ELSEVIER

GERSON
LACHTERMACHER

Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões

MODELAGEM EM EXCEL

Para cursos de Administração, Economia e Ciências Contábeis

TERCEIRA EDIÇÃO, REVISTA E ATUALIZADA

CAMPUS

CONTÉM CD
COM SUPLEMENTO
SOLVER PREMIUM DO EXCEL

Material do Professor na WEB
www.campus.com.br/professores

Pesquisa Operacional

NA TOMADA DE DECISÕES

GERSON
LACHTERMACHER

Pesquisa Operacional
NA TOMADA DE DECISÕES

Edição, revista e atualizada

4ª Tiragem

ELSEVIER

CAMPUS

Projeto Gráfico e Editoração Eletrônica
Estúdio Castellani

Revisão Gráfica
Marco Antonio Corrêa

Elsevier Editora Ltda.
A Qualidade da Informação.
Rua Sete de Setembro, 111 - 16º andar
20050-006 Rio de Janeiro RJ Brasil
Telefone: (21) 3970-9300 FAX: (21) 2507-1991
E-mail: info@elsevier.com.br
Escritório São Paulo:
Rua Quintana, 753/8° andar
04569-011 Brooklin São Paulo SP
Tel.: (11)5105-8555

ISBN 13: 978-85-352-2087-2
ISBN 10:85-352-2087-9

Nota: Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceituai. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação à nossa Central de Atendimento, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão.

Nem a editora nem o autor assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

Central de atendimento
Tel.: 0800-265340
Rua Sete de Setembro, 111, 16º andar - Centro - Rio de Janeiro
e-mail: info@elsevier.com.br
site: www.campus.com.br

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte.
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

L144p Lachtermacher, Gerson, 1956-
Pesquisa operacional na tomada de decisões :
modelagem em Excel / Gerson Lachtermacher. - Rio de Janeiro :
Elsevier, 2007 - 4- Reimpressão.
il. ;

Inclui bibliografia
ISBN 85-352-2087-9 - 978-85-352-2087-2

1. Pesquisa operacional. 2. Processo decisório -
Modelos matemáticos. 3. Processo decisório - Processamento
de dados. 4. Programação linear. 5. Excel (Programa de
computador). 6. Planilhas eletrônicas. I. Título.

06-4182. CDD 658.403
CDU 65.012.122

Para Marly, Thiago, Luana, Manoel (in memorium) *e Dora*

"Matemática Moderna

Tenho uma esposa
Quatro filhos
Sete noras"

Manoel Lachtermacher
(1931-2003)

Agradecimentos

Devo agradecer aos seguintes colegas que me ajudaram de diversas maneiras na confecção deste livro:

- *Patricia Teixeira Fontanella,* pela ajuda no que tange à formatação e às críticas ao conteúdo da 1ª edição.
- *Professor Paulo Sergio de Souza Coelho* (D.Sc), pelos inúmeros exercícios sugeridos.
- *Professor Dr. Antônio de Araújo Freitas Júnior,* pelo encorajamento e pelo apoio durante os dois anos de escrita do livro e pelo prefácio da *1ª* edição.
- *Dr. Cláudio Luiz da Silva Haddad,* pelo prefácio da 2ª edição.

B *Professor Dr. Clóvis de Faro,* pelo prefácio da 3ª edição.

- *Alunos dos cursos de graduação em administração e de mestrado em ciências contábeis da UFRJ,* pelos erros apontados nas diversas tiragens das Iª e *2ª* edições deste livro.
- *Equipe da Editora Campus* e em especial *Ricardo Redisch,* pelo profissionalismo durante a produção do livro.

Prefácio (3ª edição)

Um livro texto que, poucos anos após seu lançamento, já está em sua terceira edição, dispensa apresentações. Seu sucesso, espelhado na acolhida que vem recebendo, atesta que o livro foi capaz de atingir os objetivos a que se propunha. No entanto, e aqui com um jogo de palavras no que tange ao seu conteúdo, a sua segunda edição ainda não corresponde a uma solução ótima, no sentido de máximo global. Como, fruto da experiência do autor, sempre é possível aprimoramentos, justifica-se esta nova edição.

Tendo sido solicitado a escrever este prefácio, ressalto que, preliminarmente, pouco tenho a acrescentar ao que já foi apropriadamente descrito pelos competentes prefaciadores que me antecederam, Antonio Freitas e Cláudio Haddad. Resta-me destacar uma agradável surpresa, ao menos para mim.

Tendo sido iniciado na programação linear com o uso do agora já venerando, embora ainda dominante, método simplex, desenvolvido por George B. Dantzig na década de 40 do século passado, fiquei alegremente surpreendido pela maneira eficiente e intuitiva com que o autor introduziu o assunto. Ao invés das enfadonhas apresentações de formas canónicas e operações elementares, o autor foi capaz de iniciar o leitor em seus fundamentos por meio de exemplos simples, mas suficientemente elucidativos.

Também digno de nota é o capítulo que trata da programação não linear. Os exemplos ali apresentados também, com rara felicidade, constituem-se em valiosa introdução a este tão complexo assunto.

Concluindo, parabenizo o autor na certeza de que esta nova edição terá o mesmo, se não maior, sucesso das outras duas.

Clóvis de Faro
Diretor do Instituto de Desenvolvimento
Educacional da Fundação Getulio Vargas

Novembro de 2006

Prefácio (2^a Edição)

Pesquisa Operacional é uma matéria em geral árida, que assusta pelo nível de sofisticação matemática e estatística que pode apresentar. Isto se agrava no caso de estudantes na maioria dos cursos de Economia e Administração, cuja orientação no Brasil tende a ser muito pouco quantitativa. Mesmo em cursos de Engenharia, que normalmente possuem um viés quantitativo mais robusto, muitas vezes os alunos enfrentam problemas de como relacionar o conteúdo teórico de Pesquisa Operacional à vida prática e como modelá-los de forma eficiente.

Este livro do Professor Gerson Lachtermacher, agora na sua segunda edição, resolve, com bastante eficácia, os dois dilemas. Além de ser um texto acessível, que não entra em sofisticações matemáticas desnecessárias para um bom entendimento da matéria, seu foco é na aplicação prática dos conceitos. Este foco não está presente apenas nos exemplos e exercícios, todos relacionados à vida real, mas também na constante ligação entre o problema conceituai e as ferramentas de informática disponíveis na programação Excel. O uso desta programação, de forma intensa, didática e ilustrativa ao longo de todo o livro, torna o aprendizado muito mais fácil para o aluno, que normalmente tem acesso àquela ferramenta, disponível na grande maioria dos computadores, ao contrário de outros programas mais sofisticados e complexos, porém inacessíveis à esmagadora maioria dos estudantes de Administração, Economia, Engenharia e áreas afins.

Assim, este livro é altamente recomendável a todos os estudantes que queiram ter uma visão prática e objetiva de Pesquisa Operacional e que queiram saber modelar problemas complexos de forma simples, utilizando os recursos comumente disponíveis na instituição de ensino, em casa ou no trabalho.

Cláudio L. S. Haddad, Ph.D.
Março de 2004

Prefácio (1ª edição)

Foi com grande orgulho e satisfação que recebi do Professor Gerson Lachtermacher as primeiras provas deste livro.

Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões destina-se a preencher uma importante lacuna nos livros-texto de Pesquisa Operacional/Métodos Quantitativos, dirigindo-se a estudantes e profissionais de Administração e áreas afins, como: Contabilidade, Economia e Engenharia de Produção.

O Professor Gerson tempera sua racionalidade matemática com experiência profissional, resultando em um trabalho bem fundamentado, claro e aplicado à realidade brasileira.

Este livro foi feito para ensinar aos alunos a arte de modelar e resolver problemas de forma simplificada. Este é um livro atraente e gostoso de ler.

O autor evitou símbolos especiais e todo esforço computacional deságua em planilhas. Todo conceito novo é ilustrado por exemplos.

A exposição é amigável, precisa e cuidadosa. O autor tornou a teoria acessível, sem se prender a tecnicalidades, objetivando resolver problemas de rotina em empresas. O leitor vai encontrar uma abordagem rigorosa e uma leitura agradável sobre os diversos temas tratados.

Ao escrever este livro, o Professor Gerson Lachtermacher inovou, ao colocar à disposição dos estudantes e profissionais, em língua portuguesa, um texto moderno, rigoroso e abrangente, síntese de suas múltiplas experiências como pesquisador e professor.

O Professor Gerson apresentou conceitos clássicos com roupagem nova, ao mesmo tempo rigorosa e descomplicada. O professor experiente valorizará a excelência da organização e a clareza da exposição. Em função disto, creio que este livro se tornará leitura quase obrigatória a todos os envolvidos com Pesquisa Operacional, bem como àqueles que desejam desvendar os mistérios da modelagem matemática.

Antonio Freitas, Ph.D.
Diretor Executivo FGV-RJ

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução a *Management Sciences*

Denominamos *Management Sciences* (MS) a área de estudos que utiliza computadores, estatística e matemática para resolver problemas de negócios. Esta área pode ser considerada como uma subárea de Pesquisa Operacional (PO), por tratar-se de modelagem matemática aplicada à área de negócios. Há poucos anos nos EUA, as duas sociedades que estudavam separadamente MS e Pesquisa Operacional se fundiram em uma sociedade denominada INFORMS. No Brasil a contraparte desta instituição norte-americana é a SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (www.sobrapo.org.br) -, que mantém anualmente simpósios científicos sobre o assunto e é filiada à INFORMS - International Federation of Operations Research Societies.

Entre os tipos de problemas em que MS-PO pode ser utilizada para ajudar no processo de decisão, encontram-se:

Problemas de Otimização de Recursos
Problemas de Localização
Problemas de Roteirização
1 Problemas de Carteiras de Investimento
Problemas de Alocação de Pessoas
Problemas de Previsão e Planejamento

A definição de *Management Sciences* nos leva a três objetivos inter-relacionados:

a. Converter Dados em Informações Significativas

Transformar dados brutos (números e fatos) em dados, através de seu armazenamento de forma organizada. Os Sistemas de Informações Gerenciais (SIG) serão responsáveis pela transformação destes dados em Informações Gerenciais que podem ser utilizadas no processo de tomada de decisão através dos Sistemas de Apoio à Decisão. Mais recentemente estas decisões podem ser acumuladas em bases de conhecimento através de Sistemas Especialistas. A Figura 1.1 representa este processo.

b. Apoiar o Processo de Tomada de Decisão de Formas Transferíveis e Independentes

Através dos Sistemas de Apoio à Decisão, dar suporte às decisões para que estas sejam independentes do decisor e assegurar que o processo de tomada de decisão seja claro e transparente.

c. Criar Sistemas Computacionais Úteis para os Usuários Não-técnicos

Facilitar, através de sistemas de fácil utilização, os processos de tomada de decisão operacional, gerencial e estratégico.

A atenção deste livro estará voltada para as técnicas que auxiliarão no desenvolvimento de *Modelos Computacionais* que poderão ser utilizados em sistemas de apoio à decisão. Por *Modelos Computacionais* entendemos um conjunto de relações matemáticas e hipóteses lógicas, implementadas em computador de forma a representar um problema real de tomada de decisão.

Com as facilidades dos microcomputadores, cada vez mais rápidos, um grande número de sistemas de apoio à decisão tem sido implementado pelos próprios tomadores de decisão, sem o auxílio de nenhum especialista da área de informática, em planilhas ele-

FIGURA 1.1 Transformação de dados brutos em conhecimento.

trônicas. Estas têm se constituído, na última década, em importante fator na melhoria do processo de tomada de decisão através de recursos crescentes para a implementação de modelos computacionais efetivos e por sua facilidade de utilização.

Este livro trará, durante todo o texto, diversas técnicas de modelagem computacional e apresentará como podem ser implementadas com a utilização de planilhas eletrônicas Excel® desenvolvidas pela Microsoft. O Apêndice A mostra como utilizar um software comercial específico denominado LINDO (www.lindo.com), desenvolvido pela Lindo Systems.

1.1 O PROCESSO DE MODELAGEM

Quando os gerentes se vêem diante de uma situação na qual uma decisão deve ser tomada entre uma série de alternativas conflitantes e concorrentes, duas opções básicas se apresentam: 1) usar a sua intuição gerencial e 2) realizar um processo de modelagem da situação e realizar exaustivas simulações dos mais diversos cenários de maneira a estudar mais profundamente o problema.

Até recentemente, a primeira opção se constituía na única alternativa viável, visto que não existiam nem dados e/ou informações sobre os problemas, ou mesmo poder computacional para resolvê-los. Com'o advento dos microcomputadores e com o aprimoramento da tecnologia de bancos de dados, esta deixou de ser a única opção para os tomadores de decisão. Um número cada vez maior de empresas e tomadores de decisão começou a optar pela segunda forma de tomadas de decisão, isto é, através da elaboração de modelos para auxiliar este processo.

Na realidade, nos dias de hoje está ocorrendo o inverso de 20 anos atrás. Possivelmente, a grande maioria dos tomadores de decisão está adotando a segunda opção de agir. Devemos ressaltar dois fatos relevantes:

a. A quantidade de informações disponíveis cresceu exponencialmente nos últimos anos com o advento da Internet, o que nos levou ao problema inverso de 20 anos atrás; a quantidade de dados é tão grande que se torna impossível montar modelos com todas estas informações. Devemos, portanto, separar as informações relevantes das irrelevantes, de maneira a modelar a situação para que possamos analisá-la.
b. Muitos gerentes deixaram de utilizar sua intuição completamente, o que é bastante prejudicial ao processo de tomada de decisão, pois uma base de conhecimentos pode estar sendo desperdiçada.

Portanto, achamos que as duas opções devem ser utilizadas conjuntamente, para melhorar ainda mais o processo de tomada de decisão; a intuição do tomador de decisão deve ajudá-lo na seleção das informações relevantes, nos possíveis cenários a serem estudados, na validação do modelo e na análise de seus resultados dos mesmos. Este processo pode ser representado pela Figura 1.2.

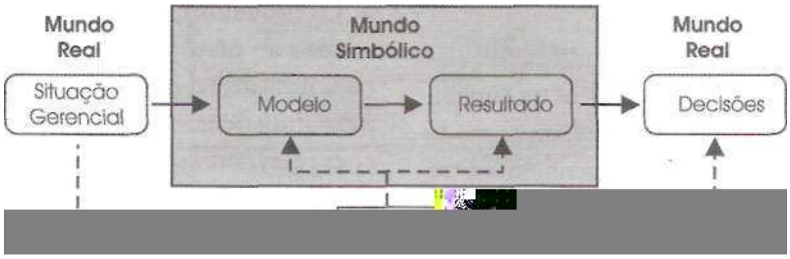


FIGURA 1.2 Processo de tomada de decisão.

1.2 A TOMADA DE DECISÃO

Podemos entender a tomada de decisão como o processo de identificar um problema ou uma oportunidade e selecionar uma linha de ação para resolvê-lo. Um problema ocorre quando o estado atual de uma situação é diferente do estado desejado. Uma oportunidade ocorre quando as circunstâncias oferecem a chance de o indivíduo/organização ultrapassar seus objetivos e/ou metas.

Vários fatores afetam a tomada de decisão e entre eles podemos destacar:

- Tempo Disponível para a Tomada de Decisão
- A Importância da Decisão
- O Ambiente
- Certeza/Incerteza e Risco
- Agentes Decisores
- Conflito de Interesses

Podemos classificar a tomada de decisão segundo diversas formas, entre elas:

a. **Nível Hierárquico na Empresa**

- Estratégico
- Gerencial
- Operacional

b. Tipo de Informação Disponível

- Estruturada
- Semi-estruturada
- Não-estruturada

c Número de Decisores

- Decisão Individual
- Decisão em Grupo

Devemos ressaltar que as decisões individuais são menos complexas de serem tomadas. O que pode dificultar um processo de tomada decisão em grupo pode estar ligado a diversas características, tais como:

- Diferenças culturais entre os integrantes do grupo.
- Existência de situações de conflito entre os integrantes do processo de tomada de decisão.

Além dessas características, uma dimensão é adicionada ao processo. A comunicação entre os agentes decisores se torna uma das principais dimensões de um processo de decisão em grupo. Dependendo de sua clareza e objetividade, ela pode se transformar em complicador ou facilitador do processo.

1.3 A TOMADA DE DECISÃO, O PROCESSO DE MODELAGEM E O DECISOR

Diversas vantagens podem ser citadas quando o decisor utiliza um processo de modelagem para a tomada de decisão:

- Os modelos forçam os decisores a tornarem explícitos seus objetivos.
- Os modelos forçam a identificação e o armazenamento das diferentes decisões que influenciam os objetivos.
- Os modelos forçam a identificação e o armazenamento dos relacionamentos entre as decisões.
- Os modelos forçam a identificação das variáveis a serem incluídas e em que termos elas serão quantificáveis.
- Os modelos forçam o reconhecimento de limitações.
- Os modelos permitem a comunicação de suas idéias e seu entendimento para facilitar o trabalho de grupo.

Dadas estas características, os modelos podem ser utilizados como ferramentas consistentes para a avaliação e a divulgação de diferentes políticas empresariais.

1.4 TIPOS DE MODELOS

Basicamente podemos ter três tipos de modelos. São eles: os Modelos Físicos, Análogos e Matemáticos ou Simbólicos. Dois exemplos dos modelos físicos seriam os modelos de aeronaves e casas utilizados por engenheiros. O segundo tipo representa as relações através de diferentes meios. Exemplos deste tipo de modelos são os mapas rodoviários que representam as rodovias de uma região através de traços sobre um papel e um marcador do tanque de gasolina que representa, através de uma escala circular, a quantidade de gasolina existente no tanque.

O terceiro e mais utilizado na modelagem de situações gerenciais são os modelos matemáticos, em que as grandezas são representadas por variáveis de decisão, e as relações entre as mesmas por expressões matemáticas. Por estas características, os modelos matemáticos necessitam de informações quantificáveis. Um modelo simbólico deve conter um conjunto suficiente de detalhes de maneira que:

- Os resultados atinjam suas necessidades.
- O modelo seja consistente com os dados.
- O modelo possa ser analisado no tempo disponível à sua concepção.

Os modelos simbólicos em que uma das variáveis representa uma decisão gerencial a ser tomada denominam-se modelos de decisão. Geralmente, as decisões são feitas para que um objetivo seja atingido. Portanto, nos modelos de decisão, adicionalmente às variáveis de decisão, uma variável que represente uma medida de performance dos objetivos é geralmente adicionada.

Duas características dos modelos matemáticos devem ser ressaltadas. São elas:

a. O modelo sempre será uma simplificação da realidade.
b. Detalhes devem ser incorporados ao modelo de forma cuidadosa para que:
   - Os resultados atinjam suas necessidades.
   - Seja consistente com as informações disponíveis.
   - Seja modelado e analisado no tempo disponível para tal.

Os modelos matemáticos podem ser classificados quanto ao nível de incerteza existente entre as relações das variáveis, como modelos determinísticos ou probabilísticos. Modelos em que todas as informações relevantes são assumidas como conhecidas (sem incertezas) são denominados determinísticos. Modelos em que uma ou mais variáveis de decisão não são conhecidas com certeza são chamados probabilísticos, e esta incerteza deve ser incorporada ao modelo.

A maneira mais simples de representar um modelo simbólico é denominada modelo da caixa preta. Neste tipo de representação apenas variáveis explicativas (de decisão), parâmetros e medidas de performance e/ou conseqüência são representados (variáveis dependentes). As relações entre elas são omitidas. A Figura 1.3 representa este tipo de representação.

1.5 PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

O processo de resolução de um problema apresenta cinco etapas consecutivas que podem, entretanto, ser repetidas dependendo da situação. Cada uma das etapas é essencial para o processo. Contudo, vale ressaltar que a identificação do problema, que pode parecer a mais simples de todas as etapas, pode não ser a mais simples em diversas situações. Uma má definição do problema nos levará certamente a nada, além de perda de tempo e esforço. A Figura 1.4 representa as diversas etapas de um processo de resolução de um problema.

1.6 MODELAGEM EM PLANILHAS ELETRÔNICAS

Além da ferramenta Solver, há inúmeras outras formas de modelar e resolver problemas em uma planilha eletrônica. Veremos a seguir a aplicação de algumas delas através da resolução de um problema. Não é intuito deste livro esgotar todas as funcionalidades existentes nas planilhas nem ser um manual para as mesmas. Nosso intuito é o de apenas demonstrar a grande aplicabilidade das planilhas eletrônicas no processo de tomada de decisão gerencial

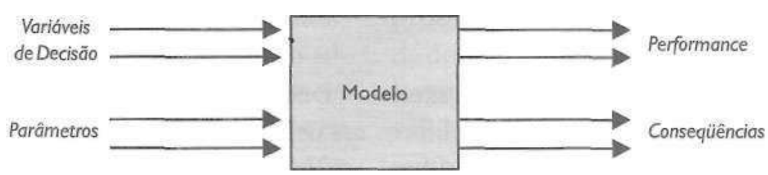


FIGURA 1.3 Representação de modelo caixa preta.

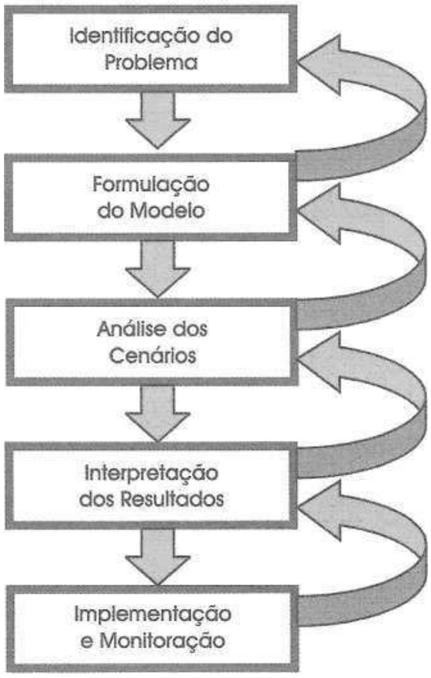


FIGURA 1.4 Processo de resolução de um problema.

O Caso da Fábrica de Pastéis e Pastelões Ltda.*

A Pastéis e Pastelões Ltda. fabrica pastéis de forno a partir de dois ingredientes básicos: massa semipronta e recheio congelado. A empresa pretende estabelecer um môdeio para previsão de seu lucro operacional mensal que lhe permita estabelecer o preço dos pastéis que deve ser praticado pela empresa. Desconsiderando a hipótese de alteração do tamanho e da qualidade dos pastéis, a diretoria considera que o preço unitário do pastel e o preço médio praticado pela concorrência são os únicos fatores relevantes na determinação da demanda, a qual se comporta segundo a seguinte equação: $Z = 15.000 - 5000x + 5000y$, onde x é o preço do pastel da Pastéis e Pastelões e y é o preço médio dos pastéis vendidos pelos concorrentes.

Dados adicionais	
Preço médio praticado pela concorrência (R$ por pastel)	R$ 7,00
Custo unitário da massa (R$ por pastel)	R$ 1,30
Custo unitário do recheio (R$ por pastel)	R$ 2,00
Custo unitário de processo (R$ por pastel)	R$ 0,40
Custo Fixo	R$ 6.000,00

*Baseado em Eppen et al., 1998.

Modelo Caixa Preta e Diagrama de Blocos

Modelo Caixa Preta e Diagrama de Blocos são instrumentos úteis na organização do problema e trazem o benefício de ajudar o início da documentação do modelo. Apesar de não resolverem o problema final, estas ferramentas auxiliam sobremaneira o entendimento da complexidade do modelo e a identificação das variáveis importantes.

O Modelo Caixa Preta é uma forma bastante simples de visualização das variáveis de entrada e saída relevantes do modelo. Para confeccioná-la, criamos uma caixa chamada "modelo" e listamos ao seu lado esquerdo, representando as variáveis e os parâmetros de entrada, todos os fatores cruciais para a concretização do resultado final, o qual é apresentado ao lado direito da caixa, como saída do modelo.

Tendo em vista que o preço dos pastéis vendidos pela concorrência é uma variável fora do controle da Pastéis e Pastelões, somente o preço unitário do pastel vendido pela empresa configura-se como variável de decisão do problema. Assim sendo, o preço médio praticado pela concorrência, os custos de matéria-prima, os custos de processamento e os custos fixos são os parâmetros do modelo.

O Diagrama de Blocos, por sua vez, mostra a existência de relações entre as diversas variáveis do mode-

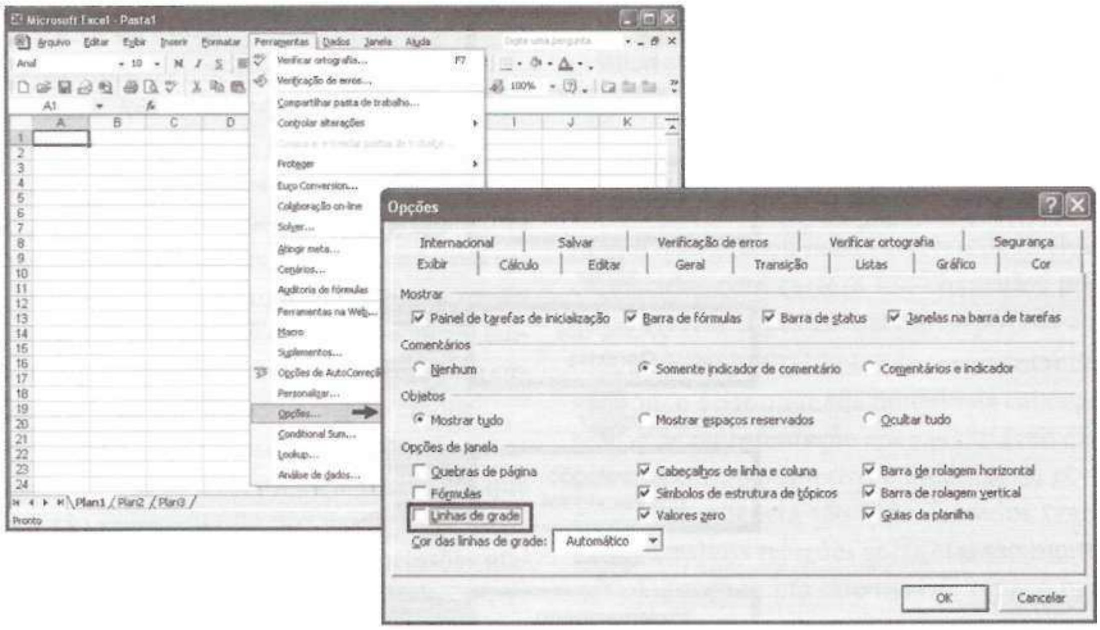


FIGURA 1.5 Como apagar linhas de grade da planilha eletrônica.

lo, isto é, mostra como, a partir das variáveis exógenas e dos parâmetros, chegamos às variáveis de medida de performance.

Para construirmos tanto o Modelo Caixa Preta quanto o Diagrama de Blocos para o problema da Pastéis e Pastelões Ltda., devemos primeiramente retirar as linhas de grade da planilha e solicitar a exibição da barra de ferramentas de desenho ao Excel. As Figuras 1.5 e 1.6 mostram como fazê-lo.

Feito isso, a modelagem do problema não tem mistérios. No caso do Modelo Caixa Preta, precisamos somente desenhar as caixas com seus respectivos nomes e as setas de entrada e de saída (Figura 1.7). Já no Diagrama de Blocos é necessário um pouco mais de

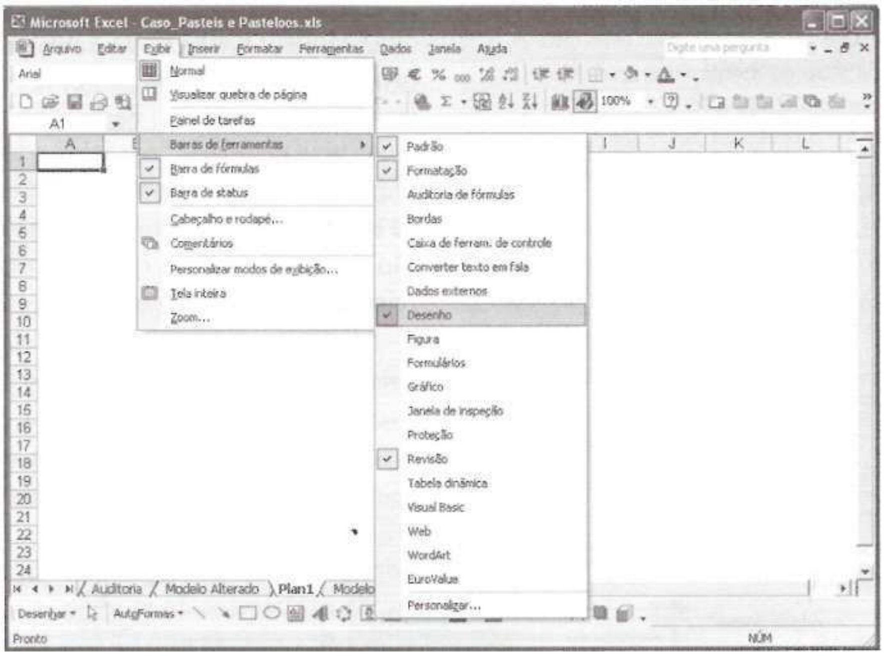
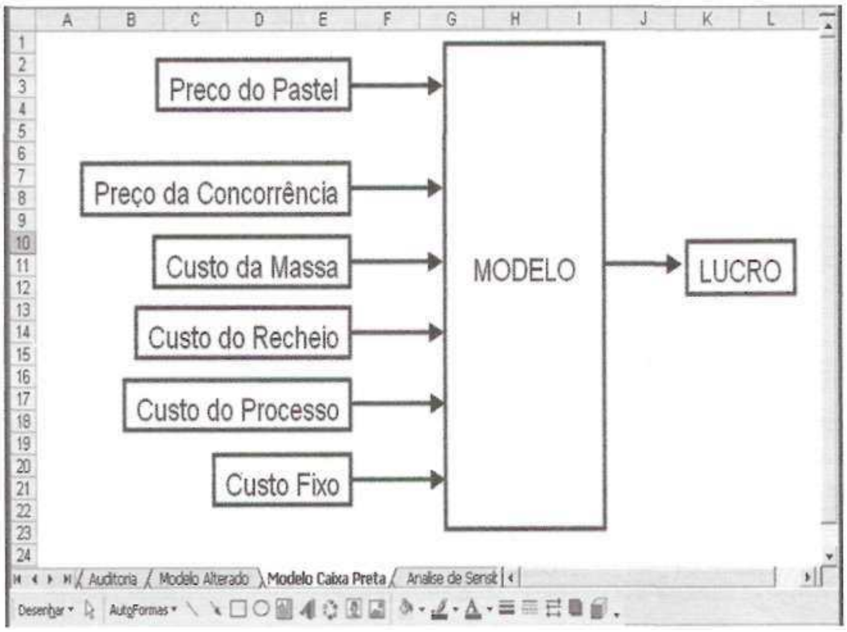


FIGURA 1.6 Como inserir a régua de desenho.



Modelo Caixa Preta.

atenção, pois é preciso identificar as relações de causa e efeito entre as variáveis (Figura 1.8).

Equações Matemáticas

Uma técnica bastante simples e muito utilizada para modelar e resolver problemas no Excel consiste, basicamente, na inserção de todas as fórmulas e relações existentes entre as variáveis na planilha eletrônica. Com este procedimento, podemos facilmente modificar os valores das variáveis controláveis e instantaneamente obter o impacto desta alteração no resultado final.

O objetivo maior da Pastéis e Pastelões Ltda. é obter um modelo de previsão do lucro operacional mensal. Portanto, nosso primeiro passo é deduzir todas as equações que regem o lucro da empresa, isto é, transformar as relações entre variáveis em equações matemáticas. No caso em estudo, temos:

- *Lucro Operacional* = Receita - Custo Total
- *Receita* = Preço do Pastel X Quantidade Demandada de Pastéis
- *Custo Total* = Custo de Processo +* Custo dos Ingredientes + Custo Fixo
- *Custo dos Ingredientes* — Quantidade Demandada de Pasteis x (Custo Unitário da Massa + Custo Unitário do Recheio)
- *Custo do Processo* — Quantidade Demandada de Pastéis X Custo Unitário de Processo

Л demanda de pastéis, como já vimos, comporta-se de acordo com a seguinte equação:

Quantidade Demandada de Pastéis = 15000 - (5000 X Preço do Pastel) + (5000 X Preço Médio do Pastel Praticado pela Concorrência)

Com as relações entre as variáveis definidas, partimos para a modelagem do problema na planilha Excel (Figura 1.9).

Na Figura 1.9 as fórmulas representam as relações matemáticas entre as variáveis. Notamos que foi inserido um preço de venda inicial igual a R$6,00 por pastel; contudo, o motivo maior de realizarmos esta modelagem em planilha eletrônica é a facilidade de simulação de diversos resultados, a partir da alteração das variáveis de decisão.

Assim sendo, com o problema já modelado em planilha, facilmente modificamos o valor do preço de venda do pastel e avaliamos o impacto desta alteração no resultado final. Vejamos, por exemplo, como se comporta o lucro operacional mensal da Pastéis e Pastelões Ltda., com preços de venda unitário do pastel de R$4,00 e R$8,00 (Figuras 1.10 e 1.11).

Através desta rápida simulação, verificamos que trabalhar com o preço de venda de R$6,00 por pastel é mais interessante para a empresa do que com o pre-

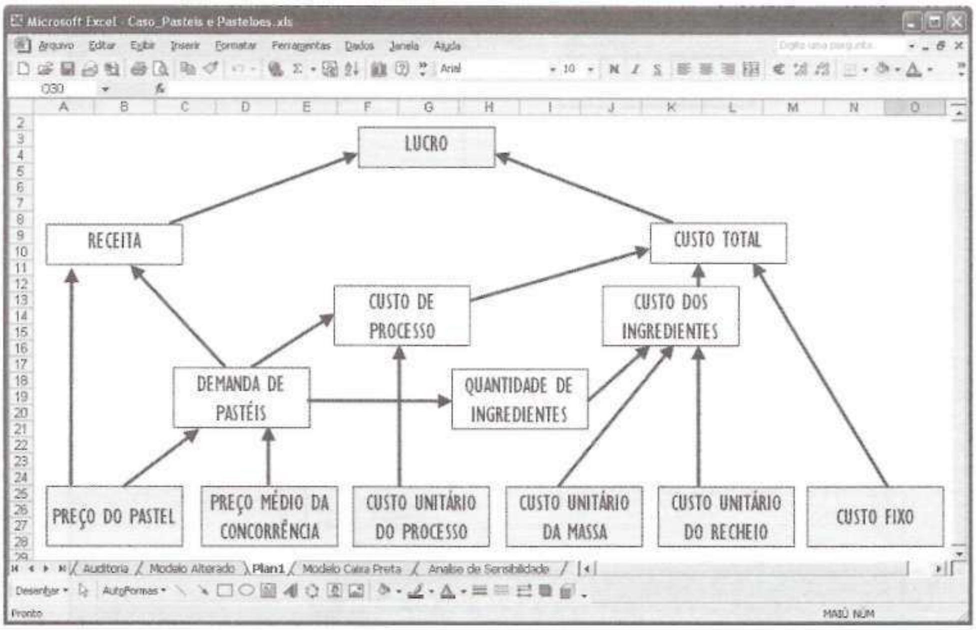


FIGURA 1.8 Diagrama de blocos.

ço de R$4,00 ou de R$8,00. Isto ocorre porque o preço unitário de R$4,00 não gera demanda suficiente para compensar a pequena margem de contribuição do produto, resultando em um lucro pequeno; e o preço de R$8,00 retrai a demanda de tal forma que se apresenta menos lucrativo do que o estabelecimento do preço de venda em R$6,00. Todavia, será que o preço de R$6,00 é realmente o que garante o maior lucro? E se o pastel for vendido a R$7,00, como se comportarão a demanda e o lucro operacional? Resolvemos esta dúvida simulando os resultados para diferentes níveis de preço, tarefa que pode ser realizada mais facilmente através de uma ferramenta chamada Projeção do Tipo "Se Então", que veremos mais adiante.

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	VARIÁVEL DE DECISÃO			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	6		
4	PARÂMETROS			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,3		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2		
8	Custo do Processo (R$)	0,4		
9	Custo Fixo (R$)	6000		
10				
11	Equação de Demanda de Pastéis - $z = 15000 - 5000x + 5000y$			
12	Termo Independente	15000		
13	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
14	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
15				
16	RESULTADOS FÍSICOS			
17	Número de Pastéis Demandados	20000	→	**B12+B13*B3+B14*B5**
18	RESULTADOS FINANCEIROS			
19	Receita (R$)	120000	→	**B17*B3**
20	Custo de Ingredientes (R$)	66000	→	**B17*(B6+B7)**
21	Custo do Processo (R$)	8000	→	**B17*B8**
22	Custo Fixo (R$)	6000	→	**B9**
23	Custo Total (R$)	80000	→	**B20+B21+B22**
24	**Lucro Operacional (R$)**	**40000**	→	**B19-B23**
25				

FIGURA 1.9 Modelo do exemplo da fábrica Pastel e Pastelões Ltda.

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	VARIÁVEL DE DECISÃO			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	4		
4	PARÂMETROS			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,3		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2		
8	Custo do Processo (R$)	0,4		
9	Custo Fixo (R$)	6000		
10				
11	Equação de Demanda de Pastéis - z = 15000 - 5000x + 5000y			
12	Termo Independente	15000		
13	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
14	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
15				
16	RESULTADOS FÍSICOS			
17	Número de Pastéis Demandados	30000	→	**B12+B13*B3+B14*B5**
18	RESULTADOS FINANCEIROS			
19	Receita (R$)	120000	→	**B17*B3**
20	Custo de Ingredientes (R$)	99000	→	**B17*(B6+B7)**
21	Custo do Processo (R$)	12000	→	**B17*B8**
22	Custo Fixo (R$)	6000	→	**B9**
23	Custo Total (R$)	117000	→	**B20+B21+B22**
24	**Lucro Operacional (R$)**	**3000**	→	**B19-B23**
25				

FIGURA 1.10 Impacto da alteração do preço do pastel para R$4,00 no lucro operacional.

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	VARIÁVEL DE DECISÃO			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	8		
4	PARÂMETROS			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,3		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2		
8	Custo do Processo (R$)	0,4		
9	Custo Fixo (R$)	6000		
10				
11	Equação de Demanda de Pastéis - z = 15000 - 5000x + 5000y			
12	Termo Independente	15000		
13	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
14	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
15				
16	RESULTADOS FÍSICOS			
17	Número de Pastéis Demandados	10000	→	**B12+B13*B3+B14*B5**
18	RESULTADOS FINANCEIROS			
19	Receita (R$)	80000	→	**B17*B3**
20	Custo de Ingredientes (R$)	33000	→	**B17*(B6+B7)**
21	Custo do Processo (R$)	4000	→	**B17*B8**
22	Custo Fixo (R$)	6000	→	**B9**
23	Custo Total (R$)	43000	→	**B20+B21+B22**
24	**Lucro Operacional (R$)**	**37000**	→	**B19-B23**
25				

FIGURA 1.11 Impacto da alteração do preço do pastel para R$8,00 no lucro operacional.

Representação de Equações no Excel

Com a ajuda do Excel, temos condições de confrontar graficamente os resultados apresentados pelo modelo com os dados reais ocorridos. Esta visualização é extremamente útil para a verificação da eficiência do modelo, pois podemos facilmente observar se os dados previstos estão próximos ou não do que aconteceu na prática e, assim, afirmar se o modelo é bom ou deve ser substituído por outro.

Uma auditoria na fábrica de pastéis constatou, através de dados contábeis, que o custo unitário de processo é variável de acordo com o número de pastéis produzidos, ou seja, se comporta de forma diferente da que o modelo havia assumido (R$0,40 por pastel, independentemente do nível de produção). Esta informação revela que há uma falha no modelo inicial, pois um dos parâmetros do problema (o custo do processo, no caso) não está sendo eficiente-

PASTÉIS E PASTELÕES

Qtde. de Pastéis Produzidos (nível de produção)	Custo de Processo (R$) REAL	Custo de Processo (R$) MODELO	
10000	3200	4000	→ A5*0,40
12000	3700	4800	
14000	4500	5600	
16000	5900	6400	
18000	7100	7200	
20000	8000	8000	
22000	9700	8800	
24000	11200	9600	
26000	14000	10400	
28000	16300	11200	
30000	19400	12000	

FIGURA 1.12 Dados contábeis obtidos no processo de auditoria.

mente representado. Representar erroneamente o comportamento de uma variável relevante significa tornar o modelo pouco representativo da realidade e, portanto, inadequado como suporte à tomada de decisão.

Desta forma, para que o nosso modelo de lucros mensais torne-se adequado, precisamos incluir nele a equação que melhor representa o comportamento do custo unitário de processo em relação ao número de pastéis produzidos. O Excel nos ajudará a descobrir esta equação. Neste sentido, primeiramente precisamos criar uma tabela em que constem dados contábeis coletados durante o processo de auditoria do custo mensal de processo para diferentes níveis de produção, bem como a previsão destes custos de acordo com o modelo inicial (número de pastéis produzidos no mês X R$0,40), para podermos compará-los. A tabela está apresentada na Figura 1.12.

O nosso próximo passo é solicitar um gráfico de dispersão ao Excel, selecionando as três colunas que aparecem na Figura 1.12: quantidade de pastéis produzidos, custo de processo - real e custo de processo - modelo original. O gráfico resultante irá mostrar, sobre o mesmo plano cartesiano, os pontos referentes aos custos reais e aos projetados, de forma que poderemos visualizar o erro do modelo para a previsão dos custos de processo (Figura 1.13).

Apenas observando o gráfico da Figura 1.13, concluímos que o modelo escolhido para cálculo do custo de processo não está representando bem os dados reais. Além de estimar valores muito diferentes dos verdadeiros, o modelo é tendencioso, pois abaixo de determinada quantidade de pastéis produzidos ele superestima os valores do custo de processo, e acima desse ponto ele subestima.

Já que a equação custo de processo = R$0,40 X número de pastéis produzidos não é um bom modelo para explicar o comportamento real dos custos de processo, precisamos encontrar uma equação que melhor represente os dados reais.

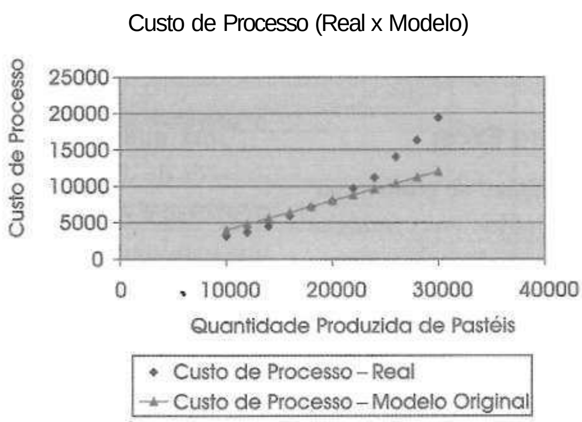


FIGURA 1.13 Comparação do real x previsto pelo modelo original.

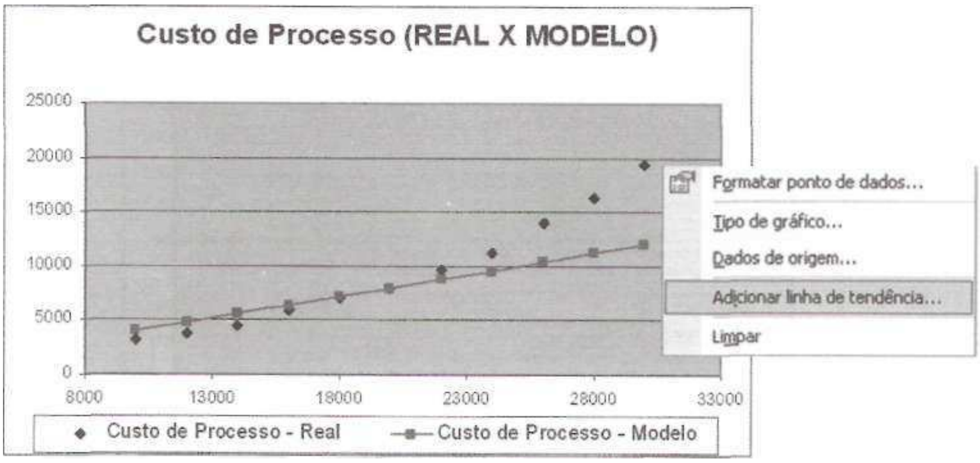


FIGURA 1.14 Solicitação de adição da linha de tendência.

Uma técnica muito útil para descobrirmos funções que expliquem satisfatoriamente as relações entre variáveis consiste em, a partir do gráfico com os dados reais, solicitar ao Excel a adição de uma linha de tendência *{trend Une).* Esta ferramenta tentará encontrar uma curva (e sua equação) que melhor se aproxime dos dados reais.

O procedimento para a inclusão de uma linha de tendência é muito simples. Devemos apenas: 1) clicar com o botão direito do mouse sobre os pontos dos dados reais representados no gráfico e selecionar a opção de adicionar linha de tendência (Figura 1.14); 2) escolher a curva que mais se assemelha ao desenho formado pelos dados reais (Figura 1.15); e 3) solicitar na tela de opções que seja exibida a equação da curva adicionada (Figura 1.16). Feito isso, o Excel automaticamente irá exibir sobre o gráfico a linha de tendência calculada e sua equação (Figura 1.17).

Escolhemos primeiramente verificar o ajuste de uma linha de tendência linear (Figura 1.17). Observando o gráfico, notamos rapidamente que a linha adicionada representa os dados reais de uma forma muito superior à da equação que estávamos utilizando para calcular o custo de processo. Assim, se substituirmos a fórmula anterior (custo de processo = número de pastéis produzidos X R$0,40) pela equação da li-

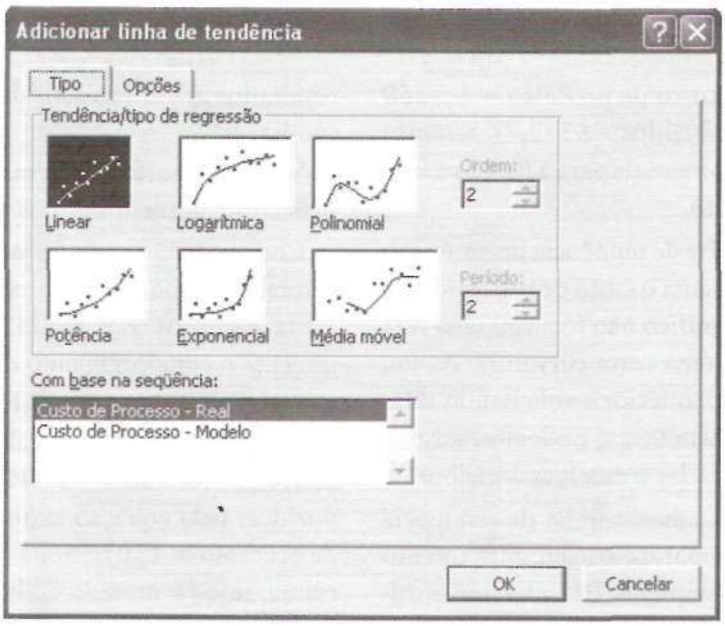


FIGURA 1.15 Tipos disponíveis de linha de tendência.

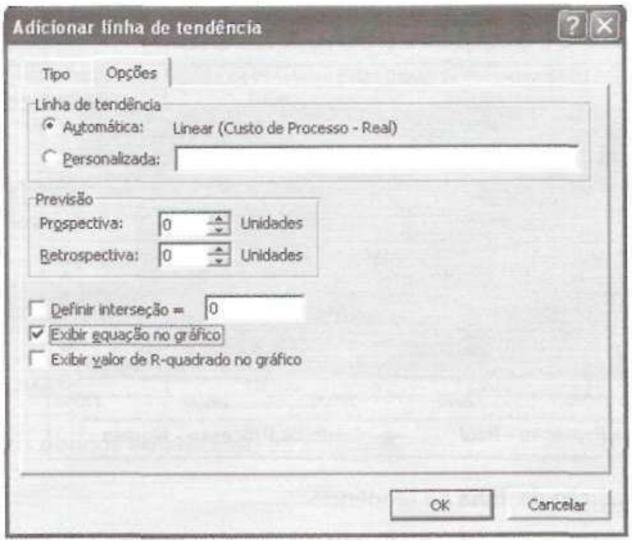


FIGURA 1.16 Solicitação da equação da linha de tendência.

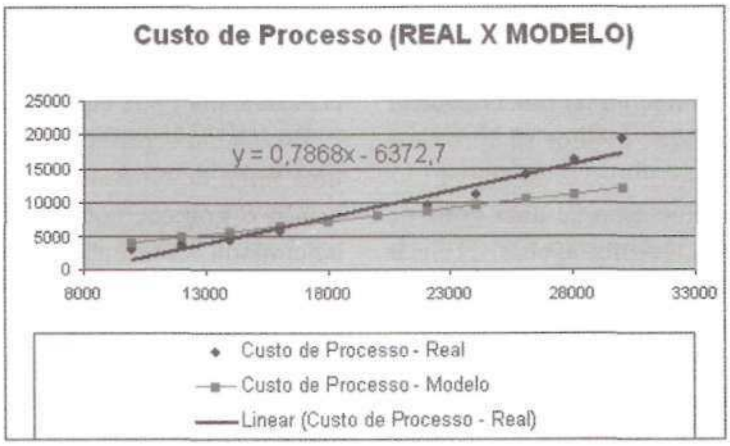


FIGURA 1.17 Linha de tendência linear e sua respectiva equação.

nha de tendência linear (custo de processo = 0,7868 x número de pastéis produzidos - 6372,7), teremos um modelo final de lucros mensais para a Pastéis e Pastelões Ltda. mais adequado.

Contudo, será que a linha de tendência linear é realmente a que melhor representa o custo de processo? Os dados reais marcados no gráfico não formam uma reta perfeita; eles apresentam uma certa curvatura. Assim, repetindo o procedimento anterior e solicitando diferentes tipos de linhas de tendência, podemos, através da análise gráfica, compará-las e escolher a melhor.

Na Figura 1.18 visualizamos a linha de tendência do tipo potência. Se compararmos seu ajustamento aos dados reais com o ajustamento da linha linear calculada anteriormente, constatamos que a equação potencial explica melhor o custo de processo, pois gera resultados mais próximos da realidade do que a equação linear.

Vejamos agora como uma linha de tendência exponencial se ajusta aos dados reais (Figura 1.19).

Comparando as três linhas de tendência adicionadas, constatamos que a equação exponencial é a que melhor se ajusta aos dados reais, sendo, portanto, a que melhor representa o comportamento do custo de processo.

