o trajeto e que a única força sobre a gotícula é a força elétrica, podemos substituir as equações de Navier–Stokes pela segunda lei de Newton. Dessa forma, a equação diferencial ordinária que descreve a posição da gotícula sobre o eixo de simetria do problema pode ser escrita como:

$$(7) \quad F_e(x) = m \cdot \ddot{x}$$

onde x é a posição da gotícula, m é a massa da gotícula e $F_e(x)$ é a força elétrica na direção do eixo de simetria. $F_e(x)$ é obtida a partir da carga da gotícula e do campo elétrico na direção do eixo de simetria (obtido por meio da solução do FEM).

A carga por gota pode ser determinada segundo o método apresentado em [2] e é mostrada a seguir:

$$(8) \quad Q = 8\pi\sqrt{\epsilon_0\gamma}R_g^{3/2}$$

onde R_g é o raio da gotícula. A equação (8) assume que a carga na gota geraria o mesmo campo elétrico crítico E_n da saída do capilar, conforme ilustrado na fig. 4. Dessa forma, dado o raio da gotícula e a densidade do fluido, é possível utilizar os valores de campo obtidos no problema anterior para resolver a equação (7) e encontrar a velocidade de saída da gotícula.

Parte prática

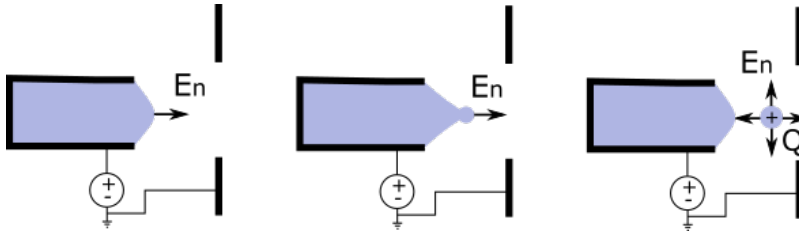


FIGURE 4. Formação da gotícula carregada

Resolva a equação (7) utilizando a geometria do problema anterior para calcular a força elétrica. Considere apenas o campo elétrico no sentido do eixo de simetria para obter a curva $F_e(x)$. Utilize quantos pontos achar conveniente e o método de interpolação de sua preferência. Considere também os parâmetros descritos na Tab. 2.

Descrição	Parâmetro	Valor
Raio da gotícula	R_g	0.002mm
Densidade da Formamida	ρ	1,13g/cm ³
Aceleração inicial	$\ddot{x}(x_0, t = 0)$	0m/s ²
Velocidade inicial	$\dot{x}(x_0, t = 0)$	0m/s

TABLE 2. Parâmetros do problema dinâmico

Reparem que a ODE da equação (7) pode ser reescrita na forma de espaço de estados. Definindo-se $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, a eq. (7) pode ser reescrita como:

$$(9) \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$(10) \quad \dot{x}_2 = F_e/m$$

Dessa forma, o problema pode ser resolvido facilmente por meio de métodos explícitos tais como o método de Euler ou Runge-Kutta. Utilizando o método de sua preferência, simule o problema e plote as curvas de F_e e velocidade em função da posição até o ponto em que a gotícula atravessa o eletrodo em forma de disco. Qual a velocidade de saída da gotícula? descreva no relatório as etapas para obtenção da solução.

Converta o arquivo para o formato **PDF** e o envie pelo Moodle. Anexe os arquivos de simulação em um arquivo .zip e envie juntamente com o PDF. **Cuidado!** Relatórios que não estiverem em formato **PDF** não serão avaliados.

REFERENCES

- [1] L. Velasquez-Garcia, A. Akinwande, and M. Martinez-Sanchez, "A micro-fabricated linear array of electrospray emitters for thruster applications," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 15, pp. 1260–1271, Oct 2006.
- [2] M. M. Sanchez, "Mit opencourseware - space propulsion lecture notes 23-25." Massachusetts Institute of Technology, 2015.
- [3] C. Chong, C. Maolin, and Z. Haohao, "Characterization of an ionic liquid electrospray thruster with a porous ceramic emitter," *Plasma Science and Technology*, vol. 22, no. 9, p. 094009, 2020.

- [4] L. Hu, C. Fuzhen, W. Ping, W. Fengshan, and Q. Hongfu, "Simulating electrohydrodynamics with smoothed particle hydrodynamics based on a charge-conservative approach," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 124, pp. 41–51, 2021.
- [5] K. D. Machado, *Teoria do eletromagnetismo: volume 1*. UEPG, 2007.
- [6] J. R. Reitz, *Foundations of electromagnetic theory*. Pearson Education India, 2009.
- [7] M. Ferreira, M. A. Piantinh, O. Soares, A. Fonseca, and R. Adriano, "Modeling an electro-spray propulsion system using an open-source smoothed particle hydrodynamics method," *27th ABCM International Congress of Mechanical Engineering*, 2023.