Por conseguinte, se substituirmos a fórmula utilizada anteriormente para o cálculo do custo de processo (custo de processo = R$0,40 X número de pastéis produzidos) pela equação exponencial encontrada (custo de processo = $1305,536e^{0,0001 \times \text{número de pastéis produzidos}}$), refinaremos o modelo de lucros mensais da Pastéis e Pastelões Ltda., tornando-o mais representativo da realidade (Figura 1.20).

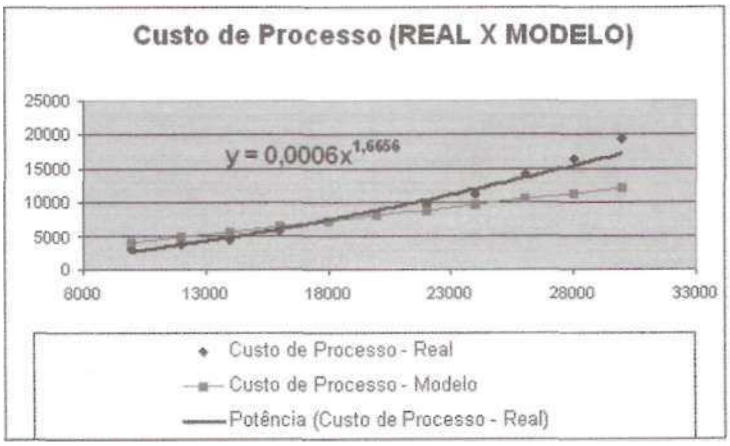


FIGURA 1.18 Linha de tendência do tipo potência.

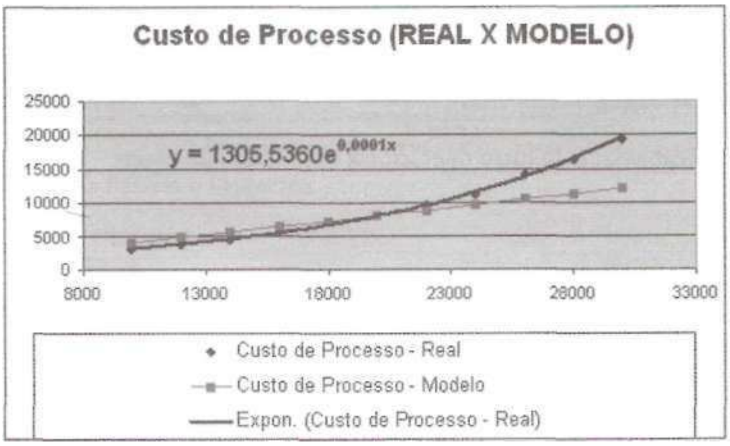


FIGURA 1.19 Linha de tendência exponencial.

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	**VARIÁVEL DE DECISÃO**			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	6,00		
4	**PARÂMETROS**			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,30		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2,00		
8	Custo Fixo (R$)	6000		
9				
10	Equação de Demanda de Pastéis - z = 15000 -5000x+5000y			
11	Termo Independente	15000		
12	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
13	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
14				
15	Equação do Custo do Processo $w=1305,5360e^{0,0001x}$			
16	Constante Multiplicativa	1305,536		
17	e - número neperiano	2,7182818		
18	Coeficiente do Número de Pastéis Demandados (x)	0,0001		
19				
20	**RESULTADOS FÍSICOS**			
21	Número de Pastéis Demandados	20000	→	B11+B12*B3+B13*B5
22	**RESULTADOS FINANCEIROS**			
23	Receita (R$)	120000	→	B21*B3
24	Custo de Ingredientes (R$)	66000,00	→	B21*(B6+B7)
25	Custo do Processo (R$)	9646,68	→	B16*(B17^(B18*B21))
26	Custo Fixo (R$)	6000	→	B8
27	Custo Total (R$)	81646,679	→	B24+B25+B26
28	***Lucro Operacional (R$)***	38353,32	→	B23-B27
29				

FIGURA 1.20 Melhor adequação do modelo da Pastéis e Pastelões.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**						
2	**VARIAVEL DE DECISÃO**						
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
4	**PARÂMETROS**						
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
8	Custo Fixo (R$)	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0
9							
10	Equação de Demanda de Pastéis - $z= 15000 - 5000x + 5000y$						
11	Termo Independente	15000,0	15000,0	15000,0	15000,0	15000,0	15000,0
12	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000,0	-5000,0	-5000,0	-5000,0	-5000,0	-5000,0
13	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0	5000,0
14							
15	Equação do Custo do Processo $w=1305,5360e^{0,0001x}$						
16	Constante Multiplicativa	1305,5	1305,5	1305,5	1305,5	1305,5	1305,5
17	e - número neperiano	2,7183	2,7183	2,7183	2,7183	2,7183	2,7183
18	Coeficiente do Número de Pastéis Demandados (x)	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
19							
20	**RESULTADOS FÍSICOS**						
21	Número de Pastéis Demandados	30000,0	25000,0	20000,0	15000,0	10000,0	5000,0
22	**RESULTADOS FINANCEIROS**						
23	Receita (R$)	120000,0	125000,0	120000,0	105000,0	80000,0	45000,0
24	Custo de Ingredientes (R$)	99000,0	82500,0	66000,0	49500,0	33000,0	16500,0
25	Custo do Processo (R$)	26222,4	15904,7	9646,7	5851,0	3548,8	2152,5
26	Custo Fixo (R$)	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0	6000,0
27	Custo Total (R$)	131222,4	104404,7	81646,7	61351,0	42548,8	24652,5
28	**Lucro Operacional (R$)**	**-11222,4**	**20595,3**	**38353,3**	**43649,0**	**37451,2**	**20347,5**

FIGURA 1.21 **Análise de sensibilidade do lucro operacional em relação ao preço.**

Projeção do Tipo Se-Então

Uma projeção do tipo Se-Então *(If-Then) é* exatamente o que seu nome sugere. Após termos definido o modelo e todas as relações entre as variáveis, podemos fazer uma análise do comportamento da(s) variável(eis) de saída a partir de diferentes entradas. Este tipo de projeção permite que façamos uma análise da sensibilidade do modelo, isto é, o quanto e em que proporção o resultado final é alterado a partir de pequenas alterações nos valores das variáveis de decisão.

Agora que já obtivemos o modelo definitivo para o problema da empresa, podemos verificar a sensibilidade do lucro mensal a modificações no preço de venda do pastel. Tornar possível esta análise é extremamente simples; precisamos apenas copiar as células com as relações do modelo em algumas colunas seguintes e, então, estabelecer preços de venda diferentes e crescentes ao longo das colunas (Figura 1.21).

Conforme podemos observar na Figura 1.21, o comportamento do lucro mensal da Pastéis e Pastelões Ltda. em relação ao preço de venda do pastel não é linear, pois o mesmo é crescente até o preço de venda unitário de R$7,00 (em torno de) e decrescente após este ponto*

Na Figura 1.22 visualizamos graficamente esta relação entre o preço de venda do pastel e o lucro mensal Através do gráfico, torna-se ainda mais fácil constatar que o preço de venda que maximiza o lucro mensal da empresa é em torno de R$7,00 por unidade de pastel

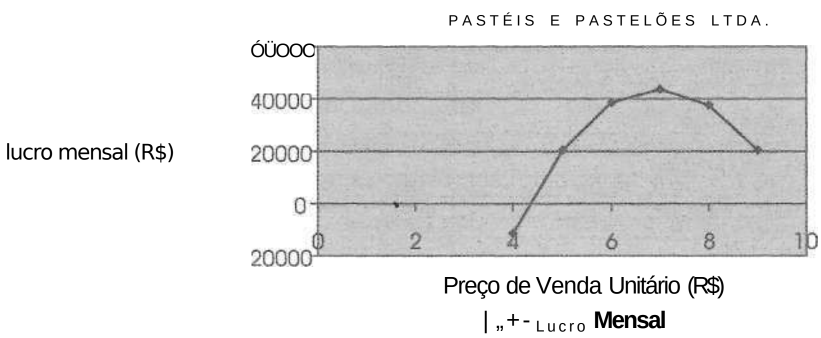


FIGURA 1.22 **Análise de sensibilidade do lucro mensal em relação ao preço de venda.**

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	**VARIÁVEL DE DECISÃO**			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	6,00		
4	**PARAMETROS**			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,30		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2,00		
8	Custo Fixo (R$)	6000		
9				
10	Equação de Demanda de Pastéis - z= 15000 -5000x+5000y			
11	Termo Independente	15000		
12	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
13	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
14				
15	Equação do Custo do Processo $w=1305,5360e^{0,0001x}$			
16	Constante Multiplicativa	1305,536		
17	e - número neperiano	2,7182818		
18	Coeficiente do Número de Pastéis Demandados (x)	0,0001		
19				
20	**RESULTADOS FÍSICOS**			
21	Número de Pastéis Demandados	20000	→	B11+B12*B3+B13*B5
22	**RESULTADOS FINANCEIROS**			
23	Receita (R$)	120000	→	B21*B3
24	Custo de Ingredientes (R$)	66000,00	→	B21*(B6+B7)
25	Custo do Processo (R$)	9646,68	→	B16*(B17^(B18*B21))
26	Custo Fixo (R$)	6000	→	B8
27	Custo Total (R$)	81646,679	→	B24+B25+B26
28	**Lucro Operacional (R$)**	38353,32	→	B23-B27

FIGURA 1.23 Modelo alterado da Pastéis e Pastelões.

Comando Atingir Meta *(Goal Seek)*

Uma maneira precisa de encontrar valores de saída específicos para um modelo consiste no uso de um copiando do Excel denominado Atingir Meta ou, em inglês, *Goal Seek.* Este comando procura automaticamente o valor solicitado para uma única variável de saída a partir de uma única variável de entrada,,

Uma aplicação bastante útil desta ferramenta é na análise do ponto de equilíbrio do negócio *(Break Even Point),* ou seja, neste caso, o preço de venda que gera am lucro mensal igual a zero. Para obter este valor, devemos, a partir do modelo definido na Figura 1.23, solicitar que o Comando Atingir Meta ajuste a célula que contém o resultado do lucro mensal para o valor zero, variando o valor da célula do preço de venda unitário do pastel (Figura 1.24).

A Figura 1.25 apresenta o resultado do comando. Nela verificamos que o preço de R$4,30 gera um lucro mensal igual a zero, o que corresponde a uma demanda de aproximadamente 28.490 pastéis.

1.7 MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Em diversas áreas do mundo real existe a escassez de um certo produto ou matéria-prima por sua dificuldade de produção e/ou de obtenção, entre outras razões. Esta dificuldade gera problemas para empregar me-

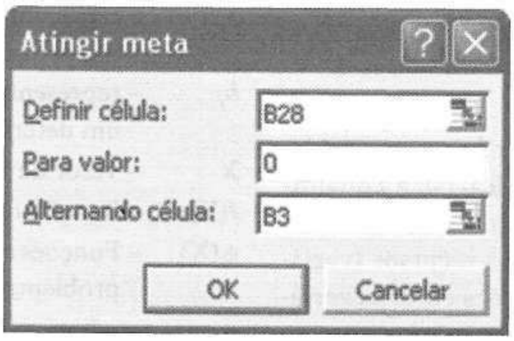


FIGURA 1.24 Comando Atingir Meta *{Cool Seek).*

	A	B	C	D
1	**Pastéis e Pastelões - Modelo de Lucro Mensal**			
2	**VARIÁVEL DE DECISÃO**			
3	Preço Unitário do Pastel (R$)	4,30		
4	**PARÂMETROS**			
5	Preço Médio Praticado pela Concorrência (R$)	7		
6	Custo Unitário da Massa (R$)	1,30		
7	Custo Unitário do Recheio (R$)	2,00		
8	Custo Fixo (R$)	6000		
9				
10	Equação de Demanda de Pastéis - z= 15000 -5000x+5000y			
11	Termo Independente	15000		
12	Coeficiente do Preço do Pastel (x)	-5000		
13	Coeficiente do Preço Médio da Concorrência (y)	5000		
14				
15	Equação do Custo do Processo $w=1305{,}5360e^{0{,}0001x}$			
16	Constante Multiplicativa	1305,536		
17	e - número neperiano	2,7182818		
18	Coeficiente do Número de Pastéis Demandados (x)	0,0001		
19				
20	**RESULTADOS FÍSICOS**			
21	Número de Pastéis Demandados	28489,959	→	B11+B12*B3+B13*B5
22	**RESULTADOS FINANCEIROS**			
23	Receita (R$)	122564,04	→	B21*B3
24	Custo de Ingredientes (R$)	94016,87	→	B21*(B6+B7)
25	Custo do Processo (R$)	22547,17	→	B16*(B17^(B18*B21))
26	Custo Fixo (R$)	6000	→	B8
27	Custo Total (R$)	122564,04	→	B24+B25+B26
28	**Lucro Operacional (R$)**	**0,00**	→	B23-B27

FIGURA 1.25 Análise do ponto de equilíbrio.

lhor estes recursos escassos de forma eficiente e eficaz. Busca-se, portanto, maximizar ou minimizar uma quantidade (Lucro, Custo, Receita, n- de produtos, entre outros), chamada de objetivo, que depende de um ou mais recursos escassos, Estes processos de otimização de recursos são aplicados a diversas áreas e entre elas podemos citar:

* Determinação de Mix de Produtos
  Escalonamento de Produção
* Roteamento e Logística
* Planejamento Financeiro
  Carteiras de Investimento
* Análise de Projetos
* Alocação de Recursos de Mídia
* Designação de Equipe

A área que estuda a otimização de recursos é denominada Programação Matemática. Nela a quantidade a ser maximizada ou minimizada é descrita como uma função matemática dos recursos (variáveis de decisão) escassos. As relações entre as variáveis são formalizadas através de restrições ao problema expressas como equações e/ou inequações matemáticas. De uma maneira geral, os problemas de Programação Matemática podem ser representados da seguinte forma:

Otimizar: Z = f(x,, x2, ...,xn)

$$\text{Sujeito a:}\quad \left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

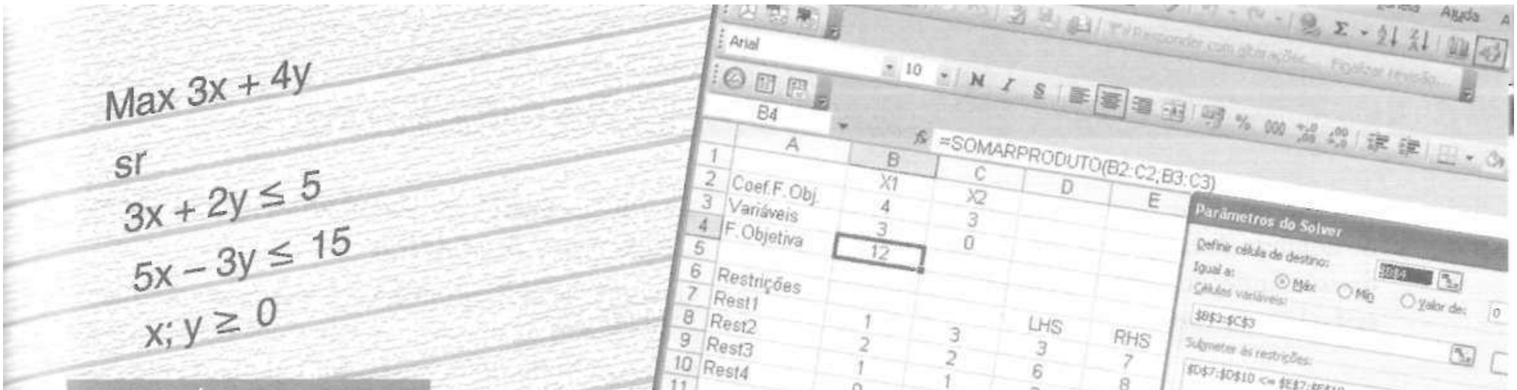
Onde:

- x_j - representa as quantidades das variáveis utilizadas; (j = 1,2 ... n)
- b_i - representa a quantidade disponível de um determinado recurso; (i = 1,2 ... m)
- X - vetor de *Xj;*
- $f(X)$ - Função-objetivo;
- $g_i(X)$ - Funções utilizadas nas restrições do problema; (i = 1,2 ... m)
- n - número de variáveis de decisão;
- m - número de restrições do modelo»

Por ser muito extensa, a área é subdividida em áreas menores dependendo do tipo das funções utilizadas nas funções-objetivo e restrições. Entre estas podemos citar:

- Programação Linear - Programação Matemática em que todas as funções-objetivo e restrições são representadas por funções lineares.
- Programação Não-linear - Programação Matemática em que pelo menos uma das funções-objetivo e/ou restrições são representadas por funções não-lineares. Entre os diversos tipos de Programação Não-linear encontram-se alguns tipos importantes, como a Programação Côncava, Convexa e Quadrática.

Nos próximos capítulos falaremos mais detalhadamente sobre cada um destes tipos de problemas e da maneira mais adequada para resolvê-los.



CAPÍTULO 2

Programação Linear

Como dito anteriormente, um problema de Programação Linear (LP) é um problema de programação matemática em que as funções-objetivo e de restrição são lineares, isto é:

Otimizar: $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Sujeito a:

$$\left.\begin{matrix} g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

Onde:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$
$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n$, para $i = 1, \ldots, m$

- n é o número de variáveis
- m é o número de restrições do problema
- i é o índice de uma determinada restrição ($i = 1, 2 \ldots$ m)
- j é o índice de uma determinada variável ($j = 1, 2 \ldots$ n)
- c_j é o coeficiente (constante) da variável x_j da função-objetivo
- a_{ij} é o coeficiente (constante) da variável x_j da j-ésima restrição

Dentre as suas áreas de aplicação encontramos:

- Administração da Produção
- Análise de Investimentos
- Alocação de recursos limitados
- Planejamento regional
- Logística
- Custo de transporte
- Localização da rede de distribuição
- Alocação de recursos em marketing entre diversos meios de comunicação

Diremos que um problema de programação linear está em sua forma padrão se tivermos uma Maximização da função-objetivo e se todas as restrições forem do tipo menor ou igual, bem como os termos constantes e variáveis de decisão não-negativos. Matematicamente podemos representar um problema padrão por:

Maximizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

ou na forma de reduzida:

Maximizar: $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Sujeito a: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

A fim de facilitar nossa explicação, algum tipo de padronização de terminologia deve ser introduzido. Entendemos por:

Solução qualquer especificação de valores (dentro do domínio da função-objetivo, *f)* para as variáveis de decisão, independente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível.

Solução Viável uma solução em que todas as restrições são satisfeitas.

Solução Ótima uma solução viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, isto é, maximiza ou minimiza a função-objetivo em toda a região viável, podendo ser única ou não.

Todo problema de Programação Linear parte de algumas hipóteses que são assumidas quando tentamos resolvê-los:

Proporcionalidade O valor da função-objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.

Aditividade Considera as atividades (variáveis de decisão) do modelo como entidades totalmente independentes, **não** permitindo que haja **interdependência** entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

Divisibilidade Assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário.

Certeza Assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, a certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

2.1 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR - RESOLUÇÃO GRÁFICA

Quando o problema envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um problema de programação linear pode ser encontrada graficamente. Imagine o seguinte problema de programação linear:

$$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 3 \quad (a)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (b)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (c)$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \quad (d)$$

Para resolvê-lo graficamente, o primeiro passo é estabelecer os dois eixos que irão representar as quantidades de *X1* e x_2. O passo seguinte seria encontrar o conjunto de soluções viáveis do problema. Para tal, poderíamos utilizar a representação gráfica imposta por cada uma das restrições, ou seja, determinar qual subárea do espaço *x*1 e x_2 seria aceita por cada restrição. Algumas dessas restrições são de fácil interpretação. As restrições (a), (b) e (d) impõem o seguinte conjunto de soluções viáveis, representado na Figura 2.1.

A restrição (c) não tem sua representação imediata. Para podermos representá-la, devemos nos lembrar da representação de uma reta no espaço R^2. Se considerarmos *x-L* como variável independente e x_2 como variável dependente (pois é uma função de x_1) a equação de uma reta é dada por $x_2 = ax_1 + b$, onde *a é* o coeficiente angular da reta e *b é* o coeficiente linear. Como temos uma inequação do tipo menor ou igual, todos os pontos abaixo e em cima da reta satisfazem a restrição. Portanto, podemos analiticamente definir:

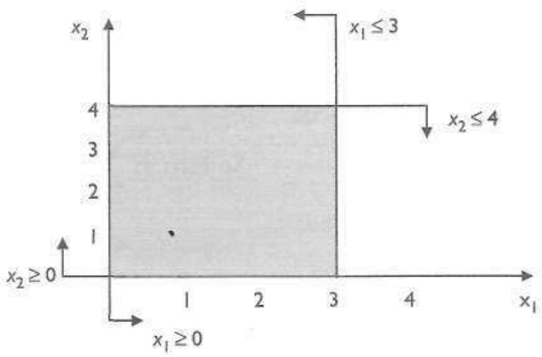


FIGURA 2.1 Representação gráfica do conjunto de soluções viáveis para (a),(b) e (d).

L

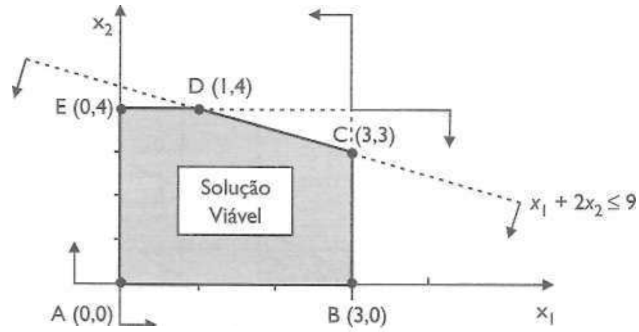


FIGURA 2.2 Conjunto de soluções viáveis do problema.

$$x_1 + 2x_2 \le 9$$

$$2x_2 \le 9 - x_1$$

$$x_2 \le \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

Graficamente podemos representar o conjunto de soluções viáveis por meio da Figura 2.2.

Um procedimento simples, porém não muito eficiente, consiste em se atribuir valores a Z, tornando i função-objetivo uma equação de uma reta. Por um processo de tentativa e erro, podemos chegar ao vaior ótimo verificando a existência de pontos da reta que fazem parte do conjunto de soluções viáveis. Ao encontrarmos o maior valor de Z possível, estaremos encontrando o valor máximo para a função-objetivo. Este procedimento pode ser representado na Figura 2.3.

Neste caso, o máximo valor de Z é igual a 21, numa solução ótima de $x_1=3$ e $x_2=3$. O mesmo procedimento pode ser utilizado para se obter uma solução rima para um problema de minimização. Considere seguinte problema:

Min $7x_1 + 9x_2$

Sujeito a: $-x_1 + x_2 < 2$

$$x_1 \le 5$$

$$x_2 \le 6$$

$$3x_1 + 5x_2 \ge 15$$

$$5x_1 + 4x_2 \ge 20$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Primeiramente, devemos encontrar o conjunto de soluções viáveis a partir do conjunto de restrições. A Figura 2.4 representa o conjunto de soluções viáveis.

Utilizando, então, o mesmo procedimento de tentativa e erro (Figura 2.5) usado no problema de maximização, poderemos chegar à solução mínima.

Algumas vezes, uma ou mais restrições não participam da determinação do conjunto de soluções viáveis. Estas restrições são denominadas redundantes. Em outras palavras, uma restrição é dita redundante quando sua exclusão do conjunto de restrições, de um problema, não altera o conjunto de soluções viáveis deste. Portanto, toda vez que existirem restrições redundantes em um problema de programação linear (LP), existirá um outro problema sem esta restrição com o mesmo conjunto de soluções viáveis e a mesma solução ótima. Como ilustração, considere o seguinte problema de minimização.

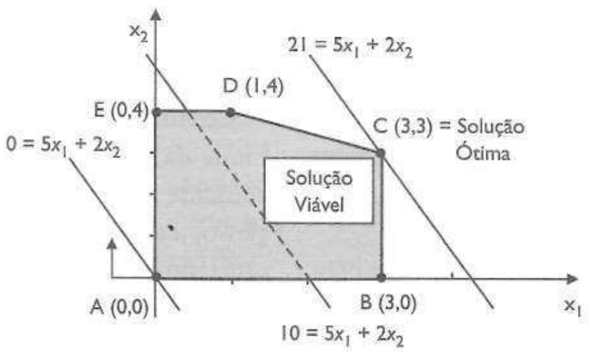


FIGURA 2.3 Procedimento de procura da solução ótima.

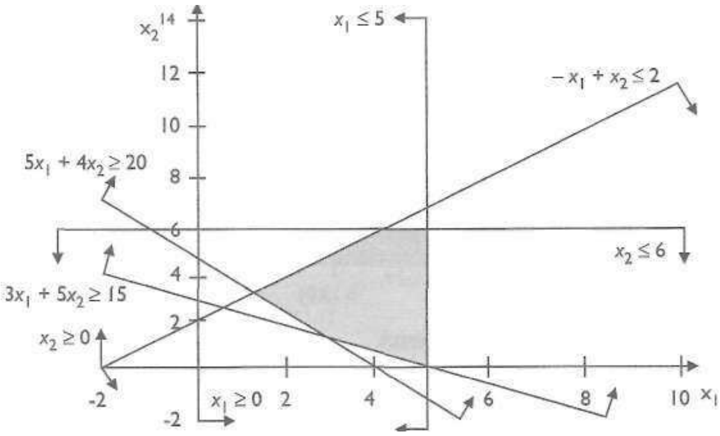


FIGURA 2.4 Conjunto de soluções viáveis do problema de minimização.

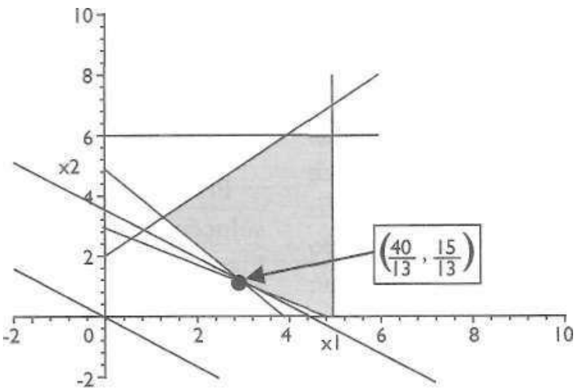


FIGURA 2.5 Processo de tentativa e erro para minimização do problema.

Min $6x_1 + 10x_2$

Sujeito a:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Com o mesmo processo de otimização usado até agora, podemos determinar o conjunto de soluções viáveis do problema representado na Figura 2.6.

Como podemos notar, a restrição X\ + $2x_2$ > 1 não participa da determinação do conjunto de soluções viáveis, já que, neste caso, 3x1 + $5x_2$ > 15 é dominante sobre a mesma.

Um problema de programação linear pode também apresentar mais de uma solução ótima, um ou mais conjuntos de valores produzem igual valor máximo na função-objetivo. Considere o problema a seguir.

Min $6x_1 + 10x_2$

Sujeito a:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizando o mesmo procedimento usado até agora, poderíamos determinar o conjunto de soluções viáveis e as soluções ótimas. A Figura 2.7 representa as soluções ótimas encontradas.

Como podemos notar, o coeficiente angular da reta limite da restrição 3x1 + $5x_2$ > 15 é igual a -0,6, que coincide com o coeficiente angular da reta da função-objetivo. Neste caso, todos os pontos que formam este lado do polígono serão simultaneamente soluções ótimas do problema.

Um outro caso especial pode ocorrer quando da resolução de um problema de Programação Linear (LP).

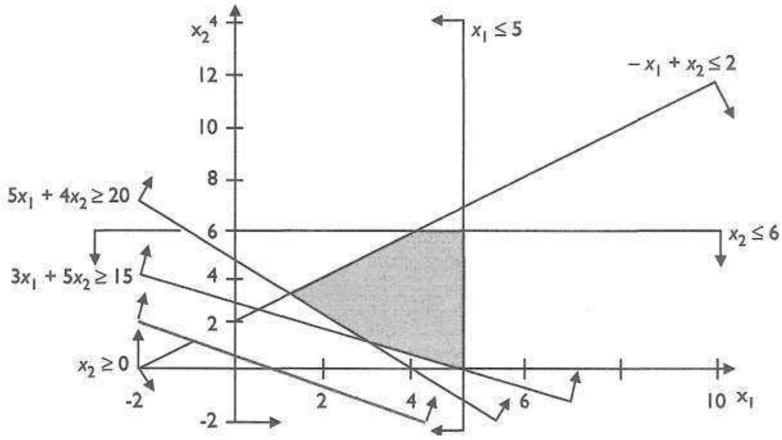


FIGURA 2.6 Restrições redundantes.

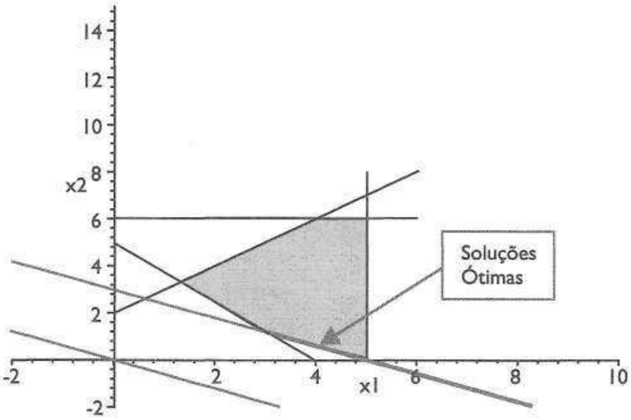


FIGURA 2.7 Múltiplas soluções ótimas.

Observe o que acontece quando tentamos resolver o seguinte problema.

Max	$6x_1 + 10x_2$
Sujeito a:	$-x_1 + x_2 \le 2$
	$x_2 \le 6$
	$3x_1 + 5x_2 \ge 15$
	$5x_1 + 4x_2 \ge 20$
	$x_1, x_2 \ge 0$

Usando o mesmo procedimento anterior, podemos encontrar o conjunto de soluções viáveis representado

Figura 2 *Z*

Como podemos observar da Figura 2.8, não existe limite ao crescimento de x_1, o que nos leva a concluir que também não existirá limite ao crescimento do valor de Z (função-objetivo). Portanto, neste caso, existem infinitas soluções viáveis e o problema é dito ilimitado, isto é, a solução viável existe, porém não conseguimos determinar a ótima.

O último caso especial de um problema de LP que gostaríamos de ressaltar é exatamente o oposto do caso anterior. Neste caso, em vez de existirem infinitas soluções, o conjunto de soluções viáveis será vazio; não existirão soluções para o problema. Considere o seguinte problema*

Max	$x_1 + x_2$
Sujeito a:	$x_1 + x_2 \le 12$
	$x_1 + x_2 \ge 20$
	$x_1, x_2 \ge 0$

Através da análise gráfica poderemos novamente encontrar o conjunto de soluções viáveis (vazio)? representado na Figura 2.9.

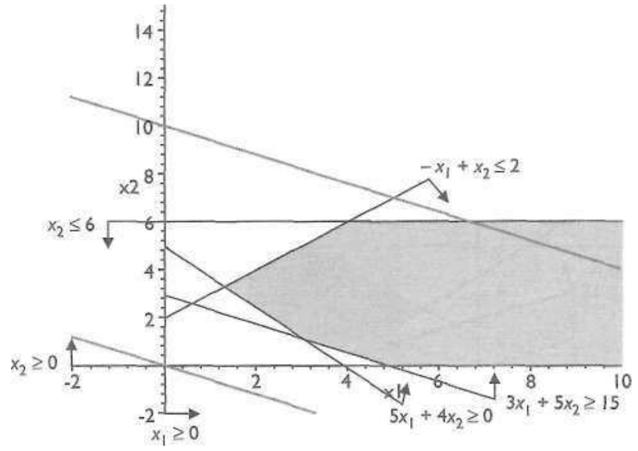


FIGURA 2.8 Conjunto de Soluções Viáveis de um LP com solução ilimitada.

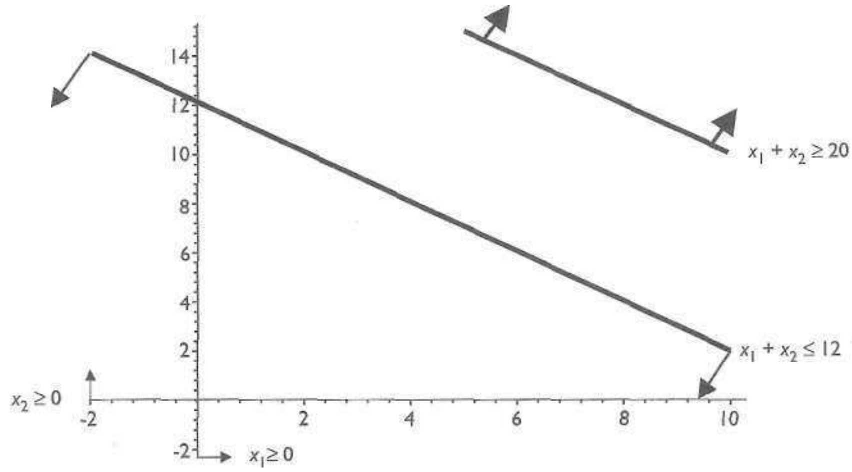


FIGURA 2.9 Conjunto de soluções viáveis (VAZIO) de um LP inviável.

EXERCÍCIOS 2.1

1. Obtenha graficamente a solução ótima para o problema abaixo através do deslocamento da função-objetivo:

Maximizar $4x_1 + 3x_2$
Sujeito a:
$x_1 + 3x_2 \leq 7$
$2x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Resolva o seguinte problema de programação linear através da análise gráfica, deslocando a função-objetivo:

Min $x_1 + 2x_2$
Sujeito a:
$x_1 + x_2 \geq 1$
$-5x_1 + 2x_2 \geq -10$
$3x_1 + 5x_2 \geq 15$
$x_1, x_2 \geq 0$

3. Solucione o problema de programação linear abaixo utilizando o método de deslocamento da função-objetivo visto nesta seção:

Maximizar $4x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

<t. Resolva o seguinte problema de programação linear através do deslocamento da função-objetivo:

Minimizar $8x_1 + 10x_2$
Sujeito a:
$-x_1 + x_2 \leq 2$
$4x_1 + 5x_2 \geq 20$
$x_1 \leq 6$
$x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

i. Obtenha graficamente a solução ótima do problema de programação linear abaixo (utilize o método apresentado nesta seção):

Maximizar $x_1 + 3x_2$
Sujeito a:
$4x_1 + x_2 \geq 30$
$10x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os três tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessuras fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâminas. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de R$100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível? (Resolva pela análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.)

7. Um pizzaiolo trabalha 8 horas por dia e faz 16 pizzas por hora, caso faça somente pizzas, e 9 calzones por hora, se fizer somente calzones. Ele gasta 40 gramas de queijo para preparar uma pizza e 60 gramas de queijo para fazer um calzone. Sabendo-se que o total disponível de queijo é de 5 quilogramas por dia, e que a pizza é vendida a R$18,00 e o calzone a R$22,00, pergunta-se: quantas unidades de pizzas e calzones uma pizzaria com três pizzaiolos deve vender diariamente para maximizar a sua receita? (Resolva pela análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.)

•*í,* A Esportes Radicais S/A produz pára-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha de montagem tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 hpras semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa-delta requer 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa e que o lucro pela venda de cada pára-quedas é de R$60,00 e para cada asa-delta vendida é de R$40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S/A. (Resolva pela análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.)

9. A empresa Have Fun S/A produz uma bebida energética muito consumida pelos freqüentadores de danceterias noturnas. Dois dos componentes utilizados na preparação da bebida são soluções compradas de laboratórios terceirizados - solução Red e solução Blue - e que provêem os principais ingredientes ativos do energético: extrato de guaraná e cafeína. A companhia quer saber quantas doses de 10 mililitros de cada solução deve incluir em cada lata da bebida, para satisfazer às exigências mínimas padronizadas de 48 gramas de extrato de guaraná e 12 gramas de cafeína e, ao mesmo tempo, minimizar o custo de produção. Por acelerar o batimento cardíaco, a norma padrão também prescreve que a quantidade de cafeína seja de, no máximo, 20 gramas por lata. Uma dose da solução Red contribui com 8 gramas de extrato de guaraná e 1 grama de cafeína, enquanto uma dose da solução Blue contribui com 6 gramas de extrato de guaraná e 2 gramas de cafeína. Uma dose de solução Red custa R$0,06 e uma dose de solução Blue custa R$0,08. (Resolva pela análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.)

A empresa de logística Deixa Comigo S/A tem duas frotas de caminhões para realizar transportes de cargas para terceiros. A primeira frota é composta por caminhões médios e a segunda por caminhões gigantes, ambas
ciais para transportar sementes e grãos prontos para o consumo, como arroz e feijão. A primeira frota tem uma capacidade de peso de 70.000 quilogramas e um limite de volume de 30.000 metros cúbicos, enquanto a segunda pode transportar até 90.000 quilogramas e acomodar 40.000 metros cúbicos de volume. O próximo contrato de transporte refere-se a uma entrega de 100.000 quilogramas de sementes e 85.000 quilogramas de grãos, sendo que a Deixa Comigo S/A pode aceitar levar tudo ou somente uma parte da carga, deixando o restante para outra transportadora entregar. O volume ocupado pelas sementes é de 0,4 metro cúbico por quilograma, e o volume dos grãos é de 0,2 metro cúbico por quilograma. Sabendo que o lucro para transportar as sementes é de R$0,12 por quilograma e o lucro para transportar os grãos é de R$0,35 por quilograma, descubra quantos quilogramas de sementes e quantos quilogramas de grãos a Deixa Comigo S/A deve transportar para maximizar o seu lucro. (Resolva através da análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.)

2.2 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR - RESOLUÇÃO ANALÍTICA

O método utilizado na seção anterior só pode ser empregado quando existirem duas ou, no máximo, três variáveis (de difícil visualização). Quando este limite for ultrapassado, uma maneira de se tentar resolver o problema é a utilização do método analítico. Para tal, utilizaremos o procedimento representado pela Figura 2.10.

Considere o problema abaixo proposto por Chvátal (1980). Este problema está na forma-padrão, por se tratar de um problema de maximização e por ter apenas restrições do tipo menor ou igual.

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Sujeito a:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$-x_1 + 3x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

O primeiro passo do nosso procedimento é a determinação de uma solução inicial viável, que será iterativamente melhorada. Se, em vez de inequações, tivéssemos um conjunto de equações, vários procedimentos tradicionais de cálculo poderiam ser utilizados para se encontrar a primeira solução.

Nosso primeiro passo será transformar o conjunto de restrições em um conjunto de equação equivalentes, através da introdução de variáveis que irão representar a folga entre os lados direito (RHS - *Right Hand Side)* e esquerdo (LHS *-Left Hand Side)* das inequações (por se tratar de um problema na forma-padrão). No conjunto de equações a seguir as variáveis x_4, x_5, x_6 e x_7 representam a diferença entre LHS e RHS das restrições. Desde que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero, os sinais das inequações serão garantidos e tornarão o conjunto de equações equivalente ao conjunto de restrições.

$$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 2 + x_1 - 3x_3$$
$$x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

Condição de Não-negatividade

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

As novas variáveis são denominadas variáveis de folga por representarem a diferença entre o LHS e o RHS. Se adicionarmos a equação $Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$ que representa a função-objetivo, o conjunto resultante de equações tem o nome de dicionário.

$$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 2 + x_1 - 3x_3$$
$$x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Por questão de terminologia, definiremos como Variáveis Básicas as que se encontram do lado esquerdo das expressões de um dicionário e Variáveis Não Básicas as que se encontram do lado direito das expressões do dicionário. A cada nova solução, as varia-

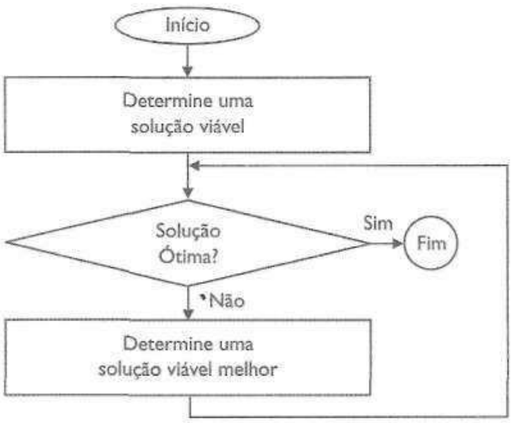


FIGURA 2.10 Fluxo de resolução analítica.

veis básicas e não básicas se alternam. Em cada ciclo do processo de busca de uma solução ótima para o problema, uma variável entra e outra sai do conjunto de variáveis básicas.

Poderemos agora encontrar facilmente a solução inicial para o nosso problema. Se considerarmos x_1, x_2, e x_3 iguais a zero, poderemos determinar os valores de todas as outras variáveis por mera substituição de valores, conseqüentemente o valor de Z, isto é, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$, $x_6 = 4$, $x_7 = 2$ e $Z = 0$. Naturalmente este não será o valor máximo para Z, exceto por muita coincidência, mas será com certeza uma solução viável para o nosso problema inicial. Esta solução viável obtida através da igualdade a zero de todas as variáveis que estão à direita do conjunto de equações é chamada de solução óbvia. A Figura 2.11 representa a transformação do problema de maximização em um dicionário com sua solução óbvia viável.

Como desejamos maximizar $Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$ podemos facilmente verificar que esta não é a solução ótima. Um incremento em qualquer uma das variáveis, x_1 x_2, ou x_3 (que nesta solução têm valores iguais a zero) fará Z aumentar de valor, já que os coeficientes de todas as variáveis são positivos na linha Z do dicionário. Devemos, portanto, escolher uma variável para ser incrementada a fim de prosseguirmos no nosso intuito de maximizar o valor de Z. Qualquer uma das variáveis acima poderia ser escolhida. Um critério de escolha poderia ser o de selecionar aquela variável que para um mesmo incremento de valor gerasse um maior incremento em Z, isto é, aquela que apresentasse o maior coeficiente positivo na linha Z do dicionário. No nosso caso, isto nos levaria a um empate das variáveis x_1 e x_2. Como a seleção de qualquer uma das variáveis não iria ferir o nosso critério de escolha, escolheremos arbitrariamente a variável x_1, para ser incrementada a partir de seu valor original (zero).

Em cada ciclo do nosso processo iremos alterar apenas uma variável do conjunto de variáveis básicas, isto é, apenas uma variável irá entrar no conjunto de variáveis básicas e, conseqüentemente, uma sairá, a fim de que o número total de variáveis básicas permaneça o mesmo. No nosso caso, a variável x_1 entrará na base (conjunto de variáveis básicas).

Precisamos encontrar uma variável que cederá o lugar na base para a variável x_1; precisamos determinar a variável que sairá da base. Como apenas uma das variáveis que não pertence à base entrará, as demais permanecerão com o mesmo valor (igual a zero) na solução óbvia do próximo dicionário. Logo, se observarmos em nosso dicionário as linhas referentes às restrições do nosso problema inicial, considerando x_2 e x_3 iguais a zero, chegaremos a:

$$x_4 = 3 - x_1$$

$$x_5 = 2 + x_1$$

$$x_6 = 4 - 2x_1$$

$$x_7 = 2 - 2x_1$$

Como x_4, x_5, x_6 e x_7 devem ser maiores ou iguais a zero por restrições do nosso problema, então:

$$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$$

$$x_5 = 2 + x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq -2$$

$$x_6 = 4 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2$$

$$x_7 = 2 - 2x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 1$$

Analisando graficamente sobre o eixo dos números reais as restrições anteriores (Figura 2.12) notaremos

$$\begin{array}{lcl}
\text{Max } 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 & & x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
\text{s.r.} & & x_5 = 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 & \Rightarrow & x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\
-x_1 + 3x_3 \leq 2 & & x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 & & Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \text{Solução } (0; 0; 0; 3; 2; 4; 2)\ Z = 0
\end{array}$$

Transformação do LP em dicionário de equações.

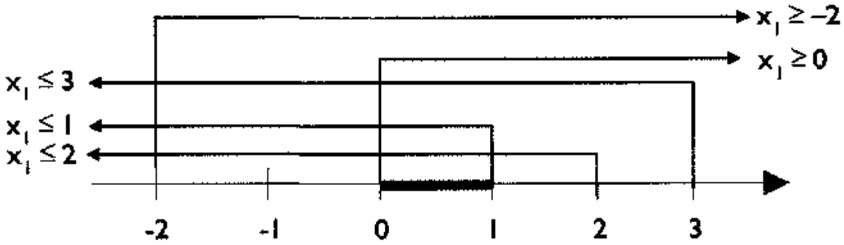


FIGURA 2.12 **Análise gráfica imposta ao crescimento de x_1.**

que a restrição que impõe maior limitação ao crescimento de x_1 é imposta pela última equação (x_7).

O intervalo [0; 1] contém o conjunto de soluções viáveis para x_1. Como desejamos maximizar o valor de Z, deveríamos fazer com que x_1 assumisse o valor máximo possível, isto é, o valor 1. Para que isso aconteça, devemos alterar o valor de x_7, já que $x_7 = 2 - 2x_1$ (considerando $x_2 = x_3 = 0$), isto é, $x_7 = 0$. Vale ressaltar que se o valor de X\ ultrapassasse o valor 1, o valor da variável x_7 seria menor do que zero, o que tornaria a solução inviável.

Para modificarmos o dicionário atual de forma a contemplar esta alteração, devemos expressar a variável que entrará na base, x_1, como uma função da variável que deixará a base, x_7. Isto pode ser feito levando a variável Xj para o lado esquerdo da equação e x_7 para o lado direito, de acordo com nossa definição de variável básica. Apenas uma equação do dicionário apresenta simultaneamente as variáveis x_1 e x_7. Podemos, portanto, expressar x_1 como uma função de x_7. Logo:

$$x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad \text{Dicionário Atual}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = 1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7 \qquad \text{Novo Dicionário}$$

Podemos, então, substituir o valor de Xj em uma função de x_7 (nova equação) em todas as outras equações do dicionário atual, obtendo assim o novo dicionário.

$$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad \text{Dicionário Atual}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_4 = 3 - (1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7) - 3x_2 - x_3$$
$$x_4 = 2 - 1{,}5x_2 - 1{,}5x_3 + 0{,}5x_7 \qquad \text{Novo Dicionário}$$

$$x_5 = 2 + x_1 - 3x_3 \qquad \text{Dicionário Atual}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_5 = 2 + (1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7) - 3x_3$$
$$x_5 = 3 - 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 - 0{,}5x_7 \qquad \text{Novo Dicionário}$$

$$x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad \text{Dicionário Atual}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_6 = 4 - 2\,(1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7) + x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7 \qquad \text{Novo Dicionário}$$

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \qquad \text{Dicionário Atual}$$
$$\Updownarrow$$
$$Z = 5\,(1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7) + 5x_2 + 3x_3$$
$$Z = 5 - 2{,}5x_2 + 5{,}5x_3 - 2{,}5x_7 \qquad \text{Novo Dicionário}$$

Colocando todas as novas equações juntas, chegamos ao novo dicionário a seguir.

Dicionário Atual	Novo Dicionário
$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$	$x_4 = 2 - 1{,}5x_2 - 1{,}5x_3 + 0{,}5x_7$
$x_5 = 2 + x_1 - 3x_2$	$x_5 = 3 - 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 - 0{,}5x_7$
$x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$	$x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7$
$x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$	$x_1 = 1 - 1.5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7$
$Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$	$Z = 5 - 2{,}5x_2 + 5{,}5x_3 - 2{,}5x_7$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Com o novo dicionário podemos também chegar a uma nova solução óbvia viável. Atribuindo a todas as variáveis do lado direito das equações o valor zero, podemos obter a seguinte solução após a 1- iteração ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2$, $x_7 = 0$) e $Z = 5$. Duas coisas devem ser ressaltadas. Primeiramente os valores de $x_1 = 1$ e $x_7 = 0$. Estes valores foram encontrados anteriormente. Depois o novo valor de Z, que passou de 0 na solução inicial para 5 após a primeira iteração. Logo, estamos caminhando na direção correta: na maximização do valor de Z.

Observando a linha Z do novo dicionário, verificamos que o coeficiente de x_3 é positivo, o que significa que o valor de Z aumentaria se o valor de x_3 fosse aumentado de zero (seu valor atual) para algum valor positivo. Logo, a nova solução encontrada não é a ótima. Portanto, devemos seguir os mesmos passos para obter uma nova solução.

A variável que entrará na base será x_3, já que nenhuma outra variável fora da base tem coeficiente positivo. O passo seguinte é achar a variável que sairá da base. Considerando $x_2 = x_7 = 0$, reduzimos o dicionário às equações abaixo.

$$x_4 = 2 - 1{,}5x_3$$

$$x_5 = 3 - 2{,}5x_3$$

$$x_6 = 2 - 3x_3$$

$$x_1 = 1 + 0{,}5x_3$$

Como todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero, temos as seguintes restrições ao crescimento de x_3:

$$x_4 = 2 - 1{,}5x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 4/3$$

$$x_5 = 3 - 2{,}5x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 6/5$$

$$x_6 = 2 - 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 2/3$$

$$x_1 = 1 + 0{,}5x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq -2$$

A restrição mais rigorosa é a imposta pela equação de x_6, que deve deixar a base. O valor máximo que x_3 poderá assumir é de 2/3, o que provocará que x_6 seja levado a zero, já **que** $x_6 = 2 - 3x_3$.

Como apenas uma das equações apresenta ambas as variáveis simultaneamente, podemos utilizá-la para explicitar x_3 como uma função de x_2, x_6 e JC7I

Dicionário após a *1*- Iteração

$$x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7$$

$$\Updownarrow$$

Dicionário após a *2*- Iteração

$$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$$

Substituindo o valor de x_3 nas outras equações do dicionário da *1ª* iteração, podemos obter o dicionário completo após a *2ª* iteração. Tente obter o novo dicionário.

Dicionário após a Iª Iteração

$$x_4 = 2 - 1{,}5x_2 - 1{,}5x_3 + 0{,}5x_7$$

$$x^5 = 3 - 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 - 0{,}5x_7$$

$$x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7$$

$$x_1 = 1 - 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7$$

$$Z = 5 - 2{,}5x_2 + 5{,}5x_3 - 2{,}5x_7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Solução após a 1ª Iteração

(1,0,0,2,3,2,0) e $Z = 5$

$$\Updownarrow$$

Dicionário após a 2ª Iteração

$$x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$$

$$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$$

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$$

$$Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Solução após a 2- Iteração

$$\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0, 0\right) \text{e } Z = \frac{26}{3}$$

Mais uma vez o valor de Z teve seu valor aumentado (de 5 para 26/3). A variável de entrada (x_3) foi para o máximo permitido (2/3) e a variável que deixa abase (x_6) foi levada a zero.

Como a linha Z do dicionário da 2ª iteração ainda apresenta um coeficiente positivo na variável x_2, podemos afirmar que o valor de Z ainda pode ser incrementado se a variável x_2 for aumentada de zero para qualquer valor positivo. Portanto, mais uma iteração deverá ser efetuada, pois a solução ótima ainda não foi encontrada.

Executando um novo ciclo de nosso procedimento, a variável x_2 entra na base e a variável x_5 deixa a base (verifique por que isto acontece). Chegaremos ao seguinte dicionário após a Ъ- iteração:

Dicionário após a *2*- Iteração

$$x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7$$

$$x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7$$

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7$$

$$Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Max $5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

s.r.

$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$ $\qquad \frac{32}{29} + 3 \cdot \frac{8}{29} + \frac{30}{29} = \frac{86}{29} = 2{,}9655 \leq 3$

$-x_1 + 3x_2 \leq 2$ $\qquad -\frac{32}{29} + 3 \cdot \frac{30}{29} = \frac{58}{29} = 2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$ $\qquad 2 \cdot \frac{32}{29} - \frac{8}{29} + 2 \cdot \frac{30}{29} = \frac{116}{29} = 4 \leq 4$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$ $\qquad 2 \cdot \frac{32}{29} + 3 \cdot \frac{8}{29} - \frac{30}{29} = \frac{58}{29} = 2 \leq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solução Ótima $= \left(\frac{32}{29}, \frac{8}{29}, \frac{30}{29}\right)$

FIGURA 2.13 Substituição da solução ótima nas restrições.

Solução após a 2ª Iteração

$$\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0, 0\right) \text{ e } Z = \frac{26}{3}$$

$$\Updownarrow$$

Dicionário após a 3ª Iteração

$$x_4 = \frac{1}{29} + \frac{21}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 + \frac{28}{29}x_7$$

$$x_2 = \frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7$$

$$x_3 = \frac{30}{29} - \frac{8}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{1}{29}x_7$$

$$x_1 = \frac{32}{29} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{9}{29}x_6 - \frac{3}{29}x_7$$

$$Z = 10 - x_5 - x_6 - 2x_7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Solução após a 3ª Iteração

$$\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0, 0\right) \text{ e}$$

$$Z = \frac{26}{3} \qquad \left(\frac{32}{29}, \frac{8}{29}, \frac{30}{29}, \frac{1}{29}, 0, 0, 0\right) \text{ e } Z = 10$$

Como mais nenhuma variável na linha Z do dicionário da 3ª iteração apresenta coeficiente positivo, nenhuma variável fora da base (x_5, x_6 e x_7) pode ser incrementada a partir dos seus valores atuais (zero) para qualquer valor positivo sem que o valor da função-objetivo (Z) diminua. Logo, chegamos ao melhor valor possível para a nossa função-objetivo: os valores $x_1 = 32/29$, $x_2 = 8/29$ e $x_3 = 30/29$ constituem a nossa solução ótima.

Estes valores correspondem àqueles que, colocados em nosso problema original, resultariam no melhor valor para Z sem que nenhuma das restrições fosse rompida. Do lado direito da Figura 2.13 são apresentados os valores da solução ótima substituídos nas restrições. Como podemos notar, nem todas as restrições chegam a seu limite (igualam LHS e RHS). Existe uma relação entre as variáveis de folga (x_4, x_5, x_6 e x_7) e os valores da diferença do LHS e RHS das restrições. Isto porque as variáveis de folga representam esta diferença. Portanto, não é por acaso que x_4 assumiu o valor de 1/29 na solução ótima e o valor da diferença do LHS e RHS da 1ª restrição ser 1/29 (3 – 86/29). Pela mesma lógica, a diferença nas outras três restrições é igual a zero, já que as outras três variáveis de folga apresentam valor igual a zero.

Podemos resumir o procedimento analítico na Figura 2.14, onde são destacadas as diversas etapas realizadas no problema acima.

Deveríamos, por fim, fazer uma comparação entre o procedimento iterativo e a análise gráfica. Se ambos os métodos podem ser utilizados para determinar a solução ótima, deve haver uma relação entre os dois. Vamos então resolver o problema de duas variáveis proposto na seção 2.1 e mostrado na Figura 2.15.

Para resolver este problema pela forma analítica, deveríamos achar o dicionário inicial e proceder à procura de novos dicionários e soluções. Como as variáveis originais são x_1 e x_2, prestaremos atenção nos valores que elas assumem a cada nova solução e obser-

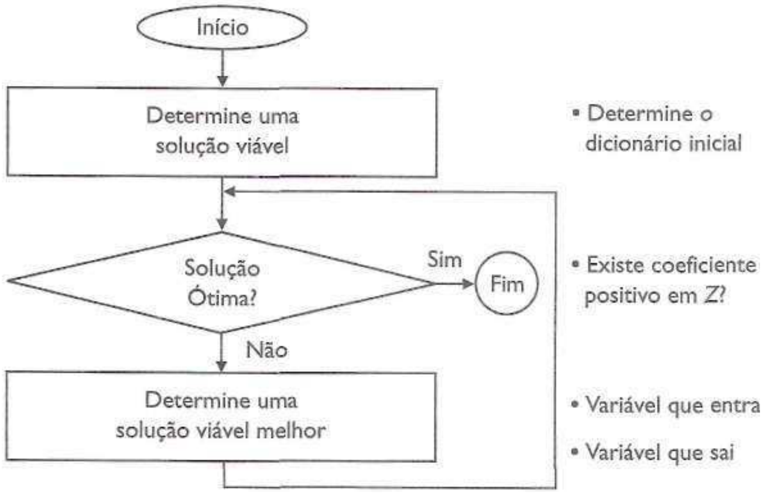


FIGURA 2.14 Procedimento de solução analítico.

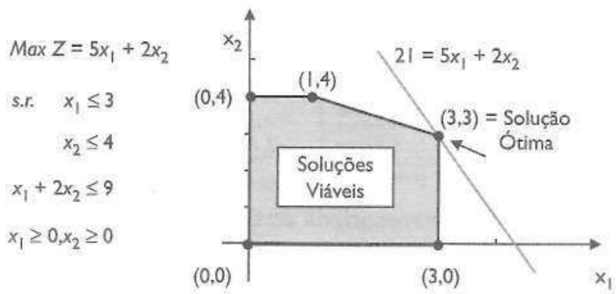


FIGURA 2.15 Resolução gráfica de um problema de duas variáveis.

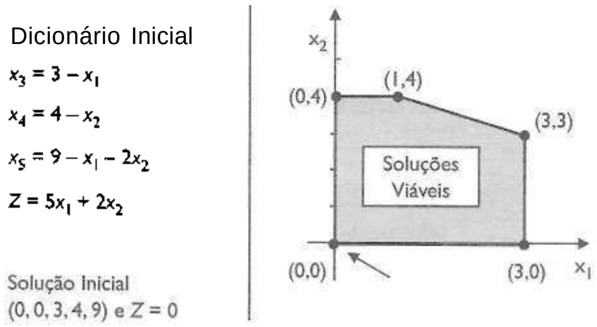


FIGURA 2.16 Representação do dicionário inicial na forma gráfica.

varemos estes valores no gráfico. A solução associada ao dicionário inicial está representada na Figura 2.16.

Continuando o processo de procura, teríamos que encontrar os próximos dicionários, representados na Figuras 2.17 e 2.18.

Vale notar que cada solução associada a um dicionário é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis. Isto não é apenas uma coincidência; ocorre porque tentamos maximizar o valor de cada variável que tentava entrar na base. A restrição que mais limitava o crescimento da variável tem como representação gráfica uma aresta do polígono. Ela é, portanto, o limite do conjunto de soluções viáveis em uma determinada direção. Ultrapassar este limite significaria deixar o conjunto de soluções viáveis.

Dicionário após 1ª Interação

$x_1 = 3 - x_3$

$x_4 = 4 - x_2$

$x_5 = 6 - 2x_2 + x_3$

$Z = 15 + 2x_2 - 5x_3$

Solução Inicial
$(3, 0, 0, 4, 6)$ e $Z = 15$

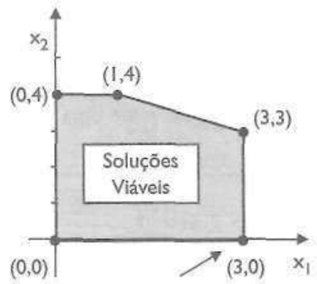


FIGURA 2.17 Representação gráfica da solução do dicionário após a 1ª Iteração.

Dicionário após 2ª Interação

$x_1 = 3 - x_3$

$x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$

$x_4 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$

$Z = 21 - 4x_3 - x_5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \geq 0$

Solução 2ª Interação
$(3, 3, 0, 1, 0)$ e $Z = 21$ (ótima)

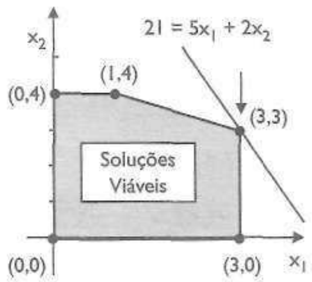


FIGURA 2.18 Representação gráfica da solução associada ao dicionário após a 2- Iteração.

EXERCÍCIOS 2.2

1. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo através do método Analítico apresentado nesta seção (confira o resultado com a solução encontrada para a questão 1 da lista de Exercícios 2.1):

Maximizar $4x_1 + 3x_2$
Sujeito a:
$x_1 + 3x_2 \leq 7$
$2x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Solucione o problema de programação linear abaixo utilizando o método Analítico visto nesta seção (confira o resultado com a solução encontrada na questão 3 da lista de Exercícios 2.1):

Maximizar $4x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

3. Resolva pelo método Analítico (dicionário) o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $2x_1 + 6x_2$
Sujeito a:
$4x_1 + 3x_2 \leq 12$
$2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

4. Encontre a solução ótima do problema de programação linear abaixo através do método Analítico (dicionário):

Maximizar $2x_1 - x_2 + x_3$
Sujeito a:
$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$
$x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Determine, usando o método Analítico (dicionário), a solução ótima do seguinte PPL:

Maximizar $8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4$
Sujeito a:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 15$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 13$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

6. Um agricultor tem uma fazenda com 200km^2 onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1.800kg por km^2 plantado de trigo, 2.100kg por km^2 plantado

de arroz e 2.900kg por km^2 plantado de milho. Ele tem condições de armazenar no máximo 700.000kg de qualquer dos produtos. Sabendo que o trigo dá um lucro de $1,20 por kg, o arroz $0,60 por kg e o milho $0,28 por kg, usando o método Analítico (dicionário) determine quantos km^2 de cada produto devem ser plantados para maximizar o lucro do agricultor.

7. A Capitão Caverna S.A., localizada em Pedra Lascada, aluga três tipos de barcos para passeios marítimos: jangadas, supercanoas e arcas com cabines. A companhia fornece juntamente com o barco um capitão para navegá-lo e uma tripulação, que varia de acordo com a embarcação: 1 para jangadas, 2 para supercanoas e 3 para as arcas. A companhia tem 4 jangadas, 8 supercanoas e 3 arcas, e em seu corpo de funcionários, 10 capitães e 18 tripulantes. O aluguel é por diárias e a Capitão Caverna S.A. lucra 50 marfins por jangada, 70 marfins por supercanoas e 100 marfins por arca. Quantos barcos de cada tipo devem ser alugados para que a Capitão Caverna S.A. tenha o maior lucro possível? Quanto é este lucro? (Resolva pelo método Analítico visto nesta seção.)

8. A empresa de artigos de couro Pele de Mimosa Ltda. fabrica dois tipos de produtos: malas e mochilas. As malas são vendidas com um lucro de $50 por unidade e o lucro unitário por mochila é igual a $40. As quantidades de horas necessárias para confeccionar cada produto, assim como o número total de horas disponíveis em cada departamento são apresentados na tabela a seguir.

Departamento	Capacidade por Departamento (Horas por dia)	Horas Necessárias	
		Mala	Mochila
1 - Corte	300	2	0
2 - Tingimento	540	0	3
3 - Costura	440	2	2
4 - Embalagem	300	6/5	3/2

a) Sabendo que há uma demanda excedente tanto de malas quanto de mochilas, determine quantas unidades de cada produto a Pele de Mimosa Ltda. deve fabricar diariamente para maximizar o seu lucro (resolva **pelo** método Analítico).

b) Se temos a informação de que a empresa produz diariamente 120 unidades de malas e 30 unidades de mochilas, de quanto o planejamento ótimo aumenta o lucro em relação ao existente?

9. A Picolé Lelé é a marca local preferida pelos habitantes das Ilhas **Calorândicas, os** quais consomem todos os picolés **cremosos que** a empresa **conseguir** fabricar. No entanto, por se localizar no meio do oceano, a Picolé Lelé Ltda. tem algumas restrições de fabricação devido à escassez de matéria-prima fresca. Preocupados em maximizar o lucro da firma, os dirigentes da Picolé Lelé Ltda. elaboraram **o** seguinte quadro **informativo para que** possamos ajudá-los, através do método Analítico estudado nesta seção, a descobrir quantos picolés de cada sabor devem produzir diariamente **de** forma a maximizar o lucro **da companhia.**

Sabor	Lucro por picolé	Quantidade de leite em cada picolé (litros)	Quantidade de açúcar em cada picolé (x 100 gramas)	Polpa de fruta em cada picolé (litros)
Morango	R$1,00	0,45	0,50	0,10
Uva	R$0,90	0,50	0,40	0,15
Limão	R$0,95	0,40	0,40	0,20
Máximo Disponível		200	150	60

10. A empresa Serra Serra **Serrador fabrica três tipos de** madeiras compensadas (placas de aglomerados). Os dados abaixo resumem a produção em horas por unidade em cada uma das três operações **de produção, o tempo máximo** disponível em cada operação e o lucro unitário de **cada placa.**

Aglomerado	Operações em Horas			
	I	II	III	Lucro por Unidade
Placa A	2	2	4	R$40,00
Placa B	5	5	2	R$30,00
Placa C	10	3	2	R$20,00
Tempo máximo disponível	900	400	600	

Quantas unidades de cada placa de aglomerado devem ser produzidas, **de maneira a otimizar** o lucro da Serraria? Resolva **pelo** método Analítico (dicionário).

2.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR E SEUS TEOREMAS

Vamos agora apresentar alguns teoremas a respeito das soluções de um problema de programação linear. Para tal, necessitamos da definição de um conjunto convexo. Em vez de tentarmos defini-lo com o rigor matemático, utilizaremos uma definição intuitiva. Um conjunto convexo é um conjunto de pontos em que todos os segmentos de reta que unem dois de seus pontos são internos ao conjunto, isto é, todos os pontos de cada segmento também pertencem ao conjunto original. Graficamente um exemplo de conjuntos convexo e não-convexo são representados na Figura 2.19.

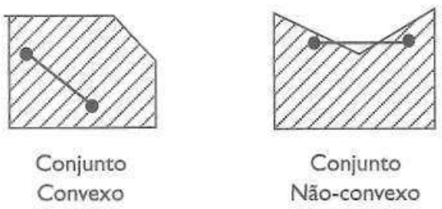


FIGURA 2.19 Representação gráfica de conjuntos convexos e não-convexos.

Naturalmente só podemos visualizar esta definição graficamente quando existirem apenas duas variáveis no problema de LP. Passemos, então, à definição de alguns teoremas pertinentes ao estudo de Programação Linear. Foge do escopo deste texto a demonstração desses teoremas. Sugerimos aos leitores interessados em suas demostrações alguns textos mais avançados, tais como Hiller & Liberman (1995).

TEOREMA I

O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.

TEOREMA II

Toda solução compatível básica (solução óbvia) do sistema de equações lineares (dicionário) de um modelo de Programação Linear é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, isto é, do conjunto convexo de soluções.

TEOREMA III

Se uma função-objetivo possui um único ponto ótimo finito, então este é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.

TEOREMA IV

Se a função-objetivo assume o valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis (soluções múltiplas), então ela assume este valor para pelo menos dois pontos extremos do conjunto convexo e para qualquer combinação convexa desses pontos extremos, isto é, todos os pontos do segmento de reta que unem estes dois extremos, ou seja, a aresta do polígono que contém estes extremos.

Baseados nos teoremas acima, uma maneira prática de resolver pequenos problemas de duas variáveis é plotar os valores da função-objetivo nos pontos extremos do poliedro de soluções viáveis. A Figura 2.20, representa tal procedimento para o problema que acabamos de resolver.

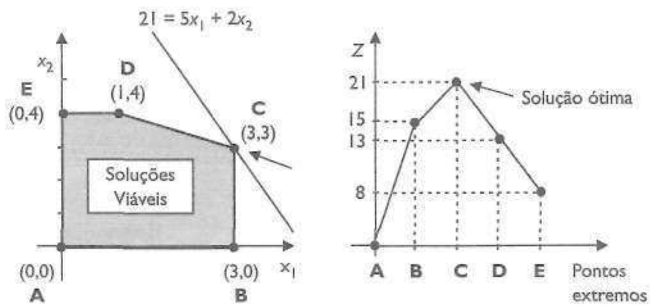


FIGURA 2.20 Representação gráfica do valor de Z nos pontos extremos.

EXERCÍCIOS 2.3

1. Encontre a solução ótima do problema de programação linear abaixo, desenhando o conjunto de soluções viáveis e testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos (confira o resultado com as soluções encontradas na primeira questão das listas de Exercícios 2.1 e 2.2):

Maximizar $4x_1 + 3x_2$
Sujeito a:
$x_1 + 3x_2 \leq 7$
$2x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Resolva o seguinte problema de programação linear através do teste do valor da função-objetivo em cada ponto extremo do conjunto de soluções viáveis e conforme os teoremas vistos nesta seção (confira a resposta com a solução encontrada na segunda questão da lista de Exercícios 2.1):

Min $x_1 + 2x_2$
Sujeito a:
$x_1 + x_2 \geq 1$
$-5x_1 + 2x_2 \geq -10$
$3x_1 + 5x_2 \geq 15$
$x_1, x_2 \geq 0$

3, Solucione o problema de programação linear abaixo, testando o valor da função-objetivo nos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis (confira o resultado com a solução da questão 3 dos Exercícios 2.1 e da questão 2 dos Exercícios 2.2):

Maximizar $4x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

4. Encontre a solução ótima do seguinte problema de programação linear testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis:

Maximizar $80x_1 + 75x_2$
Sujeito a:
$x_1 + 3x_2 \leq 4$
$2x_1 + 5x_2 \leq 150$
$x_1, x_2 \geq 0$

5, Resolva o problema de programação linear abaixo, testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis:

Minimizar $4x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. As indústrias Sara Cura de produtos Farmacêuticos desejam produzir dois medicamentos, um analgésico e um antibiótico, que dependem de duas matérias-primas *A* e *B,* que estão disponíveis em quantidades de 8 e 5 toneladas, respectivamente. Na fabricação de uma tonelada de analgésico são empregadas uma tonelada da matéria *A* e uma tonelada da matéria 8, e na fabricação de uma tonelada de antibiótico são empregadas quatro toneladas de *A* e uma tonelada de *B.* Sabendo que cada tonelada de antibiótico é vendida a $8,00 e de analgésico a $5,00, encontre, através da determinação dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis, a quantidade de toneladas de medicamentos a ser produzida pelas indústrias Sara Cura de maneira a maximizar sua receita.

7, Uma pequena malharia produz dois tipos de camisas: manga curta e manga comprida. Toda a produção é feita e vendida para um distribuidor, que compra tudo que for produzido. A confecção de cada camisa passa por três seções de trabalho: corte, costura e acabamento. A tabela a seguir mostra os tempos necessários em cada seção:

Tabela 1
Tempo de fabricação de cada camisa em cada seção de trabalho

Produto	Tempo de fabricação (em horas)		
	Corte	Costura	Acabamento
Manga curta	3	1,5	5
Manga comprida	3	3	3

A quantidade de horas por semana, disponíveis em cada seção de trabalho, é apresentada na Tabela 2:

***Tabela 2* Limites de capacidade de fabricação**

Seção de trabalho	Homens/hora por semana
Corte	210
Costura	180
Acabamento	330

Utilize os teoremas apresentados na seção 2.3 para determinar a quantidade de cada tipo de camisa, que devem ser fabricadas de maneira a maximizar o LUCRO da empresa, sabendo que o lucro unitário proporcionado pela camisa de manga curta é de R$2,00 e o proporcionado pela camisa de manga comprida é de R$3,00.

8. A indústria Bonecas Sinistras S/A produz dois tipos de boneca: a Vampiresca e a Lobimulher. O processo de montagem para cada uma destas bonecas requer duas pessoas. Os tempos de montagem são os seguintes:

Modelo	Montador 1	Montador 2
Vampiresca	6min	2min
Lobimulher	3min	4min
Máximo de horas disponíveis	8	8

A política da companhia é a de balancear toda a mão-de-obra em todos os processos de montagem. Na verdade, a gerência deseja programar o trabalho de modo que nenhum montador tenha mais de 30 minutos de trabalho por dia do que o outro. Isto quer dizer que, num período regular de oito horas, os dois montadores deverão ter um mínimo de 7 horas e meia de trabalho. Considerando que o mercado está disposto a comprar toda a produção da Bonecas Sinistras S/A e que a firma tem um lucro de R$2,00 por unidade de Vampiresca e R$1 por Lobimulher, quantas unidades de cada boneca devem ser produzidas por dia? Quanto tempo irá trabalhar cada montador por dia? (Resolva através da determinação dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis.)

9. Um jovem está saindo com duas namoradas: Sheila Peres e a Ana Paula Ambrósio. Ele sabe, por experiência, que:

a) Ana Paula, elegante, gosta de freqüentar lugares sofisticados, mais caros, de modo que uma saída de três horas custará $240,00;

b) Sheila, mais simples, prefere um divertimento mais popular, de modo que, uma saída de três horas, lhe custará $160,00;

seu orçamento permite dispor de $960,00 mensais para diversão;

d) seus afazeres escolares lhe dão liberdade de, no máximo, 18 horas e 40.000 calorias de sua energia para atividades sociais;

e) cada saída com Ana Paula consome 5.000 calorias, mas com Sheila, mais alegre e extrovertida, gasta o dobro;
f) ele gosta das duas com a mesma intensidade.

Como ele deve planejar a sua vida social para obter o número máximo de saídas? (Encontre a solução ótima determinando os pontos extremos do conjunto de soluções viáveis.)

10. A Cat Without Fat S/A é uma empresa fabricante de comida enlatada para gatos, cujo principal diferencial competitivo é o baixo nível de gordura de seus produtos. A empresa utiliza na produção uma mistura de frango (75% de proteína e 25% de gordura) que custa R$3,00 o quilo e/ou uma mistura de peixe (90% de proteína e 10% de gordura) que custa R$5,00 o quilo. Que combinação de matérias-primas a empresa deve utilizar, a fim de preparar uma comida para gatos com, no máximo, 15% de gordura ao menor custo possível por quilo.

a) Modele o problema. Dica: as variáveis de decisão deste problema representam os percentuais de matérias-primas utilizados para preparar o enlatado, devendo, portanto, ter valores entre 0 e 1 (ou entre 0 e 100%).
b) Encontre a solução ótima através da determinação do valor da função-objetivo em cada ponto extremo do conjunto de soluções viáveis.

2.4 PROGRAMAÇÃO LINEAR E A FORMA TABULAR

O procedimento que relatamos na seção 2.2 é chamado de Método Simplex Analítico. Quando estivermos resolvendo um problema de programação linear manualmente, é conveniente utilizar a forma tabular do Método Simplex. Em vez de utilizar os dicionários, devemos usar o quadro Simplex para registrar apenas as informações essenciais: os coeficientes das variáveis, as constantes das restrições e as variáveis básicas e as não básicas.

Devemos, portanto, simplificar a forma de um dicionário, estabelecendo um quadro equivalente. Depois devemos verificar como cada operação analítica realizada pode ser automatizada através de regras de comando. Por fim, devemos verificar como tomar a decisão de parada do algoritmo.

Voltemos ao nosso primeiro exemplo e ao seu respectivo dicionário inicial, já com a introdução das variáveis de folga.

Problema Forma Padrão	Dicionário Inicial
Max $Z = 5x_1 + 2x_2$	$x_3 = 3 - x_1$
Sujeito a: $x_1 \leq 3$	$x_4 = 4 - x_2$
$x_2 \leq 4$	$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2$
$x_1 + 2x_2 \leq 9$	$Z = 5x_1 + 2x_2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

As variáveis originais do problema são as não-básicas e as variáveis de folga são as básicas (lado esquerdo das equações). O próximo passo para a obtenção do quadro inicial é a modificação do dicionário inicial para se obter o dicionário inicial modificado, que servirá como ponto de partida para a formação do quadro Simplex inicial. Para efetuar esta modificação, devemos trocar de lado todas as variáveis do problema (neste rol estão incluídas as variáveis originais, as de folga e Z), isto é, levar todas as variáveis para o lado esquerdo das equações. Desta maneira, podemos conseguir o dicionário inicial modificado para o problema acima:

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$$

$$Z - 5x_1 - 2x_2 = 0$$

Vale notar que no dicionário inicial modificado as variáveis da equação que representam a função-objetivo trocaram de lado, isto é, quando queríamos aumentar o valor de Z procurávamos as variáveis da equação que tinham coeficientes positivos. Como as variáveis mudaram de lado na equação, devemos agora procurar as que tenham sinais negativos. A decisão de parar ocorre quando não tivermos mais variáveis com coeficientes negativos, ou seja quando todos os coeficientes tiverem sinal não-negativo (positivo ou zero).

Agora, a transformação do dicionário inicial modificado para o quadro inicial é direta. Primeiramente vamos definir o formato do quadro de maneira a facilitar sua compreensão. O quadro terá, do lado esquerdo, as variáveis básicas e, do lado direito, as constantes das equações. No meio ficarão todos os coeficientes das restrições e da função-objetivo. Por padronização colocaremos na primeira linha (zero) a equação que representa a função-objetivo. Isto não é obrigatório, mas facilita a explanação e a compreensão do método. A Tabela 2.1 representa o quadro inicial do nosso problema.

Tabela 2.1 **Quadro Inicial do Problema**

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de						
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.
Z	0	1	–5	–2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	3
x_4	2	0	0	1	0	1	0	4
x_5	3	0	1	2	0	0	1	9

Devemos aprender como ler a solução associada ao quadro. Cada variável básica é apresentada na primeira coluna e o seu valor atual aparece na mesma linha na coluna final, isto é, neste caso leríamos: $x_3 = 3, x_4 = 4$ e $x_5 = 9$. As variáveis que não aparecem na primeira coluna, neste caso x_1 e x_2, têm o valor atual igual a zero. O valor de Z (função-objetivo) é lido da mesma maneira que as variáveis básicas, isto é, o valor da última coluna na linha correspondente aZ (neste caso, zero). Portanto, podemos ler a solução associada facilmente a partir do quadro do método Simplex. Note que não tivemos que escrever nenhuma equação e que a solução foi igual a da conseguida através do método do dicionário.

Solução viável básica inicial (0,0,3,4,9) e Z = 0

O segundo passo seria determinar se a solução encontrada já é a ótima ou se ela pode ser melhorada. Isto pode ser facilmente decidido com a observação dos sinais dos coeficientes das variáveis (x_1 até x_5) na linha zero (Z). Como neste caso existem coeficientes negativos ($x_1 = -5$ e $x_2 = -2$), a solução ótima ainda não foi atingida. Portanto, devemos encontrar uma nova solução viável para o problema. Da mesma forma que trabalhamos com o método do dicionário, devemos escolher uma variável para entrar na base e uma variável para sair da base. Depois, devemos transformar o quadro através de modificações algébricas, visando uma nova solução.

Quando trabalhamos com dicionários, para encontrarmos a variável a entrar na base, um critério seria o de procurar a variável fora da base de maior coeficiente positivo na equação que representava a função-objetivo. No caso dos quadros, a linha zero representa *a função-objetivo. Logo, devemos encontrar a variável fora da base que tenha o coeficiente mais negativo (este é apenas um critério; na verdade, todos as variáveis com coeficientes negativos seriam uma opção). Devemos encontrar os mais negativos e não mais os maiores em valor, por causa da mudança de sinal das variáveis (dicionário inicial modificado) da linha zero. Portanto, a variável que deve entrar na base é x_1 que tem o coeficiente mais negativo entre as variáveis não básicas (x_1 e x_2), na linha 0.

Para determinar a variável que irá sair da base, precisamos conhecer a variável que mais restringe o crescimento da variável que entrará na base. Como apenas uma variável não básica trocará de valor de cada vez (todas as outras permanecerão com o valor zero), o que nos importa são os coeficientes da coluna da variável que vai entrar. Nesta coluna observamos as linhas com valores positivos. Calculamos, para estas linhas, a divisão do valor da constante pelo coeficiente correspondente. O resultado que apresentar o menor valor apontará a variável a sair da base. A Tabela 2.2 representa este processo.

Tabela 2.2 **Determinação da Variável que Entra e que Sai da Base no l° Ciclo**

Variável Básica	*Nº da Eq.*	Coeficientes de							
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	*Divisão*
Z	0	1	–5	–2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	3	3
x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	3	0	1	2	0	0	1	9	9

Mais importante que aprender a fazer o processo mecânico acima é compreender que ele representa a mesma metodologia utilizada anteriormente. Para tal, devemos lembrar o cálculo que foi efetuado para se determinar a variável de saída de um ciclo quando utilizamos os dicionários (Figura 2.21).

Note que o cálculo e o processo de tomada de decisão são os mesmos do quadro representado pela Tabela 2.2. A divisão do quadro corresponde à divisão para a determinação dos limites que cada restrição impunha ao crescimento de x_1. A decisão do menor valor da divisão da Tabela 2.2 é idêntica à da escolha da restrição mais rigorosa da Figura 2.21.

Agora devemos efetuar todas as modificações algébricas correspondentes ao sairmos do I[a] para o *2*- dicionário. Façamos as modificações por partes. A primeira modificação foi efetuada na equação que apresentava as variáveis que entravam e saíam da base. No quadro, esta equação é representada pela linha 1, que pode ser lida como:

$$x_1 + x_3 = 3 \Leftrightarrow x_3 = 3 - x_1$$

Dicionário Inicial

$x_3 = 3 - x_1$ ➡ $x_3 = 3 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$

$x_4 = 4 - x_2$ ➡ $x_4 = 4 \geq 0$

$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2 \geq 4$ ➡ $x_5 = 9 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 9$

$Z = 5x_1 + 2x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

FIGURA 2.21 **Obtenção da variável que sairá da base no 1º ciclo através de dicionários.**

Já que devemos colocar x_1 na base e tirar x_3 devemos trocá-las de lado, isto é, deveríamos reescrevê-la como:

$$x_1 = 3 - x_3 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 3$$

Note que a equação do lado esquerdo representa a forma do dicionário e a do lado direito representa a do quadro. Os valores dos coeficientes de x_1 e x_3 que são, respectivamente, 1 e 1 devem aparecer no novo quadro na linha da variável básica x_1 (que substituiu x_3 na base).

Precisamos definir alguns termos antes de prosseguirmos. São eles:

- *Linha Pivô* é a linha da variável que está deixando a base;
- *Coluna Pivô é* a coluna da variável que está entrando na base;
- *№Pivô é* o valor que pertence, simultaneamente, à coluna e à linha pivô.

Para efetuar as modificações de uma forma automática no quadro, deveríamos efetuar a seguinte operação, representada na Tabela 2.3, em que a linha pivô é a equação n- 1, a coluna pivô é a da variável x_1 e o n-pivô é igual a 1.

Tabela 2.3 Cálculo da Nova Linha Pivô

	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de							
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 0	Z	0	1	−5	−2	0	0	0	0	
	x_3	1	0	1	0	1	0	0	3	3
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0	1	2	0	0	1	9	9

$$[\text{Nova Linha Pivô}] = \frac{[\text{Antiga Linha Pivô}]}{\text{Nº Pivô}}$$

	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de							
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 1	Z	0	1							
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3	3
	x_4	2	0							
	x_5	3	0							

As modificações das outras linhas do quadro correspondem às substituições do valor de x_1 como função de x_3 em todas as outras restrições. As Tabelas 2.4, 2.5 e 2.6 mostram como estas modificações são realizadas.

Tabela 2.4 **Cálculo da Nova Linha** ZERO

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 0	Z	0	1	−5	−2	0	0	0	0	
	x_3	1	0	1	0	1	0	0	3	3
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0	1	2	0	0	1	9	9

[Nova Linha 0] = [Antiga Linha 0] –
[Coef. da Col. Pivô] × [Nova Linha Pivô]

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 1	Z	0	1	0	−2	5	0	0	15	
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3	
	x_4	2	0							
	x_5	3	0							

Tabela 2.5 Cálculo da Nova Linha DOIS

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 0	Z	0	1	−5	−2	0	0	0	0	
	x_3	1	0	1	0	1	0	0	3	3
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0	1	2	0	0	1	9	9

[Nova Linha 2] = [Antiga Linha 2] –
[Coef. da Col. Pivô] × [Nova Linha Pivô]

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 1	Z	0	1	0	−2	5	0	0	15	
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3	
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0							

Tabela 2.6 **Cálculo da Nova Linha TRÊS**

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 0	Z	0	1	−5	−2	0	0	0	0	
	x_3	1	0	1	0	1	0	0	3	3
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0	1	2	0	0	1	9	9

[Nova Linha 3] = [Antiga Linha 3] –
[Coef. da Col. Pivô] × [Nova Linha Pivô]

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.	Divisão
ciclo 1	Z	0	1	0	−2	5	0	0	15	
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3	
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4	
	x_5	3	0	0	2	−1	0	1	6	

Vale observar que uma maneira simples para verificarmos uma inconsistência no quadro é verificar os seguintes pontos:

1) se houve melhora na constante da função-objetivo;

2) se todas as colunas referentes a variáveis básicas contêm apenas zeros e uns. O valor 1 deve aparecer uma única vez no encontro da linha e da coluna de cada uma das variáveis básicas.

Como sugestão, use uma planilha eletrônica do tipo Excel® e tente obter o quadro do segundo ciclo, representado pela Tabela 2.7.

Tabela 2.7 Cálculo do *2°* Ciclo do Problema

Ciclo	Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Const.
ciclo 1	Z	0	1	0	−2	5	0	0	15
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3
	x_4	2	0	0	1	0	1	0	4
	x_5	3	0	0	2	−1	0	1	6
	Básica	**Eq.**	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**Const.**
ciclo 2	Z	0	1	0	0	4	0	1	21
	x_1	1	0	1	0	1	0	0	3
	x_4	2	0	0	0	0,5	1	−0,5	1
	x_2	3	0	0	1	−0,5	0	0,5	3

Como todos os coeficientes da linha 0 são não-negativos (zeros ou positivos), isto significa dizer que atingimos a solução ótima para o problema. Lendo a solução associada ao quadro do ciclo 2, temos:

Solução ótima é dada por $(x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0)$ e $Z = 21$

EXERCÍCIOS 2.4

1. Resolva o problema de programação linear abaixo através do método Simplex Tabular visto nesta seção (confira o resultado com as soluções encontradas na primeira questão das listas de Exercícios 2.1, 2.2. e 2.3):

Maximizar $4x_1 + 3x_2$
Sujeito a:
$x_1 + 3x_2 \leq 7$
$2x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 + x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Obtenha a solução ótima do problema de programação linear abaixo utilizando o método Simplex Tabular (confira o resultado com a solução encontrada na questão 3 das listas de Exercícios 2.1 e 2.3 e na questão 2 da lista de exercícios 2.2).

Maximizar $4x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

3. Utilizando o método Simplex Tabular, resolva o problema de programação linear abaixo:

Minimizar $-2x_1 + x_2 - x_3$
Sujeito a:
$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

4. Resolva o seguinte problema de programação linear através do método Simplex Tabular:

Maximizar $16x_1 + 6x_2 + 15x_3$
Sujeito a:
$10x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1200$
$5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2000$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Encontre a solução ótima do seguinte problema de programação linear através do método Simplex Tabular:

Maximizar $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
Sujeito a:
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

6. Uma firma que faz três produtos e tem três máquinas disponíveis como recursos constrói o seguinte PPL:

Maximizar lucro $= 4x_1 + 4x_2 + 7x_3$
Sujeito a:
$x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 100$ (horas na máquina 1)
$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 100$ (horas na máquina 2)
$8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$ (horas na máquina 3).
$x_1, x_2, x_3, \geq 0$

Resolva o problema pelo método Simplex Tabular e responda às questões:

a) Qual a solução ótima encontrada?

b) Quando a solução final é encontrada, existe algum tempo disponível em qualquer uma das três máquinas? Quanto?

7. Um navio tem dois compartimentos de carga: um dianteiro e um à popa. O compartimento de carga dianteiro tem uma capacidade de peso de 70.000 quilos e uma capacidade de volume de 30.000 metros cúbicos. 0 compartimento à popa tem uma capacidade de peso de 90.000 quilos e uma capacidade de volume de 40.000 metros cúbicos. O dono do navio foi contratado para levar cargas de carne de boi empacotada e grão. O peso total da carne de boi disponível é 85.000 quilos; o peso total do grão disponível é 100.000 quilos. O volume por massa da carne de boi é 0,2 metro cúbico por quilo, e o volume por massa do grão é 0,4 metro cúbico por quilo. O lucro para transportar carne de boi é de R$0,35 por quilo, e o lucro para transportar grão é de R$0,12 por quilo. O dono do navio é livre para aceitar toda ou parte da carga disponível; ele quer saber quantos quilos de carne e quantos quilos de grão deve transportar para maximizar o lucro. Resolva pelo método Simplex Tabular.

8. A Óleos Unidos S.A. é uma empresa no ramo de derivados de petróleo que manufatura três combustíveis especiais a partir da mistura de dois insumos: um extrato mineral e um solvente. No processo de produção não existe perda de material, de forma que a quantidade de litros de extrato mineral somada à quantidade de litros de solvente utilizadas para a fabricação de um tipo de combustível resulta no total de litros daquele combustível fabricado. A proporção da mistura está descrita na tabela a seguir:

	Combustível A	Combustível B	Combustível C
Extrato Mineral	8 litros	5 litros	4 litros
Solvente	5 litros	4 litros	2 litros

Suponha que a Óleos Unidos tenha disponíveis 120 litros de extrato mineral e 200 litros de solvente, e que os lucros líquidos esperados para os três combustíveis são de R$20,00, R$22,00 e R$18,00 respectivamente. Responda ao que se pede.

a) Estabeleça um Modelo de Programação Linear que determine qual a quantidade de cada combustível a ser fabricado, dadas as restrições de matéria-prima.

b) Quanto de cada produto deve ser manufaturado para maximizar o lucro da companhia? De quanto é este lucro? (Resolva pelo método Simplex Tabular.)

c) Na condição de otimalidade, existe alguma matéria-prima com folga? Quais? De quanto é esta sobra?

9. Um pequeno entregador pode transportar madeira ou frutas em seu carrinho de mão, mas cobra R$20,00 para cada fardo de madeira e R$35,00 por saco de frutas. Os fardos pesam kg e ocupam $2dm^3$ de espaço. Os sacos de fruta pesam 1kg e ocupam $3dm^3$ de espaço. O carrinho tem capacidade de transportar 12kg e $10dm^3$ e o entregador pode levar quantos sacos e quantos fardos desejar.

a) Formule um problema de programação linear para determinar quantos sacos de fruta e quantas tábuas devem ser transportadas para que o entregador ganhe o máximo possível.

b) Resolva o problema através do método Simplex Tabular e determine qual será o lucro do entregador e como ele deve encher o seu carrinho.

c) O carrinho será totalmente utilizado? Sobrará capacidade de carga ou capacidade de volume? Quanto?

Uma indústria vende dois produtos, *PJ* e P2, ao preço por tonelada de $70 e $60, respectivamente. Afabricação dos produtos é feita em toneladas e consome recursos que chamaremos de *RI* e *R2.* Estes recursos estão disponíveis nas quantidades de 10 e 16 unidades, respectivamente. A produção de 1 tonelada de *PI* consome 5 unidades de *RI* e 2 unidades de *R2,* e a produção de 1 tonelada de *P2* consome 4 unidades de *RI* e 5 unidades de *R2.*

Formule um problema de programação linear para determinar quantas toneladas de cada produto devem ser fabricadas para se obter o maior faturamento possível:

a) Você pode determinar quanto será o faturamento máximo?

b) Você consegue determinar quanto de cada produto deve ser fabricado?

c) Como os recursos estão sendo utilizados? Estão sendo subutilizados ou estão insuficientes?

2 5 PROBLEMAS DE FORMA NÃO-PADRÃO

Nem todos os problemas de programação linear estão no formato padrão, isto é, são problemas de maximização com todas as restrições do tipo menor ou igual. Quando o formato não for o padrão, devemos utilizar diversos métodos antes de podermos utilizar o Simplex. Por exemplo: quando tivermos um problema em que todas as restrições são do tipo menor ou igual e a função-objetivo for de minimização, devemos alterar o problema como mostrado na Figura 2.22.

Esta modificação se baseia no fato de a igualdade *Min Z = Max* -Z ser sempre válida (quando a solução âtima existir). Mas nem sempre as modificações são :ão simples. Considere o problema a seguir de maximização simples em que uma das restrições é do tipo maior ou igual.

Max $Z = 3x_1 - 5x_2$

Sujeito a:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \geq 18$

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

A primeira providência a ser tomada seria a introdução das variáveis de folga. Neste caso, nas duas primeiras restrições não teríamos problema e obteríamos as seguintes equações:

Min $Z = 3x_1 - 5x_2$		Max $W = -Z = -3x_1 + 5x_2$
Sujeito a:		Sujeito a:
$x_1 \leq 4$	➡	$x_1 \leq 4$
$2x_2 \leq 12$		$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$		$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$		$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

FIGURA 2.22 Transformação de uma LP de minimização para maximização.

$x_3 = 4 - x_1$

$x_4 = 12 - 2x_2$

A terceira restrição seria diferente das duas primeiras por causa do sinal da restrição. Se utilizássemos o mesmo artifício usado anteriormente, isto é, definíssemos uma variável como a diferença entre o RHS (lado direito da restrição) e o LHS (lado esquerdo da restrição) e a considerássemos a variável criada maior ou igual a zero, esta não corresponderia ao desejado. O RHS, neste caso, é menor que o LHS da restrição por definição da restrição; logo, a diferença seria negativa. Como, para o método Simplex funcionar, todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero, isto não resolveria nosso problema.

Poderíamos, então, toda vez que o sinal da restrição fosse do tipo maior ou igual, definir uma variável que, em vez de representar a folga entre o RHS e o LHS (que seriam negativas), representaria o excesso entre LHS e RHS. No nosso caso:

$$x_5 = 3x_1 + 2x_2 - 18 \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$$

O valor de x_5 seria, portanto, obrigatoriamente positivo. Isto resolveria a questão de que todas as variáveis de um problema a ser resolvido pelo método Simplex devem ser positivas. Contudo, um outro problema apareceria: o de se achar a solução inicial. O dicionário inicial e a solução (óbvia) associada a ele seriam dados por:

$x_3 = 4 - x_1$

$x_4 = 12 - 2x_2$ Solução Associada

$x_5 = 3x_1 + 2x_2 - 18 \Rightarrow (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = -18)$

$Z = 3x_1 - 5x_2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Note que o valor de x_5 nesta solução fere a restrição do problema que obriga x_5 a ser maior ou igual a zero; portanto, a solução associada é uma solução do problema, porém esta solução não é viável.

A maneira de se resolver este e outros problemas em que achar a solução inicial viável não é trivial envolve a utilização de métodos tais como o "M Grande" e "Função Objetiva Artificial". Ambos os métodos se baseiam na introdução de variáveis artificiais (que não existem no problema) para facilitar o descobrimento da solução inicial. A Figura 2.23 representa a introdução da variável artificial (Aj) no dicionário inicial do nosso problema.

Observe que o dicionário modificado inicial difere do dicionário artificial apenas pela variável artificial A\. O novo problema (com a variável artificial) tem uma solução inicial óbvia dada por $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 0, A_1 = 18)$ que atende a todos os requisitos do método Simplex. Porém, ele não é o problema que queremos resolver, já que existe a variável *Ai,* que não está presente no problema original.

Para este problema ser igual ao problema inicial A! na solução ótima do problema modificado, deveria ser igual a zero. Portanto, se conseguirmos resolver o segundo problema e Aj for igual a zero, também estaríamos encontrando uma solução viável para o nosso problema original. O método da "Função-objetivo Artificial" se baseia neste fato para encontrar a primeira solução para o problema original (o que queremos resolver).

A seguir mostraremos como utilizar este método para resolver problemas do que contenham restrições do tipo maior ou igual e do tipo de igualdade e com variáveis não-positivas.

Problemas com Restrições de Maior ou Igual

Nos casos de restrições de maior ou igual o procedimento para o método da "Função-objetivo Artificial" consiste em introduzir uma variável de excesso (com sinal negativo) e uma variável artificial (com sinal positivo) no lado esquerdo da igualdade, como mostrado na Figura 2.23, criando o Dicionário Artificial e encontrando sua solução óbvia.

O segundo passo do método seria o de se resolver o problema alterado, representado pelo Dicionário Artificial Inicial. Caso encontremos uma solução ótima, em que a variável artificial seja igual a zero, estaremos encontrando a solução inicial do problema original. Caso na solução ótima do problema alterado a variável artificial apresente valor diferente de zero, isto significa que o problema original não tem solução viável.

No caso do problema alterado nosso objetivo é o de levarmos a(s) variável(is) artificial(is) introduzida^) no problema para zero. O nosso objetivo é equivalente ao de minimizar o somatório destas variáveis. Se as variáveis forem simultaneamente para zero na solução ótima nossa função objetivo artificial (daí o nome do método) terá o valor zerado na solução ótima. Este método é também denominado de

Dicionário Modificado Inicial		Dicionário Artificial
$x_1 + x_3 = 4$		$x_1 + x_3 = 4$
$2x_2 + x_4 = 12$		$2x_2 + x_4 = 12$
$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$	➡	$3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18$
$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$		$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$		$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0$

FIGURA 2.23 Dicionário artificial.

método de Duas Fases, já que está dividido em duas partes. Na primeira ao resolver o problema alterado apenas encontramos uma solução viável para o problema original e na segunda é que efetivamente resolvemos o problema.

Resolveremos o problema a seguir onde mostraremos detalhadamente os procedimentos utilizados pelo método.

$$Max\ Z = 3x_1 - 5x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Primeira Fase do Método

O primeiro passo é se introduzir as variáveis de folga (restrições 1 e 2) e as variáveis de excesso e artificial (restrição 3). Estas alterações estão refletidas na Figura 2.24, no dicionário artificial.

Necessitamos agora alterar a função-objetivo para o problema alterado. Como neste caso temos apenas uma variável artificial o nosso objetivo será o de minimizar o valor desta variável.

$$Min\ w = A_1 \Leftrightarrow Max - w = -A_1 \Rightarrow -w + A_1 = 0$$

Caso tivéssemos mais de uma variável, teríamos que minimizar o somatório de todas as variáveis artificiais. Estas alterações estão representadas na Figura 2.25.

Dicionário Modificado Inicial		Dicionário Artificial
$x_1 + x_3 = 4$		$x_1 + x_3 = 4$
$2x_2 + x_4 = 12$		$2x_2 + x_4 = 12$
$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$	➡	$3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18$
$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$		$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$		$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0$

FIGURA 2.24 Dicionário artificial.

Dicionário Artificial		Dicionário Artificial Inicial
$x_1 + x_3 = 4$		$x_1 + x_3 = 4$
$2x_2 + x_4 = 12$		$2x_2 + x_4 = 12$
$3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18$	➡	$3x_1 + 2x_2 - x_5 + A_1 = 18$
$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$		$-w + A_1 = 0$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0$		$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1 \geq 0$

FIGURA 2.25 Dicionário artificial inicial.

A partir deste Dicionário Artificial Inicial podemos montar nosso quadro inicial e resolver o problema alterado (Fase 1). Se a solução ótima tiver *w=O* então nosso objetivo de encontrar uma solução viável para o nosso problema original terá sido atingido. Caso contrário chegaremos a conclusão que o problema original é inviável, isto é, não tem soluções viáveis. A Tabela 2.8 retrata o quadro inicial do problema alterado.

Tabela 2.8 **Quadro Inicial do Dicionário Artificial Inicial**

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes de variáveis							Const.
		−w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$-w$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	−1	1	18

Note que o quadro apresentado na Tabela 2.8 apresenta inconsistências devido à alteração da função-objetivo. Vale observar que uma maneira simples para verificarmos uma inconsistência no quadro é verificar se todas as colunas referentes a variáveis básicas contêm apenas zeros e uns. O valor 1 deve aparecer uma única vez no encontro da linha e da coluna de cada uma das variáveis básicas. Podemos observar que a coluna da variável artificial (básica) contém o valor um na linha zero. Para se resolver este problema, primeiro precisamos resolver as inconsistências do quadro.

Para corrigirmos as inconsistências devemos efetuar uma transformação linear na linha zero onde a inconsistência aparece (Tabela 2.9).

Tabela 2.9 **Correção das Inconsistências do Quadro Inicial**

Fase 1 / ciclo −1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis							Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$-w$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	−1	1	18

[Nova Linha 0] = [Antiga Linha 0] −
[Coef. da Col. A_1 na Linha 0] × [Linha A_1]

Fase 1 / ciclo 0

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	Const.
$-w$	0	1	−3	−2	0	0	1	0	−18
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	−1	1	18

Agora com as inconsistências corrigidas, podemos começar a resolver nosso problema alterado da mesma maneira que fizemos até agora. Como sugestão, tente resolver usando o Excel, verificando as etapas seguintes descritas nas Tabelas 2.10 e 2.11.

Tabela 2.10 **Cálculo do Iª Ciclo do Problema Alterado**

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis							Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$-w$	0	1	−3	−2	0	0	1	0	−18
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	3	2	0	0	−1	1	18

Entra X_1 e Sai X_3

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	Const.
$-w$	0	1	0	−2	3	0	1	0	−6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	0	2	−3	0	−1	1	6

Tabela 2.11 **Cálculo do 2^{e} Ciclo do Problema Alterado**

Fase 1 / ciclo 1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis							Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$-w$	0	1	0	−2	3	0	1	0	−6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	0	12
A_1	3	0	0	2	−3	0	−1	1	6

Entra X_2 e Sai A_1

Fase 1 / ciclo 2

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	Const.
$-w$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	0	3	1	1	−1	6
x_2	3	0	0	1	−1,5	0	−0,5	0,5	3

O fato de não existir mais nenhum coeficiente negativo na linha 0 denota o fato de termos atingido a solução ótima para o problema alterado. Vale notar que tanto a função-objetivo quanto a variável artificial assumiram o valor zero na solução ótima, portanto, existe uma solução viável para o nosso problema original.

Segunda Fase do Método

Devemos, portanto, a partir do quadro final da primeira fase gerar o primeiro quadro para a segunda fase, isto é, encontrar a solução ótima para o problema original. Primeiramente devemos retirar a coluna referente à variável artificial, já que ela não existe no problema original e foi introduzida apenas para podermos encontrar uma solução viável inicial do problema original. Devemos ainda, retornar a nossa função-objetivo inicial que havia sido substituída. Estes dois procedimentos nos levam ao quadro com o qual devemos iniciar a segunda fase (Tabela 2.12).

Tabela 2.12 Geração do Quadro Inicial do Problema Original

Fase 2 / ciclo 2

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis							Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	
$-w$	0	1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	2	0	0	0	3	1	1	−1	6
x_2	3	0	0	1	−1,5	0	−0,5	0,5	3

Entra Função-objetivo Original e Sai Coluna de A_1

Fase 2 / ciclo −1

Básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Const.
Z	0	1	−3	5	0	0	0		0
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	−1,5	0	−0,5		3

Como no quadro inicial na primeira fase, o quadro modificado apresentado na Tabela 2.12 contém inconsistências devido à troca da função-objetivo. As colunas de X\ e x_2 que são variáveis básicas apresentam valores diferentes de zeros e uns na linha zero. Portanto, como na primeira fase, devemos corrigir as inconsistências para então utilizarmos o método Simplex na busca da solução de nosso problema original. A Tabela 2.13 mostra esta transformação.

Fazendo as alterações acima, chegamos ao quadro inicial para a segunda fase. A solução viável inicial encontrada pode agora ser lida diretamente do quadro como de costume. A solução encontrada é dada por (4;3;0;6;0) levando a um Z=-3.

Podemos agora continuar nossa procura pela solução ótima a partir desta solução viável. Como feito anteriormente, devemos verificar se existem coeficientes negativos, na linha 0. Neste caso, por não existirem coeficientes negativos, a solução viável encontrada é também a solução ótima para o nosso problema original.

Tabela 2.13 Corrigindo as Inconsistências **do Quadro** Inicial do Problema Original

Fase 2 / ciclo −1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis							Const.
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	0	1	−3	5	0	0	0		0
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	−1,5	0	−0,5		3

[Nova Linha 0] = [Antiga Linha 0] −
[Coef. da Col. x_1 na Linha 0] × [Linha x_1] ·
[Coef. da Col. x_2 na Linha 0] × [Linha x_2]

Fase 2 / ciclo 0

Básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Const.
Z	0	1	0	0	10,5	0	2,5		−3
x_1	1	0	1	0	1	0	0		4
x_4	2	0	0	0	3	1	1		6
x_2	3	0	0	1	−1,5	0	−0,5		3

Caso existissem coeficientes negativos, o mesmo procedimento adotado anteriormente deveria ser utilizado na procura da solução ótima.

Problemas com Restrições de Igualdade

O método da Função Artificial deve também ser utilizado quando existem restrições de igualdade em nosso problema. A metodologia é a mesma utilizada no caso de restrições do tipo maior ou igual. Primeiramente devemos introduzir uma variável artificial para cada restrição de igualdade. Em seguida devemos substituir a função-objetivo original pela minimização do somatório das variáveis artificiais. Achamos, então, a solução ótima do problema alterado. Se na solução ótima o valor de todas as variáveis artificiais forem zero isto significaria a existência de pelo menos uma solução viável para o problema original. Deveríamos então passar para a segunda fase do método. No caso de todas as variáveis artificiais não assumirem o valor zero na solução ótima do problema alterado, isso novamente significaria a inexistência de solução viável para o problema original.

Considere o seguinte problema no qual existem duas restrições de igualdade

$\text{Max } Z = 3x_1 - 5x_2$

Sujeito a:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 = 18$

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Primeira Fase do Método

O primeiro passo é o de se introduzir a variável de folga (restrição 1) e as variáveis artificiais (restrições 2 e 3). Vale notar que nas restrições de igualdade não são necessárias a introdução nem variáveis de folga nem de excesso. Estas alterações estão refletidas na Figura 2.26, no Dicionário Artificial.

Necessitamos agora alterar a função-objetivo para o problema alterado. Como neste caso temos duas variáveis artificiais, o nosso objetivo será o de minimizar o somatório dos valores destas variáveis. Estas alterações estão representadas na Figura 2.27.

$$Min\ w = A_1 + A_2 \Leftrightarrow Max\ -w = -A_1 - A_2$$
$$\Rightarrow -w + A_1 + A_2 = 0$$

A partir deste Dicionário Artificial Inicial podemos montar o nosso quadro inicial e resolver o problema alterado (Fase 1). Se a solução ótima tiver $w=0$, então nosso objetivo de encontrar uma solução viável para o nosso problema original terá sido atingido. Caso contrário chegaremos à conclusão de que o problema original é inviável, isto é, não tem soluções viáveis. A Tabela 2.14 retrata o quadro inicial do problema alterado.

Tabela 2.14 **Quadro Inicial do Dicionário Artificial**

ãnkfPÍ

Fase 1 / ciclo –1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis -w	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	Const.
$-w$	0	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	3	2	0	0	1	18

Note que o quadro apresentado na Tabela 2.14 apresenta inconsistências devido à alteração da função-objetivo. Como no caso de restrição do tipo maior ou igual, devemos corrigir estas inconsistências antes de prosseguir. A transformação a ser feita é análoga à já realizada no caso anterior. A Tabela 2.15 apresenta estas modificações.

Dicionárío Modificado Inicial

$x_1 + x_3 = 4$

$2x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 = 18$

$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

➡

Dicionário Artificial

$x_1 + x_3 = 4$

$2x_2 + A_1 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18$

$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$

$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$

FIGURA 2.26 Dicionário artificial.

Dicionário Artificial

$x_1 + x_3 = 4$

$2x_2 + A_1 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18$

$Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$

$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$

➡

Dicionário Artificial Inicial

$x_1 + x_3 = 4$

$2x_2 + A_1 = 12$

$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18$

$-w + A_1 + A_2 = 0$

$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$

FIGURA 2.27 Dicionário artificial inicial.

Tabela 2.15 **Corrigindo as Inconsistências do Quadro Inicial do Problema Alterado**

Fase 1 / ciclo −1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis						Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	
$-w$	0	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	3	2	0	0	1	18

[Nova Linha 0] = [Antiga Linha 0] –
[Coef. da Col. A_1 na Linha 0] × [Linha A_1] ·
[Coef. da Col. A_2 na Linha 0] × [Linha A_2]

Fase 1 / ciclo 0

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	Const.
$-w$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	3	2	0	0	1	18

O problema a partir daqui tem solução análoga à do caso anterior. Apresentamos, portanto, os resultados dos passos e sugerimos ao leitor que os verifique, utilizando a planilha Excel.

Tabela 2.16 **Cálculo do Ciclo 1 do Problema Alterado**

Fase 1 / ciclo 0

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis						Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	
$-w$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	3	2	0	0	1	18

Entra x_1 e Sai X_3

Fase 1 / ciclo 1

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	Const.
$-w$	0	1	0	-4	3	0	0	-18
x_1	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	0	2	-3	0	1	6

Tabela 2.17 **Cálculo do Ciclo 2 do Problema Alterado**

Fase 1 / ciclo 1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis						Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	
$-w$	0	1	0	-4	3	0	0	-18
x_1	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	2	0	1	0	12
A_2	3	0	0	2	-3	0	1	6

Entra x_2 e Sai A_2

Fase 1 / ciclo 2

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	Const.
$-w$	0	1	0	0	-3	0	2	-6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	0	3	1	-1	6
x_2	3	0	0	1	-1,5	0	0,5	3

Tabela 2.18 **Cálculo do Ciclo 3 do Problema Alterado e a Solução do Problema Original**

Fase 1 / ciclo 2

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis						Const.
		$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	
$-w$	0	1	0	0	-3	0	2	-6
x_1	1	0	1	0	1	0	0	4
A_1	2	0	0	0	3	1	-1	6
x_2	3	0	0	1	-1,5	0	0,5	3

Entra x_3 e Sai A_1

Fase 1 / ciclo 3

Básica	Eq.	$-w$	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	Const.
$-w$	0	1	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2
x_3	2	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	3	0	0	1	0	1/2	0	6

Segunda Fase do Método

Fase 2 / ciclo −1

Variável Básica	Nº da Eq.	Coeficientes das Variáveis						Const.
		Z	x_1	x_2	x_3			
Z	0	1	-3	5	0			0
x_1	1	0	1	0	0			2
x_3	2	0	0	0	1			2
x_2	3	0	0	1	0			6

Corrigindo as Inconsistências

Fase 2 / ciclo 0

Básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3			Const.
Z	0	1	0	0	0			-24
x_1	1	0	1	0	0			2
x_3	2	0	0	0	1			2
x_2	3	0	0	1	0			6

Problemas com Todos os Tipos de Restrições

Os problemas reais geralmente apresentam todos os tipos de restrições simultaneamente. Para resolver um problema deste tipo devemos proceder ao método da Função Artificial e à introdução de variáveis de folga, excesso e artificiais, como apresentado neste capítulo. A Tabela 2.19 a seguir, resume os procedimentos para cada tipo de condição.

Tabela 2.19 **Resumo Operações por Tipo de Restrição**

Tipo de Problema	Operação Necessária
Função-objetivo de Minimização	Transformar a Minimização em Maximização (*Min Z = Max −Z*)
Restrição de menor ou igual	Inserção de uma Variável de Folga
Restrição de maior ou igual	Inserção de uma Variável de Excesso e outra Artificial
Restrição de Igualdade	Inserção de Variável Artificial
Constante Negativa	Multiplicação por (−1) a Restrição

EXERCÍCIOS 2.5

1. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo utilizando o método Simplex apresentado nesta seção.

   Maximizar 4X] + $3x_2$

   Sujeito a:

   x, + $3x_2$ < 7

   2x, + $2x_2$ = 8

   XT + X_2 < -3

   $x_2 < 2$

   $x_{1(}x_2 > 0$

2. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo utilizando o método Simplex apresentado nesta seção (compare o resultado com o encontrado no exercício 2 da seção 2.1).

   Minx, + $2x_2$

   Sujeito a:

   x, + x_2 > 1

   - 5x, + $2x_2$ >-10

   3x, + $5x_2$ > 15

   $x_{1r}x_2 > 0$

3. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo utilizando o método Simplex apresentado nesta seção (compare o resultado com o encontrado no exercício 3 da seção 2.1 que apenas difere deste exercício pelo sinal da Iª restrição).

   Maximizar 4X] + $8x_2$

   Sujeito a:

   3 x, + $2x_2$ = 18

   x1 + x_2 < 5

   x, <4

   x1, x_2>0

4. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo utilizando o método Simplex apresentado nesta seção (compare o resultado com o encontrado no exercício 4 da seção 2.1).

   Minimizar $8x_1 + 10x_2$

   Sujeito a:

   $-x_1 + x_2 \leq 2$

   $4x_1 + 5x_2 \geq 20$

   $x_1 \leq 6$

   $x_2 \geq 4$

   $x_1, x_2 \geq 0$

5. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo utilizando o método Simplex apresentado nesta seção (compare o resultado com o encontrado no exercício 5 da seção 2.1).

   Maximizar $x_1 + 3x_2$

   Sujeito a:

   $4x_1 + x_2 \geq 30$

   $10x_1 + 2x_2 \leq 10$

   $x_1, x_2 \geq 0$

6. Uma firma, que faz três produtos e tem três máquinas disponíveis como recursos, constrói o seguinte PPL:

   Maximizar lucro = $4x_1 + 4x_2 + 7x_3$

   Sujeito a: $60 \leq x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 10$ (horas na máquina 1)

   $60 \leq 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 100$ (horas na máquina 2)

   $60 \leq 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$ (horas na máquina 3)

   $x_1, x_2, x_3, \geq 0$

   Resolva o problema pelo método Simplex Tabular.

7. Um trem tem dois compartimentos de carga: um dianteiro e um traseiro. O compartimento de carga dianteiro tem uma capacidade de peso de 75.000 quilos e uma capacidade de volume de 40.000 metros cúbicos. O compartimento traseiro tem uma capacidade de peso de 80.000 quilos e uma capacidade de volume de 30.000 metros cúbicos. A empresa dona do trem foi contratada para levar cargas de arroz e feijão empacotados. O peso total da carga de arroz disponível é de 85.000 quilos; o peso total da carga de feijão disponível é de 100.000 quilos. O volume por massa do ar-

roz é 0,2 metro cúbico por quilo, e o volume por massa do feijão é 0,4 metro cúbico por quilo. Por uma questão técnica, o compartimento traseiro deve ter uma carga (em peso) no mínimo 20% superior ao dianteiro. O lucro para transportar arroz é de R$0,35 por quilo, e o lucro para transportar feijão é de R$0,12 por quilo. A empresa dona do trem é livre para aceitar toda ou parte da carga disponível; ela quer saber quantos quilos de arroz e quantos quilos de feijão deve transportar para maximizar o lucro. Resolva pelo método Simplex Tabular.

8. A Óleos Unidos S.A. é uma empresa no ramo de derivados de petróleo que manufatura três combustíveis especiais a partir da mistura de dois insumos: um extrato mineral e um solvente. No processo de produção não existe perda de material, de forma que a quantidade de litros de extrato mineral somada à quantidade de litros de solvente utilizadas para a fabricação de um tipo de combustível resulta no total de litros daquele combustível fabricado. A proporção da mistura está descrita na tabela a seguir:

	Combustível A	Combustível B	Combustível C
Extrato Mineral	8 litros	5 litros	4 litros
Solvente	5 litros	4 litros	2 litros

Suponha que a Óleos Unidos tenha disponíveis 120 litros de extrato mineral e 200 litros de solvente. Por uma característica técnica o solvente evapora com muita facilidade e, para viabilizar os custos da empresa, 70% do seu estoque deve ser utilizado imediatamente. Os lucros líquidos esperados para os três combustíveis são de R$20,00, R$22,00 e R$18,00, respectivamente. Resolva pelo método Simplex Tabular com o objetivo de maximizar o lucro da Óleos Unidos.

9. Um pequeno entregador pode transportar madeira ou frutas em seu caminhão. Ele cobra R$20,00 para cada fardo de madeira e R$35,00 por saco de frutas. Os fardos pesam 1 kg e ocupam 2 dm^3 de espaço. Os sacos de fruta pesam 1 kg e ocupam 3 dm^3 de espaço. Por uma questão de marketing pessoal o entregador deseja entregar sempre os dois produtos. Considerando que no mínimo 20 kg de fardos e 30 kg de frutas devem ser entregues em cada viagem. O caminhão tem capacidade de transportar 12.000 kg e 10.000 dm^3. Formule um problema de programação linear para determinar quantos sacos de fruta e quantas tábuas devem ser transportadas para que o entregador ganhe o máximo possível. Resolva o problema através do método Simplex Tabular e determine qual será o lucro do entregador e como ele deve encher o seu caminhão.

10. Uma indústria vende dois produtos em conserva, ervilha e milho, ao preço por tonelada de $70 e $60, respectivamente. A fabricação dos produtos é feita em toneladas e consome recursos que chamaremos de duas células de produção: limpeza e mistura. As duas células de produção estão disponíveis diariamente. Devido a quebras eventuais o tempo disponível varia diariamente. Através de um levantamento em dados passados, o departamento de produção determinou que as duas células estiveram operacionais em no mínimo 10 e em no máximol 6 horas por dia. A produção de 1 tonelada de ervilha consome 5 horas de limpeza e 2 horas de mistura, e a produção de 1 tonelada de milho consome 4 horas de limpeza e 5 horas de mistura.

Formule um problema de programação linear e determine quantas toneladas de cada produto devem ser fabricadas diariamente para se obter o maior faturamento possível. Resolva o problema através do método Simplex Tabular.

CAPÍTULO 3

Utilização de Programação Linear no Mundo Real

Neste capítulo estaremos procurando mostrar uma série de tipos de problemas reais que são resolvidos através da Programação Linear. Todos os problemas serão resolvidos no Excel. Dentre os problemas escolhidos podemos citar:

- Decisões do Tipo Fazer ou Comprar
- Escolha de Carteira de Investimentos
- Escala de Funcionários
- Problema de Mistura de Componentes
- Problemas de Mix de Produção
- Problemas de Produção e Estoque
- Problemas de Fluxo de Caixa Multiperíodo
- Problemas de Escala de Produção

3.1 RESOLVENDO PROGRAMAÇÃO LINEAR EM UM MICROCOMPUTADOR

Até agora nos preocupamos com o embasamento teórico necessário para a resolução do problema e sua análise. A partir deste ponto estaremos mostrando como evitar todos os cálculos. Concentraremos nossa atenção no que esperamos ser a tarefa de um gerente, isto é, vamos nos concentrar na modelagem de problemas e na análise de suas respostas. Existem muitos softwares disponíveis no mercado que podem nos auxiliar na tarefa dos cálculos.

Dentre as ferramentas que vêm ganhando cada vez mais adeptos, as Planilhas Eletrônicas são as preferidas, pois, além da facilidade de utilização, estão presentes em praticamente todas as empresas modernas. Dentre estas planilhas, as mais utilizadas são o Excel da Microsoft, a Lotus da Lotus/IBM e o Quattro-Pro da Corel. Todas as planilhas dispõem basicamente das mesmas ferramentas, diferindo apenas na forma do comando empregado. No nosso caso, estaremos focalizando a utilização da planilha Excel da Microsoft, por ser a mais popular no Brasil. Presumiremos que o leitor tem conhecimento básico de operação de uma planilha Excel.

As versões do Excel podem ser em inglês ou em português. Em relação ao Excel as diferenças estão nos menus, nome de funções, nas diferenças dos separadores utilizados nas funções (, para;), nos separadores decimais (. para ,). A utilização do Excel em português pode nos causar problemas quando adicionamos suplementos existentes na internet, por duas razões: na procura de nomes de funções que estão na língua inglesa e que diferem do nome em português (por exemplo: *sum* no lugar de *soma)* e pela diferença dos separadores de função (, para ;). Apesar disso, estaremos utilizando neste livro a planilha em português (diferentemente da *1-* edição), por acreditarmos que a maioria dos leitores dificilmente utilizarão estes suplementos.

Existe uma série de softwares específicos para a resolução de problemas de programação linear. Um dos mais populares é o LINDO da Lindo Systems. Uma versão educacional limitada pode ser obtida gratuitamente, via *download* da página da Lindo Systems (*http://www.lindo.com*), bem como um suplemento para o Excel ou para o Lotus chamado *What's Best* que substitui a ferramenta Solver do Excel e possibilita a resolução de problemas de maior porte.

3.1.1 Resolvendo Programação Linear com o Solver do Excel

Começaremos com a solução de um problema simples, mostrando como ele seria resolvido no Excel. Considere o problema a seguir.

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

A mágica da modelagem de um problema de programação linear em uma planilha eletrônica está na maneira como arrumamos as células. Primeiramente devemos designar uma célula para representar cada uma das seguintes entidades:

- Função-objetivo (expressão a ser Maximizada ou Minimizada)
- Variáveis de Decisão (variáveis cujo valor o modelador pode alterar)
- Para cada Restrição:
  - Uma para o lado esquerdo da restrição - LHS *(left hand side)*
  - 9 Uma para o lado direito da restrição - RHS *(right hand side)*

A Figura 3.1 apresenta uma das possíveis maneiras de se representar o problema anterior em uma planilha Excel.

Nesta planilha as células a seguir designarão cada uma das entidades citadas anteriormente.

- B5 irá representar o valor da função-objetivo a ser maximizada.
- B4 e C4 representarão os valores que as variáveis de decisão assumirão na solução.
- D9 até D12 irão representar os LHS das quatro restrições.
- E9 até E12 irão representar os RHS das quatro restrições.

Para que possamos definir cada uma das células anteriormente citadas necessitamos inserir uma série de parâmetros do nosso problema, tais como todos os coeficientes das restrições e da função-objetivo. Para lembrar o que cada célula representa é aconselhável a colocação de títulos que especifiquem o conteúdo de cada célula (células com texto). As células B3 e C3 são utilizadas para inserir os valores dos coeficientes da função-objetivo, enquanto as células de B9 até C12 representam os coeficientes das quatro restrições.

Agora devemos definir cada uma das entradas citadas anteriormente. A Tabela 3.1 representa as fórmulas colocadas em cada uma destas células.

	A	B	C	D	E
1	Função	Coeficientes das Variáveis			
2	Objetivo	X1	X2		
3		3	2		
4	Variáveis				
5	Z=	0			
6					
7	Restrições	Coeficientes das Variáveis			Constantes
8	Nº	X1	X2	LHS	RHS
9	1	1	2	0	6
10	2	2	1	0	8
11	3	-1	1	0	1
12	4	0	1	0	2
13					

FIGURA 3.1 Modelagem do problema 1 no Excel.

***Tabela** 3.1* **Fórmulas Utilizadas nas Células da Modelagem do Problema 1**

B5	=(B3*B4)+(C3*C4)	Função-objetivo
D9	=B9*$B$4+C9*$C$4	LHS da 1ª Restrição
D10	=B10*$B$4+C10*$C$4	LHS da 2ª Restrição
D11	=B11*$B$4+C11*$C$4	LHS da 3ª Restrição
D12	=B12*$B$4+C12*$C$4	LHS da 4ª Restrição

Precisamos agora avisar ao Excel quais são as células que representam a nossa função-objetivo, as variáveis de decisão, as restrições do modelo e, finalmente, mandar o Excel resolver para nós. Isto é feito utilizando-se a Ferramenta (Solver) do Excel. Para tal, clique com o botão esquerdo do mouse sobre o nome Ferramentas na barra de menu *(Tools* na versão em inglês) e a seguinte tela (Figura 3.2) aparecerá. Clique sobre a ferramenta *Solver* assinalada na Figura 3.2.

Após este procedimento aparecerá na tela a janela representada pela Figura 3.3. Nesta janela é que serão informadas ao software as células que representarão a função-objetivo, as variáveis de decisão e as restrições.

Na parte superior da janela (Figura 3.3) aparece um campo para a entrada de dados chamado Definir Célula de Destino *(Target Cell)* que deve representar o valor (equação) da função-objetivo. Existem duas maneiras para designar esta célula. A primeira é clicar sobre o ícone que está do lado direito do campo. A segunda é digitar o nome da célula (B5 no nosso exemplo) no campo. Realizando uma das duas maneiras, a janela resultante para o nosso problema é representada pela Figura 3.4.

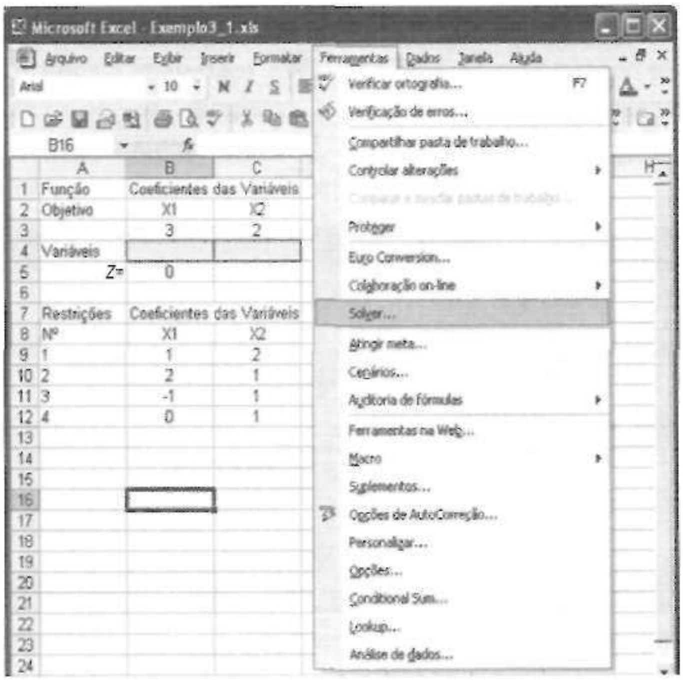


FIGURA 3.2 Tela de ativação da ferramenta Solver do Excel.

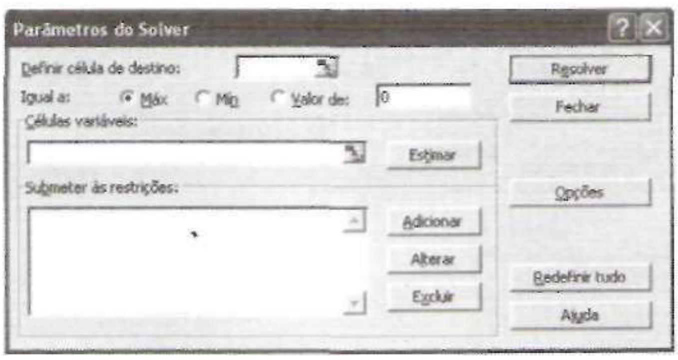


FIGURA 3.3 Janela da ferramenta Solver.

Na linha seguinte são apresentadas as opções de *Maximizar, Minimizar* e *Valor de.* Dependendo do problema devemos clicar o mouse sobre uma das três. A opção Valor de *(Value of)* pode ser utilizada em análise do tipo ponto de equilíbrio, onde desejamos que a função Lucro (por exemplo) atinja o valor de zero. Nos casos de Programação Linear esta opção não será utilizada.

Na próxima linha há um campo denominado Células Variáveis *(Changing Cells).* Neste campo serão inseridas as células que representarão as variáveis de decisão. Os valores podem ser inseridos da mesma maneira como o caso da função-objetivo, isto é, clicando sobre o ícone à direita do campo e marcando as células escolhidas ou simplesmente digitando seus nomes utilizando as regras do Excel para tal. Utilizando uma das maneiras, a janela terá o seguinte formato (Figura 3.5).

O próximo passo é designar as restrições do problema. Devemos inserir uma restrição de cada vez. Para inserir a 1ª restrição devemos clicar no botão Adicionar *(Add)* para exibir uma janela de entrada de restrições como a representada pela Figura 3.6.

A janela de restrições tem três campos, que representam o LHS - Referência de Célula *(Cell Reference)* à esquerda, o sinal da restrição ao centro e o RHS - Restrição *(Constraint)* à direita. Como já mencionado anteriormente, o LHS representa a equação do lado esquerdo da restrição (o lado esquerdo do dicionário modificado). O RHS representa o lado direito da restrição (a constante do dicionário). Em ambos os casos não é necessária a introdução de variáveis de folga/excesso, já que o Excel fará isto de uma forma automática. A Figura 3.7 representa o formato de entrada da 1ª restrição do problema ($x1+2x_2$ <= 6).

Vale notar que na célula D9 já havia sido colocada a fórmula que representa *x1 + 2x2,* ou seja, = B9*$B$4 + C9*$C$4, onde:

B9 representa o coeficiente de *Xi* (valor = 1)
B4 representa o valor da variável x_x (os $ significam que a linha e a coluna são fixas)
C9 representa o coeficiente de x_2 (valor =2)
C4 representa o valor da variável x_2 (os $ significam que a linha e a coluna são fixas)
E9 representa o valor do RHS (constante *=6)*

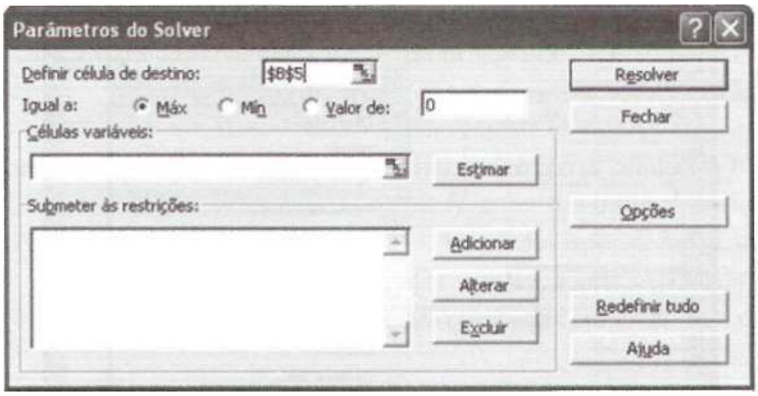


FIGURA 3.4 Escolha da célula-alvo.

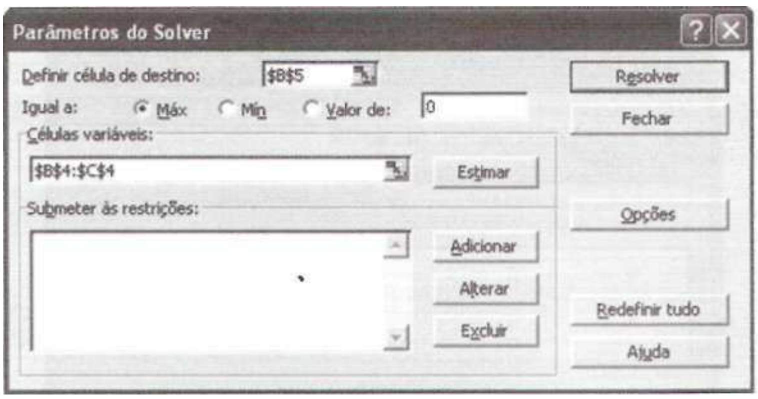


FIGURA 3.5 Janela do Solver após a designação das células das variáveis.

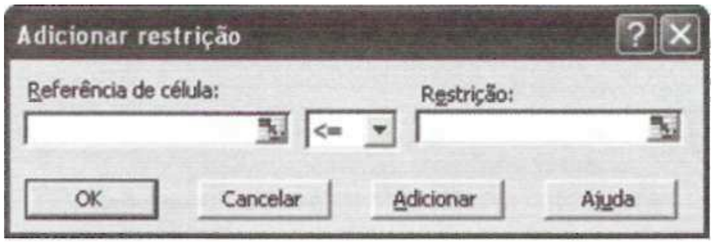


FIGURA 3.6 Janela de entrada de restrição.

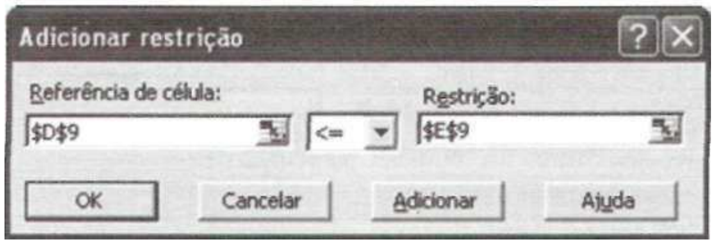


FIGURA 3.7 Formato de entrada da 1ª restrição.

O passo seguinte será o de clicar no botão *OK*, no caso de não haver nenhuma outra restrição, ou Adicionar *(Add)* para confirmar esta restrição e abrir espaço para uma nova entrada. No nosso caso, devemos clicar em Adicionar *(Add)* e inserir as outras restrições. Ao final da entrada de todas as restrições, a janela de parâmetros do *Solver* terá a forma representada pela Figura 3.8.

Existe uma maneira mais simples de inserir as quatro restrições simultaneamente. Como todas as LHS e RHS estão em células adjacentes e possuem o mesmo sinal da restrição, poderíamos simplificar a entrada, marcando todos os LHS e RHS simultaneamente. Isto é, a entrada da janela de restrições deveria ter o formato representado pela Figura 3.9 e a janela do Solver o representado pela Figura 3.10.

Faltam ainda as restrições de não-negatividade, isto é, que as variáveis de decisão não são negativas. Existem duas maneiras de colocar estas restrições no modelo. A primeira é simplesmente criar restrições dizendo que cada variável deve ser maior ou igual a zero, adicionando a restrição mostrada na Figura 3.11.

A segunda alternativa para introduzir as variáveis de não-negatividade é através de opções do Solver. Para poder utilizá-las, devemos clicar no botão Opções *(Options)* na janela de parâmetros. A janela representada pela Figura 3.12, contendo as opções da ferramenta Solver do Excel, é então apresentada. Para incluir essa opção basta marcar a caixa de seleção ao lado da opção Presumir Não Negativos *(Assume Non-Negative),* como assinalado na Figura 3.12.

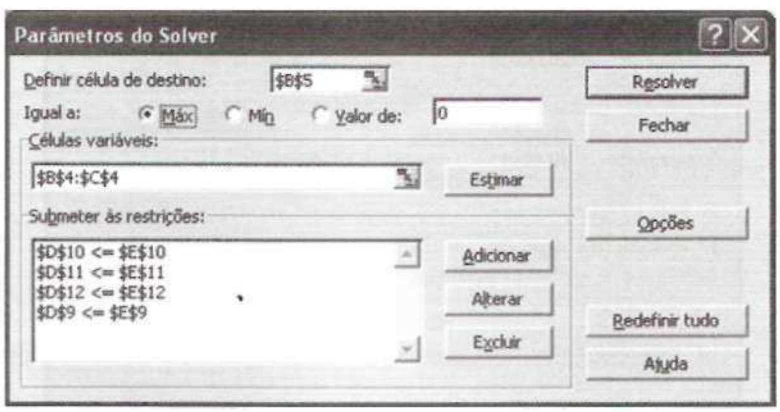


FIGURA 3.8 Janela de entrada de parâmetros do Solver.

FIGURA 3.9 Entrada de restrições, forma alternativa.

FIGURA 3.10 Janela do Solver, forma alternativa.

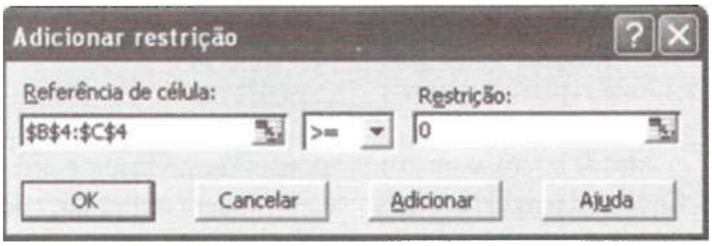


FIGURA 3.11 Restrições de não-negatividade.

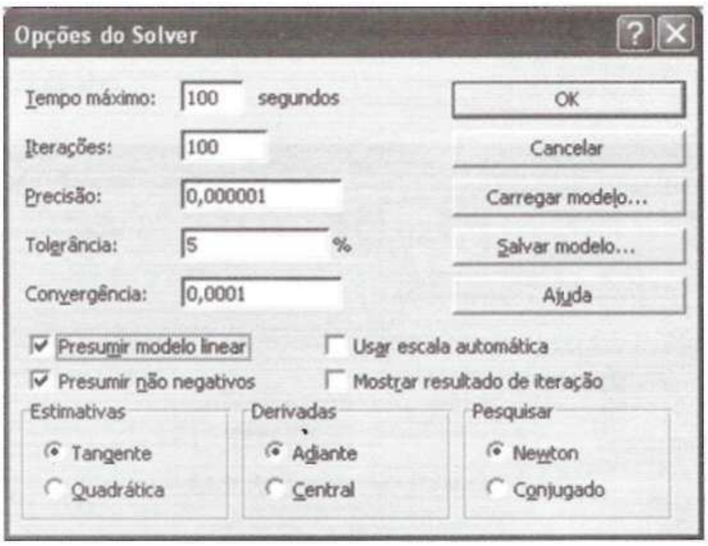


FIGURA 3.12 Opção de não-negatividade.

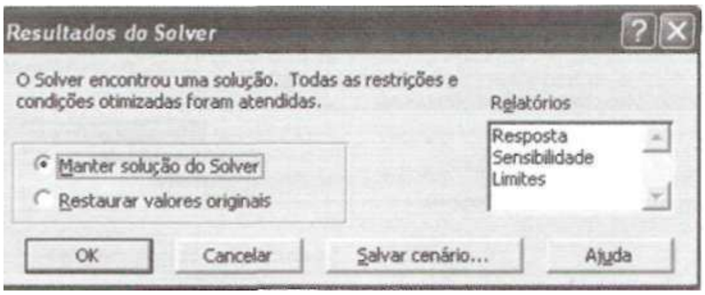


FIGURA 3.13 Opções de resultado da ferramenta Solver.

A última característica do modelo que deve ser implementada é a de Programação Linear. Isto é feito na mesma janela de opções da Ferramenta Solver utilizada anteriormente. Basta marcar a opção Presumir Modelo Linear *(Assume Linear Model),* bem acima da opção de não-negatividade. Esta opção também está assinalada na Figura 3.12. Para sair da janela basta clicar sobre o botão *OK* da janela e isto o levará de volta para a janela de parâmetros.

Uma vez inserido o modelo e suas características, devemos efetivamente resolvê-lo. Para tanto basta clicar no botão Resolver *(Solve)* na janela dos parâmetros da ferramenta Solver do Excel. (Figura 3.10).

Se o modelo foi corretamente inserido, será processado e o resultado será automaticamente exibido na planilha. A seguinte janela (Figura 3.13) aparecerá na tela.

Se observarmos valores incoerentes ou inesperados, devemos neste ponto clicar na opção Restaurar Valores Originais *(Restore Original Values)* para restaurar os valores iniciais do modelo. Existe ainda neste ponto a opção de requisitar três tipos de relatórios lado direito da janela). Falaremos sobre cada um dos relatórios mais adiante.

Devemos ser cuidadosos com a mensagem que o Excel está nos mandando. Neste caso, a mensagem é "O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e Condições Otimizadas foram atendidas" *(Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.),* informando que uma solução ótima foi encontrada para o nosso modelo. Outras mensagens poderiam aparecer, indicando que soluções não foram encontradas por serem inviáveis ou por serem ilimitadas.

Por ora vamos apenas clicar no botão OK para manter os resultados na planilha, a fim de melhor estudá-los.

Ao clicar no botão OK, a Janela de Resultados do Solver será apagada e os resultados aparecerão na planilha como mostra a Figura 3.14.

Os únicos resultados que podem ser lidos diretamente da planilha são os valores das variáveis de decisão na solução ótima e o valor da função-objetivo nesta solução. Esses valores se encontram marcados na Figura 3.14 (células B4, C4 e B5). Para visualizarmos todos os resultados, deveríamos ter marcado a opção Resposta *(Answer)* na janela de Resultados do Solver (Figura 3.15). O resultado seria apresentado em uma janela do Excel em separado, como apresentada na Figura 3.16.

Vamos agora analisar o resultado recebido. O relatório é dividido em três partes. A primeira é relativa à função-objetivo, a segunda tem relação com as variáveis de decisão e a terceira com as restrições.

	A	B	C	D	E
1	Função	Coeficientes das Variáveis			
2	Objetivo	X1	X2		
3		3	2		
4	Variáveis	3,33333333	1,33333333		
5	Z=	12,6666667			
6					
7	Restrições	Coeficientes das Variáveis			Constantes
8	Nº	X1	X2	LHS	RHS
9	1	1	2	6	6
10	2	2	1	8	8
11	3	-1	1	-2	1
12	4	0	1	1,33333333	2
13					

FIGURA 3.14 Resultados inseridos na planilha.

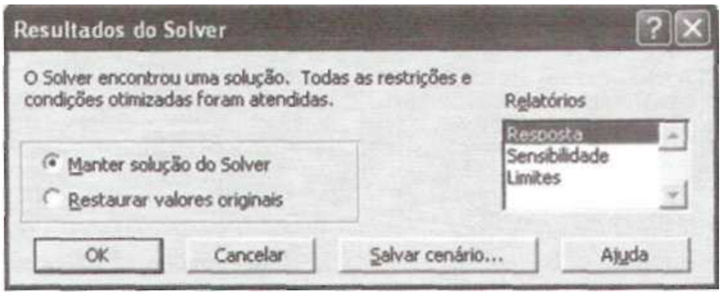


FIGURA 3.15 Opção do relatório de respostas.

Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo3_1.xls]Sheet1
Relatório criado: 25/2/2004 11:15:25

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$5	Z= X1	12,66666667	12,66666667

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$4	Variáveis X1	3,333333333	3,333333333
$C$4	Variáveis X2	1,333333333	1,333333333

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$9	LHS	6	$D$9<=$E$9	Agrupar	0
$D$10	LHS	8	$D$10<=$E$10	Agrupar	0
$D$11	LHS	-2	$D$11<=$E$11	Sem agrupar	3
$D$12	LHS	1,333333333	$D$12<=$E$12	Sem agrupar	0,666666667

Relatório de resposta 1 / Sheet1 / Sheet2

FIGURA 3.16 Relatório de resultados do Solver.

A primeira parte simplesmente mostra no lado esquerdo a célula que tínhamos escolhido para representar a função-objetivo, depois o valor inicial da função-objetivo (zero no nosso caso) e, finalmente no extremo direito, o valor da função-objetivo na solução ótima.

A segunda parte simplesmente mostra no lado esquerdo as células que tínhamos escolhido para representar cada uma das variáveis de decisão, depois o valor inicial das mesmas (zero no nosso caso) e, finalmente no extremo direito, o valor de cada variável na solução ótima.

A terceira parte se refere às restrições do modelo. Cada linha desta parte está relacionada a uma restrição. No lado esquerdo, na coluna Célula *(Cell)* aparece cada célula que representa o LHS (lado esquerdo) de cada restrição. Na coluna Valor da Célula *(Cell Value)* são apresentados os valores das respectivas células na solução ótima, isto é, os valores que são obtidos pela substituição dos valores da solução ótima no lado esquerdo das restrições. Sob a coluna Fórmula *(Formula)* aparece a fórmula da restrição (célula do LHS, o sinal de comparação e a célula do RHS). Sob a coluna *Status* podem aparecer duas opções: Agrupar e Sem Agrupar *(Binding* ou *Not Binding).* A opção Agrupar *(Binding)* aparece quando o LHS é igual ao RHS na solução ótima, significando que a restrição participa da definição da solução ótima, ou seja, limita de alguma maneira a melhora do valor da função-objetivo. A última coluna (Transigência) está relacionada às variáveis de folga/excesso *(Slack Variables).* Como sabemos, para cada restrição de desigualdade devemos introduzir uma variável de folga ou de excesso de maneira a tornar a desigualdade uma igualdade. Essas variáveis medem a diferença entre o LHS e o RHS da restrição. Se a diferença entre RHS-LHS for positiva, no caso de restrições do tipo menor ou igual devemos introduzir variáveis de folga. Se RHS-LHS for negativa, no caso de restrições do tipo maior ou igual devemos introduzir variáveis de excesso.

EXERCÍCIOS 3.1

1. Resolva o problema de programação linear abaixo através da ferramenta Solver do Excel (confira o resultado com as soluções encontradas na primeira questão das listas de Exercícios 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4):

Maximizar $4x_1 + 3x_2$

Sujeito a:

$x_1 + 3x_2 \leq 7$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. Insira o seguinte problema de programação linear na planilha Excel e resolva-o através do Solver (confira a resposta com a solução encontrada na segunda questão das listas de Exercícios 2.1, 2.3 e 2.4):

Min $x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

$x_1 + x_2 \geq 1$

$-5x_1 + 2x_2 \geq -10$

$3x_1 + 5x_2 \geq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. Obtenha a solução ótima do problema de programação linear abaixo utilizando o Solver do Excel (confira o resultado com a solução encontrada na questão 3 das listas de Exercícios 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4):

Maximizar $4x_1 + 8x_2$

Sujeito a:

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

4. Uma empresa industrial fabrica três produtos p1, p2 e p3, com lucro unitário de, respectivamente, R$2,00, R$3,00 e R$4,00. O gerente de produção identificou as seguintes restrições no processo produtivo:

a) A capacidade produtiva total é de 30 unidades por mês.

b) Por utilizar material radioativo, a empresa recebe uma autorização do governo federal para importar apenas uma quantidade fixa de 60kg deste material, o qual deve ser plenamente utilizado durante o mês por motivos de segurança.

c) As quantidades necessárias do material radioativo para fabricação dos produtos pi, p2 e p3 são de, respectivamente, 2 kg, 1 kg e 3kg.

Encontre o nível de produção ótimo utilizando o Solver do Excel.

5. A Nitroglicerina S/A está desenvolvendo um novo aditivo para gasolina de avião. O aditivo é uma mistura de três ingredientes líquidos: A, B e C Para que haja um desempenho adequado, o montante (total) de aditivo (montante do ingrediente A + montante do ingrediente B + montante do ingrediente C) deve ser de, pelo menos, 10 decilitros por litro de gasolina. Entretanto, por questões de segurança, o montante de aditivo não deve exceder 15 decilitros por litro de gasolina. A mistura dos três ingredientes é crítica. No mínimo um decilitro do ingrediente A deve ser usado para cada decilitro do ingrediente B. O montante utilizado do ingrediente C deve ser maior ou igual à metade do montante utilizado do ingrediente A. Encontre, utilizando o Solver do Excel, a mistura dos três produtos com custo mínimo por litro de gasolina de avião, sabendo que o custo por decilitro dos ingredientes A, B e C é de R$0,10, R$0,03 e R$0,09 respectivamente.

6. A Motorbike S/A produz os modelos das motos C250, C750 e Cl 000. A, B e C são os três componentes que entram no processo produtivo, cuja oferta diária é pequena para limitar a produção. Os suprimentos diários dos componentes A, B e C são, respectivamente, de 400kg, 200kg e 300kg. Embora os componentes B e C possam não ser utilizados ao dia, todos os componentes A existentes devem ser utilizados ao dia por motivos de segurança.

A tabela a seguir apresenta o lucro unitário e as quantidades de componentes para produzir cada modelo de motocicleta:

Motocicleta		Componentes (kg)		
Modelo	Lucro unitário	A	B	C
C250	R$140,00	2	1	1
C750	R$300,00	8	1	0
C1000	R$400,00	2	4	1

Encontre a programação de produção diária ótima utilizando a ferramenta Solver do Excel.

7. A Opinião Popular S/A é uma empresa especializada em avaliar a reação de consumidores a novos produtos, serviços e/ou campanhas de publicidade. Um cliente pediu à empresa para providenciar informações sobre a reação de consumidores para um produto recentemente lançado. O contrato do cliente necessita que sejam feitas entrevistas pessoais de porta em porta, respeitando as seguintes condições:

Entrevistar pelo menos 400 famílias com crianças.

2. Entrevistar pelo menos 200 famílias sem crianças.

3. A quantidade de famílias entrevistadas durante a noite deve ser, pelo menos, tão grande quanto o número de entrevistadas durante o dia.

O total de entrevistadas deve ser de, pelo menos, 1.000 famílias.

Baseando-se em entrevistas realizadas anteriormente, os custos das entrevistas são os seguintes:

Tipo de Família	Custo da Entrevista	
	Dia	Noite
Criança	$10	$12
Sem Criança	$8	$10

Para minimizar os custos das entrevistas, quantas entrevistas com cada tipo de família devem ser realizadas em cada um dos horários (dia ou noite), atendendo às restrições impostas? (Resolva utilizando o Solver do Excel.)

8. A Verificação Total S/A inspeciona cápsulas de remédios passando-as sobre uma mesa com iluminação especial (a empresa só detém uma única mesa), onde um inspetor verifica visualmente a existência de cápsulas quebradas ou parcialmente avariadas. Atualmente, qualquer um dos três inspetores pode ser alocado para o serviço de inspeção visual. Os inspetores, porém, diferem na precisão e no tempo de inspeção, além de receberem valores diferentes pelo serviço. As diferenças são as seguintes:

Inspetor	Velocidade (unidades por hora)	Precisão (percentual)	Valor por hora trabalhada
Pedro	300	98	$5,90
João	200	99	$5,20
Marcelo	350	96	$5,50

Operando num período de oito horas, a empresa precisa de pelo menos 2.000 cápsulas inspecionadas com não mais do que 2% de erro nesta inspeção. Além disso, por causa do fator fadiga do processo de inspeção, nenhum inspetor pode trabalhar mais do que quatro horas por dia. Quantas horas cada inspetor deve trabalhar no processo de inspeção durante um dia de oito horas de trabalho para minimizar os custos da inspeção? Qual volume será inspecionado por dia e qual será o custo de inspeção por dia? (Resolva utilizando o Solver do Excel.)

9. Para produzir três tipos de telefones celulares, a fábrica da Motorela utiliza três processos diferentes: o de montagem dos aparelhos, configuração e verificação. Para a fabricação do celular Multi Tics, é necessária 0,1 hora de montagem, 0,2 hora de configuração e 0,1 de verificação. O aparelho mais popular, Star Tic Tac, requer 0,3 hora de montagem, 0,1 hora de configuração e 0,1 hora de verificação. Já o moderno Vulcano necessita de 0,4 hora de montagem, 0,1 hora para configuração, e, em virtude de seu circuito de última geração, não necessita de verificação. Devido a uma imposição do governo de economia de energia, a fábrica não pode consumir mais do que 50.000 KWh/mês de energia, o que significa, de acordo com os cálculos técnicos da empresa, que eles poderão dispor de 290 h/mês na linha de montagem, 250 h/mês na linha de configuração e 110 h/mês na linha de verificação. Sabe-se ainda que o lucro por unidade dos produtos Multi Tics, Star Tic Tac e Vulcano é de R$100, R$210 e R$250, respectivamente; e que a empresa operadora do sistema de telefonia celular adquire todos os celulares produzidos pela Motorela.

Pede-se: o número de celulares de cada modelo a ser produzido mensalmente para que a empresa maximize seus lucros. Sabe-se ainda que o presidente da Motorela exige que os três modelos sejam produzidos e quer lucrar pelo menos R$25.200/mês com o modelo Star Tic Tac. Para incentivar o crescimento de seus produtos mais modernos, o presidente também exige que a produção do modelo Vulcano seja pelo menos o dobro do modelo Star Tic Tac. (Resolva utilizando o Solver do Excel.)

1©, A Vende Bem S/A está inaugurando duas novas filiais de vendas no Sudeste do Brasil: uma na região de São Paulo e outra na região do Rio de Janeiro. Três indivíduos que normalmente vendem nos estados do Norte e Nordeste são considerados para gerente de vendas regional nestas duas novas filiais. Os gerentes possuem uma estimativa anual (em milhões de reais) para cada uma das novas regiões de vendas, conforme a tabela abaixo:

Gerente Regional	Região de Venda	
	São Paulo	Rio de Janeiro
João Bom de Papo	R$100	R$95
Zé do Desconto	R$85	R$80
Luiz Grana Fácil	R$90	R$75

Quais gerentes regionais devem ser escolhidos para as duas novas filiais, buscando uma maximização das vendas? Formule um modelo de programação linear para este problema e resolva-o utilizando o Solver do Excel.

3.2 APLICAÇÕES REAIS

Nesta seção será apresentada uma série de casos, que têm como finalidade mostrar como decisões do dia-a-dia das empresas poderiam ser facilitadas pela utilização de modelos simulados em uma planilha eletrônica.

3.2.1 Decisões do Tipo Fazer ou Comprar

Caso LCL Motores Ltda.

A LCL Motores Ltda., uma fábrica de motores especiais, recebeu recentemente R$900.000,00 em pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A LCL pode terceirizar parte da sua produção. A Tabela 3.2 resume estes dados. A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser produzidos de forma terceirizada para atender à demanda de pedidos.

Tabela 3.2 **LCL Motores Ltda.**

Modelo	1	2	3	Total
Demanda	3000 unid.	2500 unid.	500 unid.	6000 unid.
Montagem	1h/unid.	2h/unid.	0,5h/unid.	6000h
Acabamento	2,5h/unid.	1h/unid.	4h/unid.	10000h
Custo produção	R$50	R$90	R$120	
Terceirizado	R$65	R$92	R$140	

Solução

O primeiro passo para modelagem de um problema de Programação Linear é a determinação das variáveis de decisão do problema. No nosso caso, temos que determinar quantos motores de cada tipo devem ser fabricados e quantos devem ter sua produção terceirizada. Logo, as variáveis de decisão são:

- F_1 – Número de motores do modelo 1 fabricados pela LCL
- F_2 – Número de motores do modelo 2 fabricados pela LCL
- F_3 – Número de motores do modelo 3 fabricados pela LCL
- T_1 – Número de motores do modelo 1 terceirizados pela LCL
- T_2 – Número de motores do modelo 2 terceirizados pela LCL
- T_3 – Número de motores do modelo 3 terceirizados pela LCL

O segundo passo é determinar qual objetivo devemos perseguir. No nosso caso está claro que a LCL Motores deseja maximizar os seus lucros, isto é, Receitas - Despesas, representado pela equação abaixo.

$$\text{Max } 900000 - (50F1 + 90F_2 + 120F_3 + 65T_1 + 92T_2 + 140T_3)$$

Vale ressaltar que, como a receita é constante (R$90.000,00), maximizar a equação acima é rigorosamente igual a minimizar os custos (entre parênteses). Logo, uma função-objetivo mais simples seria dada por:

$$\text{Min} 50F1 + 90F_2 + 120F_3 + 65T1 + 92T_2 + 140T_3$$

Uma vez determinados o nosso objetivo e as variáveis de decisão, devemos notar que algumas restrições se impõem ao modelo. As restrições estão relacionadas aos recursos da empresa. Por exemplo, o número de horas para execução de montagem de motores é um recurso limitado, isto é, mantidas as condições hoje existentes na fábrica, tais como número de empregados, horas trabalhadas por empregado e a produtividade do departamento, entre outras. Existe um total de 6.000 horas para a execução desta tarefa. Logo, algumas restrições se impõem ao nosso problema.

Restrição de Montagem

O total de horas usadas para montar motores de todos os tipos não deve exceder o total de horas disponíveis para a montagem dos mesmos. Matematicamente falando, podemos dizer que:

$$1F_1 + 2F_2 + 0{,}5F_3 \leq 6000$$

O lado esquerdo da restrição (LHS) deve representar o tempo de montagem gasto para montar todos os motores de qualquer tipo, enquanto o lado direito (RHS) representa a disponibilidade deste recurso (horas de montagem). Uma maneira prática de saber se uma restrição é satisfatória é a verificação das unidades que estamos comparando. Não podemos somar maçãs a abacaxis e dizer que o total está em horas de produção de salada de frutas. Portanto, no nosso caso, o primeiro termo tem o resultado em horas, já que unidade do motor tipo 1 se cancela (numerador e denominador).

$$1\left[\frac{\text{Horas de Montagem}}{\text{Unid. Motor1}}\right] F_1 \text{ [Unid. Motor1]} =$$

$$1F_1 \text{ [horas de montagem]}$$

Como os outros dois termos são análogos ao primeiro, estaremos somando horas de montagem e comparando com o recurso dado em horas de montagem. Logo, temos as unidades corretas.

Restrição de Acabamento

O total de horas usadas no acabamento de motores de todos os tipos não deve exceder o total de horas disponíveis para o acabamento dos mesmos. Matematicamente falando, podemos dizer que:

$$2{,}5F_1 + 1F_2 + 4F_3 \leq 10000$$

Podemos verificar as unidades da equação acima. O RHS e LHS estão em horas de acabamento. O LHS pode ser verificado na equação abaixo que apresenta o 1^2 termo do LHS.

$$2{,}5\left[\frac{\text{Horas de Acabamento}}{\text{Unid. Motor1}}\right] F_1 \text{ [Unid. Motor1]} =$$

$$2{,}5F_1 \text{ [horas de acabamento]}$$

Restrições de Demanda

Devemos ainda atender aos pedidos efetuados. No nosso caso, devemos entregar 3.000 motores do tipo 1, 2.500 do tipo 2 e 500 motores do tipo 3. O cliente não quer saber onde foi produzido cada tipo de motor (fabricado ou terceirizado) e sim receber o total de motores. Estamos assumindo que o motor terceirizado tem as mesmas características do fabricado na LCL Motores e que o cliente não poderá distingui-los. Logo, a soma dos motores do tipo 1 fabricados na empresa e os terceirizados deve ser igual ao total demandado. O raciocínio é análogo para os outros tipos de motores. Repare que temos três restrições, pois temos três tipos de motores. Matematicamente isto pode ser traduzido por:

$$F_1 + T_1 = 3000 \qquad \text{(motor do tipo 1)}$$

$$F_2 + T_2 = 2500 \qquad \text{(motor do tipo 2)}$$

$$F_3 + T_3 = 500 \qquad \text{(motor do tipo 3)}$$

O nosso problema então pode ser resumido por:

$$\text{Min}\, 50F_1 + 90F_2 + 120F_3 + 65T_1 + 92T_2 + 140T_3$$

Sujeito a:

$$1F_1 + 2F_2 + 0{,}5F_3 \leq 6000$$

$$2{,}5F_1 + 1F_2 + 4F_3 \leq 10000$$

$$F_1 + T_1 = 3000$$

$$F_2 + T_2 = 2500$$

$$F_3 + T_3 = 500$$

$$F_1, F_2, F_3, T_1, T_2, T_3 \geq 0$$

Solução Utilizando o Excel

A Figura 3.17 representa a organização sugerida para a modelagem do problema. Como temos seis variáveis de decisão, temos que alocar seis células para receber estes valores (B3, B4, C3, C4, D3 e D4) e uma para denotar o valor da função-objetivo (BI6). Temos ainda 5

	A	B	C	D	E	F	G
1	LCL Motores		Motores				
2	Tipo	1	2	3			
3	Fabricado					VARIÁVEL DE	
4	Terceirizado					DECISÃO	
5	Total p/tipo	0	0	0			
6	Demanda	3000	2500	500			
7							
8	Custos		Reais/Unidade				
9	Fabricado	50	90	120			
10	Terceirizado	65	92	140			
11							
12	Horas		Horas/unidade		Usadas	Disponíveis	
13	Montagem	1	2	0,5	0	6000	
14	Acabamento	2,5	1	4	0	10000	
15							
16	Custo Total	0	FUNÇÃO-OBJETIVO				

FIGURA 3.17 Representação do modelo do Caso LCL Motores.

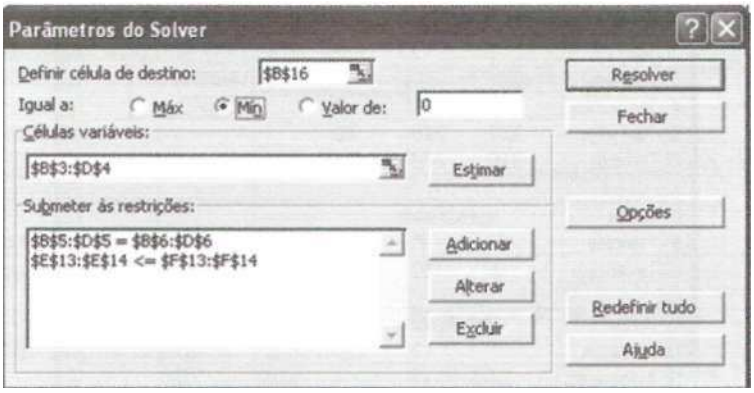


FIGURA 3.18 Parâmetros do Caso LCL Motores.

restrições, logo devemos ter 5 células para representar os LHS (B5, C5, D5, E13 e E14) e 5 para representar os RHS das restrições (B6, C6, D6, F13, F14). Os parâmetros do modelo são os custos de produção e terceirização (B9, C9, D9, BIO, CIO e D10) e a quantidade de horas usadas por tarefa por tipo de motor fabricado (B13, C13, D13, B14, C14, D14).

A função-objetivo é igual à minimização dos Custos Próprios de Produção + Custos de Terceirização. A célula B16 que representa a função-objetivo pode conter uma das seguintes alternativas de fórmulas, que representam o mesmo cálculo.

$$B16=(B9\times B3)+(C9\times C3)+(D9\times D3)+(B10\times B4)+(C10\times C4)+(D10\times D4) \text{ ou}$$
$$B16=\text{SOMARPRODUTO}(B9{:}D10;B3{:}D4)$$

Agora devemos colocar as fómulas que representaram as LHS das cinco restrições. A Tabela 3.3 a seguir apresenta as fómulas necessárias.

Tabela 3.3 **Fórmulas Referentes ao LHS das Restrições do Caso LCL Motores**

Restrição	Célula	Fórmulas referentes ao LHS das restrições
$F_1+T_1=3000$	B5	=B3+B4
$F_2+T_2=2500$	C5	=C3+C4
$F_3+T_3=500$	D5	=D3+D4
$F_1+2F_2+0{,}5F_3\le 6000$	E13	=(B13*B3)+(C13*C3)+(D13*D3) ou =SOMARPRODUTO(B13:D13;$B$3:$D$3)
$2{,}5F_1+F_2+4F_3\le 10000$	E14	=(B14*B3)+(C14*C3)+(D14*D3) ou =SOMARPRODUTO(B14:D14;$B$3:$D$3)

O último passo a ser seguido é a definição do modelo na ferramenta Solver do Excel. A janela de parâmetros deve ser preenchida como apresentado na Figura 3.18.

Devemos agora definir as opções a serem usadas pelo Solver (Figura 3.19) e otimizar o modelo clicando no botão Resolver *(Solve)* na Figura 3.18.

A planilha receberá as respostas do modelo automaticamente. A Figura 3.20 mostra os resultados obtidos.

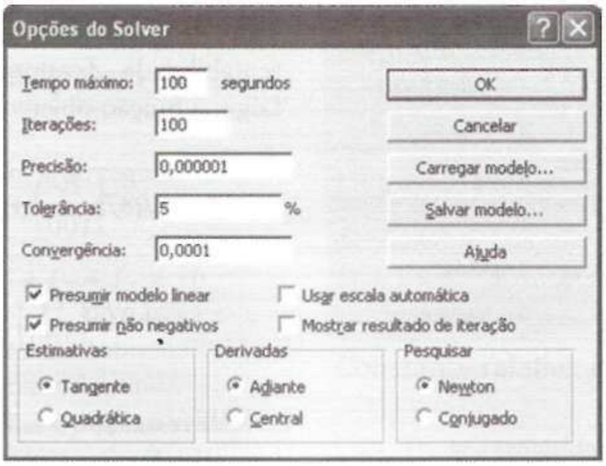


FIGURA 3.19 Opções da ferramenta do Solver.

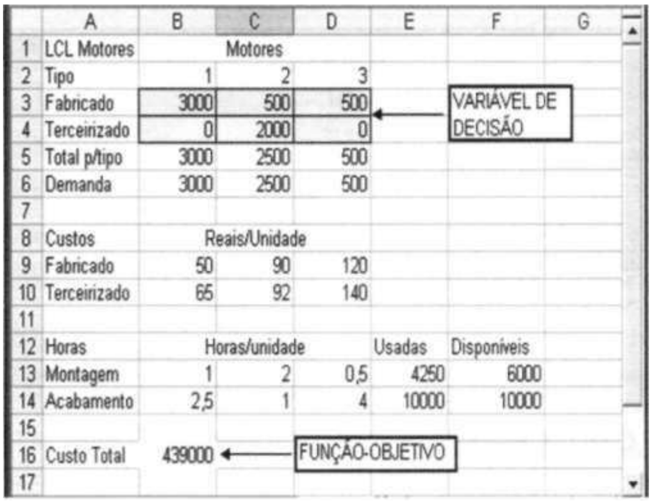


FIGURA 3.20 Resultados do modelo LCL Motores.

3.2.2 Escolha de Carteira de Investimentos

Caso **LCL** Investimentos S.A.

A LCL Investimentos S.A. gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimento para diversos clientes, baseados em *bonds* de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

- Não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento.
- Um valor superior a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que dez anos.

O total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 50% do total investido.

A Tabela 3.4 mostra os dados dos títulos selecionados. Determine qual percentual do total deve ser aplicado em cada tipo de título.

Tabela 3.4 **Dados do Caso LCL Investimentos**

	Retorno Anual	Anos para Vencimento	Risco
Título 1	8,7%	15	1 – Muito Baixo
Título 2	9,5%	12	3 – Regular
Título 3	12,0%	8	4 – Alto
Título 4	9,0%	7	2 – Baixo
Título 5	13,0%	11	4 – Alto
Título 6	20,0%	5	5 – Muito Alto

Solução

O primeiro passo para a modelagem de um problema de Programação Linear é a determinação das variáveis de decisão do problema. No nosso caso, temos de determinar qual percentual do total investido deve ser aplicado em cada tipo de título. Logo, podemos definir seis variáveis de decisão. São elas:

- P_1 - Percentual do total aplicado no título do tipo 1
- P_2-Percentual do total aplicado no título do tipo 2
- P_3 - Percentual do total aplicado no título do tipo 3
- P_4 - Percentual do total aplicado no título do tipo 4
- P_5 — Percentual do total aplicado no título do tipo 5
- P_6 — Percentual do total aplicado no título do tipo 6

O passo seguinte é determinar nosso objetivo. Como gostamos de agradar ao cliente, desejamos que ele receba o maior retorno anual possível considerando as restrições impostas pelo mesmo. Da tabela podemos ver que a aplicação de R$1,00 no Título 1 nos devolveria ao final de 1 ano R$1,087 (Capital de R$1,00 + Juros de R$0,087), ou seja, Juros = Principal x Taxa de Juros Unitária. Se quisermos maximizar a rentabilidade, devemos maximizar os juros ganhos. Logo, a função-objetivo deverá ser dada por:

$$\text{Max } 0{,}087\left(\frac{P_1}{100}\right)+0{,}095\left(\frac{P_2}{100}\right)+0{,}12\left(\frac{P_3}{100}\right)+$$
$$+0{,}09\left(\frac{P_4}{100}\right)+0{,}13\left(\frac{P_5}{100}\right)+0{,}2\left(\frac{P_6}{100}\right)$$

Vale ressaltar que não colocamos diretamente o valor aplicado como a variável de decisão. Desta maneira, o problema fica mais geral, pois o cliente pode trazer qualquer quantia e, com uma simples multiplicação, obteremos quanto deve ser aplicado em cada tipo de título.

Restrição de Orçamento

Não podemos aplicar mais do que o cliente solicitou sob pena de irritá-lo. Logo, o somatório dos percentuais aplicados em cada tipo de título deve ser igual ao total aplicado, isto é, 100% dos recursos. Portanto, rsta restrição será dada por:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 100$$

Restrição de Aplicação Máxima por Tipo de Título

O cliente deseja diversificar seu risco. Portanto, não aceita que seja aplicado mais de 25% do total em um único título. Logo, cada percentual deve ser menor que 25% (seis restrições).

$$P_1 \le 25; \quad P_2 \le 25; \quad P_3 \le 25; \quad P_4 \le 25;$$
$$P_5 \le 25; \quad \text{e} \quad P_6 \le 25;$$

Restrição de Aplicação Mínima em Títulos com Maturidade Maior que Dez Anos

Os títulos que têm maturidade maior que dez anos são os títulos do tipo 1, 2 e 5. Logo, o somatório dos percentuais aplicados nestes títulos deve ser, no mínimo, igual a 50%. Matematicamente podemos expressar esta restrição como:

$$P_1 + P_2 + P_5 \ge 50$$

Restrições de Aplicação Máximo em Título de Alto Risco

Os títulos que têm risco maior que regular (alto ou muito alto) são os títulos do tipo 3, 5 e 6.

$$P_3 + P_5 + P_6 \le 50 \text{ ou } P_1 + P_2 + P_4 \ge 50$$

Ambas as restrições representam a mesma coisa, já que dizer que as baixas e regulares devem ser maiores que 50% é o mesmo que as altas e muito altas devem ser menores que 50%. Logo, devemos colocar apenas uma destas restrições no nosso modelo.

Modelo

$$\text{Max } 0{,}087\left(\frac{P_1}{100}\right) + 0{,}095\left(\frac{P_2}{100}\right) + 0{,}12\left(\frac{P_3}{100}\right) +$$
$$+0{,}09\left(\frac{P_4}{100}\right) + 0{,}13\left(\frac{P_5}{100}\right) + 0{,}2\left(\frac{P_6}{100}\right)$$

Sujeito a:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 100$$

$$P_1 \le 25; \quad P_2 \le 25; \quad P_3 \le 25; \quad P_4 \le 25;$$
$$P_5 \le 25; \quad \text{e} \quad P_6 \le 25;$$

$$P_1 + P_2 + P_5 \ge 50$$

$$P_3 + P_5 + P_6 \le 50$$

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \ge 0$$

Não é necessário dizer que os percentuais devem variar entre 0 e 100, pois a *1*- restrição garante que o somatório é igual a 100. Como todos os percentuais são maiores que zero pelas restrições de não-negatividade, isto obriga que cada variável seja no mínimo zero e no máximo 100, já que para um percentual ser maior que 100, pelo menos um outro deveria ser menor que zero.

Resolução Usando o Solver do Excel

A Figura 3.21 apresenta uma alternativa de modelagem do Caso da LCL Investimentos, utilizando o Excel. Nela, a célula D11 representa a função-objetivo (retorno anual médio da carteira), as células de B4 até B9 representam as variáveis de decisão e o LHS das seis restrições que limitam o percentual de aplicação por tipo de título. Os RHS destas restrições são as células de C4 até C9. O LHS da Restrição de Orçamento é representado na célula BIO, enquanto a célula BI 1 é o RHS.

No caso das restrições relativas à maturidade e ao risco dos títulos devemos utilizar um artifício, pois ambas as variáveis são do tipo qualitativas. Na transformação das variáveis qualitativas são utilizadas constantes binárias que dividem os títulos em duas classes.

Constante relativa à maturidade do título i

$$b_i^F = \begin{cases} 1, & \text{se a maturidade for maior que dez anos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
2		Percentual	Percentual	Retorno	Anos para	Mais de	Risco	Risco
3	Tipo	Investido	Máximo	Anual	Vencimento	10 anos		Alto
4	Título 1	0,00%	25,00%	8,70%	15	1	1- Muito Baixo	0
5	Título 2	0,00%	25,00%	9,50%	12	1	3- Regular	0
6	Título 3	0,00%	25,00%	12,00%	8	0	4- Alto	1
7	Título 4	0,00%	25,00%	9,00%	7	0	2- Baixo	0
8	Título 5	0,00%	25,00%	13,00%	11	1	4- Alto	1
9	Título 6	0,00%	25,00%	20,00%	5	0	5- Muito Alto	1
10	Total Invest.	0,00%			Maturidade	0,00%	Risco calculado	0,00%
11	Total Disp.	100,00%	Retorno	0,00%	Min.Matur.	50%	Max.Risco	50%
12								

FIGURA 3.21 Representação do modelo da LCL Investimentos.

Constante relativa ao risco do título i

$$b_i^H = \begin{cases} 1, & \text{se o risco for do tipo alto ou muito alto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O somatório das multiplicações dos percentuais investidos (coluna B) pelas respectivas constantes relativas à maturidade (coluna F) é igual ao percentual aplicado em títulos com maturidade maior que dez anos. Analogamente, o somatório das multiplicações dos percentuais investidos (coluna B) pelas respectivas constantes relativas ao risco (coluna H) é igual ao percentual aplicado em títulos com riscos do tipo alto ou muito alto. Matematicamente isto pode ser representado por:

$$F10 = \sum_{i=1}^{6} P_i \times b_i^F \text{ e } H10 = \sum_{i=1}^{6} P_i \times b_i^H$$

onde:

b_i^F – representa a constante binária do Título i da coluna F

b_i^H – representa a constante binária do Título i da coluna H

Portanto, a célula FIO representa o LHS e a célula F 1 1 RHS da restrição relativa à maturidade. A célula H10 representa o LHS e a célula Hl 1 o RHS da restrição relativa ao risco.

As células que representam os LHS das restrições e a função-objetivo necessitam de fórmulas que os representem. A Tabela 3.5 mostra estas células e suas fórmulas.

Tabela 3.5 **Fórmulas dos LHS das Restrições**

Função-objetivo	D11	=SOMARPRODUTO(B4:B9;D4:D9)
Restrição	**Célula**	**Fórmula (LHS)**
$P_1 \leq 25$	B4	LHS é igual à variável de decisão
$P_2 \leq 25$	B5	LHS é igual à variável de decisão
$P_3 \leq 25$	B6	LHS é igual à variável de decisão
$P_4 \leq 25$	B7	LHS é igual à variável de decisão
$P_5 \leq 25$	B8	LHS é igual à variável de decisão
$P_6 \leq 25$	B9	LHS é igual a variável de decisão
$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + {} + P_5 + P_6 = 100$	B10	=SOMA(B4:B9)
$P_1 + P_2 + P_5 \geq 50$	F10	=SOMARPRODUTO(B4:B9;F4:F9)
$P_3 + P_5 + P_6 \leq 50$	H10	=SOMARPRODUTO(B4:B9;H4:H9)

Uma vez definidas as células que necessitavam de fórmulas, podemos utilizar o Solver do Excel para resolver o nosso problema. Os parâmetros e as opções do Solver são mostrados na Figura 3.22.

O resultado do modelo é apresentado na Figura 3.23 e foi inserido automaticamente na planilha.

3.2.3 Escala de Funcionários

Caso LCL Correios e Malotes

A LCL Correios e Malotes, uma franquia da ECT (Empresa de Correios e Telégrafos), deseja estabelecer o número de funcionários de horário integral que deve contratar para iniciar suas atividades. Para fazê-lo, recebeu uma tabela

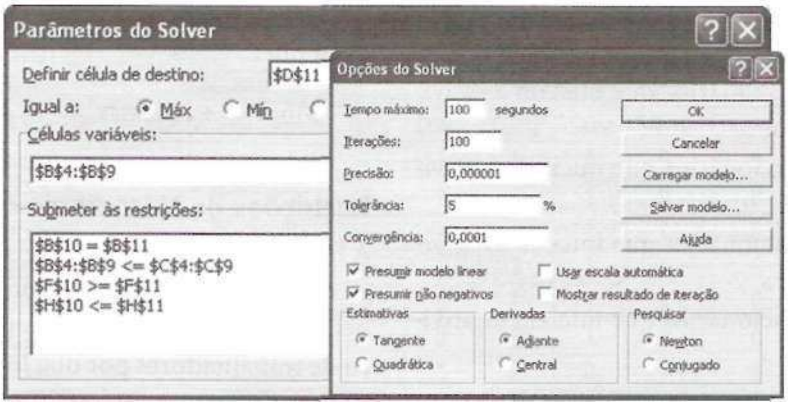


FIGURA 3.22 Parâmetros do modelo e opções do Solver - LCL Investimentos.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Percentual	Percentual	Retorno	Anos para	Mais de	Risco	Risco
3	Tipo	Investido	Máximo	Anual	Vencimento	10 anos		Alto
4	Título 1	0,00%	25,00%	8,70%	15	1	1- Muito Baixo	0
5	Título 2	25,00%	25,00%	9,50%	12	1	3- Regular	0
6	Título 3	0,00%	25,00%	12,00%	8	0	4- Alto	1
7	Título 4	25,00%	25,00%	9,00%	7	0	2- Baixo	0
8	Título 5	25,00%	25,00%	13,00%	11	1	4- Alto	1
9	Título 6	25,00%	25,00%	20,00%	5	0	5- Muito Alto	1
10	Total Invest.	100,00%			Maturidade	50,00%	Risco calculado	50,00%
11	Total Disp.	100,00%	Retorno	12,88%	Min.Matur.	50%	Max.Risco	50%

FIGURA 3.23 O resultado do modelo LCL Investimentos.

da ECT com o número mínimo de funcionários por dia da semana. Estas informações se encontram na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 **Informações ECT**

Dia da Semana	*Nº de Funcionários*
Domingo	11
Segunda-feira	18
Terça-feira	12
Quarta-feira	15
Quinta-feira	19
Sexta-feira	14
Sábado	16

O sindicato dos empregados de franqueadores dos correios mantém um acordo sindical que determina que cada empregado deve trabalhar cinco dias consecutivos e folgar em seguida dois dias (por exemplo: um funcionário que trabalhe de segunda a sexta-feira deve folgar no sábado e no domingo), e que as franquias devem ter apenas empregados com horário integral. Formule o problema de maneira a determinar o número total de empregados que a franquia deve contratar e o número de empregados por dia.

Solução

O primeiro passo é determinar as variáveis de decisão. Desejamos determinar quantas pessoas devem trabalhar em cada dia e quantas pessoas devem ser contratadas no total. Uma primeira idéia seria pensar em variáveis do tipo *N1* como sendo o número de pessoas que trabalhariam no dia *i*. Esta maneira de pensar no problema não traria resultados. O problema é o acordo sindical, que obriga o funcionário a trabalhar em regime de horário integral 5 dias consecutivos, seguidos de 2 dias de folga.

Já que este acordo sindical determina o trabalho em dias consecutivos, isto nos leva a pensar que parte dos empregados que trabalha em um dia é igual ao do dia anterior. A diferença de empregados entre um dia e outro está ligada aos empregados que começam a jornada semanal naquele dia e os que começaram seis dias antes (passam a ter folga). Isto nos faz pensar que as variáveis de decisão devem estar ligadas ao dia de início da jornada semanal. Logo, podemos pensar nas variáveis de decisão como:

- N1 - número de funcionários que iniciam as atividades no domingo
- N_2 - número de funcionários que iniciam as atividades na segunda-feira
- N_3 - número de funcionários que iniciam as atividades na terça-feira
- N_4 - número de funcionários que iniciam as atividades na quarta-feira
- N_5 - número de funcionários que iniciam as atividades na quinta-feira
- N_6 - número de funcionários que iniciam as atividades na sexta-feira
- N_7 - número de funcionários que iniciam as atividades no sábado

Portanto, o número de empregados que trabalha em um dia seria a soma do número de empregados que começariam a trabalhar 4, 3, 2, 1, dias antes e no próprio dia. Matematicamente isto poderia ser traduzido por:

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$
Número de empregados que trabalham na quinta-feira

$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$
Número de empregados que trabalham na sexta-feira

$N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7$
Número de empregados que trabalham no sábado

$N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_1$
Número de empregados que trabalham no domingo

$N_5 + N_6 + N_7 + N_1 + N_2$
Número de empregados que trabalham na segunda-feira

$N_6 + N_7 + N_1 + N_2 + N_3$
Número de empregados que trabalham na terça-feira

$N_7 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4$
Número de empregados que trabalham na quarta-feira

Uma vez escolhidas as variáveis de decisão, o passo seguinte é definir o nosso objetivo. Como toda empresa no mundo capitalista tem como meta o lucro," no nosso caso como não temos elementos de receita, o que desejamos fazer é reduzir a um mínimo nossos custos com pessoal. Considerando que o valor pago a todos os funcionários é independente do dia de início da jornada semanal, a nossa função-objetivo pode ser dada por:

$$Min\ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7$$

$$\begin{aligned}
N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 &\geq 19\\
N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 &\geq 14\\
N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 &\geq 16\\
N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_1 &\geq 11\\
N_5 + N_6 + N_7 + N_1 + N_2 &\geq 18\\
N_6 + N_7 + N_1 + N_2 + N_3 &\geq 12\\
N_7 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &\geq 15
\end{aligned}$$

Resolução Usando o Solver do Excel

Apresentaremos duas alternativas para realizar a mesma tarefa, com o intuito de mostrar que não existem soluções únicas e o mais importante não é o modo de se fazer, mas sim, que este reflita a realidade do problema estudado.

ALTERNATIVA A

Vamos utilizar aqui de novo uma transformação de variáveis para facilitar as fórmulas que devemos introduzir no Excel. As constantes 0 ou 1 indicam ausência ou presença, respectivamente, no trabalho. O modelo mostrado na Figura 3.24 utiliza estas constantes. Observe que os 5 dias de trabalho são representados por 1 e os 2 dias de folga são representados por 0. Vale ressaltar que os dias de folga e de trabalho são consecutivos.

As sete variáveis de decisão (número de empregados que começam a jornada em um dia da semana) estão representadas no nosso problema pelas células de 14 a 110, enquanto a função-objetivo está representada pela célula 112. Os LHS das restrições aparecem nas células de BI1 a H11, enquanto os RHS de B12 a H12.

Uma vez definida a estrutura do modelo (localização das células representativas do modelo), devemos definir as fórmulas que devem ser colocadas nas células que representam os LHS das restrições e a função-objetivo. No nosso caso, as fórmulas estão apresentadas na Tabela 3.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Franquia ECT								
2					Dia de Trabalho				Total de
3	Dia de Início de Trabalho	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Empregados
4	Domingo	1	1	1	1	1	0	0	0
5	Segunda-Feira	0	1	1	1	1	1	0	0
6	Terça-Feira	0	0	1	1	1	1	1	0
7	Quarta-Feira	1	0	0	1	1	1	1	0
8	Quinta-Feira	1	1	0	0	1	1	1	0
9	Sexta-Feira	1	1	1	0	0	1	1	0
10	Sábado	1	1	1	1	0	0	1	0
11	Tot.Empr.Disponíveis	0	0	0	0	0	0	0	
12	Tot.Empr.Requeridos	11	18	12	15	19	14	16	0

alt 1 / alt2 / Sheet3

FIGURA 3.24 Modelo do Caso LCL Correios e Malotes - Alternativa A.

***Tabela* 5.7 Fórmulas das Células Representativas da Alternativa A**

Função-objetivo	I12	=SOMA(I4:I10)
Restrição	**Célula**	**Fórmula (LHS)**
$N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_1 \geq 11$	B11	=SOMARPRODUTO (B4:B10;$I$4:$I$10)
$N_5 + N_6 + N_7 + N_1 + N_2 \geq 18$	C11	=SOMARPRODUTO (C4:C10;$I$4:$I$10)
$N_6 + N_7 + N_1 + N_2 + N_3 \geq 12$	D11	=SOMARPRODUTO (D4:D10;$I$4:$I$10)
$N_7 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \geq 15$	E11	=SOMARPRODUTO (E4:E10;$I$4:$I$10)
$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 \geq 19$	F11	=SOMARPRODUTO (F4:F10;$I$4:$I$10)
$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 \geq 14$	G11	=SOMARPRODUTO (G4:G10;$I$4:$I$10)
$N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 \geq 16$	H11	=SOMARPRODUTO (H4:H10;$I$4:$I$10)

Vale ressaltar que em todas as fórmulas das restrições aparecem as células I4 e I10, com dois $ cada uma. Este $ representa um recurso do Excel para se fixar uma determinada célula (um $ para a linha e outro para a coluna), de maneira a facilitar a cópia da fórmula através do arraste do mouse.

Uma vez definidas a estrutura e suas fórmulas, podemos otimizar o modelo utilizando o Solver do Excel. A Figura 3.25 apresenta os parâmetros e as opções utilizadas do Solver.

A resposta é automaticamente colocada na planilha (Figura 3.26).

ALTERNATIVA B

Iremos agora apresentar uma segunda alternativa de modelagem. Neste caso, não estaremos utilizando as constantes binárias. A estrutura do modelo alternativo é representada na Figura 3.27. As fórmulas da função-objetivo e dos LHS das restrições são

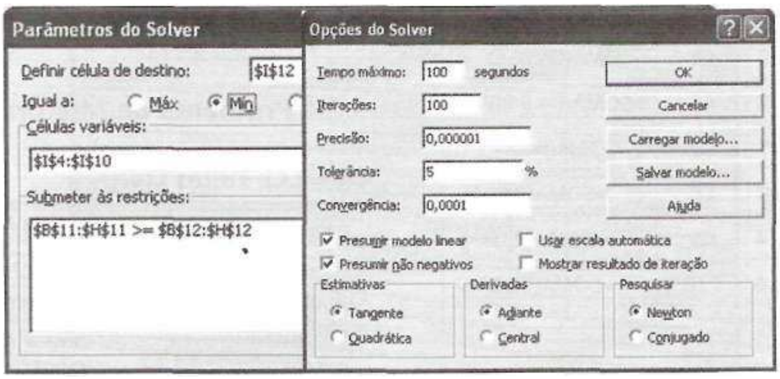


FIGURA 3.25 Parâmetros e opções do Solver usados no modelo do LCL.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Franquia ECT								
2		Dia de Trabalho							Total de
3	Dia de Início de Trabalho	Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Empregados
4	Domingo	1	1	1	1	1	0	0	5
5	Segunda-Feira	0	1	1	1	1	1	0	1,666666667
6	Terça-Feira	0	0	1	1	1	1	1	1,666666667
7	Quarta-Feira	1	0	0	1	1	1	1	3
8	Quinta-Feira	1	1	0	0	1	1	1	7,666666667
9	Sexta-Feira	1	1	1	0	0	1	1	0
10	Sábado	1	1	1	1	0	0	1	3,666666667
11	Tot.Empr.Disponíveis	19,3333	18	12	15	19	14	16	
12	Tot.Empr.Requeridos	11	18	12	15	19	14	16	22,66666667

alt 1 / alt2 / Sheet3

FIGURA 3.26 Resultados da alternativa A da LCL Correios e Malotes.

	A	B	C	D
1	LCL Correios e Malotes Ltda			
2		Empregados	Empregados	Empregados
3	Dia de Início de Trabalho	a Contratar	No Trabalho	Requeridos
4	Domingo	0	0	11
5	Segunda-Feira	0	0	18
6	Terça-Feira	0	0	12
7	Quarta-Feira	0	0	15
8	Quinta-Feira	0	0	19
9	Sexta-Feira	0	0	14
10	Sábado	0	0	16
11				
12	Total de Empregados	0		

alt 1 / alt2 / Sheet3

FIGURA 3.27 Estrutura da alternativa B do Modelo LCL Correios e Malotes.

mostradas na Tabela 3.8. Os parâmetros e as opções do Solver são apresentados na Figura 3.28.

Tabela 3.8 **Fórmulas da Alternativa B - LCL Correios e Malotes**

Função-objetivo	B12	=SOMA(B4:B10)
Restrição	**Célula**	**Fórmula (LHS)**
$N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_1 \geq 11$	C4	=SOMA(B4;B7:B10)
$N_5 + N_6 + N_7 + N_1 + N_2 \geq 18$	C5	=SOMA(B4:B5;B8:B10)
$N_6 + N_7 + N_1 + N_2 + N_3 \geq 12$	C6	=SOMA(B4:B6;B9:B10)
$N_7 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \geq 15$	C7	=SOMA(B4:B7;B10)
$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 \geq 19$	C8	=SOMA(B4:B8)
$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 \geq 14$	C9	=SOMA(B5:B9)
$N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 \geq 16$	C10	=SOMA(B6:B10)

Vale ressaltar que tanto esta alternativa quanto a anterior apresentam a mesma solução. A solução do problema (Figura 3.29) está apresentando valores para as variáveis de decisão fracionárias, conforme as hipóteses assumidas no modelo de Programação Linear. Isto não é bem aceitável, pois as variáveis de decisão representam empregados (que não podem ser fracionários). Discutiremos este tipo de problema com mais detalhes adiante, quando estudarmos Programação Inteira. No momento, aceitemos o fato de termos empregados fracionários.

3.2.4 Problema de Mistura de Componentes

Caso LCL Tintas Ltda

A firma LCL Tintas Ltda. produz dois tipos de tintas: Seca Rápido (SR) e Super Seca (SS). Ambas são produzidas a partir de uma base de silicato e de óleo de linhaça, que são adquiridos pela LCL de vários fornecedores. Atualmente apenas duas soluções preliminares estão disponíveis no

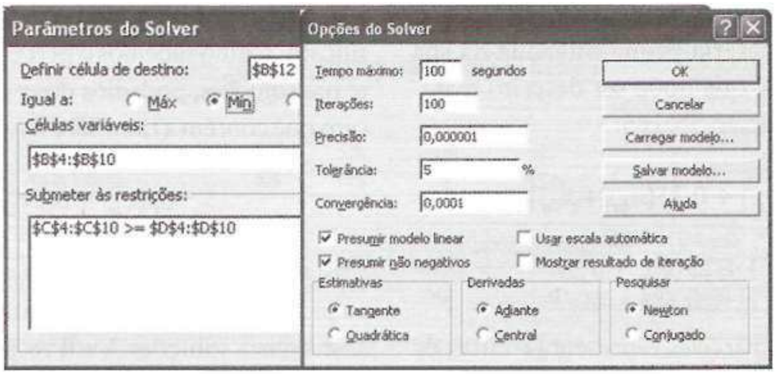


FIGURA 3.28 Parâmetros do Solver e suas opções.

mercado, além dos produtos isolados. A solução do tipo A contém 60% de silicato e 40% de óleo de linhaça, e a do tipo B contém 30% de silicato e 70% de óleo de linhaça. O preço da solução A custa R$0,50 por litro e a do tipo B custa R$0,75 por litro, enquanto o silicato e o óleo de linhaça isoladamente custam R$1,00 e R$1,50 por litro. Cada litro de SR requer, no mínimo, 25% de silicato e 50% de óleo de linhaça, e cada litro de SS requer, no mínimo, 20% de silicato e, no máximo, 50% de óleo de linhaça. Formule o problema de programação linear para determinar quantos litros de cada solução e de cada produto puro devem ser comprados para produzir exatamente 100 litros de SR e 250 litros de SS.

Solução

O primeiro passo é determinar as variáveis de decisão. Neste caso, devemos notar que existe um produto que pode ser produzido a partir de uma combinação de diversos elementos (solução A, solução B, silicato puro e óleo de linhaça puro) em proporções desconhecidas. Contudo, o teor de cada elemento é limitado pela sua disponibilidade, bem como seu custo. Logo, precisamos saber exatamente a composição (quantidade de litros de cada tipo de componente) de cada produto. As variáveis neste tipo de problema são geralmente definidas como as quantidades de cada tipo de matéria-prima em cada produto. No nosso caso, as variáveis de decisão são:

- x_{ar} – Quantidade em litros da solução A utilizada na produção da tinta SR
- x_{br} – Quantidade em litros da solução B utilizada na produção da tinta SR
- x_{sr} – Quantidade em litros de silicato puro utilizada na produção da tinta SR
- x_{or} – Quantidade em litros de óleo de linhaça utilizada na produção da tinta SR
- x_{as} – Quantidade em litros da solução A utilizada na produção da tinta SS
- x_{bs} – Quantidade em litros da solução B utilizada na produção da tinta SS
- x_{ss} – Quantidade em litros de silicato puro utilizada na produção da tinta SS
- x_{os} – Quantidade em litros de óleo de linhaça utilizada na produção da tinta SS

	A	B	C	D
1	LCL Correios e Malotes Ltda			
2		Empregados	Empregados	Empregados
3	Dia de Início de Trabalho	a Contratar	No Trabalho	Requeridos
4	Domingo	5	19,33333333	11
5	Segunda-Feira	1,66666667	18	18
6	Terça-Feira	1,66666667	12	12
7	Quarta-Feira	3	15	15
8	Quinta-Feira	7,66666667	19	19
9	Sexta-Feira	0	14	14
10	Sábado	3,66666667	16	16
11				
12	Total de Empregados	22,6666667		

alt 1 / alt2 / Sheet3

FIGURA 3.29 Resultados da alternativa B - LCL Correios e Malotes.

Desta forma, podemos definir os nossos custos como uma função da matéria-prima utilizada na sua confecção dos produtos, que pode ser descrito matematicamente pela expressão abaixo:

$$\text{Min } 0{,}5(x_{ar} + x_{as}) + 0{,}75(x_{br} + x_{bs}) +$$

$$1{,}0(x_{sr} + x_{ss}) + 1{,}5(x_{or} + x_{os})$$

Cada uma das quatro parcelas representa o custo de uma das matérias-primas. A primeira representa o custo da matéria-prima da Solução A (soma do que é gasto para fazer cada uma das tintas multiplicada pelo custo unitário). As outras parcelas são análogas à primeira e correspondem às outras matérias-primas.

Restrições de Produção

Queremos produzir exatamente 100 litros da tinta SR e 250 litros da tinta SS; portanto, devemos igualar o total de matéria-prima gasto na produção de cada tipo de tinta a sua necessidade de produção. Matematicamente podemos dizer que:

$$x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or} = 100$$

$$x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os} = 250$$

Vale a pena notar que na primeira equação o segundo índice é sempre *r*, denotando a tinta SR, enquanto na segunda o segundo índice é sempre *s*, denotando a tinta SS.

Restrições de Tipo de Componente

Cada tipo de tinta tem uma especificação percentual máxima e/ou mínima de um determinado componente. Como sabemos, a percentagem de um determinado componente é dada pela seguinte equação.

$$\text{\% Componente na Tinta} = \frac{\text{Quantidade do Componente}}{\text{Quantidade Total}} \times 100$$

Portanto, precisamos determinar a partir das matérias-primas as quantidades de cada componente em cada tipo de tinta. A quantidade do componente silicato na tinta SR é a soma do silicato proveniente de cada uma das matérias-primas que contém silicato e que foram utilizadas na fabricação da tinta SR (Solução A, Solução B e Silicato Puro). O problema está no fato de que as soluções A e B contêm outros componentes além do silicato. Como sabemos o percentual de cada componente nas soluções, podemos dizer que a quantidade de silicato que contém a tinta SR é dada pela equação abaixo:

$$0{,}6x_{ar} + 0{,}3x_{br} + x_{sr}$$

Vale notar que as constantes 0,6 e 0,3 representam os percentuais (em forma unitária) da participação do silicato nas soluções A e B respectivamente. A quantidade de tinta SR a ser produzida está predefinida em 100 litros. Logo, bastaria utilizar esta quantidade para encontrar o percentual. Porém, em muitos problemas a quantidade total é indefinida. Portanto, uma boa prática é a utilização do total como uma expressão das matérias-primas utilizadas na sua fabricação. Neste caso, como definido na restrição de produção, temos a quantidade total dada por:

$$x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or}$$

Como o silicato tem que representar no mínimo 25% do total da tinta, poderíamos dizer que:

$$\frac{0{,}6x_{ar} + 0{,}3x_{br} + x_{sr}}{x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or}} \geq 0{,}25 \text{ ou}$$

$$0{,}6x_{ar} + 0{,}3x_{br} + x_{sr} \geq 0{,}25 \times (x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$$

Analogamente, todas as outras restrições podem ser obtidas. Matematicamente, as inequações abaixo representam tais restrições:

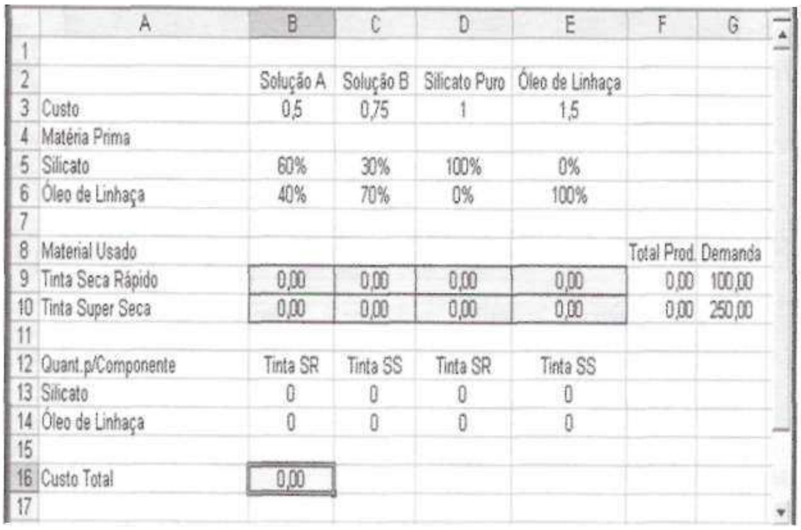
$$0{,}4x_{ar} + 0{,}7x_{br} + x_{or} \geq 0{,}50(x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$$
$$0{,}6x_{as} + 0{,}3x_{bs} + x_{ss} \geq 0{,}20(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$$
$$0{,}4x_{as} + 0{,}7x_{bs} + x_{os} \leq 0{,}50(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$$

Logo, o modelo total pode ser representado por:

$$\text{Min } 0{,}5(x_{ar} + x_{as}) + 0{,}75(x_{br} + x_{bs}) +$$
$$1{,}0(x_{sr} + x_{ss}) + 1{,}5(x_{or} + x_{os})$$

Sujeito a:

$$x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or} = 100$$
$$x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os} = 250$$
$$0{,}6x_{ar} + 0{,}3x_{br} + x_{sr} \geq 0{,}25(x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$$
$$0{,}4x_{ar} + 0{,}7x_{br} + x_{or} \geq 0{,}50(x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$$
$$0{,}6x_{as} + 0{,}3x_{bs} + x_{ss} \geq 0{,}20(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$$
$$0{,}4x_{as} + 0{,}7x_{bs} + x_{os} \leq 0{,}50(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$$
$$x_{ar}, x_{br}, x_{sr}, x_{or}, x_{as}, x_{bs}, x_{ss}, x_{os} \geq 0$$



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Solução A	Solução B	Silicato Puro	Óleo de Linhaça		
3	Custo	0,5	0,75	1	1,5		
4	Matéria Prima						
5	Silicato	60%	30%	100%	0%		
6	Óleo de Linhaça	40%	70%	0%	100%		
7							
8	Material Usado					Total Prod.	Demanda
9	Tinta Seca Rápido	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00
10	Tinta Super Seca	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	250,00
11							
12	Quant.p/Componente	Tinta SR	Tinta SS	Tinta SR	Tinta SS		
13	Silicato	0	0	0	0		
14	Óleo de Linhaça	0	0	0	0		
15							
16	Custo Total	0,00					
17							

FIGURA 3.30 Estrutura do modelo - LCL Tintas.

Resolução com o Solver do Excel

A Figura 3.30 representa uma das possíveis modelagens para o problema. Nela, as células de B9 até EIO representam as variáveis de decisão (oito) e a célula BI6 representa o Custo Total de Produção (função-;>bjetivo) a ser minimizado.

Os LHS das restrições de produção estão representados pelas células F9 e FIO, enquanto os **RHS** pelas células G9 e G10. As restrições de quantidades de componentes por tipo de tinta encontram-se nas posições B13 até C14 (LHS) e D13 até **E14** RHS). As fórmulas que devem ser inseridas na estrutura são apresentadas na Tabela 3.9, enquanto os parâmetros do Solver e suas opções estão na Figura 3.31.

Tabela 3.9 **Fórmulas Inseridas na Estrutura do Modelo LCL Tintas**

Função-objetivo	B16	=SOMARPRODUTO (B3:E3;B9:E9) +SOMARPRODUTO (B3:E3;B10:E10)
Restrição	**Célula**	**Fórmula (LHS)**
$x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or} = 100$	F9	=SOMA(B9:E9)
$x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os} = 250$	F10	=SOMA(B10:E10)
$0{,}6x_{ar} + 0{,}3x_{br} + x_{sr} \geq 0{,}25(x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$	B13	=SOMARPRODUTO (B5:E5;B9:E9)
$0{,}4x_{ar} + 0{,}7x_{br} + x_{or} \geq 0{,}50(x_{ar} + x_{br} + x_{sr} + x_{or})$	B14	=SOMARPRODUTO (B6:E6;B9:E9)
$0{,}6x_{as} + 0{,}3x_{bs} + x_{ss} \geq 0{,}20(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$	C13	=SOMARPRODUTO (B5:E5;B10:E10)
$0{,}4x_{as} + 0{,}7x_{bs} + x_{os} \leq 0{,}50(x_{as} + x_{bs} + x_{ss} + x_{os})$	C14	=SOMARPRODUTO (B6:E6;B10:E10)

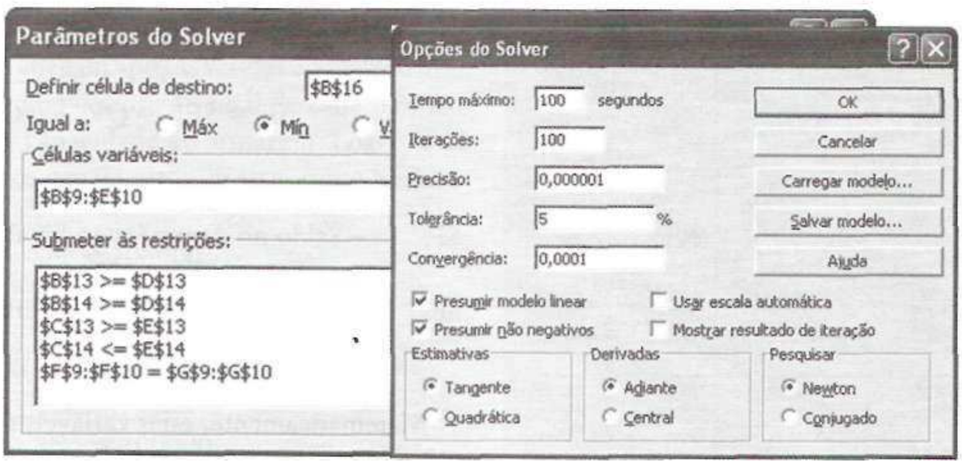


FIGURA 3.31 Parâmetros do Solver e suas opções do modelo LCL Tintas.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Solução A	Solução B	Silicato Puro	Óleo de Linhaça		
3	Custo	0,5	0,75	1	1,5		
4	Matéria Prima						
5	Silicato	60%	30%	100%	0%		
6	Óleo de Linhaça	40%	70%	0%	100%		
7							
8	Material Usado					Total Prod.	Demanda
9	Tinta Seca Rápido	66,67	33,33	0,00	0,00	100,00	100,00
10	Tinta Super Seca	250,00	0,00	0,00	0,00	250,00	250,00
11							
12	Quant.p/Componente	Tinta SR	Tinta SS	Tinta SR	Tinta SS		
13	Silicato	50	150	25	50		
14	Óleo de Linhaça	50	100	50	125		
15							
16	Custo Total	183,33					
17							

FIGURA 3.32 Resultados do modelo LCL Tintas.

Os resultados automaticamente inseridos estão apresentados na Figura 3.32. Como pode ser visto, as matérias-primas puras não foram utilizadas na solução ótima apresentada.

3.2.5 Problemas de Produção e Estoque

Caso LCL Armazéns e Comércio Ltda.

A LCL Armazéns e Comércio Ltda. possui um armazém com capacidade de armazenamento de 200.000 toneladas (t) de grãos. No início do mês de janeiro a LCL tinha 8.000 toneladas de grãos de trigo em seu armazém. Considerando que em cada mês ela pode comprar ou vender trigo a preços prefixados pelo governo (Tabela 3.10), em qualquer quantidade desejada, desde que sujeitas às restrições de armazenagem e do estoque inicial do mês (vendas máximas no mês,- = saldo mês/_7), resolva o problema de maneira a maximizar o lucro da operação nos próximos 12 meses.

Tabela 3.10 **Preços Mensais de Compra e** Venda

Mês do Ano	Preço de Venda (R$/t)	Preço de Compra (R$/t)
Janeiro	3	8
Fevereiro	6	8
Março	8	2
Abril	2	3
Maio	4	4
Junho	5	3
Julho	6	3
Agosto	1	2
Setembro	3	5
Outubro	2	5
Novembro	3	3
Dezembro	3	3

Solução

Como sempre, o primeiro passo é a determinação das variáveis de decisão. Neste caso, o que queremos descobrir é quanto devemos comprar e vender em cada mês. Logo, devemos ter 24 variáveis de decisão, uma para cada tipo (venda ou compra) por mês. As variáveis de decisão poderiam ser discriminadas na forma abaixo.

QCj - Quantidade de Grãos Comprados no mês *i* (í=l,2,...,12)

QV_i – Quantidade de Grãos Vendidos no mês i ($i=1,2,...,12$)

Neste caso, existe uma particularidade interessante. A quantidade vendida num mês está relacionada ao saldo do mês anterior. Este fato sugere a criação de variáveis auxiliares. Essas variáveis são definidas através de restrições de igualdade, matematicamente representadas pela equação abaixo.

$$SF_i = SF_{i-1} - QV_i + QC_i$$

onde:

SF_i - Saldo no Armazém ao Final do mês i

SF_{i-1} - Saldo no Armazém ao Final do mês $i-1$ (mês anterior a *i)*

Matematicamente, estas variáveis podem ser especificadas pelas equações abaixo, que devem constar como restrições do modelo.

$$SF_1 = SF_0 - QV_1 + QC_1$$
$$SF_2 = SF_1 - QV_2 + QC_2$$
$$SF_3 = SF_2 - QV_3 + QC_3$$
$$SF_4 = SF_3 - QV_4 + QC_4$$
$$SF_5 = SF_4 - QV_5 + QC_5$$
$$SF_6 = SF_5 - QV_6 + QC_6$$
$$SF_7 = SF_6 - QV_7 + QC_7$$
$$SF_8 = SF_7 - QV_8 + QC_8$$
$$SF_9 = SF_8 - QV_9 + QC_9$$
$$SF_{10} = SF_9 - QV_{10} + QC_{10}$$
$$SF_{11} = SF_{10} - QV_{11} + QC_{11}$$
$$SF_{12} = SF_{11} - QV_{12} + QC_{12}$$
$$SF_0 = 8000$$

O nosso objetivo é maximizar o Lucro no período de 12 meses. Portanto, nossa função-objetivo é dada pela equação a seguir.

$$\text{Max Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo}$$
$$= \sum_{i=1}^{12}(PVenda_i \times QV_i) - \sum_{i=1}^{12}(PCompra_i \times QC_i)$$
$$= 3QV_1 + 6QV_2 + 8QV_3 + 2QV_4 + 4QV_5 + 5QV_6$$
$$+6QV_7 + 1QV_8 + 3QV_9 + 2QV_{10} + 3QV_{11} + 3QV_{12}$$
$$-8QC_1 - 8QC_2 - 2QC_3 - 3QC_4 - 4QC_5 - 3QC_6$$

$-3QC_7$ $-2QC_S$ $-5QC_9$-$5QC_{10}$ - $3QC_n$ - $3QC_{12}$

Restrições de Armazenamento

O armazém da LCL não tem condições de estocar mais de 200.000 toneladas de grãos. Supondo que as compras de um mês chegam após as vendas do mesmo mês, podemos dizer que o saldo ao final de cada mês não pode exceder à capacidade do armazém. Logo, as 12 restrições abaixo devem ser impostas ao modelo.

$$SF_3 \leq 200000 \quad SF_4 \leq 200000$$
$$SF_5 \leq 200000 \quad SF_6 \leq 200000$$
$$SF_7 \leq 200000 \quad SF_8 \leq 200000$$
$$SF_9 \leq 200000 \quad SF_{10} \leq 200000$$
$$SF_{11} \leq 200000 \quad SF_{12} \leq 200000$$

Vale notar que estas restrições foram simplificadas pela utilização das variáveis auxiliares. Caso estas variáveis não tivessem sido introduzidas, a primeira, a segunda e a terceira inequações mostradas seriam escritas como:

$$8000 - QV_1 + QC_1 \leq 200000$$
$$(8000 - QV_1 + QC_1) - QV_2 + QC_2 \leq 200000$$
$$[(8000 - QV_1 + QC_1) - QV_2 + QC_2] -$$
$$QV_3 + QC_3 \leq 200000$$

Como pode ser visto, o grau de complexidade das restrições cresceria a cada mês. O mês de dezembro, portanto, teria uma grande complexidade, que pode ser evitada pelo uso das variáveis auxiliares.

Restrições de Vendas

Como as vendas de um determinado mês não podem exceder o total armazenado ao final do mês anterior, matematicamente mais 12 restrições devem ser impostas ao problema.

$$QV_1 \leq SF_0 \quad QV_2 \leq SF_1 \quad QV_3 \leq SF_2 \quad QV_4 \leq SF_3$$
$$QV_5 \leq SF_4 \quad QV_6 \leq SF_5$$
$$QV_7 \leq SF_6 \quad QV_8 \leq SF_7 \quad QV_9 \leq SF_8 \quad QV_{10} \leq SF_9$$
$$QV_{11} \leq SF_{10} \quad QV_{12} \leq SF_{11}$$

Logo, o modelo pode ser resumido pela função-objetivo e pelas seguintes restrições.

Max Lucro
$$= 3QV_1 + 6QV_2 + 8QV_3 + 2QV_4 + 4QV_5 + 5QV_6$$
$$+6QV_7 + 1QV_8 + 3QV_9 + 2QV_{10} + 3QV_{11} + 3QV_{12}$$
$$-8QC_1 - 8QC_2 - 2QC_3 - 3QC_4 - 4QC_5 - 3QC_6$$
$$-3QC_7 - 2QC_8 - 5QC_9 - 5QC_{10} - 3QC_{11} - 3QC_{12}$$

Sujeito a:

$$SF_1 = SF_0 - QV_1 + QC_1 \; ; SF_2 = SF_1 - QV_2 + QC_2$$
$$SF_3 = SF_2 - QV_3 + QC_3 \; ; SF_4 = SF_3 - QV_4 + QC_4$$
$$SF_5 = SF_4 - QV_5 + QC_5 \; ; SF_6 = SF_5 - QV_6 + QC_6$$
$$SF_7 = SF_6 - QV_7 + QC_7 \; ; SF_8 = SF_7 - QV_8 + QC_8$$
$$SF_9 = SF_8 - QV_9 + QC_9 \; ;SF_{10} = SF_9 - QV_{10} + QC_{10}$$
$$SF_{11} = SF_{10} - QV_{11} + QC_{11} \; ;SF_{12} = SF_{11} - QV_{12} + QC_{12}$$

$$SF_1 \leq 200000 \quad SF_2 \leq 200000$$
$$SF_3 \leq 200000 \quad SF_4 \leq 200000$$
$$SF_5 \leq 200000 \quad SF_6 \leq 200000$$
$$SF_7 \leq 200000 \quad SF_8 \leq 200000$$
$$SF_9 \leq 200000 \quad SF_{10} \leq 200000$$
$$SF_{11} \leq 200000 \quad SF_{12} \leq 200000$$
$$QV_1 \leq SF_0 \qquad QV_2 \leq SF_1$$
$$QV_3 \leq SF_2 \qquad QV_4 \leq SF_3$$
$$QV_5 \leq SF_4 \qquad QV_6 \leq SF_5$$
$$QV_7 \leq SF_6 \qquad QV_8 \leq SF_7$$
$$QV_9 \leq SF_8 \qquad QV_{10} \leq SF_9$$
$$QV_{11} \leq SF_{10} \qquad QV_{12} \leq SF_{11}$$
$$QV_i \text{ e } QC_i \geq 0, \text{ para } i = 1...12$$

Resolução com o Solver do Excel

A Figura 3.33 mostra uma das possíveis soluções para o caso LCL Armazéns e Comércio.

A célula B16 representa a função-objetivo a ser maximizada, enquanto as células de D3 a E14 representam as variáveis de decisão (quantidades compradas e vendidas por mês). As variáveis auxiliares SF_i estão introduzidas nas células de F2 a F14. Nestas células (com exceção de F2) são colocadas fórmulas para designar as variáveis auxiliares mostradas na Tabela 3.11.

Os LHS das restrições de capacidade de armazenamento são as próprias variáveis auxiliares (células de F3 a F14), enquanto os RHS são os valores constantes iguais a 200000 (células G3 a G14).

Tabela 3.11 **Fórmulas Utilizadas para Definir as Variáveis Auxiliares**

Variável Auxiliar	Célula	Fórmula
SF_0 Saldo Final de Dezembro	F2	=8000
SF_1 Saldo Final de Janeiro	F3	=F2-D3+E3
SF_2 Saldo Final de Fevereiro	F4	=F3-D4+E4
SF_3 Saldo Final de Março	F5	=F4-D5+E5
SF_4 Saldo Final de Abril	F6	=F5-D6+E6
SF_5 Saldo Final de Maio	F7	=F6-D7+E7
SF_6 Saldo Final de Junho	F8	=F7-D8+E8
SF_7 Saldo Final de Julho	F9	=F8-D9+E9
SF_8 Saldo Final de Agosto	F10	=F9-D10+E10
SF_9 Saldo Final de Setembro	F11	=F10-D11+E11
SF_{10} Saldo Final de Outubro	F12	=F11-D12+E12
SF_{11} Saldo Final de Novembro	F13	=F12-D13+E13
SF_{12} Saldo Final de Dezembro	F14	=F13-D14+E14

Quanto às restrições que limitam a quantidade que pode ser vendida a cada mês, as células que representam os LHS são as mesmas que representam as variáveis de decisão de quantidades vendidas, isto é, as células D3 a D14, enquanto os RHS são os saldos finais dos meses anteriores (células de F2 a F13).

A Figura 3.34 mostra os parâmetros do Solver e suas opções. Repare que diferentemente do modelo apresentado, as restrições que representam as variáveis auxiliares não foram incluídas nos parâmetros do Solver, pois foram colocadas diretamente na definição das variáveis auxiliares (células F2 a F14).

A Figura 3.35 mostra os resultados automaticamente inseridos na planilha após a resolução.

	A	B	C	D	E	F	G
1		PV	PC	QV	QC	Saldo Final	Max
2	Dez					8000	
3	Jan	3	8	0	0	8000	200000
4	Fev	6	8	0	0	8000	200000
5	Mar	8	2	0	0	8000	200000
6	Abr	2	3	0	0	8000	200000
7	Mai	4	4	0	0	8000	200000
8	Jun	5	3	0	0	8000	200000
9	Jul	6	3	0	0	8000	200000
10	Ago	1	2	0	0	8000	200000
11	Set	3	5	0	0	8000	200000
12	Out	2	5	0	0	8000	200000
13	Nov	3	3	0	0	8000	200000
14	Dez	3	3	0	0	8000	200000
15							

FIGURA 3.33 Modelagem do Caso LCL Armazéns e Comércio.

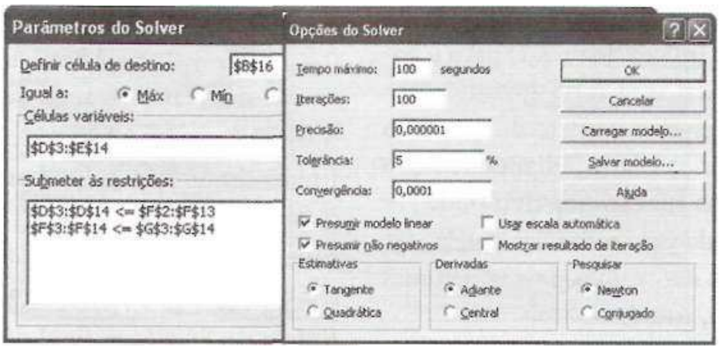


FIGURA 3.34 **Parâmetros e opções do Solver - Caso LCL Armazéns e Comércio.**

	A	B	C	D	E	F	G
1		PV	PC	QV	QC	Saldo Final	Max
2	Dez					8000	
3	Jan	3	8	0	0	8000	200000
4	Fev	6	8	0	0	8000	200000
5	Mar	8	2	8000	200000	200000	200000
6	Abr	2	3	0	0	200000	200000
7	Mai	4	4	0	0	200000	200000
8	Jun	5	3	200000	200000	200000	200000
9	Jul	6	3	200000	0	0	200000
10	Ago	1	2	0	200000	200000	200000
11	Set	3	5	200000	0	0	200000
12	Out	2	5	0	0	0	200000
13	Nov	3	3	0	0	0	200000
14	Dez	3	3	0	0	0	200000
15							
16	Lucro=	1464000					

FIGURA 3.35 **Resultado da** modelagem do Caso LCL Armazéns e Corner

3.2.6 Fluxo de Caixa Multiperíodo

Caso LCL Restaurantes Ltda.

A LCL Restaurantes Ltda. está construindo um novo restaurante que integrará a sua cadeia no próximo verão. Para tal, necessita de um total R$500.000 que será pago à construtora em duas parcelas de R$150.000 ao final do 2º e 5º meses, e uma parcela de R$200.000 ao término da construção no fim do 7º mês. A empresa dispõe de 4 tipos de investimentos (Tabela 3.12) que podem ser utilizados a fim de gerar caixa para quitar a construção de maneira a reduzir a necessidade total de caixa.

Tabela 3.12 **Informações Referentes aos Tipos de Investimentos**

Investimento	Aplicação Disponível no Início dos Meses	Meses de Duração da Aplicação	Retorno ao Finaldo Investimento
Tipo A	1,2,3,4,5,6,7	1	1,5%
Tipo B	1,3,5	2	3,2%
Tipo C	1,4	3	4,5%
Tipo D	1	7	9,0%

Modele o problema de maneira a determinar quando e quais tipos de investimento devem ser realizados a fim de minimizar o total que deve ser alocado no início da construção.

Solução

Como sempre, o primeiro passo de uma modelagem é determinar as variáveis de decisão. Queremos determinar os montantes que devem ser aplicados em cada investimento disponível. Por exemplo: o Investimento do Tipo A está disponível para aplicação nos sete meses, logo precisamos de sete variáveis de decisão. Analogamente nos Tipos B, C e D necessitaremos de três, duas e uma variáveis, respectivamente. Logo, as variáveis de decisão neste caso podem ser descritas por:

A_i – Valor aplicado no início do mês i na aplicação A ($i=1,2,3,4,5,6,7$)

B_i – Valor aplicado no início do mês i na aplicação B ($i=1,3,5$)

C_i – Valor aplicado no início do mês i na aplicação C ($i=1,4$)

D_i – Valor aplicado no início do mês i na aplicação D ($i=1$)

O objetivo, neste caso, é minimizar o total que devemos alocar na data zero (início do mês 1) para o pagamento da obra. Este total será todo investido em uma das aplicações disponíveis no início do mês 1, já que não temos que fazer nenhum adiantamento à construtora. Logo, a nossa função-objetivo pode ser matematicamente traduzida pela soma das aplicações no início do mês 1 (já que não vamos deixar nenhum centavo sem ser aplicado), isto é:

Min $A_1 + B_1 + C_1 + D_1$

Restrições de Fluxo de Caixa

Queremos minimizar a alocação de recursos na data zero, isto é, o total alocado adicionado aos juros recebidos deve igualar as diversas parcelas de pagamentos existentes. Como temos uma opção de investimento disponível para aplicação em todos os períodos com retorno no período seguinte, o total líquido estará sempre aplicado. Portanto, a soma do retorno dos investimentos de um mês (capital mais juros) subtraído do valor total a ser reinvestido em uma das opções de investimento deve igualar ao total de pagamentos do mês. Matematicamente podemos representar as sete restrições por (Considere $i_A = 0{,}015$, $i_B = 0{,}032$, $i_C = 0{,}045$ e $i_D = 0{,}09$):

$(1+i_A)A_1 - A_2 = 0$
(início do 2º mês = final do 1º mês)

$(1+i_A)A_2 + (1+i_B)B_1 - A_3 - B_3 = 150$
(início do 3º mês = final do 2º mês)

$(1+i_A)A_3 + (1+i_C)C_1 - A_4 - C_4 = 0$
(início do 4º mês = final do 3º mês)

$(1+i_A)A_4 + (1+i_B)B_3 - A_5 - B_5 = 0$
(início do 5º mês = final do 4º mês)

$(1+i_A)A_5 - A_6 = 150$
(início do 6º mês = final do 5º mês)

$(1+i_A)A_6 + (1+i_B)B_5 + (1+i_C)C_4 - A_7 = 0$
(início do 7º mês = final do 6º mês)

$(1+i_A)A_7 + (1+i_D)D_1 = 200$
(início do 8º mês = final do 7º mês)

As parcelas positivas nas inequações representam os retornos de aplicações efetuadas em meses anteriores e as negativas mostram os investimentos efetuados no início de um determinado mês. As constantes 150 e 200 representam os pagamentos a serem efetuados ao final do 2º, 5º e 7º meses ou início dos 3º, 6º e 8º meses.

Resolução com o Solver do Excel

A Figura 3.36 representa uma das possíveis modelagens do problema.

As células de J3 a J15 representam as variáveis de decisão (total aplicado em cada tipo de investimento disponível). Como desejamos descobrir quando e quanto deve ser aplicado em cada tipo disponível de investimento, criamos sete variáveis para o investimento A, três para o B, duas para o C e uma para o D.

A célula B20 representa a função-objetivo, isto é a soma das aplicações A_1, B_1, C_1 e D_1 (células J3, J10, J13 e J15). As células de C17 a I17 mostram os LHS das restrições de fluxo de caixa, enquanto de C18 a 118 os RHS das mesmas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Fluxo de Caixa no inicio do Mês								Total
2	Invest.	1	2	3	4	5	6	7	8	Aplicado
3	A1	-1	1,015							0,00
4	A2		-1	1,015						0,00
5	A3			-1	1,015					0,00
6	A4				-1	1,015				0,00
7	A5					-1	1,015			0,00
8	A6						-1	1,015		0,00
9	A7							-1	1,015	0,00
10	B1	-1		1,032						0,00
11	B3			-1		1,032				0,00
12	B5					-1		1,032		0,00
13	C1	-1			1,045					0,00
14	C4				-1			1,045		0,00
15	D1	-1							1,09	0,00
16										
17	Disponivel	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
18	Pagtos em Mil R$		0,00	150,00	0,00	0,00	150,00	0,00	200,00	
19										
20	Total Recursos	0,00								

FIGURA 3.36 Modelagem do Caso LCL Restaurantes Ltda.

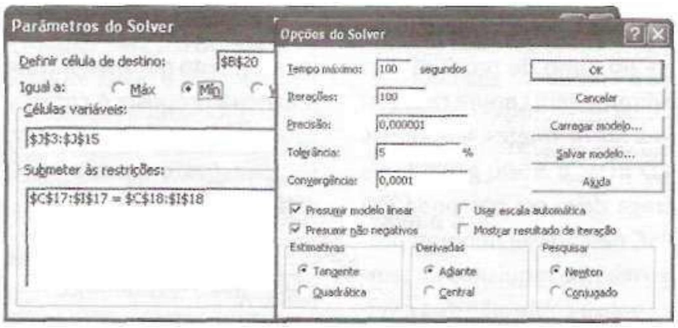


FIGURA 3.37 Parâmetros e opções do Solver do Caso LCL Restaurantes Ltda.

Vale ressaltar o que representam as constantes colocadas estrategicamente nas posições de B3 a 115. Os valores −1 representam a aplicação de 1 real num determinado tipo de investimento. As constantes positivas representam o retorno de um investimento de 1 real feito anteriormente (capital mais juros) num determinado tipo de aplicação. Por exemplo: o investimento do tipo A paga uma taxa de juros de 1,5% no período de aplicação, o que nos leva à constante 1,015 (Capital de R$1,00 + Juros de R$0,015). Analogamente as outras constantes podem ser obtidas. Ao multiplicarmos estas constantes pelo total designado para cada tipo de investimento, obteremos os valores totais investidos e os que retornam a cada mês.

A Tabela 3.13 mostra as fórmulas inseridas nas células relevantes do problema.

A Figura 3.37 mostra os parâmetros e as opções do Solver do Excel.

A solução apresentada pelo Solver do Excel se encontra na Figura 3.3 8 e foi automaticamente inserida na planilha.

Tabela 3.13 **Fórmulas Relevantes do Caso LCL Restaurantes Ltda**

Função-objetivo	B20	=SOMA(J3;J10;J13;J15)
Restrição	**Célula**	**Fórmula do LHS**
$(1+i_A)A_1 - A_2 = 0$	C17	=SOMARPRODUTO (C3:C15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_2 + (1+i_B) B_1 - A_3 - B_3 = 150$	D17	=SOMARPRODUTO (D3:D15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_3 + (1+i_C) C_1 - A_4 - C_4 = 0$	E17	=SOMARPRODUTO (E3:E15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_4 + (1+i_B) B_3 - A_5 - B_5 = 150$	F17	=SOMARPRODUTO (F3:F15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_5 - A_6 = 0$	G17	=SOMARPRODUTO (G3:G15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_6 + (1+i_B)B_5 + (1+i_C)C_4 - A_7 = 0$	H17	=SOMARPRODUTO (H3:H15;$J$3:$J$15)
$(1+i_A)A_7 + (1+i_D) D_1 = 200$	I17	=SOMARPRODUTO (I3:I15;$J$3:$J$15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Fluxo de Caixa no início do Mês						Total
2	Invest.	1	2	3	4	5	6	7	8	Aplicado
3	A1	-1	1,015							0,00
4	A2		-1	1,015						0,00
5	A3			-1	1,015					0,00
6	A4				-1	1,015				0,00
7	A5					-1	1,015			147,78
8	A6						-1	1,015		0,00
9	A7							-1	1,015	197,04
10	B1	-1		1,032						463,39
11	B3			-1		1,032				328,21
12	B5					-1		1,032		190,93
13	C1	-1			1,045					0,00
14	C4				-1			1,045		0,00
15	D1	-1							1,09	0,00
16										
17	Disponível	-463,39	0,00	150,00	0,00	0,00	150,00	0,00	200,00	
18	Pagtos em Mil R$		0,00	150,00	0,00	0,00	150,00	0,00	200,00	
19										
20	Total Recursos	463,39								

FIGURA 3.38 Resultados do Excel do Caso LCL Restaurantes Ltda.

EXERCÍCIOS 3.2

1. A PSC Ltda. é uma empresa no ramo de produção de acessórios para computador. O diretor Paul Lepore recebeu uma encomenda de 5.000 "drives" de disquetes, 4.500 HDs de 16 Gb, 1.000 unidades de CD-ROM e 3.500 gravadores de CD-ROM (CD-RW). Esta entrega deve ser cumprida em um prazo de 12 dias úteis, e a PSC não possui nenhum produto em estoque. A tabela abaixo resume requisitos de tempo e de alguns produtos comuns para a confecção dos equipamentos:

	Produto			
	Drive	HD	CD-ROM	CD-RW
Rotor	1	1	1	1
Cabeça de leitura	1	6	1	1
Cabeça de gravação	1	6	–	1
Gabinete de unidade (padrão)	1	1	1	1
Horas de montagem	0,8	1,1	2	2,5
Horas de ajuste/regulagem	0,2	0,5	0,9	2

A PSC possui um estoque das seguintes matérias-primas: 13.000 rotores, 40.000 cabeças de leitura, 35.000 cabeças de gravação e 15.000 gabinetes-padrão. Não é possível comprar mais matéria-prima. O processo de montagem e regulagem do equipamento é feito manualmente, empregando um funcionário cada. A PSC possui 190 funcionários capacitados para a montagem dos equipamentos e 115 funcionários capacitados para a regulagem. Considere que cada funcionário tem uma jornada de 8 horas diárias.

Se a PSC preferir, é possível comprar os produtos prontos em uma outra empresa, que possui material suficiente em estoque. A empresa só não produz as unidades de HD desejadas. A tabela abaixo resume os custos de produção e o preço de venda dos produtos por esta empresa (em reais):

	Produto			
	Drive	HD	CD-ROM	CD-RW
Custo de produção	15,00	200,00	40,00	400,00
Preço para compra	17,00	–	45,00	550,00

Determine um problema de programação linear que minimize o custo da PSC, de maneira a atender ao pedido no tempo previsto (resolva através do Solver).

2. Um determinado cliente procurou uma Corretora de Valores com o objetivo de investir em ações. O gerente de atendimento, após receber o cliente, o entrevista para identificar o seu perfil de risco e apresenta as opções de investimento. No final da entrevista fica claro que o cliente apresenta um perfil de investimento de risco moderado e está decidido a investir em papéis de Bancos. O gerente, então, com o apoio da área de pesquisa da corretora, apresenta uma proposta de investimento que imagina atender às expectativas do cliente. A carteira proposta é constituída por um grupo de ações do setor bancário e aplicações ou créditos, para alavancar a posição de ações, em renda fixa. O retorno e o risco de cada papel estão demonstrados na tabela abaixo:

Papel	Retorno	Risco
Banco A	42,12%	7,69%
Banco B	35,29%	3,99%
Banco C	37,54%	6,12%
Renda Fixa	6,10%	0%

Ao analisar a proposta, o cliente fez as seguintes restrições e observações:

- A participação das ações do Banco A deve ser de, no mínimo, 30%, devido ao seu alto retorno e baixo risco em relação às ações dos outros bancos.
- A participação das ações do Banco B deve ser de, no máximo, 15%, devido ao baixo retorno e alto risco, quando comparada às demais.
- A participação da Renda Fixa na carteira deve ser de, no máximo, 10%.
- A taxa máxima suportada de risco é de 7%.

Formule um problema que maximize o retorno da carteira proposta, considerando suas características e as restrições feitas pelo cliente; e resolva-o através do Solver. Observação: para a resolução deste problema considere que as ações são independentes, assim, o risco da carteira será igual à média ponderada dos riscos individuais pelas participações de cada papel na composição da carteira.

3, Uma indústria possui as seguintes opções de investimento em projetos para os próximos quatro anos: expansão da fábrica, expansão do depósito, novas máquinas e pesquisas de novos produtos. Enfrentando limitações anuais de capital, a empresa deve escolher em quais projetos investir para obter o maior retorno possível. O valor presente dos projetos, o capital necessário para cada um deles e a projeção do capital disponível estão ilustrados na tabela abaixo:

Projeto	Valor Presente Estimado	Capital Necessário			
		Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Expansão da Fábrica	60.000	15.000	20.000	20.000	15.000
Expansão do Depósito	40.000	10.000	15.000	20.000	5.000
Novas Máquinas	10.000	10.000	0	0	4.000
Pesq. Novos Produtos	37.000	15.000	10.000	10.000	10.000
Capital Disponível		30.000	40.000	30.000	25.000

a) Determine, utilizando o Solver ou o Lindo, que projetos a companhia deve selecionar para maximizar o valor presente do capital investido. Pista: a decisão deve ser feita para aceitar ou rejeitar cada projeto. Usamos x=I caso o investimento seja realizado e x=0 caso o investimento não deva ser reealizado. Então, todas as variáveis devem ser restringidas com xI, utilizando também o recurso de programação inteira do Excel;

b) Considere que, devido às turbulências de mercado, a empresa decida que Pesquisas de Novos Produtos é um projeto que não pode deixar de ser realizado, independentemente de seu valor presente estimado. Que mudanças esta informação gera na formulação do problema e no resultado?

c) Se a companhia conseguir um adicional de $10.000 para cada um dos quatro anos, o que você recomendaria? Qual a nova solução?

4. A fábrica de produtos revolucionários Wonder World acaba de lançar mais um produto inovador: trata-se do Fiat, um spray desamassador instantâneo de roupas. O spray Flat está disponível no mercado em duas embalagens: de bolso (250ml) e tamanho família (1 .OOOml), ambas com duas opções de formulação: com ou sem perfume. Para fabricar a solução Fiat sem perfume é necessária a combinação de três ingredientes: água destilada, álcool e fórmula especial. Para o produto com perfume, um quarto ingrediente - a fragrância - é necessário numa proporção de, no mínimo, 5% e, no máximo, 10% por litro de produto. Para garantir a eficácia do produto, a concentração de fórmula especial em cada litro de Fiat deve ser de pelo menos 25%, sendo que a quantidade de álcool não pode ultrapassar 30%, nem ser menor do que 10%. A quantidade disponível e os custos dos ingredientes estão evidenciados na Tabela I.

Tabela I

Ingrediente	Quantidade Disponível	Custo por Litro
Fórmula Especial	70.000 litros	R$ 3,00
Álcool	55.000 litros	R$ 0,90
Água Destilada	100.000 litros	R$ 0,40
Fragrância	30.000 litros	R$ 1,20

Existem também custos de fabricação. As máquinas, que apresentam uma capacidade ociosa suficiente para suprir a demanda prevista, têm um custo de operação variável igual a RS 1,00 por litro de solução sem perfume e RS 1,50 por litro de solução com perfume. A mão-de-obra é remunerada por produção, tendo um custo de RS 3,00 por litro de Flat com ou sem perfume fabricado. Cada embalagem para o *spray* de bolso custa RS 0,40 e a embalagem tamanho família, RS 0,60.

A administração da Wonder World espera que o produto seja um sucesso de vendas. Através de pesquisas de mercado, constatou-se que há uma demanda mensal de 45.000 Flats de bolso sem perfume, 42.000 com perfume, 36.000 Flats tamanho família sem perfume e 30.000 com perfume. Os preços de venda de Fiat nas diferentes embalagens e composições são apresentados na Tabela II:

Tabela II

Produto	Preço
FLAT – embalagem de bolso com perfume	R$ 12,00
FLAT – embalagem de bolso sem perfume	R$ 10,00
FLAT – embalagem família com perfume	R$ 25,00
FLAT – embalagem família sem perfume	R$ 20,00

Formule um problema de programação linear para maximizar os lucros da Wonder World e resolva-o através do Solver.

S, A Camisaria da Moda Ltda. produz quatro tipos diferentes de camisas: *baby-look,* manga 3/4, tradicional curta e tradicional comprida. Todos os diferentes tipos de camisas são fabricados utilizando-se três tipos de tecidos, cada uma com diferentes proporções de cada tecido.

A Tabela I mostra o custo e a disponibilidade de cada tipo de tecido.

Tabela I

Tipo do Tecido	Custo por Metro	Disponibilidade Semanal (m)
Brim	$2,50	4000
Algodão	$3,25	2000
Tergal	$4,00	3000

A Tabela II mostra outras informações relevantes do processo de fabricação:

Tabela II

Tipo da Camisa	Metros de Tecido por Camisa	Requisitos Especiais de Tecido	Nº Pedidos de Camisas Contratados	Demanda Total Semanal	Preço de Venda
Baby-look	0,9	Mínimo 80% de Brim	500	600	$10,80
Manga ¾	0,95	Mínimo 50% de Brim Máximo 20% de Tergal	280	500	$15,20
Tradicional Curta	1,0	Mínimo 50% de Algodão Máximo 40% de Tergal	625	800	$8,00
Tradicional Comprida	1,2	Mínimo 30% de Tergal	150	300	$12,00

Qual estratégia de produção que deve ser adotada pela empresa para maximizar o seu lucro? (Resolva através do Solver do Excel)

6» A Call Master é uma empresa que fornece serviços de consultoria de "call center" para outras empresas. Ela foi procurada recentemente pela Editora Julho com o seguinte problema: os clientes que ligam para o 0800 da editora estão esperando, em média, de 7 a 15 minutos para serem atendidos. Este tempo de espera é considerado extremamente longo pela empresa, que deseja prover um melhor serviço aos seus clientes, atendendo-os em até 5 minutos. A empresa sabe que a solução para atender aos clientes mais rapidamente é aumentar o número de atendentes por hora, porém ela gostaria de programar o trabalho de forma a torná-lo eficiente ao menor custo de pessoal possível. Sendo assim, o desafio da Call Master é definir qual é o número ótimo de atendentes que a Editora Julho deve ter para que o prazo de espera de cada cliente na linha seja de, no máximo, 5 minutos. A Tabela III apresenta o número de telefonemas esperados por hora. Sabendo que cada turno de trabalho dura 6 horas e o tempo médio de atendimento é de 12 minutos, ajude a Call Master a solucionar o problema da Editora Julho (resolva através do Solver).

Tabela III

Horário	Nº de Chamadas	Horário	Nº de Chamadas
0:00 – 1:00	100	12:00 – 13:00	310
1:00 – 2:00	60	13:00 – 14:00	370
2:00 – 3:00	30	14:00 – 15:00	402
3:00 – 4:00	40	15:00 – 16:00	450
4:00 – 5:00	90	16:00 – 17:00	400
5:00 – 6:00	105	17:00 – 18:00	411
6:00 – 7:00	190	18:00 – 19:00	360
7:00 – 8:00	230	19:00 – 20:00	315
8:00 – 9:00	290	20:00 – 21:00	285
9:00 – 10:00	335	21:00 – 22:00	250
10:00 – 11:00	270	22:00 – 23:00	200
11:00 – 12:00	299	23:00 – 24:00	150

7. Dr. José Motoserra, o administrador chefe no *Hospital Descanse Bastante,* tem que determinar um horário para auxiliares de enfermagem. Durante o dia, varia a necessidade de auxiliares de enfermagem trabalhando. O Dr. Motoserra dividiu o dia em 12 períodos de duas horas. O período mais calmo do dia ocorre de 0:00h (meia-noite) às 6:00h, que começa à meia-noite e requer um mínimo de 40,30 e 40 auxiliares, respectivamente. A demanda para auxiliares de enfermagem aumenta continuamente durante os próximos quatro períodos do dia, começando com o período de 6:00 às 8:00h, um mínimo de 60, 60, 70, e 80 auxiliares para estes quatro períodos, respectivamente. Depois de 14:00h a demanda por auxiliares diminui até o anoitecer. Para os cinco períodos de duas horas que começam às 14:00h e terminam à meia-noite, são requeridos 80, 70, 70, 60, e 50 auxiliares, respectivamente. Cada auxiliar de enfermagem se apresenta ao serviço no começo de um dos períodos relatados e trabalha oito horas sucessivas (o que é requerido no contrato das auxiliares). As auxiliares de enfermagem têm um salário padronizado, mas quando trabalham à noite (entre as 22:00h e 06:00h) ganham adicionais noturnos. Cada duas horas trabalhadas à noite acrescentam ao salário-base 25%. Ou seja, uma auxiliar de enfermagem que começa a trabalhar às 16h trabalha até meia-noite e ganha 25% a mais do seu salário e uma outra que começa a trabalhar às 22h tem 100% a mais de salário. Para evitar que o salário chegasse a dobrar, o administrador-chefe determinou que nenhuma auxiliar começasse exatamente às 22h. Dr. Motoserra quer determinar um quadro de horário para as auxiliares de enfermagem que satisfaça às exigências mínimas do hospital ao longo do dia, minimizando a folha de pagamento do hospital (resolva através do Solver, assumindo isonomia de salários).

8. A Stoquebom Armazéns e Comércio Ltda. possui um armazém com capacidade de armazenamento de 300.000 toneladas de grãos. Em cada mês ela pode comprar ou vender trigo, a preços prefixados pelo governo segundo a tabela abaixo.

Mês do Ano	Preço de Venda (R$/ton)	Preço de Compra (R$/ton)
Janeiro	5	8
Fevereiro	7	9
Março	7	1
Abril	3	4
Maio	4	4
Junho	6	3
Julho	6	4
Agosto	2	2
Setembro	3	6
Outubro	3	5
Novembro	3	4
Dezembro	4	2

As quantidades de compra e venda têm limitações sujeitas às restrições de armazenagem e ao estoque inicial do mês (vendas máximas no mês/= saldo mês^)). No início do mês de janeiro a Stoquebom tinha 5.000 toneladas de grãos de trigo. Maximize o lucro da operação nos próximos 12 meses, considerando um custo de 1,5% de corretagem para as operações de compra e venda.

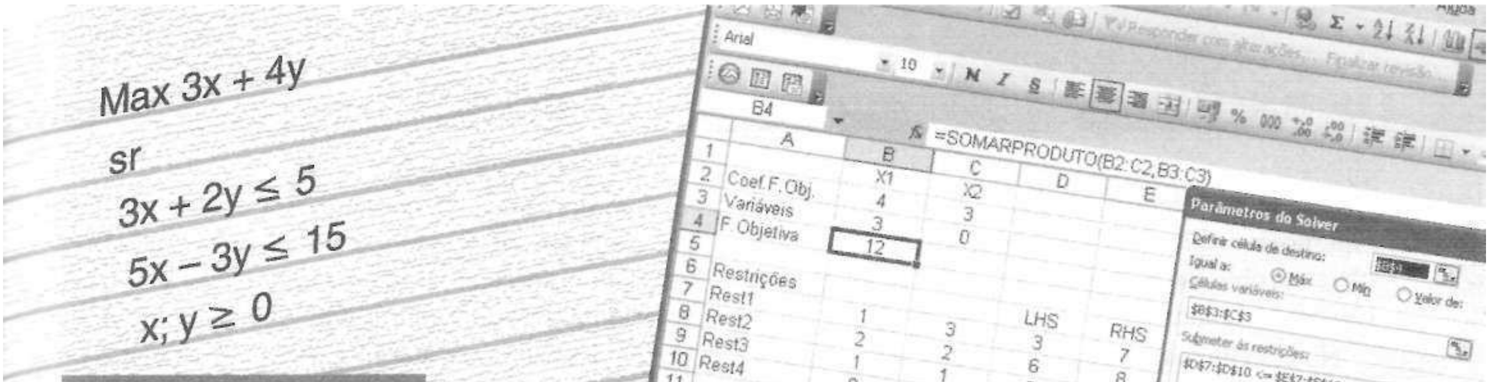
9. A No Bugs S/A é uma empresa de detetização de insetos. Durante os próximos três meses espera receber o seguinte número de solicitações de dedetizações: 100 chamadas em janeiro; 300 chamadas em fevereiro e 200 chamadas em março. A No Bugs S/A recebe R$800,00 para cada dedetização atendida no mesmo mês da chamada. As solicitações po-

dem não ser atendidas no mesmo mês em que são feitas, mas neste caso, se houver um atraso de um mês, será dado um desconto de RS 100,00 por dedetização; e se o atraso for de dois meses, o desconto será de R$200,00 por dedetização. Cada empregado pode fazer entre 6 e 10 dedetizações por mês. O salário mensal de cada empregado da No Bugs S/A é de R$4.000,00 por mês. No final do último dezembro, a companhia tinha oito funcionários. Funcionários podem ser contratados no início do mês a um custo de contratação de R$5.000,00 cada. Os gastos com demissões, que são feitas sempre no final do mês, são de R$4.000,00 por funcionário, além do salário. Supondo que todas as chamadas precisam ser atendidas até o final de março e que a empresa tenha o efetivo de oito pessoas no início de abril, formule um problema de programação linear para maximizar os lucros da No Bugs durante os três meses em questão e resolva-o através do Solver ou do Lindo.

!©,, A Sunshine Investimentos S.A. deve determinar a sua estratégia de investimento para os próximos três anos. No presente (ano 0) estão disponíveis R$150.000,00 reais para investimento. A Sunshine está estudando a aplicação de seus recursos em cinco diferentes tipos de investimento (A, B, C, D e E). O fluxo de caixa, para cada real investido nos cinco tipos de aplicação, é mostrado na tabela abaixo.

	Fluxo de Caixa ao Final do Ano			
Investimento\Ano	0	1	2	3
Investimento A	–R$1,00	R$0,50	R$1,00	R$0,00
Investimento B	R$0,00	–R$1,00	R$0,50	R$1,00
Investimento C	–R$1,00	R$1,50	R$0,00	R$0,00
Investimento D	–R$1,00	R$0,00	R$0,00	R$1,90
Investimento E	R$0,00	R$0,00	–R$1,00	R$1,50

A política de diversificação de risco da Sunshine requer que, no máximo R$75.000,00 sejam investidos em apenas uma aplicação. A Sunshine pode, além destes investimentos, receber juros de 8% a.a. mantendo o dinheiro investido em uma aplicação de renda fixa prefixada Os retornos dos investimentos podem ser imediatamente reinvestidos. Devido a uma política de não-endividamento, todos os recursos utilizados devem ser de capital próprio da empresa. Formule o problema de maneira a maximizar o disponível ao final do terceiro ano.



CAPÍTULO 4

O Problema Dual e a Análise de Sensibilidade

Uma das hipóteses dos problemas de programação linear é a consideração de certeza nos coeficientes e constantes. Isto é, a solução otimizada é dependente dos coeficientes da função-objetivo (geralmente lucro, receita ou custo unitário) e dos coeficientes e constantes das restrições (geralmente necessidades por produto e disponibilidade de um recurso).

O Problema Dual é um modelo associado ao original, que traz a mterpretabilidade económica para os valores de recursos e para os coeficientes da função-objetivo. Esta interpretabilidade serve para amenizar essas dúvidas impostas pela hipótese de certeza do problema de programação linear.

4,1 O PROBLEMA DUAL

Certas vezes estamos interessados em encontrar uma estimativa da solução ótima em vez de encontrá-la, utilizando o método Simplex. Isto pode ser obtido através da procura de limites inferiores ou superiores.

Voltando ao nosso primeiro problema, poderiamos, por inspeção visual ou tentativa e erro, estabeiecer uma solução viável para o nosso problema. Cada solução viável traz associado um limite inferior para a função-objetivo, no caso de maximização, ou um Imute superior, no caso de minimização. A Figura 4.1 mostra essa relação.

$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

$x_1 \le 3$ — Solução (2,2) $Z^* \ge 14$

$x_2 \le 4$ — Solução (1,3) $Z^* \ge 11$

$x_1 + 2x_2 \le 9$ — Solução (3,2) $Z^* \ge 19$

$x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$

$\text{Min } Z = 5x_1 - 2x_2$

Sujeito a:

$x_1 \le 3$ — Solução (2,2) $Z^* \le 6$

$x_2 \le 4$ — Solução (1,3) $Z^* \le -1$

$x_1 + 2x_2 \le 9$ — Solução (3,2) $Z^* \le 11$

$x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$

FIGURA 4.1 Limites inferiores e superiores associados a soluções viáveis.

Para se entender o exposto na Figura 4.1 iremos dividir nossa análise em duas partes. A primeira em relação ao problema de maximização e a segunda em relação ao de minimização.

No caso de maximização, quando conseguimos de alguma maneira (bola de cristal, inclusive) descobrir uma solução viável, como, por exemplo, $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, o valor do limite inferior, $Z = 14$, fica automaticamente estabelecido, já que, como desejamos maximizar a função-objetivo, podemos garantir que a função-objetivo não ficará abaixo deste valor. O valor máximo pode (por acaso) ter sido obtido, com esta solução, mas o mais provável é que uma outra solução viável possa melhorar este valor, isto é, levar a função-objetivo a valores superiores. O que não podemos garantir é se a solução ótima foi atingida; porém, podemos, com segurança, garantir que pior não será.

No caso do problema de minimização, quando conseguimos de alguma maneira (bola de cristal, inclusive) descobrir uma solução viável, por exemplo, $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, o valor do limite superior, $Z=6$, fica estabelecido automaticamente, já que, como desejamos minimizar a função-objetivo, podemos garantir que a função-objetivo não ficará acima deste valor. O valor mínimo pode ter sido obtido com esta solução, mas o mais normal é que uma outra solução viável possa vir a melhorar este valor, isto é, levar a função-objetivo a valores menores. O que não podemos garantir é se a solução ótima foi atingida; porém, podemos, com segurança, garantir que maior não ficará.

O problema deste procedimento é que, a cada nova solução viável encontrada, um novo limite inferior (no caso de maximização) também é encontrado, porém não temos condições de saber o quão perto este limite está do nosso valor ótimo. Bom seria se pudessemos encontrar um intervalo mínimo no qual garantissemos que o nosso valor ótimo estivesse.

Vamos, a partir deste ponto, nos concentrar num problema padrão (maximização) e tentar estabelecer um limite superior, isto é, um valor acima do qual o valor ótimo de nossa função-objetivo não possa ficar. Como já sabemos estabelecer limites inferiores para este caso, poderíamos, então, determinar o intervalo no qual ficaria nosso valor ótimo.

Para tal, voltemos a nosso problema inicial. Se multiplicarmos por cinco todos os valores da 3ª restrição, não alteraríamos a sua identidade. Observe uma característica interessante desta nova restrição. Tanto os coeficientes de x_1 (5) como o de x_2 (10) são maiores ou iguais aos respectivos coeficientes da função-objetivo (Figura 4.2).

O nosso intuito é estabelecer um limite superior para o valor ótimo da função-objetivo. Sabemos que $X\backslash$ e x_2 são maiores ou iguais a zero no nosso problema, isto é, nenhuma solução viável poderá apresentar valores de x_1 e/ou x_2 negativos. Este fato nos permite dizer que se $5x_1 + 10x_2 \leq 45$ e os coeficientes desta restrição são maiores ou iguais aos respectivos coeficientes da função-objetivo, então o valor de Z $(5x_1 + 2x_2)$ deve ser menor ou igual a 45. Isto quer dizer que o vabr da função-objetivo não poderá alcançar nenhum valor superior a 45. Logo, podemos dizer que encontramos um limite superior. Matematicamente isto pode ser representado por:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 5x_1 + 10x_2 \leq 45$$

O leitor pode querer perguntar de onde veio esta operação milagrosa de multiplicação por uma constante que nos permitiu estabelecer o máximo. Por ora, a resposta será que caiu do céu. O importante aqui não é perguntar como obtivemos esta milagrosa operação, mas verificar que a multiplicação de uma restrição por um determinado valor positivo pode nos ajudar a obter um limite superior para o nosso problema.

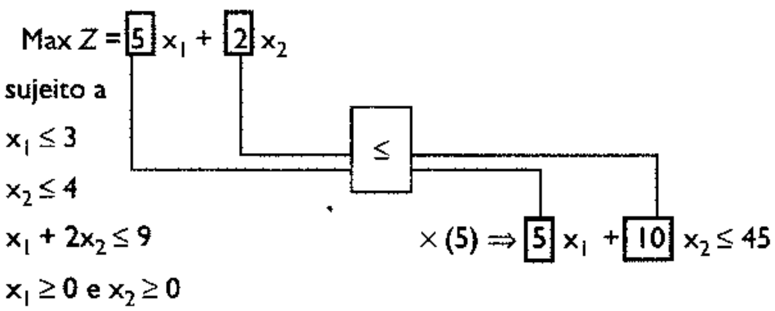


FIGURA 4.2 Comparação de coeficientes.

$$\text{Max } Z = \boxed{5}x_1 + \boxed{2}x_2$$

sujeito a

$$x_1 \le 3 \qquad \times (6) \Rightarrow 6x_1 \le 18$$

$$x_2 \le 4 \qquad \times (3) \Rightarrow 3x_2 \le 12$$

$$x_1 + 2x_2 \le 9 \qquad + \quad \Rightarrow \boxed{6}x_1 + \boxed{3}x_2 \le 30$$

$$x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0 \qquad \boxed{\le}$$

FIGURA 4.3 Comparação de coeficientes.

Agora multiplique a primeira restrição por 6 e a segunda por 3, e some os resultados. De novo, não pergunte de onde veio tal operação (Merlin, o mágico, nos contou). Verifique apenas o resultado (Figura 4.3). Utilizando o mesmo raciocínio anterior, a restrição resultante é válida desde que as originais sejam válidas.

Novamente, mais importante do que descobrir de onde veio a operação é verificar que, com base nela, podemos de novo estabelecer um novo limite superior. Utilizando o mesmo raciocínio, poderemos estabelecer a seguinte relação:

$$5x_1 + 2x_2 \le 6x_1 + 3x_2 \le 30$$

Observe que este limite superior é menor que o anterior, significando que ele é melhor que o primeiro, pois é mais restritivo.

Podemos agora partir para o estabelecimento de uma rotina para obtenção de um limite superior no caso de um problema na forma-padrão. Aprendendo com os resultados anteriores, uma metodologia genérica seria multiplicar cada restrição por uma constante inteira positiva (como na primeira tentativa).

Na segunda tentativa, além de multiplicarmos por uma constante positiva, também efetuamos a soma dos resultados. Genericamente estas operações podem ser representadas pela Figura 4.4.

Colocando-se em evidência as variáveis x_e e x_2, podemos obter a inequação equivalente representada pela segunda inequação.

$$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_1 + 2y_3x_2 \le 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$$
$$\Updownarrow$$
$$(y_1 + y_3)\, x_1 + (y_2 + 2y_3)\, x_2 \le 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$$

O passo seguinte, em ambas as tentativas, foi garantir que todos os coeficientes da inequação resultante fossem respectivamente maiores ou iguais que os coeficientes da função-objetivo. Isso pode ser traduzido pelo conjunto de inequações abaixo.

$$y_1 + y_3 \ge 5$$
$$y_2 + 2y_3 \ge 2$$

Portanto, se encontrarmos um conjunto de valores $\{y_1, y_2, y_3\}$ (constantes não negativas) que satisfaçam o conjunto de inequações acima, poderíamos substituir estes valores no lado esquerdo da inequação e estabelecer um limite superior para o nosso problema.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \le 3 \qquad \times (y_1) \Rightarrow y_1\, x_1 \le 3y_1$$

$$x_2 \le 4 \qquad \times (y_2) \Rightarrow y_2\, x_2 \le 4y_2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 9 \qquad \times (y_3) \Rightarrow y_3\, x_1 + 2y_3\, x_2 \le 9y_3$$

$$x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0$$

$$+ \Rightarrow y_1\, x_1 + y_2\, x_2 + y_3\, x_1 + 2y_3\, x_2 \le 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$$

FIGURA 4.4 Generalização da Metodologia - Iª Parte.

PRIMAL	DUAL
Max $Z = 5x_1 + 2x_2$	Min $3y_1 + 4y_2 + 9y_3$
Sujeito a:	Sujeito a:
$x_1 \leq 3$	$y_1 + y_3 \geq 5$
$x_2 \leq 4$	$y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_1 + 2x_2 \leq 9$	
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

FIGURA 4.5 Problemas Primal e Dual.

O que desejamos na realidade é estabelecer o menor valor possível para o nosso limite superior. De maneira geral, podemos dizer que a todo problema de maximização de programação linear na forma-padrão corresponde um problema de minimização denominado Problema Dual. Isto matematicamente pode ser representado pelo problema Dual da Figura 4.5.

Vamos agora observar os problemas PrimaL (original) e Dual. A metodologia-padrão utilizada para se obter o Dual nos leva a acreditar que devem existir algumas relações entre os dois problemas. A Figura 4.5 apresenta lado a lado o Problema Primal e o Problema Dual.

De uma forma geral podemos representar o Primal (na forma padrão) e o seu respectivo Dual, como mostrado na Figura 4.6.

Existe uma série de relações entre o Primal e o Dual, entre as quais podemos citar:

Os termos constantes das restrições do dual são os coeficientes das variáveis da função-objetivo do Primal. Os coeficientes das variáveis da função-objetivo do dual são os termos constantes das restrições do Primal.

As restrições do dual são do tipo maior ou igual, ao passo que as do primal são do tipo menor ou igual (na forma padrão todas as restrições são do tipo menor ou igual).

O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal.

O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal.

A matriz dos coeficientes das restrições do dual é a transposta da matriz dos coeficientes das restrições do primal.

Existem algumas razões para o estudo dos problemas duais. A primeira e mais importante são as inter-

PRIMAL

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leq b_1 \text{ ou } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leq b_2 \text{ ou } a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \leq b_m \text{ ou } a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots n)$$

DUAL

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}y_i \geq c_1 \text{ ou } a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2}y_i \leq c_2 \text{ ou } a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in}y_i \leq c_n \text{ ou } a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots m)$$

FIGURA 4.6 Representação algébrica dos problemas primal e dual.

pretações econômicas que podemos obter dos valores das variáveis do Dual na solução ótima, tais como variações marginais. A segunda está ligada ao número de restrições. Computacionalmente falando é, algumas vezes, mais eficiente resolver o problema dual (dependendo do *n*- de restrições e de variáveis) do que o primai correspondente, já que, obtendo a solução ótima de um, estaremos obtendo a do outro.

Definiremos agora alguns teoremas relacionados ao Problema Dual. Está fora do escopo deste livro sua demonstração. Os leitores interessados deverão procurar livros mais avançados, tais como Hillier & Liberman (1995), Taha (1997) e Chvátal (1983), entre outros.

TEOREMA I

O *Dual do Dual é o Primai.*

TEOREMA II

Se a k-ésima restrição do Primal (x_p)é uma igualdade, então a k-ésima variável do Dual (y_k) é sem restrição de sinal, isto é, pode ter valor positivo, zero ou negativo.

TEOREMA III

Se a p-ésima variável do Primal é sem restrição de sinal, então a p-ésima restrição do Dual é uma igualdade.

Os teoremas anteriores nos dão ferramentas importantes para facilitar a obtenção do Dual a partir do Primai. Vejamos como operacionalizar este procedimento através de exemplos. Primeiramente, para que todas as regras que estaremos expondo a seguir sejam válidas, o Primal tem que ser uma maximização, e todas as restrições devem ser do tipo igualdades ou do tipo menores ou iguais.

Se a função for de minimização, devemos primeiramente transformá-la em maximização utilizando a identidade *Min Z — Max* -Z. Se a restrição for do tipo maior ou igual, devemos multiplicá-la por menos um (-1), transformando-a, assim, no tipo menor ou igual. O exemplo abaixo mostra este procedimento.

$$x_1 + 3x_3 \geq 3 \Leftrightarrow -x_1 - 3x_3 \leq -3$$

As Figuras 4.7 e 4.8 representam o Primai e o Dual de um exemplo e suas respectivas matrizes de coeficientes.

As matrizes de coeficientes são transpostas uma da outra (a linha de uma é a coluna da outra). O elemento a_{12} da matriz de coeficientes se transforma no elemento a_{21} da matriz de coeficientes do Dual. Os coeficientes da linha Z (função-objetivo do Primai) se transformam nas constantes das restrições do Dual. As constantes das restrições do Primai se transformam nos coeficientes da linha D (função-objetivo do Dual).

Uma atenção especial deve ser dada aos sinais das restrições do dual. Uma regra simples a ser seguida é iniciar colocando todas as restrições com o sinal de maior ou igual (>). Devemos apenas trocar os sinais das restrições de maior ou igual (>) para igual (=) se alguma variável do primai for do tipo sem restrição de sinal.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 \qquad \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

FIGURA 4.7 Primal e matriz de coeficientes.

$$\text{Min } D = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\geq 5 \\ y_2 + 2y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

FIGURA 4.8 Dual e matriz de coeficientes.

$$\begin{array}{lll}
\text{Min } Z = 5x_1 + 2x_2 & \Rightarrow \text{Max} - Z = -5x_1 - 2x_2 & \begin{bmatrix} -5 & -2 \end{bmatrix} \\
\text{Sujeito a:} & \text{Sujeito a:} & \\
x_1 \leq 3 & x_1 \leq 3 & \\
x_2 = 4 & x_2 = 4 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix} \\
x_1 + 2x_2 \geq 9 & -x_1 - 2x_2 \leq -9 & \\
x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \in \Re & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \in \Re &
\end{array}$$

FIGURA 4.9 Primal e o Primal Alterado e matriz de coeficientes.

$$\begin{array}{ll}
\text{Min } -D = 3y_1 + 4y_2 - 9y_3 & \begin{bmatrix} 3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \\
\text{Sujeito a:} & \\
y_1 - y_3 \geq -5 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \\
y_2 - 2y_3 = -2 & \\
y_1, y_3 \geq 0, \ y_2 \in \Re &
\end{array}$$

FIGURA 4.10 Dual e matriz de coeficientes.

A segunda preocupação é relativa ao sinal que cada variável do Dual pode apresentar. De maneira análoga ao procedimento acima, devemos iniciar colocando todas as variáveis do Dual como não-negativas (maiores ou iguais a zero). Devemos apenas alterar a condição de sinal da variável se alguma restrição do Primai for do tipo igualdade.

Considere agora um exemplo de minimização (Figura 4.9). Neste caso, devemos realizar a preparação do problema antes de aplicarmos as regras acima . As matrizes dos coeficientes do problema alterado e seu dual são apresentados nas Figura 4.9 e Figura 4.10.

Como a segunda variável do Primai é do tipo sem restrição de sinal, então a segunda restrição do Dual deve ser uma igualdade. Como a segunda restrição do Primai é uma igualdade, então a segunda variável do Dual deve ser do tipo sem restrição de sinal. O problema Dual é mostrado na Figura 4.10.

Uma maneira alternativa seria, no caso de uma minimização (Figuras 4.11 e 4.12), converter todas as restrições de desigualdades para o tipo maior ou igual (multiplicando por -1 as restrições do tipo menor ou igual). Como no caso anterior nada fizemos com as restrições de igualdade, devemos neste caso multiplicá-las por - 1 , para que os sinais fiquem coerentes. As Figuras 4.11 e 4.12 representam o Primai e o Dual do exemplo anterior e suas respectivas matrizes de coeficientes.

As matrizes de coeficientes são transpostas uma da outra (como anteriormente). Os coeficientes da linha

$$\begin{array}{llll}
\text{Min } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Min } Z = 5x_1 + 2x_2 & \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \\
\text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} & \\
x_1 \leq 3 & & -x_1 \geq -3 & \\
x_2 = 4 & \Rightarrow & -x_2 = -4 & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} \\
x_1 + 2x_2 \geq 9 & & x_1 + 2x_2 \geq 9 & \\
x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \in \Re & & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \in \Re &
\end{array}$$

FIGURA 4.11 Primal e o Primai Alterado e matriz de coeficientes.

$$\begin{array}{ll}
\text{Max } D = -3y_1 - 4y_2 + 9y_3 & \begin{bmatrix} -3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \\
\text{Sujeito a:} & \\
-y_1 + y_3 \leq 5 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\
-y_2 + 2y_3 = 2 & \\
y_1, y_3 \geq 0, \ y_2 \in \Re &
\end{array}$$

FIGURA 4.12 Dual e matriz de coeficientes.

Z do Primal se transformam nas constantes das restrições do Dual. As constantes das restrições do Primai se transformam nos coeficientes da linha D (função-objetivo do Dual).

Uma atenção especial deve ser dada aos sinais das restrições do dual. Uma regra simples a ser seguida é iniciar colocando todas as restrições com o sinal de menor ou igual (<). Devemos apenas trocar os sinais das restrições de menor ou igual (<) para igual (=) se alguma variável do primai for do tipo sem restrição do sinal.

A segunda preocupação é relativa ao sinal que cada variável do Dual pode apresentar. De maneira análoga ao procedimento acima, devemos iniciar colocando todas as variáveis do Dual como não-negativas (maiores ou iguais a zero). Devemos apenas alterar a condição de sinal da variável se alguma restrição do Primai for do tipo igualdade.

Vale observar que os dois problemas duais apresentados nas Figuras 4.10 e 4.12 são equivalentes entre si.

TEOREMA IV - Propriedade Fraca da Dualidade (Hillier & Liberman, 1995)

Se o problema Primai (maximização) e o Dual tiverem soluções compatíveis finitas, então Z < D para qualquer solução compatível do Primal e qualquer solução compatível do Dual.

Matematicamente falando, isto pode ser representado pela equação a seguir.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i = D$$

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \leq b_1y_1 + \ldots + b_my_m = D$$

TEOREMA V - Propriedade Forte da Dualidade (Hillier & **Liberman,1995)**

Se tanto o Primai quanto o Dual tiverem soluções compatíveis finitas, então existe uma solução ótima finita para cada um dos problemas, tal que $Z^*=D^*$.

Matematicamente falando, isto pode ser representado pela equação abaixo.

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i^* = D^*$$

$$Z^* = c_1x_1^* + \ldots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + \ldots + b_my_m^* = D^*$$

Onde:

x_j^* = valor da variável j do primal na solução ótima
y_i^* = valor da variável i do dual na solução ótima
n = número de variáveis originais do Primal
m = número de restrições do Primal
Z^* = Valor ótimo do Primal
D^* = Valor ótimo do Dual

Os TEOREMAS IV e V podem ser melhor entendido comparando os processos de ciclos do Primal e do Dual. O Primai parte de uma solução viável do problema original e vai melhorando-a passo a passo, até que atinja o valor ótimo (se este existir), enquanto o problema Dual parte de uma solução inviável ao problema original (viável para o Dual) e tenta, passo a passo, chegar a uma solução viável para o problema original (que é a ótima se ela existir). A Figura 4.13 representa este processo no caso de existência de uma solução ótima, para um problema primai de maximização.

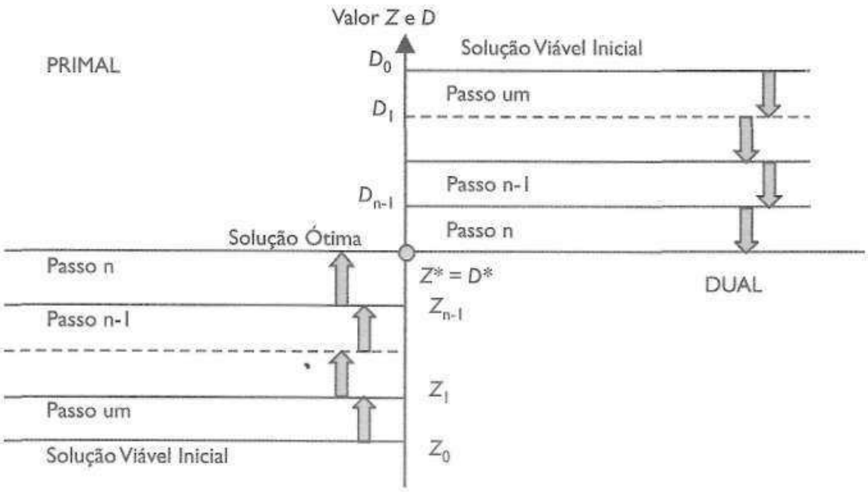


FIGURA 4.13 Método Simplex aplicado ao primal e ao dual.

Os Teoremas IV e V nos levam aos Teoremas VI e VII apresentados a seguir, referentes à relação entre o Primal e o Dual.

TEOREMA VI - Teorema da Dualidade (Hillier &c Liberman, 1995)

As possíveis relações entre os problemas Primal e Dual são as seguintes:

1. *Se um dos problemas tiver solução viável e sua função-objetivo for limitada (portanto, tiver uma solução ótima), então o outro também terá, isto é, as propriedades fraca e forte da dualidade serão aplicáveis.*

2. *Se um dos problemas tiver soluções viáveis, porém uma função-objetivo ilimitada (portanto, sem solução ótima), então o outro não terá soluções viáveis.*

3. *Se um dos problemas não tiver solução viável, então outro não terá soluções viáveis ou terá soluções ilimitadas.*

A Tabela 4.1a seguir representa, de forma resumida as possíveis relações entre o Primai e o Dual (Chvátal,1983).

O último teorema relevante diz respeito à relação entre as variáveis dos problemas Primai e Dual. É conhecido como Teorema da Folga Complementar. Dados os problemas primai e dual a seguir:

PRIMAL

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1 \text{ ou } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \leq b_2 \text{ ou } a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \leq b_m \text{ ou } a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots n)$$

DUAL

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \geq c_1 \text{ ou } a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i \geq c_2 \text{ ou } a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in} y_i \geq c_n \text{ ou } a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

O teorema da folga complementar pode então ser enunciado como:

Tabela 4.1 **Resumo das Possíveis Relações entre Primal e Dual**

DUAL / PRIMAL		Tem Soluções Viáveis		Sem Soluções Viáveis
		Ótima	Ilimitado	Inviável
Tem Soluções Viáveis	Ótima	Possível	Impossível	Impossível
	Ilimitado	Impossível	Impossível	Possível
Sem Soluções Viáveis	Inviável	Impossível	Possível	Possível

TEOREMA VII - Teorema da Folga Complementar (Chvátal,1983)

As condições necessárias e suficientes para que soluções viáveis dos problemas Primai e Dual sejam simul-:aneamente ótimas são dadas por:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i{}^* = c_j \text{ ou } x_j{}^* = 0 \text{ ou ambos } (j = 1,2,\ldots,n) \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j{}^* = b_i \text{ ou } y_i{}^* = 0 \text{ ou ambos } (i = 1,2,\ldots,m)$$

Vamos exemplificar o Teorema VII utilizando o exemplo utilizado anteriormente. Sendo o Primal e Dual dados por:

PRIMAL

$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$

DUAL

$\text{Min } D = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$

Sujeito a:

$y_1 + y_3 \geq 5$

$y_2 + 2y_3 \geq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

O Teorema VII nos diz que sendo *n* (n^2 de variáveis do problema Primal) igual a 2 e *m* (n^2 de restrições do problema Primal) igual a 3, o primeiro grupo de equações do teorema corresponde a duas *(n)* assertativas como descrito abaixo:

Para j=1 temos

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} y_i{}^* = c_1 \quad ou \quad x_1 = 0 \quad ou \quad ambos$$

$$y_1 + y_3 = 5 \quad ou \quad x_1 = 0 \quad ou \quad ambos$$

Para j=2 temos

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i2} y_i{}^* = c_2 \quad ou \quad x_2 = 0 \quad ou \quad ambos$$

$$y_2 + 2y_3 = 2 \quad ou \quad x_2 = 0 \quad ou \quad ambos$$

O segundo grupo de equações do Teorema VII corresponde a três *(m)* assertativas como descritas abaixo:

Para i=1

$$\sum_{j=1}^{2} a_{1j} x_j{}^* = b_1 \quad ou, \quad y_1 = 0 \quad ou \quad ambos$$

$$x_1 = 3 \quad ou, \quad y_1 = 0 \quad ou \quad ambos$$

Para i=2

$$\sum_{j=1}^{2} a_{2j} x_j{}^* = b_2 \quad ou, \quad y_2 = 0 \quad ou \quad ambos$$

$$x_2 = 4 \quad ou, \quad y_2 = 0 \quad ou \quad ambos$$

Para i=3

$$\sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j{}^* = b_3 \quad ou, \quad y_3 = 0 \quad ou \quad ambos$$

$$x_1 + 2x_2 = 9 \quad ou, \quad y_3 = 0 \quad ou \quad ambos$$

Do Teorema VII podemos tirar uma série de corolários apresentados a seguir.

Corolário I

$y_i{}^* = 0$ quando $x_{n+i}{}^* > 0$, para $i = 1,2,\ldots m$, isto é, se na solução ótima do primal a variável de folga $x_{n+i}{}^*$ for básica, então a variável $y_i{}^*$ do dual é não-básica (igual a zero).

Corolário II

$y_{m+j}{}^* = 0$ quando $x_j{}^* > 0$, para $j = 1,2,\ldots n$, isto é, se na solução ótima do primal a variável $x_j{}^*$ for básica, então a variável $y_{m+j}{}^*$ do dual é não-básica (igual a zero).

Corolário III

$x_j{}^* = 0$ quando $y_{m+j}{}^* > 0$, isto é, se na solução ótima do dual a variável de folga $y_{m+j}{}^*$ for básica, então a variável $x_j{}^*$ do primal é não-básica (igual a zero).

Corolário IV

$x_{n+i}{}^* = 0$ quando $y_i{}^* > 0$, isto é, se na solução ótima do dual a variável $y_i{}^*$ for básica, então a variável $x_{n+i}{}^*$ do primal é não-básica (igual a zero)..

As relações entre as variáveis do Primal e do Dual resultantes deste teorema podem ser resumidas na Tabela 4.2 a seguir.

Tabela 4.2 **Relações entre as Variáveis do Primai e do Dual**

Variável do Primal	Variável do Dual Associada
Variável Original x_j	Variável de Folga/Excesso y_{m+j}
Variável de Folga/Excesso x_{n+i}	Variável Original y_i
Variável Básica	Variável Não-básica
Variável Não-básica	Variável Básica

Onde:

n Número de variáveis originais do primal
m Número de restrições do primal
i Índice das restrições do primal ($i=1,2,...,m$)
j Índice das variáveis originais do primal ($j=1,2,...n$)

Vejamos agora um exemplo para tornar mais claro o Teorema da Folga Complementar. Considere os seguintes problemas Primai e seu respectivo Dual.

PRIMAL	DUAL
Max $Z = 5x_1 + 2x_2$	Min $D = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$
sujeito a	sujeito a
$x_1 \le 3$	$y_1 + y_3 \ge 5$
$x_2 \le 4$	$y_2 + 2y_3 \ge 2$
$x_1 + 2x_2 \le 9$	
$x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$	$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Com a introdução de variáveis de folga e/ou excesso podemos obter os dicionários iniciais a seguir, em que podemos observar que cada problema tem cinco variáveis. O Primai tem duas variáveis originais (x_x e x_2) e três variáveis de folga (x_3, i_4 e x_5), enquanto o Dual tem três variáveis originais (y_e, y_2 e y_3) e duas variáveis de excesso (y_4 e y_5).

PRIMAL	DUAL
$x_1 + x_3 = 3$	$y_1 + y_3 - y_4 = 5$
$x_2 + x_4 = 4$	$y_2 + 2y_3 - y_5 = 2$
$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$	
$Z - 5x_1 - 2x_2 = 0$	$D - 3y_1 - 4y_2 - 9y_3 = 0$

Da primeira linha da Tabela 4.2 temos que a *Variável Original* x_j (Primai) está associada à *Variável de Folga/Excesso* y_{m+j} (Dual). No nosso caso, m (n^2 de restrições do problema Primai) é igual a três e n (nº de variáveis do problema Primai) é igual a dois. Portanto, j deve variar de um até dois.

Logo,

Para $j = 1$, temos x_1 associada à variável y_4

Para $j = 2$, temos x_2 associada à variável y_5

Da segunda linha da Tabela 4.2 temos que a *Variável do Primai de Folga/Excesso* (x_{n+i}) está associada à *Variável Original do Dual* (y_i). No nosso caso, m *é* igual a três e n é igual a dois. Portanto, i deve variar de um até três. Logo:

Para $i = 1$, temos x_3 associada à variável y_1

Para $i = 2$, temos x_4 associada à variável y_2

Para $i = 3$, temos x_5 associada à variável y_3

Vale notar que as variáveis originais do problema Primai estão associadas às variáveis de folga/excesso do problema Dual e que as variáveis de folga/excesso do Primal estão associadas às variáveis originais do problema Dual.

Interpretação Econômica do Problema Dual

As variáveis originais do problema dual são chamadas de diversas maneiras, dentre as quais podemos citar Preço-Sombra *(Shadow Price)* e Valor Implícito. As variáveis originais (y_i) do problema dual que estão associadas às variáveis de folga/excesso introduzidas nas restrições do problema Primai representam economicamente o valor marginal do recurso da restrição i em relação ao valor da função-objetivo, isto é, o valor pelo qual a função-objetivo seria alterada, caso a quantidade de recurso i (representada pela constante da restrição b_i) fosse aumentada em uma unidade. A interpretação econômica do teorema da folga complementar pode ser vista de diversas maneiras, dependendo dos valores das variáveis do Primal e Dual na solução ótima. Vejamos as interpretações dos quatro casos a seguir, aplicados a um problema primai na forma padrão.

CASO A: $y_i^* = 0$ e $x_{n+i}^* > 0$

Como a variável de folga x_{n+i}^* é maior que zero, na solução ótima (problema primai) temos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i$$

Podemos dizer que nem todo recurso i está sendo consumido pelas n atividades, havendo, portanto, sobra do recurso i. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser zero.

CASO B: $y_i^* > 0$ quando $x_{n+i}^* = 0$
Como a variável de folga x_{n+i}^* é igual a zero, na solução ótima (problema primai) temos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$$

Podemos dizer que todo recurso i está sendo consumido pelas n atividades, não havendo, portanto, sobra do recurso i. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser maior que zero.

CASO C: $x_j^* = 0$ quando $y_{m+j}^* > 0$
Como a variável x_j^* é igual a 0 e como na solução ótima (problema dual) temos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i^* - y_{m+j}^* = c_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i^* > c_j$$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i^*$ representa o valor implícito da produção de uma unidade do produto j.

Isto nos leva a concluir que essa atividade (x_j) não seria realizada, pois o custo seria maior que o valor do benefício da mesma. Ou seja, já que $x_j = 0$, este não será produzido ou consumido.

CASO D: $x_j^* > 0$ quando $y_{m+j}^* = 0$
Como a variável x_j^* é maior que 0 significa que ele estará sendo produzido na solução ótima. Isto quer dizer que o valor implícito da produção de uma unidade do produto j, ($\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i^*$) deve ser igual a c_j.

A aplicação destas interpretações econômicas será melhor analisada na próxima seção 4.2 deste capítulo. Vale ressaltar que a maioria dos softwares calcula automaticamente os preços-sombra e os custos reduzidos.

EXERCÍCIOS 4.1

1. Formule o Dual do seguinte problema de programação linear: (Observação: não é necessário resolver.)

Maximizar $3x_1 + 5x_2$
Sujeito a:
$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 6$
$3x_1 + 2x_2 = 18$
$x_1 \geq 0$
$\forall x_2 \in \Re$

2. Resolva pelo método Simplex Tabular o Dual do seguinte problema de programação linear:

Minimizar $4x_1 + 3x_2 + x_3$
Sujeito a:
$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 7$
$3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 4$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

3. Encontre o Dual do problema de programação linear abaixo e resolva-o através do método Simplex Tabular:

Minimizar $5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$
Sujeito a:
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 \geq 16$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 13$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

4. Considere o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $-x_1 + x_2 - x_3$
Sujeito a:
$x_1 \leq 9$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Pede-se:
-: Formule o problema Dual.
b) Resolva o problema Primai pelo método Simplex Tabular.

5. Dado o problema a seguir, determine:

Minimizar $3x_1 - 6x_2$
Sujeito a:
$-10x_1 + 2x_2 = -20$
$6x_1 - 6x_2 \geq 36$
$x_1 \geq 0$
$\forall x_2 \in \Re$

a) Encontre e resolva o problema Dual.
b) Entre o primai e o dual o mais fácil de resolver.

6. O Sr. Pigolino possui uma fazenda de criação de porcos para abate e deseja determinar o custo mínimo de uma dieta que garanta aos animais os seguintes requisitos mínimos de nutrientes: as proteínas devem ser fornecidas em uma quantidade de 200 u.m., as vitaminas 250 u.m. e os carboidratos 120 u.m. Considere que os alimentos disponíveis no mercado são: milho, ração preparada e alfafa, ao custo por quilo de R$20,00, R$30,00 e R$35,00, respectivamente. A tabela abaixo resume a quantidade de cada nutriente (u.m.) presente em um quilo de cada alimento:

	Milho	Ração	Alfafa
Proteína	10	10	40
Vitamina	20	20	30
Carboidrato	20	40	20

Pede-se:

a) Modele o problema.

b) Escreva o seu Dual.

c) Escolha, entre o Primai e o Dual, aquele que achar mais fácil de resolver.

d) Resolva o problema através do método Simplex Tabular.

7. Verifique se a solução encontrada para o problema abaixo é ótima, sem utilizar o método Simplex. (Dica: baseie-se nos Teoremas apresentados nesta seção.)

Maximizar $4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6$

Sujeito a:

$x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$

$5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leq 4$

$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 1x_6 \leq 4$

$-x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leq 5$

$-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 7$

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Solução proposta: $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 2,5; x_4 = 3,5; x_5 = 0; x_6 = 0,5$

8. Uma empresa de móveis de cozinha fabrica três tipos de mesas de fórmica: quadrada, retangular e redonda. Cada mesa passa por dois processos: de produção e de acabamento. Existem 1.000 horas disponíveis da mão-de-obra para produção e 600 horas para acabamento semanalmente. A tabela abaixo sumariza o número de horas requerido por mesa em cada um dos processos, bem como o lucro unitário de cada mesa:

Modelo de Mesa	Produção	Acabamento	Lucro Unitário
Quadrada	2 horas	2 horas	30
Retangular	3 horas	2 horas	60
Redonda	4 horas	2 horas	80
Total Disponível	1.000 horas	600 horas	

Pede-se:

a) Modele o problema.

b) Estabeleça o Dual.

c) Escolha qual solucionar e resolva-o através do método Simplex Tabular.

9. Um artesão de imagens sacras produz duas imagens diferentes: a de Cristo e a de Nossa Senhora. A imagem de Cristo é vendida por R$40,00 e a de Nossa Senhora por R$50,00. Por problemas de saúde, o artesão só consegue trabalhar até 10 dias por mês e se passar um dia inteiro fazendo imagens de Cristo faz uma imagem apenas. Mas, se passar um dia inteiro fazendo imagens de Nossa Senhora, ele não consegue fazer uma imagem inteira: ele precisa de dois dias inteiros para fazer uma única imagem de Nossa Senhora. As imagens são entalhadas em peças de madeira e encaixadas depois. A imagem de Cristo precisa ser montada em duas peças de madeira e a de Nossa Senhora em cinco peças, e só existem 16 peças por mês.

Pede-se:

a) Formule um problema de programação linear para determinar quantas imagens o artesão deve fazer por mês, de maneira a maximizar sua receita.

b) A partir do problema obtido no quesito o, descreva o seu dual. Descreva, também, o que significa cada variável deste novo problema que você está descrevendo.

c) Você pode determinar o faturamento do artesão?

d) Você consegue determinar a quantidade de cada imagem a ser fabricada?

e) Suponha que cada peça de madeira custe para o artesão R$10,00. Suponha, também, que ele precise parar de trabalhar e contrate um funcionário para trabalhar a mesma carga diária, pagando R$10,00 por dia. Você poderia dizer de quanto será o lucro do artesão?

10. Um gerente de um SPA chamado *Só é Magro Quem Quer* contrata você para ajudá-lo com o problema da dieta para os hóspedes. (Observe que ele paga bem: 40% do que você precisa!) Mais especificamente, ele precisa de você para decidir como preparar o lanche das 17:00h. Existem dois alimentos que podem ser fornecidos: cheeseburguers e pizza. São unidades especiais de cheeseburguers e pizzas, grandes, com muito molho e queijo, e custam, cada, R$10,00 e R$16,00, respectivamente. Entretanto, o lanche tem que suprir requisitos mínimos de carboidratos e lipídios: 40 u.n. e 50 u.n., respectivamente (u.n. significa unidade nutricional). Sabe-se, ainda, que cada cheeseburguer fornece 1 u.n. de carboidrato e 2 u.n de lipídios, e cada pizza fornece 2 u.n. de carboidrato e 5 u.n. de lipídios. 0 gerente pede:

a) Formule um problema de programação linear para garantir que o SPA forneça os relacionados nutrientes na quantidade pedida, ao menor custo possível.

b) A partir do problema obtido no quesito *a,* descreva o seu dual. Descreva também o que significa cada variável deste novo problema que você está descrevendo.

c) Você pode determinar de quanto será o custo mínimo para o SPA? (Resolva através do método Simplex Tabular.)

á) Você consegue determinar a quantidade de cada um dos alimentos a ser fornecida no lanche?

e) Diga se os nutrientes estão sendo fornecidos além do mínimo necessário, e em que quantidade.

4.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma das hipóteses dos problemas de programação linear é a certeza que temos sobre os valores dos coeficientes da função-objetivo e das constantes das restrições.

Para amenizar essa hipótese realizamos uma análise pós-otimização verificando as possíveis variações, para cima e para baixo, dos valores dos coeficientes da função-objetivo, dos coeficientes e das constantes das restrições, sem que a solução ótima $(x_1, x_2, ..., x_n)$ seja alterada. Este estudo se denomina Análise de Sensibilidade. Em uma Análise de Sensibilidade deveremos responder basicamente a três perguntas:

- Qual o efeito de uma mudança num coeficiente da função-objetivo?
- Qual o efeito de uma mudança numa constante de uma restrição?
- Qual o efeito de uma mudança num coeficiente de uma restrição?

Existem dois tipos básicos de análise de sensibilidade. O primeiro estabelece limites inferiores e superiores para todos os coeficientes da função-objetivo e para as constantes das restrições. Este estudo é efetuado automaticamente pelo Excel e pelo Lindo, considerando a hipótese de apenas uma alteração a cada momento. O segundo verifica se mais de uma mudança simultânea em um problema altera a sua solução ótima. Neste caso, este estudo não é realizado automaticamente pelo Excel por ser um estudo mais complexo. Uma maneira simples para se realizar este estudo, em problemas de pequeno e médio portes, é o de se realizar as alterações na modelagem do problema e encontrar sua nova solução realizando uma nova otimização.

A maneira mais simples de se verificar o que se constitui o estudo de análise de sensibilidade, que é automaticamente feito pelo Excel, é realizá-lo graficamente e posteriormente generalizar o resultado para um número maior de variáveis. Vale ressaltar que este estudo está intimamente ligado ao problema Dual associado ao problema Primai.

4.2.1 Alteração em um dos Coeficientes da Função-objetivo

Considere o problema abaixo e sua solução gráfica (Figura 4.14).

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 5x_1 + 2x_2 \\
&\text{Sujeito a} \\
&4x_1 + x_2 \le 10 \qquad (A) \\
&x_1 + 2x_2 \le 9 \qquad (B) \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

A reta que define a função-objetivo deste problema é dada por.

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{Z}{2} - \frac{5}{2}x_1$$

Na solução ótima, os valores de x_1 e x_2 são iguais para as duas equações das retas que limitam a solução. Portanto, resolvendo este sistema de equações poderemos encontrar a solução ótima.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10 - 4x_1 \\ x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \Rightarrow 10 - 4x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

$$x_1 = \frac{11}{7} \quad e \quad x_2 = \frac{26}{7}$$

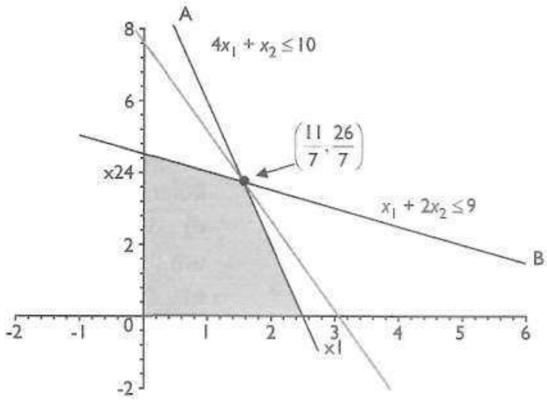


FIGURA 4.14 Solução gráfica do problema.

A alteração em um dos coeficientes provoca uma alteração no coeficiente angular (inclinação) da reta que define a função-objetivo. Visualmente podemos notar que se a variação na inclinação for pequena a solução ótima (valor das variáveis de decisão que produzem o maior valor da função-objetivo) não sofrerá alteração. Devemos deixar claro que o valor máximo (Z) a ser produzido pela solução ótima será diferente, independentemente da manutenção da solução ótima. A Figura 4.15 mostra quanto a inclinação (área sombreada) da função-objetivo pode mudar sem que a solução ótima seja alterada.

As retas A, B e a função-objetivo apresentadas na Figura 4.15 pertencem a uma mesma família de retas, pois têm o ponto (11/7; 26/7) em comum, isto é, uma característica em comum, e a diferença entre elas está no coeficiente angular. Portanto, enquanto o coeficiente angular da função-objetivo estiver entre os coeficientes das retas que determinam a solução ótima, esta não se alterará. Matematicamente, isto pode ser representado por:

Declividade da Linha B	$\le$	Declividade da Função-objetivo	$\le$	Declividade da Linha A
$4x_1 + x_2 = 10$				$x_1 + 2x_2 = 9$
$x_2 = 10 - 4x_1$				$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$
-4	$\le$	Declividade da Função-objetivo	$\le$	$-0{,}5$

De uma forma geral, podemos obter o valor do coeficiente angular de uma função-objetivo por $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ ou por $x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$. Isto é, o coeficiente angular é dado por $-\frac{c_1}{c_2}$. Logo, no nosso caso, queremos $-4 \le -\frac{c_1}{c_2} \le -0{,}5$.

A análise a seguir supõe que apenas um dos coeficientes da função-objetivo pode sofrer alteração de cada vez. Supondo primeiramente que apenas c_1 sofrerá alteração, este poderá variar de $1 \le c_1 \le 8$.

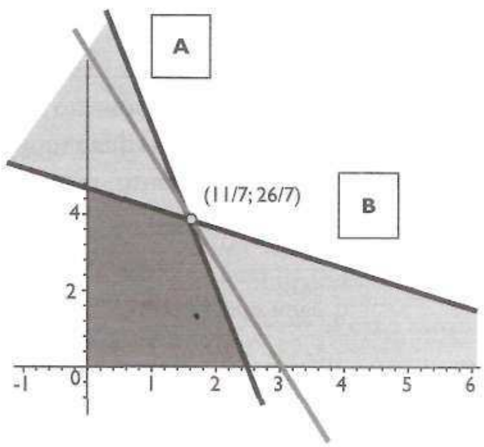


FIGURA 4.15 Representação gráfica da análise de sensibilidade.

Matematicamente estes limites podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$-4 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0{,}5 \text{ para } c_2 = 2 \text{ temos}$$

$$-4 \leq -\frac{c_1}{2} \leq -0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{c_1}{2} \geq -4 \Leftrightarrow c_1 \leq 8 \\ -\dfrac{c_1}{2} \leq -0{,}5 \Leftrightarrow c_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$1 \leq c_1 \leq 8$$

Assumindo agora que apenas c_2 sofrerá alteração, este poderá variar de $1{,}25 \leq c_2 \leq 10$. Matematicamente este limites podem ser obtidos da seguinte maneira:

—4 <———< —0,5 para c_x = 5 temos
c2

5 ^ - 4 o c 2 ^ 4 (parac2>0)
-4<———<-0,5
c-, <-0,5<t> c2 <10 (parac2 >0)

$$\frac{5}{4} \leq c_2 \leq 10$$

Neste caso tivemos a nossa tarefa facilitada, pois existiam limites bem claros para a alteração do coeficiente angular, dado pelas duas retas das restrições. Contudo, nem sempre existem estes limites de forma clara. Considere agora o problema abaixo, que difere do nosso problema original apenas pela alteração do coeficiente da variável x_1.

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max} Z = 15x_1 + 2x_2 \\ &4x_1 + x_2 \leq 10 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A representação gráfica deste novo problema é muito parecida com a anterior, já que os conjuntos de restrições (portanto, as soluções viáveis) são os mesmos para ambos os problemas. A Figura 4.16 mostra o conjunto de soluções viáveis, bem como a solução ótima.

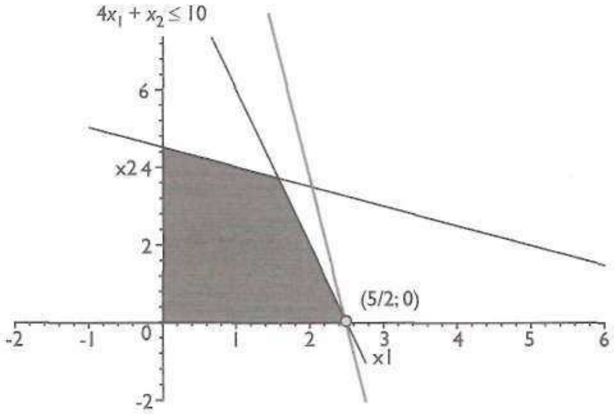


FIGURA 4.16 Representação gráfica do problema.

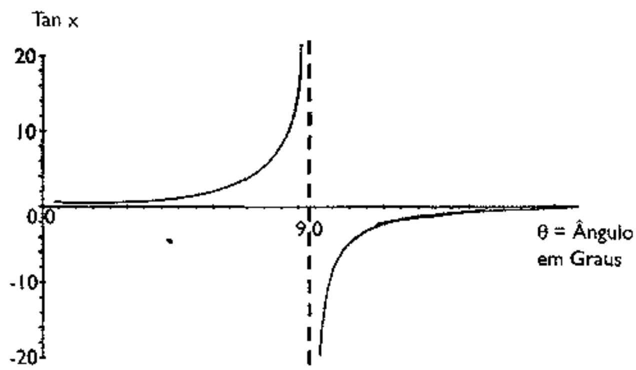


FIGURA 4.17 Gráfico da função tangente.

Quando a rotação da função-objetivo em torno do extremo ótimo passa pela reta vertical, significa que ou o limite superior ou o inferior para a declividade não existem já que a função tangente não é definida em 90^o (Figura 4.17).

Neste problema um dos limites é dado pela reta limite da restrição $4x_1 + x_2 \le 10$. O outro limite vai ser dado pela reta vertical que passa pelo ponto $(5/2;0)$. A razão pode ser facilmente entendida se lembrarmos que o coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas.

Duas características importantes da função tangente podem ser observadas na Figura 4.17. A primeira é que a função tangente não é definida para $\theta=90°$. A segunda é que o sinal no primeiro quadrante (0^o a 90^o) é positivo, enquanto no segundo quadrante (90^o a 180^o) é negativo.

Isto significa que para a função-objetivo ter um coeficiente angular positivo (isto é, ter cruzado a reta vertical), o sinal do coeficiente da variável x_1 teria de ser negativo, para que o coeficiente angular da reta fosse positivo (mantido o coeficiente de x_2).

Por exemplo: se a função-objetivo fosse dada por Z = $-10x_1+2x_2$, seu coeficiente angular seria igual a 5 (positivo). Como estamos desejando maximizar a função-objetivo, podemos facilmente notar que a solução ótima seria alterada de $(5/2;0)$, já que quanto mais aumentarmos x_1 menor será o valor de Z devido ao coeficiente negativo de x_1. Portanto, deveríamos minimizar x_1 e maximizar x_2, o que nos levaria a solução ótima de $(0;9/2)$ e um valor máximo de 9.

Como podemos notar, se a reta da função-objetivo cruzar a reta vertical, o coeficiente angular será positivo ($1^{\underline{o}}$ quadrante) obrigando a alteração de sinal do coeficiente da variável x_1 (mantido o coeficiente de x_2) e, conseqüentemente, a solução ótima do problema. Isto significa que o segundo limite é a própria reta vertical.

Graficamente, podemos encontrar os valores possíveis para o coeficiente angular da função-objetivo sem que a solução ótima seja alterada. A Figura 4.5 representa o intervalo de variação para o coeficiente angular.

Podemos analisar a Figura 4.18 da seguinte maneira. O limite superior é dado pelo valor - 4 (restrição $4x_1 + x_2 \le 10$). Colocando-se este valor no eixo das ordenadas, podemos obter o ângulo limite (maior que 90^o). Com isto podemos afirmar que o ângulo variará entre 90^o e o ângulo determinado pelo tangente seja -4 $(90^o < \theta < 180)$. Portanto, podemos afirmar que enquanto o coeficiente angular estiver no intervalo $-\infty < -\dfrac{c_1}{c_2} \le -4$, a solução ótima não será alterada, ou seja, o coeficiente da variável X\ poderá variar e n $8 \le c_1 < \infty$, m o pode ser demonstrado a seguir.

$$-\infty < -\frac{c_1}{2} \le -4 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{c_1}{2} > -\infty \Leftrightarrow c_1 < \infty \\ -\dfrac{c_1}{2} \le -4 \Leftrightarrow c_1 \ge 8 \end{cases}$$

$$8 \le c_1 < \infty$$

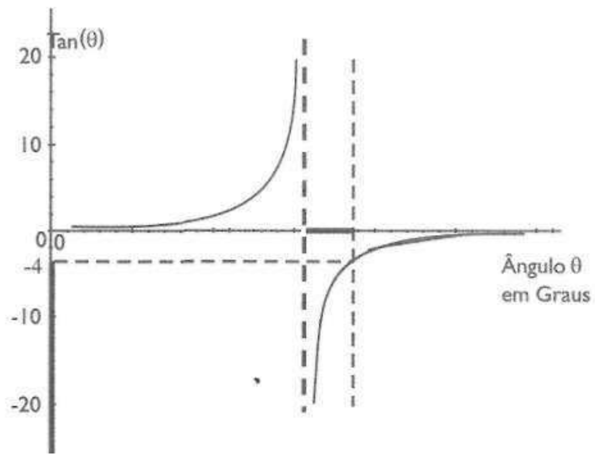


FIGURA 4.18 Intervalo de variação do coeficiente angular da função-objetivo.

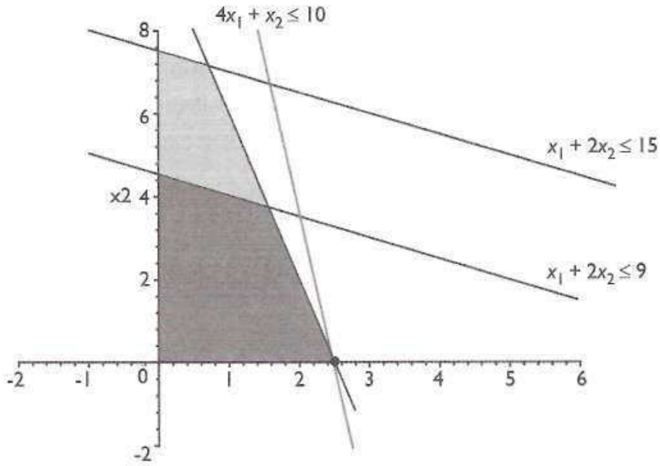


FIGURA 4.19 Representação gráfica do problema modificado.

4.2.2 Alteração do Valor da Constante da Restrição

Uma mudança em qualquer das constantes das restrições pode também alterar a solução ótima de um problema. Esta mudança geralmente acarreta uma alteração no conjunto de soluções viáveis, aumentando ou diminuindo o mesmo. A alteração resultante no valor da função-objetivo devida ao incremento de uma unidade na constante de uma restrição é denominada preço-sombra *(shadow price).* A interpretação do preço-sombra é feita às vezes de custos ou receitas marginais, dependendo das variáveis envolvidas.

Considere o problema abaixo, onde alteramos o nosso problema inicial modificando o valor da constante da segunda restrição de 9 (original) para 15.

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 2x_2$$
Sujeito a:
$$4x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

A Figura 4.19 mostra esta modificação graficamente, bem como a diferença no conjunto de soluções viáveis. Vale notar que esta mudança não alterou a solução ótima. A razão está no fato desta restrição não limitar a solução ótima. Neste caso as duas restrições que limitam a solução ótima são $4x_1 + x_2 < 10$ e $x_1 \geq 0$.

Considere agora o problema a seguir, em que alteramos a constante da primeira restrição de 10 (valor original) para 15. Como esta restrição limita a solução ótima, seu valor será alterado.

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 2x_2$$
Sujeito a:
$$4x_1 + x_2 \leq 15$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

A Figura 4.20 mostra a alteração do conjunto de soluções viáveis e da solução ótima.

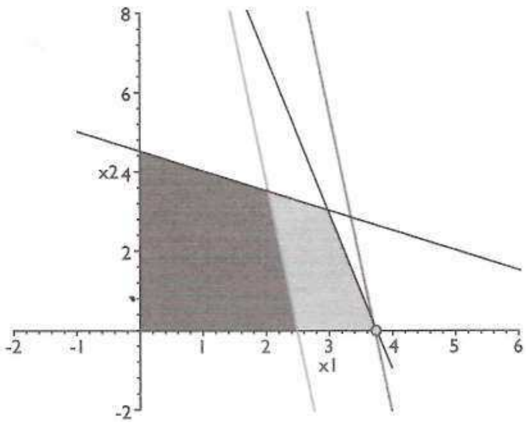


FIGURA 4.20 Representação gráfica do problema modificado.

A alteração de cinco unidades da constante da primeira restrição (10 para 15) provocou uma alteração no valor máximo da função-objetivo de 37,5 para 56,25. Logo, o preço-sombra deste recurso pode ser obtido como:

$$\textit{Preço-sombra} = \frac{56{,}25 - 37{,}50}{5} = 3{,}75$$

Uma alteração de 26 unidades da constante da primeira restrição (10 para 36) provoca uma alteração no valor máximo da função de 37,5 para 135. Logo, o preço-sombra deste recurso pode ser obtido como:

$$\textit{Preço-sombra} = \frac{135 - 37{,}50}{26} = 3{,}75$$

Note que o valor do preço-sombra é o mesmo. Isto acontece dentro de um intervalo de valores apenas. A solução gráfica desta segunda alteração do problema original está representada pela Figura 4.21.

Fazendo agora a terceira modificação no problema aumentando o valor da constante para 37 (qualquer número maior que 36), o modelo seria o apresentado a seguir e sua solução gráfica a apresentada pela Figura 4.22.

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 2x_2$$
Sujeito a:
$$4x_1 + x_2 \leq 37$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Repare que nesta alteração o valor da função-objetivo continuou o mesmo (135); portanto,

$$\textit{Preço-sombra} = \frac{135 - 135}{1} = 0{,}00$$

Vale notar que a primeira restrição deixou de ser a limitante da solução ótima. As restrições limitantes são agora $x_1 + 2x_2 \leq 9$ e $x_1 \geq 0$. Podemos concluir que, enquanto a restrição continuar como limitante da

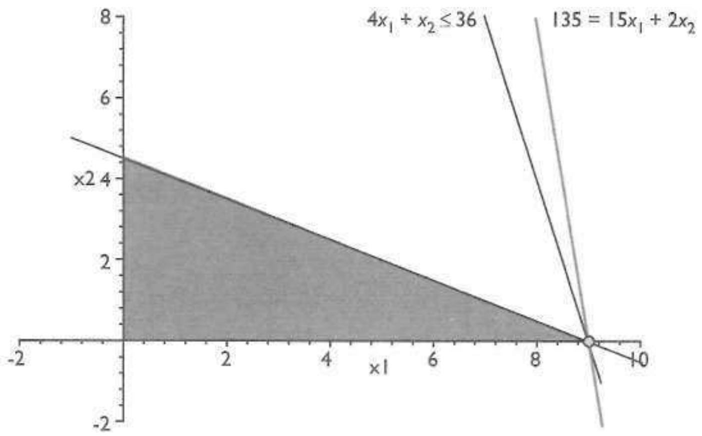


FIGURA 4.21 Representação gráfica da *2-* modificação do problema.

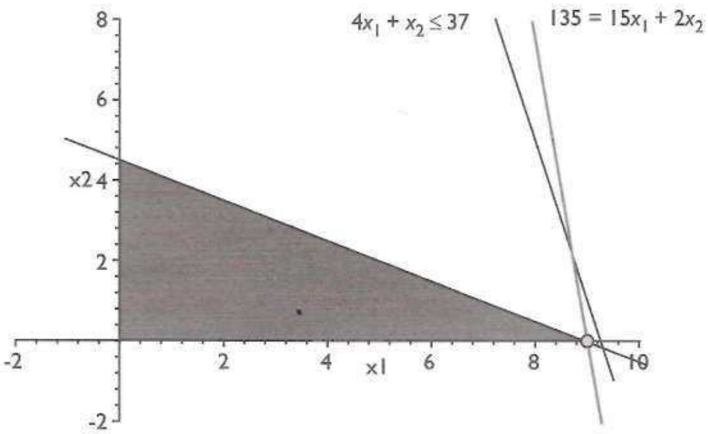


FIGURA 4.22 Representação gráfica da 3ª modificação do problema.

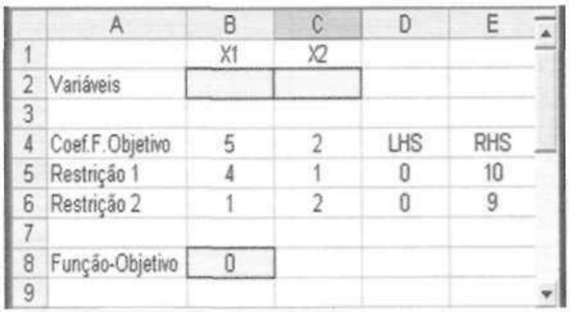


FIGURA 4.23 Modelagem do problema original em Excel.

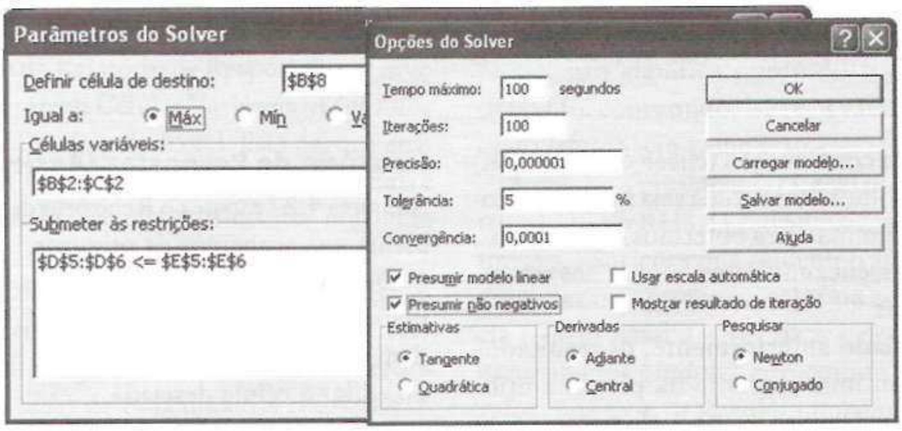


FIGURA 4.24 Parâmetros e opções do Solver do problema original.

solução ótima, o preço-sombra permanece o mesmo, tornando-se zero quando ela deixa de ser limitante da solução ótima.

4.3 RELATÓRIOS DO EXCEL

Como dito anteriormente, o Excel realiza um tipo de análise de sensibilidade que considera apenas a alteração de um único valor (coeficiente das variáveis da função-objetivo ou da constante de uma restrição) de cada vez. Considere o problema a seguir (apresentado anteriormente), sua modelagem no Excel (Figura 4.23) e os parâmetros e opções do Solver utilizado para resolvê-lo (Figura 4.24).

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$
Sujeito a:
$$4x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Após o comando de otimização ter sido dado, a seguinte janela (Figura 4.25) será apresentada para o usuário. Até agora não prestamos muita atenção nela,

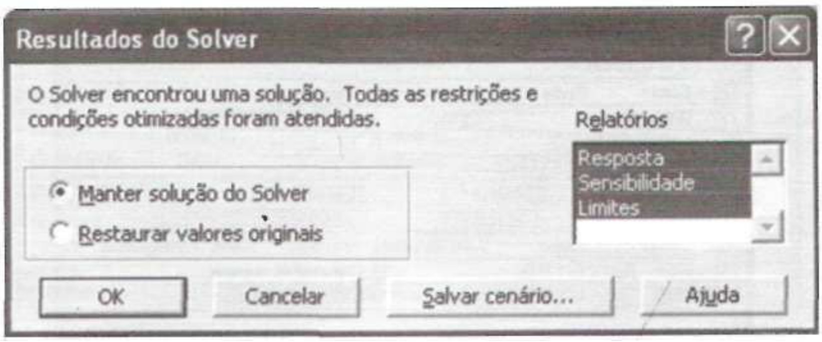


FIGURA 4.25 Janela de resultados do Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		X1	X2						
2	Variáveis	1,571429	3,714286						
3									
4	Coef.F.Objetivo	5	2	LHS	RHS				
5	Restrição 1	4	1	10	10				
6	Restrição 2	1	2	9	9				
7									
8	Função-Objetivo	15,28571							
9									
10									

Relatório de resposta 1 / Relatório de sensibilidade 1 / Relatório de limites 1 / Plan1 / Plan2

FIGURA 4.26 Planilha com resultados do problema original.

sugerimos apenas a confirmação (clicar no botão OK) de maneira que a solução otimizada seja inserida automaticamente na planilha. Para obtermos os relatórios, devemos marcá-los, clicando com o mouse nos três relatórios disponíveis.

Como mencionado anteriormente, os resultados serão inseridos automaticamente na planilha utilizada na modelagem (Figura 4.26). Vale notar o aparecimento de diversas abas, uma para cada relatório pedido.

Existem três relatórios no Excel. São eles:

Relatório de Respostas *(Answer Report)*
Relatório de Sensibilidade *(Sensitivity Report)*
Relatório de Limites *(Limits Report)*

Relatório de Respostas *(Answer Report)*

A Figura 4.27 mostra o Relatório de Respostas do problema que acabamos de otimizar.

Devemos salientar que algumas legendas são automaticamente inseridas pelo Excel. Estas legendas podem ser alteradas facilmente pelo modelador, bastando editar a célula desejada.

Este primeiro relatório é o de mais simples compreensão. O relatório tem três partes distintas. A primeira parte, denominada Célula de Destino *(Target Cell)*, indica o tipo de problema de otimização tratado (maximização ou minimização) e o valor original (valor inicial) e final da função-objetivo, bem como a célula que foi utilizada para representá-la. Para entender cada um dos valores, observe as Figuras 4.23 e 4.26.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta**						
2	**Planilha: [Exemplo4_1.xls]Plan1**						
3	***Relatório criado: 27/2/2004 10:18:54***						
4							
5							
6	Célula de destino (Máx)						
7		**Célula**	**Nome**	**Valor original**	**Valor final**		
8		$B$8	Função-Objetivo X1	0	15,28571429		
9							
10							
11	Células ajustáveis						
12		**Célula**	**Nome**	**Valor original**	**Valor final**		
13		$B$2	Variáveis X1	0	1,571428571		
14		$C$2	Variáveis X2	0	3,714285714		
15							
16							
17	Restrições						
18		**Célula**	**Nome**	**Valor da célula**	**Fórmula**	**Status**	**Transigência**
19		$D$5	Restrição 1 LHS	10	$D$5<=$E$5	Agrupar	0
20		$D$6	Restrição 2 LHS	9	$D$6<=$E$6	Agrupar	0
21							

Relatório de resposta 1 / Relatório de sensibilidade 1 / Relatório de limites 1

FIGURA 4.27 Relatório de respostas do problema original.

A célula B8 do Relatório de Respostas apresenta o valor $B$8 que representa a célula utilizada para representar a função-objetivo na modelagem original (Figura 4.23). A célula D8 do Relatório de Respostas apresenta o valor inicial da função-objetivo (valor da célula B8 na Figura 4.23), já que os valores iniciais das variáveis são zero (células B2 e C2 da Figura 4.23). A célula E8 do Relatório de Respostas apresenta o valor otimizado da função-objetivo, isto é, o valor da função-objetivo considerando os valores de X_1 e x_2 na solução ótima (células B2, C2 e B8 da Figura 4.26, repectivamente).

A segunda parte do Relatório de Respostas é relativo às variáveis de decisão ou Células Variáveis *(Adjustable Cells)* como denominado pelo Excel. Esta parte é análoga à primeira parte. Ela apresenta os valores iniciais e finais das variáveis de decisão e as células utilizadas para defini-las.

A terceira parte do Relatório de Respostas diz respeito às restrições. A coluna das células *(Cells)* indica as células utilizadas para representar os lados esquerdos (LHS - *Left Hand Side)* de cada uma das restrições. A coluna de valor da células *(Cell Value)* indica os valores dos lados esquerdos (LHS) de cada uma das restrições. A coluna Fórmula indica cada uma das fórmulas utilizadas nas restrições. A coluna Status e de Transigência são as que não são de compreensão direta. A coluna de status pode apresentar dois valores: Agrupar *(binding)* ou Não Agrupar *(not binding).* Quando o valor desta coluna relativo a uma restrição apresentar o valor Agrupar significa que o LHS tem o obrigatoriamente o mesmo valor do RHS quando são substituídos os valores da solução ótima no lado esquerdo da restrição. Quando o valor Não Agrupar for mostrado para uma restrição, geralmente isto significará que o LHS é diferente do RHS. Podem acontecer casos onde o LHS é igual ao RHS e o valor apresentar Não Agrupar. Isto pode representar a existência de soluções múltiplas para o problema.

O mais importante está na interpretação desta igualdade. Quando a igualdade existe, isto é, os lados direito e esquerdo da restrição são iguais na solução ótima, isto significa que todo o recurso disponível (RHS) foi consumido, isto é, a variável de folga ou excesso *(slack)* tem valor zero.

A coluna Transigência *(Slack)* indica a diferença entre o LHS e o RHS de cada uma das restrições. Por definição, restrições que tenham o status agrupar *(binding)* devem apresentar valor na coluna de transigência *(Slack)* igual a zero. As restrições com valor não agrupar *(not binding)* apresentam geralmente algum valor positivo, podendo também em alguns casos apresentar o valor zero.

Relatório de Limites

O Relatório de Limites do problema em estudo é apresentado na Figura 4.28.

Este relatório apresenta duas partes. A primeira na parte superior, relativa à função-objetivo, e a outra na

Microsoft Excel 10.0 Relatório de limites
Planilha: [Exemplo4_1.xls]Relatório de limites 1
Relatório criado: 27/2/2004 10:18:54

Célula	Destino Nome	Valor
$B$8	Função-Objetivo X1	15,28571429

Célula	Ajustável Nome	Valor	Inferior Limite	Destino Resultado	Superior Limite	Destino Resultado
$B$2	Variáveis X1	1,571428571	0	7,428571429	1,571428571	15,28571429
$C$2	Variáveis X2	3,714285714	0	7,857142857	3,714285714	15,28571429

Relatório de resposta 1 / Relatório de sensibilidade 1 \ Relatório de limites 1 / Relatório

FIGURA 4.28 Relatório de limites.

parte inferior, relativa às variáveis de decisão. A parte superior é de interpretação direta e apresenta a célula utilizada para representar a função-objetivo e o seu valor na solução ótima.

A parte inferior carece de esclarecimentos. O lado esquerdo apresenta as células utilizadas para representar as variáveis de decisão e seus valores na solução ótima. O lado direito (4 últimas colunas) diz respeito à variação possível dos valores das variáveis de decisão e da função-objetivo. Os limites inferiores *(lower limit)* significam os menores valores que estas variáveis de decisão podem assumir (mantidas todas as outras variáveis como constantes) sem que nenhuma restrição deixe de ser satisfeita, isto é, que a solução se torne inviável. A coluna seguinte indica o valor da função-objetivo, caso cada variável de decisão em questão assuma o limite inferior e todas as outras variáveis permaneçam constantes. As duas colunas seguintes são de interpretação análoga. A única diferença é que ao invés de encontrarmos os menores valores, encontraremos os maiores valores possíveis para as variáveis e função-objetivo.

Relatório de Sensibilidade

A Figura 4.29 representa o Relatório de Sensibilidade do problema em estudo. Este relatório é dividido em duas partes. A primeira refere-se às mudanças que possam ocorrer nos coeficientes das variáveis de decisão da função-objetivo. A outra parte mostra as possíveis alterações que as constantes das restrições podem sofrer.

Na primeira coluna são apresentadas as células que representam as variáveis de decisão e os LHS das restrições, enquanto na terceira coluna são apresentados os valores após a otimização. A quarta coluna contém os valores das variáveis de decisão e de folga/excesso do problema dual (Custo Reduzido e Preço-Sombra).

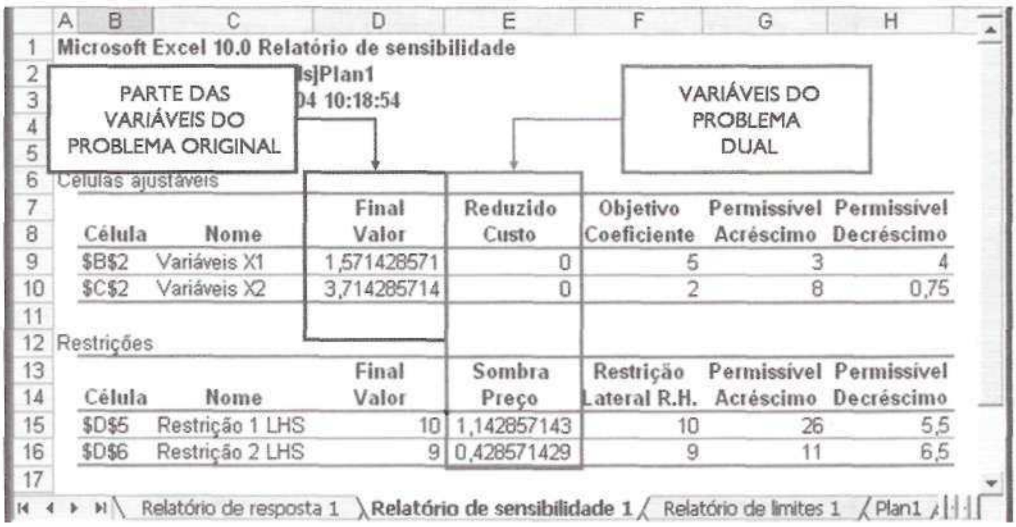
Preço-Sombra *(Shadow Price)*

Os valores dos preços-sombra *(shadow price)* foram interpretados anteriormente neste capítulo. Seus significados são:

- A quantidade pela qual a função-objetivo é alterada dado um incremento de uma unidade na constante da restrição, assumindo que todos os outros coeficientes e constantes permaneçam inalterados.
- A interpretação econômica seria até quanto estaríamos dispostos a pagar por uma unidade adicional de um recurso, já que além deste valor estaríamos piorando nosso desempenho.

Infelizmente, nem todos os softwares têm a mesma forma de reportar os valores do preço-sombra. Primeiramente faremos menção à forma como o Excel reporta seus resultados e em seguida uma maneira alternativa que é válida para os diversos formatos dos softwares que estamos utilizando.

O Excel reporta o valor do preço-sombra como um valor positivo ou zero ou negativo. Se o preço-sombra for positivo, um incremento de uma unidade na constante da restrição resulta num aumento do valor da



Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade
...ls]Plan1
...04 10:18:54

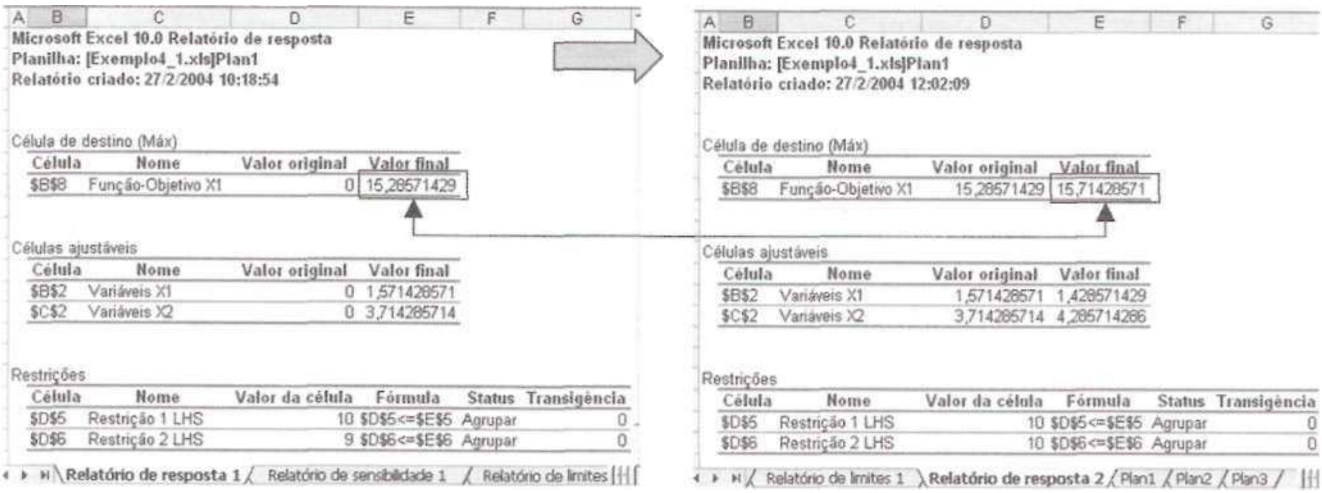
Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$2	Variáveis X1	1,571428571	0	5	3	4
$C$2	Variáveis X2	3,714285714	0	2	8	0,75

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$D$5	Restrição 1 LHS	10	1,142857143	10	26	5,5
$D$6	Restrição 2 LHS	9	0,428571429	9	11	6,5

FIGURA 4.29 Relatório de sensibilidade do problema original.



Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo4_1.xls]Plan1
Relatório criado: 27/2/2004 10:18:54

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$8	Função-Objetivo X1	0	15,28571429

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	Variáveis X1	0	1,571428571
$C$2	Variáveis X2	0	3,714285714

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$5	Restrição 1 LHS	10	$D$5<=$E$5	Agrupar	0
$D$6	Restrição 2 LHS	9	$D$6<=$E$6	Agrupar	0

Relatório de resposta 1 / Relatório de sensibilidade 1 / Relatório de limites 1

Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo4_1.xls]Plan1
Relatório criado: 27/2/2004 12:02:09

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$8	Função-Objetivo X1	15,28571429	15,71428571

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	Variáveis X1	1,571428571	1,428571429
$C$2	Variáveis X2	3,714285714	4,285714286

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$5	Restrição 1 LHS	10	$D$5<=$E$5	Agrupar	0
$D$6	Restrição 2 LHS	10	$D$6<=$E$6	Agrupar	0

Relatório de limites 1 / Relatório de resposta 2 / Plan1 / Plan2 / Plan3

FIGURA 4.30 Resultados das duas otimizações.

função-objetivo. Se o preço-sombra for negativo, um incremento de uma unidade na constante da restrição resulta na diminuição do valor da função-objetivo. Como comentado anteriormente, o valor do preço-sombra permanecerá constante desde que o valor da constante fique no intervalo descrito pelas colunas de Permissível Acréscimo e Permissível Decréscimo *(Allowable Increase* e *Allowable Decrease).*

Enquanto o valor da constante de uma restrição (RHS) permanecer no intervalo de variação permissível, o conjunto de variáveis básicas não se altera, isto é, as variáveis com valores diferentes de zero (as variáveis básicas geralmente têm valores diferentes de zero) continuam com valor diferente de zero.

O preço-sombra de uma restrição do tipo Não-Agrupar *(Not Binding)* tem que ser zero, uma vez que geralmente existem recursos disponíveis não sendo utilizados; portanto, sem valores marginal (Teorema de Folga Complementar).

Devemos observar que uma restrição do tipo menor ou igual é abrandada pelo incremento de uma unidade, enquanto a restrição do tipo maior ou igual o é pelo decremento de uma unidade. Analogamente, uma restrição do tipo menor ou igual se torna mais restritiva pelo decremento de uma unidade, e a do tipo maior ou igual pelo incremento de uma unidade.

O valor absoluto do preço-sombra pode então ser visto como o valor que a função-objetivo é melhorada no caso de um abrandamento na restrição, isto é, um incremento de uma unidade na restrição do tipo menor ou igual ou um decremento de uma unidade na restrição do tipo maior ou igual.

Analogamente, o valor absoluto do preço-sombra pode então ser visto como o valor da função-objetivo que é piorado no caso de uma restrição se tornar mais restritiva, isto é, um incremento de uma unidade na restrição do tipo maior ou igual, ou um decremento de uma unidade na restrição do tipo menor ou igual.

Vamos alterar o nosso problema original de maneira a ressaltar os pontos citados. Suponha a seguinte alteração no nosso problema:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \le 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 9 & & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 & & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

A Figura 4.30 indica os dois resultados das otimizações dos problemas anteriores.

O valor da função-objetivo variou (aproximadamente) de 15,285 para 15,714. Este valor poderia ser obtido sem se realizar uma segunda otimização. Observemos a Figura 4.29, que retrata o relatório de sensibilidade do problema original. O valor do preço-sombra *(shadow price)* da segunda restrição (célula E16) é igual a 0,4285. Este valor é exatamente igual ao valor acrescido na função-objetivo. Como a alteração abrandou a restrição, o valor em módulo do preço-sombra deve melhorar o valor da função-objetivo, o que num problema de maximização significa aumentá-la. Vale reparar que as variáveis básicas (x_1 *e* x_2) continuaram básicas.

Suponha agora a seguinte alteração no nosso pro-

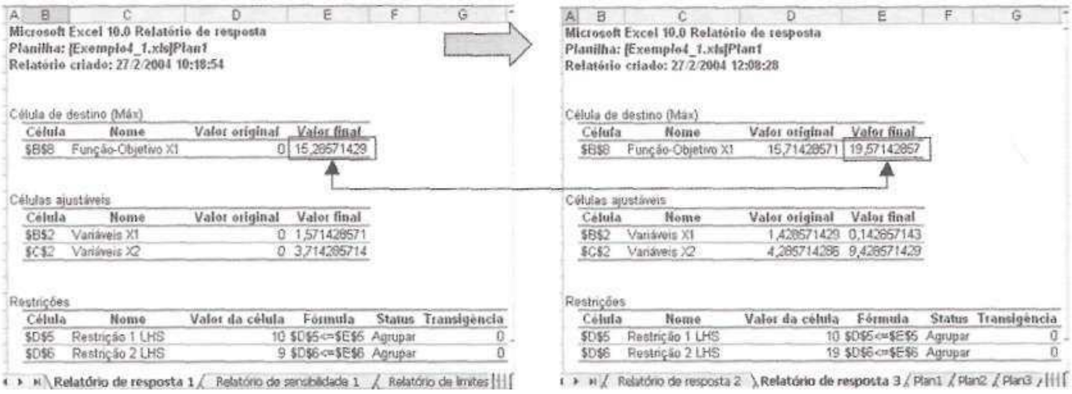


FIGURA 4.31 Resultados das duas otimizações.

blema original. A diferença está no fato de que em vez de uma única unidade, o valor da constante foi alterado em dez unidades.

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

A Figura 4.31 mostra os dois resultados das otimizações.

O valor da função-objetivo variou (aproximadamente) de 15,285 para 19,571. Este valor poderia ser obtido sem se realizar a segunda otimização. Observemos a Figura 4.29, que retrata o relatório de sensibilidade do problema original. O valor do preço-sombra *(shadow price)* da segunda restrição (célula E16) é igual a 0,4285. Como a constante variou em 10 unidades, devemos multiplicar o valor do preço-sombra por 10, o que resulta na diferença de 4,285 (aproximadamente). Este valor é exatamente igual ao valor acrescido na função-objetivo (19,571 = 15,285 + 4,285). Como aalteração abrandou a restrição, o valor em módulo do preço-sombra deve melhorar o valor da função-objetivo, o que, num problema de maximização, significa aumentá-la. Este valor só pode ser calculado desta maneira porque o intervalo de variação da constante da segunda restrição $(2{,}5 \leq \text{RHS} \leq 20)$ não foi violado, o que manteve o preço-sombra constante. Vale reparar que as variáveis básicas $(x_1 \text{ e } x_2)$ continuaram básicas.

Suponha agora a seguinte alteração no nosso problema. A diferença está no fato de que, em vez de 10 unidades, o valor da constante foi alterado em 11 unidades para que o valor da constante atinja o limite superior do intervalo de variação da constante da segunda restrição (RHS) (Figura 4.29).

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

A Figura 4.32 mostra os dois resultados das otimizações. O valor da função-objetivo variou (aproxima-

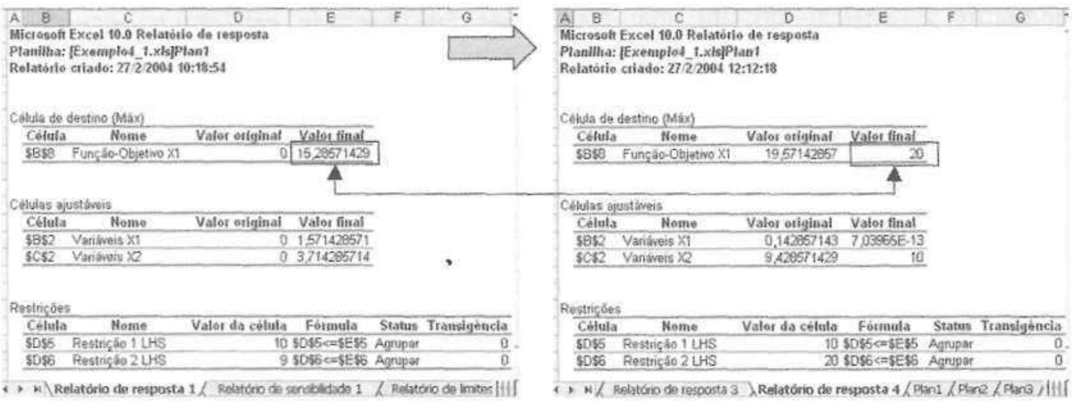


FIGURA 4.32 Resultados das duas otimizações.

damente) de 15,2857 para 20,0. Este valor poderia ser obtido sem se realizar a segunda otimização. Observemos a Figura 4.29, que retrata o relatório de sensibilidade do problema original. O valor do preço-sombra *(shadow price)* da segunda restrição (célula E16) é igual a 0,42857. Como a constante variou em 11 unidades (maior limite permitido), devemos multiplicar o valor do preço-sombra por 11, o que resulta na diferença de 4,7143 (aproximadamente). Este valor é exatamente igual ao valor acrescido na função-objetivo (20 = 15,2857 + 4,7143). Como a alteração abrandou a restrição, o valor em módulo do preço-sombra deve melhorar o valor da função-objetivo, o que, num problema de maximização, significa aumentá-la. Este valor só pode ser calculado desta maneira porque o intervalo de variação da constante da segunda restrição (2,5 < RHS < 20) não foi violado, o que manteve o preço-sombra constante. Vale reparar que as variáveis básicas $(x_1 \text{ e } x_2)$ continuaram básicas.

Suponha agora a seguinte alteração no nosso problema. A diferença está no fato de que, em vez de 11 unidades, o valor da constante foi alterado em 12 unidades para que o valor da constante saia do limite superior do intervalo de variação da constante da segunda restrição (RHS).

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

A Figura 4.33 mostra os dois resultados das otimizações.

Note que agora o valor da função-objetivo não sofreu alteração, permanecendo constante, igual a 20, como na alteração anterior (Figura 4.32). Isto indica que o preço-sombra sofreu alteração de valor, neste caso de 0,42857 para 0,0. A segunda restrição deixou de ter o status de Agrupar *(binding)* passando a Não Agrupar *(not binding)*, isto é, a variável de folga deixou de ser zero, passando ao valor um. Vale reparar que o conjunto de variáveis básicas na primeira otimização $\{x_1 \text{ e } x_2\}$ é diferente do conjunto de variáveis básicas da segunda otimização $\{x_1 \text{ e } x_4\}$ (x_4 representa a variável de folga da segunda restrição).

4.4 CUSTO REDUZIDO *(REDUCED COST)*

Existem duas interpretações básicas para o Custo Reduzido *(Reduced Cost):*

- A quantidade que o coeficiente da função-objetivo de uma variável original deve melhorar antes desta variável se tornar básica.
- A penalização que deverá ser paga para tornar uma variável básica.

Observe que os Custos Reduzidos são as variáveis de folga ou excesso do problema dual. Portanto, se uma variável do problema original for maior do que zero, o valor da variável do dual relacionada será zero, isto é, o valor do Custo Reduzido *(reduced cost)* será zero (Teorema da Folga Complementar).

Como os valores do Custo Reduzido estão ligados aos coeficientes da função-objetivo (lembre-se de que os coeficientes da função-objetivo do problema Primai se tornam as constantes das restrições do problema Dual), as colunas de Permissível Acréscimo *(Allowable Increase)* e Permissível Decréscimo *(Allowable Decrease)* dos coeficientes formam um intervalo no qual os coeficientes podem sofrer alterações (desde que apenas um dos coeficientes se altere) sem que a solução ótima seja alterada.

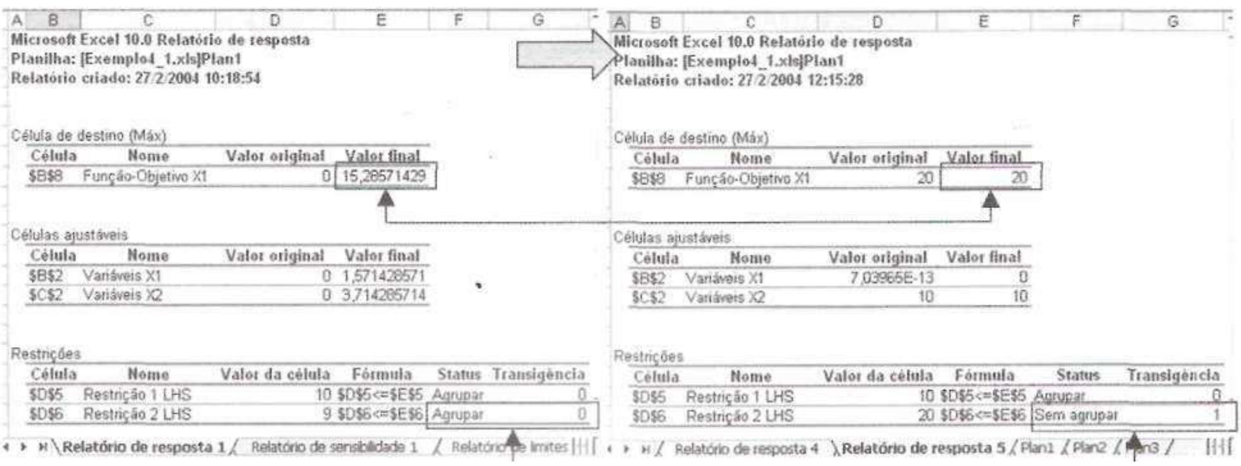


FIGURA 4.33 Resultados das duas otimizações.

Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [Exemplo4_2.xls]Plan1
Relatório criado: 28/2/2004 15:33:53

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$2	Variáveis X1	1,571428571	0	5	3	4
$C$2	Variáveis X2	3,714285714	0	2	8	0,75

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$D$5	Restrição 1 LHS	10	1,142857143	10	26	5,5
$D$6	Restrição 2 LHS	9	0,428571429	9	11	6,5

Relatório de resposta 3 / Relatório de sensibilidade 1 / Plan1 / Plan2 / Plan3

FIGURA 4.34 Relatório de sensibilidade do problema original.

Vamos agora mostrar alguns exemplos para ressaltar os pontos destacados referentes ao custo reduzido. Suponha a seguinte alteração no nosso problema original, em que apenas alteramos o coeficiente da variável x_1 da função-objetivo de 5 para 7.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 7x_1 + 2x_2 \\
\text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\
4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\
x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Como podemos notar no Relatório de Sensibilidade do problema original (Figura 4.34), esta alteração está dentro do intervalo permissível de variação do coeficiente, 1 < coeficiente de $x_1 \leq 8$.

A Figura 4.35 mostra os dois resultados das otimizações dos problemas vistos. Como pode ser observado (Figura 4.35), a solução ótima, isto é, o valor das variáveis X_1 e x_2 na solução ótima do problema não se alterou, já que o valor do coeficiente permaneceu dentro do intervalo de permissível de variação do coeficiente. Vale notar que o valor da função-objetivo, isto é, o valor ótimo, foi alterado de 15,285 para 18,428 (aproximadamente).

Suponha a seguinte alteração no nosso problema, em que apenas alteramos o coeficiente da variável X_1 da função-objetivo de 5 para 9, levando o valor do coe-

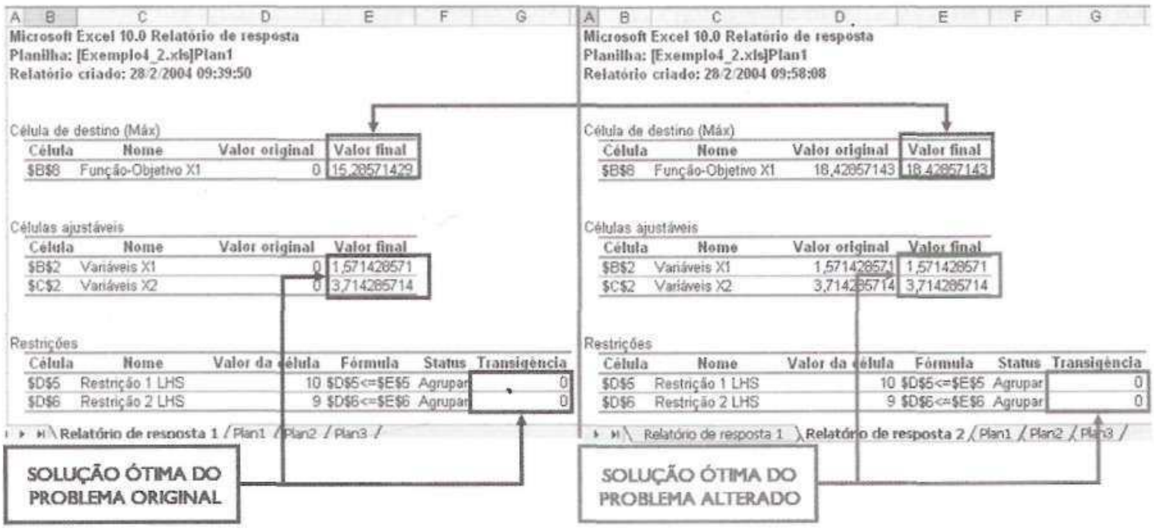


FIGURA 4.35 Resultados das duas otimizações.

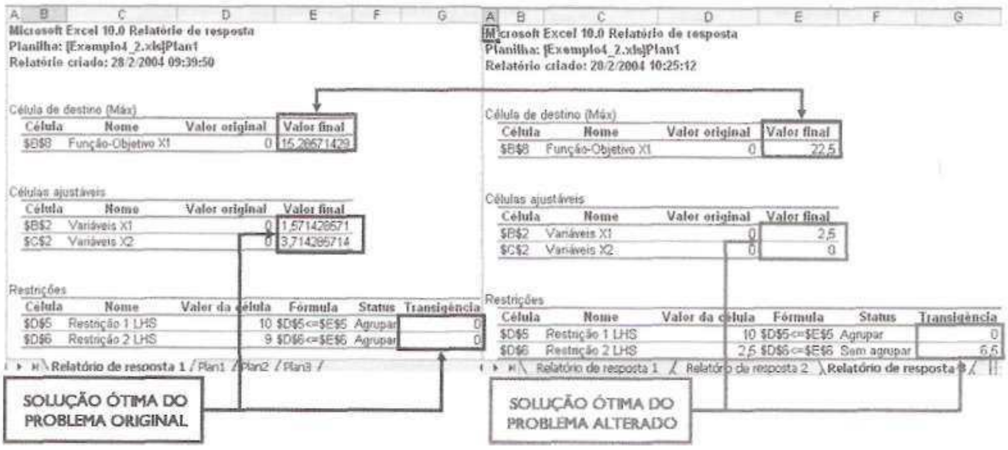


FIGURA 4.36 Resultados das duas otimizações.

ficiente para fora do intervalo de variação do coeficiente, $1 \leq$ coeficiente de $x_1 \leq 8$, mostrado na Figura 4.34.

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 9x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \text{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

A Figura 4.36 mostra os dois resultados das otimizações dos problemas original e alterado. Como podemos observar na Figura 4.36, a solução ótima (valor das variáveis x_1 e x_2) foi mudada, como era esperado, já que levamos o coeficiente para fora do intervalo permitido. Vale notar que o valor da função-objetivo também foi alterado para 22,5.

4.5 SOLUÇÕES ÓTIMAS MÚLTIPLAS

Algumas vezes o Permissível Acréscimo (*allowable increase)* e Permissível Decréscimo *(allowable decrease)* dos coeficientes da função-objetivo podem ser iguais a zero. Na inexistência de soluções degeneradas (explicadas no próximo tópico), este fato denota a existência de Soluções Ótimas Múltiplas, isto é, mais de dois conjuntos de valores para as variáveis do problema resultam no mesmo valor ótimo da função-objetivo.

Para obtermos as soluções alternativas (já que o Solver encontrará apenas uma solução de cada vez), basta seguirmos os passos adiante, sugeridos em Ragsdale (2001):

1. Adicionar uma restrição ao problema que mantenha a função-objetivo no valor máximo (restrição que no LHS apresenta a equação da função-objetivo e o RHS o valor máximo).
2. Trocar a função-objetivo para a maximização ou minimização de uma das variáveis que apresentem o *allowable increase* e *allowable decrease* do coeficiente igual a zero.

Suponha a seguinte alteração no nosso problema, em que apenas alteramos o coeficiente da variável x_1 da função-objetivo de 5 para 8, levando o valor ao limite do intervalo de variação do coeficiente, 1< coef. de $x_1 \leq 8$, mostrado na Figura 4.34.

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 & & \text{Max } Z = 8x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a:} & & \textit{Sujeito a:} \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 & \Rightarrow & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 & & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

A Figura 4.37 indica os dois resultados das otimizações dos problemas acima.

Como podemos observar na Figura 4.37, a solução ótima foi mudada. Poderíamos nos perguntar a razão para tal, já que não ultrapassamos os limites do intervalo. Para responder a esta pergunta, devemos observar o relatório de sensibilidade do problema alterado, apresentado na Figura 4.38.

Como podemos observar no relatório de sensibilidade, o valor do intervalo de variação do coeficiente de X1 tem um limite de decrescimento igual a zero. Isto indica a existência de soluções múltiplas na ausência de degeneração (a ser visto no próximo item). O mesmo poderia ser dito no caso do coeficiente de x_2. Porém, apenas uma das ocorrências é necessária

FIGURA 4.37 Resultados das duas otimizações.

Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [Exemplo4_3.xls]Plan1
Relatório criado: 28/2/2004 10:42:04

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$2	Variáveis X1	2,5	0	8	1E+30	0
$C$2	Variáveis X2	0	0	2	0	1E+30

Restrições

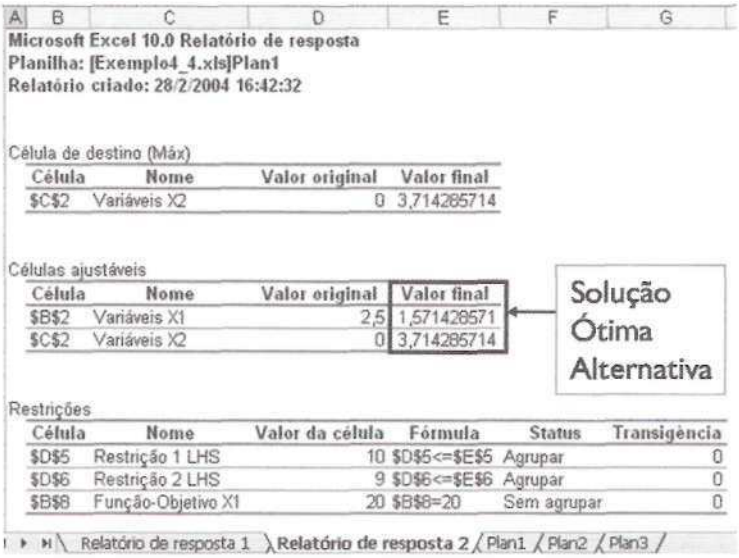
Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$D$5	Restrição 1 LHS	10	2	10	26	10
$D$6	Restrição 2 LHS	2,5	0	9	1E+30	6,5

FIGURA 4.38 Relatório de sensibilidade do problema alterado.

para haver a indicação de soluções múltiplas na ausência de degeneração.

Vamos agora seguir a forma indicada neste item para descobrir uma solução alternativa. Devemos incluir uma restrição adicional, obrigando a função-objetivo a permanecer com o mesmo valor. A seguir devemos maximizar ou minimizar a variável que apresenta o limite de variação igual a zero. Como neste caso a variável x_2 apresenta Permissível Acréscimo *(allowable increase)* igual a zero, deveríamos maximizar esta variável. A Fi-

FIGURA 4.39 Parâmetros do Solver para obtenção de solução alternativa.



Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo4_4.xls]Plan1
Relatório criado: 28/2/2004 16:42:32

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$C$2	Variáveis X2	0	3,714285714

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	Variáveis X1	2,5	1,571428571
$C$2	Variáveis X2	0	3,714285714

Solução Ótima Alternativa

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$5	Restrição 1 LHS	10	$D$5<=$E$5	Agrupar	0
$D$6	Restrição 2 LHS	9	$D$6<=$E$6	Agrupar	0
$B$8	Função-Objetivo X1	20	$B$8=20	Sem agrupar	0

Relatório de resposta 1 / Relatório de resposta 2 / Plan1 / Plan2 / Plan3

FIGURA 4.40 Relatório de resposta do problema - obtenção de solução alternativa.

gura 4.39 mostra os parâmetros desta modelagem e a Figura 4.40 mostra a solução alternativa *(x_1 = 1,5714 e x_2 = 3,7143)*.

Repare que a solução do problema modificado (Figura 4.40) apresenta os valores de x_1 e x_2 iguais à solução ótima anterior (Figura 4.37). O mesmo resultado poderia ser obtido, já que a variável x_1 também apresenta o Permissível Decréscimo *(allowable decrease)* igual a zero. A diferença aqui seria o fato de que teríamos de minimizar x_1 em vez de maximizá-lo. A Figura 4.41 mostra os parâmetros desta modelagem e a Figura 4.42 mostra a solução alternativa.

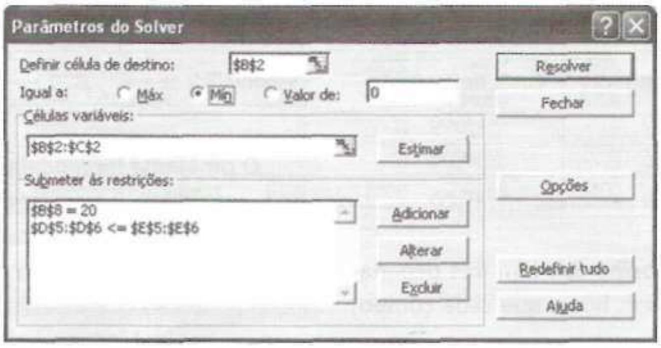
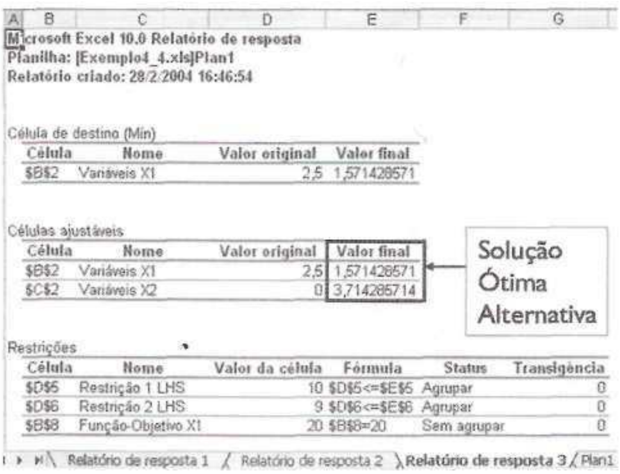


FIGURA 4.41 Parâmetros do Solver para obtenção de solução alternativa.



Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo4_4.xls]Plan1
Relatório criado: 28/2/2004 16:46:54

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	Variáveis X1	2,5	1,571428571

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$2	Variáveis X1	2,5	1,571428571
$C$2	Variáveis X2	0	3,714285714

Solução Ótima Alternativa

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$D$5	Restrição 1 LHS	10	$D$5<=$E$5	Agrupar	0
$D$6	Restrição 2 LHS	9	$D$6<=$E$6	Agrupar	0
$B$8	Função-Objetivo X1	20	$B$8=20	Sem agrupar	0

Relatório de resposta 1 / Relatório de resposta 2 / Relatório de resposta 3 / Plan1

FIGURA 4.42 Relatório de resposta do problema - obtenção de solução alternativa.

4.6 SOLUÇÃO DEGENERADA

Um problema de programação linear tem uma solução ótima degenerada quando uma restrição apresenta o Permissível Acréscimo *(allowable increase)* e/ou Permissível Decréscimo *(allowable decrease)* iguais a zero. A presença de solução ótima degenerada impacta na interpretação do Relatório de Sensibilidade de diversas maneiras. Ragsdale (2004) destaca os seguintes pontos:

No caso de uma solução ótima degenerada, a metodologia descrita no item anterior para detecção de soluções alternativas pode não ser confiável.

- O Custo Reduzido *(Reduced Cost)* das variáveis pode não ser único. Adicionalmente, o valor dos coeficientes da função-objetivo deve ser alterado em, no mínimo, este valor (às vezes mais) para que a solução ótima se altere.
- Os intervalos de variação dos coeficientes da função-objetivo ainda são válidos, porém valores fora deste intervalo podem não levar à alteração da solução ótima.
- Os valores dos preços-sombra e seus intervalos podem continuar a ser interpretados da mesma maneira, porém podem não ser únicos.

EXERCÍCIOS 4.2

1. A Companhia Coelho S.A. fabrica motores para brinquedos e pequenos aparelhos. O departamento de marketing está prevendo vendas de 6.100 unidades do motor *Roncam* no próximo semestre. Esta é uma nova demanda e a companhia terá que testar sua capacidade produtiva. O motor *Roncam* é montado a partir de três componentes: o corpo, a base e a blindagem. Alguns destes componentes podem ser comprados de outros fornecedores, se houver limitações da Coelho S.A. Os custos de produção e os custos de aquisição em RS/unidade estão resumidos na tabela abaixo:

Componente	Custo de Aquisição	Custo de Produção
Corpo	10,00	8,00
Base	20,00	20,00
Blindagem	20,00	10,00

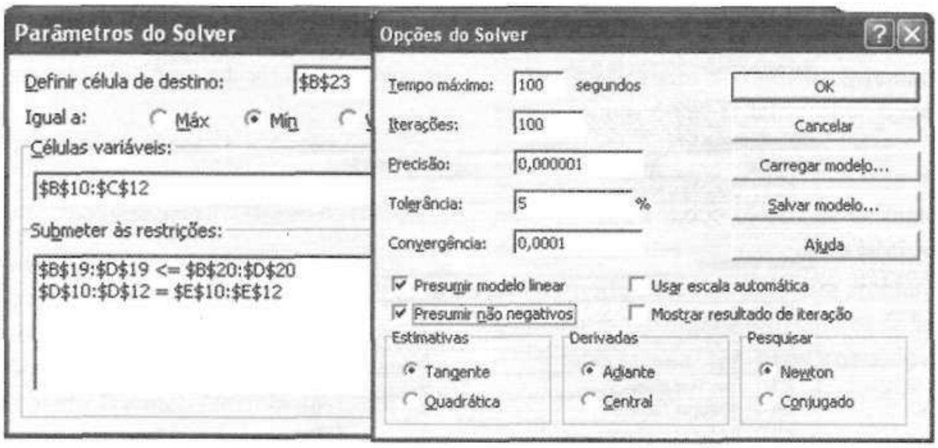
A fábrica da Companhia Coelho S.A. tem três departamentos. O requisito de tempo em horas que cada componente consome em cada departamento está resumido na tabela a seguir. As horas disponíveis para a companhia estão listadas na última linha.

Componente	Preparação	Molde	Fabricação
Corpo	$1/30$	$1/15$	$1/30$
Base	$1/12$	$1/30$	$1/15$
Blindagem	$1/15$	$1/12$	$1/12$
Disponibilidade	820	820	820

O problema foi modelado diretamente no Excel, como pode ser visto na figura a seguir. A janela com os parâmetros do Solver e os três relatórios de resposta também estão disponíveis a seguir. Com base em toda esta memória de cálculo, responda ao que é pedido em seguida.

	A	B	C	D	E
1		Custos			
2	Componente	Adquiridos	Produzidos		
3	Corpo	10	8		
4	Base	20	20		
5	Blindagem	20	10		
6					
7					
8		Quantidades			
9	Componente	Adquiridos	Produzidos	Total	Demanda
10	Corpo			=SOMA(B10:C10)	6100
11	Base			=SOMA(B11:C11)	6100
12	Blindagem			=SOMA(B12:C12)	6100
13					
14		Tempo			
15	Componente	Preparação	Molde	Fabricação	
16	Corpo	2	4	2	
17	Base	5	2	4	
18	Blindagem	4	5	5	
19	Tempo Consumido	=SOMARPRODUTO(B16:B18;$C$10:$C$12)	=SOMARPRODUTO(C16:C18;$C$10:$C$12)	=SOMARPRODUTO(D16:D18;$C$10:$C$12)	
20	Tempo Disponível	49200	49200	49200	
21					
22					
23	Custo Total	=SOMARPRODUTO(B3:C5;B10:C12)			

Plan1 | Memória de Cálculo | Plan3



Microsoft Excel 10.0 Relatório de limites
Planilha: [Problema4_1.xls]Relatório de limites 1
Relatório criado: 29/2/2004 08:26:25

	Destino	
Célula	Nome	Valor
$B$23	Custo Total Preparação	234650

	Ajustável		Inferior	Destino	Superior	Destino
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
$B$10	Corpo Adquiridos	1425	1425	234650	1425	234650
$C$10	Corpo Produzidos	4675	4675	234650	4675	234650
$B$11	Base Adquiridos	6100	6100	234650	6100	234650
$C$11	Base Produzidos	0	0	234650	0	234650
$B$12	Blindagem Adquiridos	0	0	234650	0	234650
$C$12	Blindagem Produzidos	6100	6100	234650	6100	234650

Microsoft Excel 10.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [Problema4_1.xls]Plan1
Relatório criado: 29/2/2004 08:26:25

Células ajustáveis

		Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Acréscimo	Decréscimo
$B$10	Corpo Adquiridos	1425	0	10	6	2
$C$10	Corpo Produzidos	4675	0	8	2	6
$B$11	Base Adquiridos	6100	0	20	1	1E+30
$C$11	Base Produzidos	0	1	20	1E+30	1
$B$12	Blindagem Adquiridos	0	7,5	20	1E+30	7,5
$C$12	Blindagem Produzidos	6100	0	10	7,5	1E+30

Restrições

		Final	Sombra	Restrição	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Acréscimo	Decréscimo
$B$19	Tempo Consumido Preparação	33750	0	49200	1E+30	15450
$C$19	Tempo Consumido Molde	49200	-0,5	49200	5700	18700
$D$19	Tempo Consumido Fabricação	39850	0	49200	1E+30	9350
$D$10	Corpo Total	6100	10	6100	1E+30	1425
$D$11	Base Total	6100	20	6100	1E+30	6100
$D$12	Blindagem Total	6100	12,5	6100	3740	1140

Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [Problema4_1.xls]Plan1
Relatório criado: 29/2/2004 08:26:25

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$23	Custo Total Preparação	0	234650

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$10	Corpo Adquiridos	0	1425
$C$10	Corpo Produzidos	0	4675
$B$11	Base Adquiridos	0	6100
$C$11	Base Produzidos	0	0
$B$12	Blindagem Adquiridos	0	0
$C$12	Blindagem Produzidos	0	6100

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$B$19	Tempo Consumido Preparação	33750	$B$19<=$B$20	Sem agrupar	15450
$C$19	Tempo Consumido Molde	49200	$C$19<=$C$20	Agrupar	0
$D$19	Tempo Consumido Fabricação	39850	$D$19<=$D$20	Sem agrupar	9350
$D$10	Corpo Total	6100	$D$10=$E$10	Sem agrupar	0
$D$11	Base Total	6100	$D$11=$E$11	Sem agrupar	0
$D$12	Blindagem Total	6100	$D$12=$E$12	Sem agrupar	0

Pede-se

a) O relatório de limites determina que os limites superior e inferior de todas as variáveis são iguais ao **valor ótimo** (ou seja, não é tolerada nenhuma variação a partir do ponto ótimo). Por que isto aconteceu com este problema?

b) A solução ótima indica que as 6.100 unidades do componente *base* devem ser adquiridas (terceirizadas). Entretanto, o custo reduzido da célula que indica a quantidade deste componente a ser fabricado é 1, o que indica que, se fabricássemos 1 unidade de *base,* o nosso custo pioraria RS 1,00. Explique a lógica por trás dessas contradições.

c) Explique por que o preço-sombra para a restrição de tempo para molde é negativo, enquanto os preços-sombra para as restrições de quantidades totais são positivos.

d) O gerente está examinando uma proposta de produzir 900 novos motores, estendendo o contrato para um total de 7.000 unidades. Ele gostaria de obter uma estimativa do custo mínimo de produção destes novos 900 motores. Determine este valor (explique o seu raciocínio).

e) Explique os valores obtidos como acréscimos e decréscimos permitidos para o tempo de preparação dos componentes.

f) Percebendo que o tempo de molde está insuficiente, o gerente decide aumentar este tempo disponível. Suponha que o valor do investimento por hora de molde é exatamente dez centavos a menos que o máximo que ele está disposto a pagar. Diga o montante que ele deve investir para ter melhor retorno possível, e de quanto será este retorno.

2. A Fashion Things Ltda. é uma pequena empresa fabricante de diversos tipos de acessórios femininos, entre **eles** bolsas de modelos diferentes. A empresa foi convencida, pelo seu distribuidor, de que existe mercado tanto para bolsas do modelo-padrão (preço médio) quanto para as bolsas **do modelo** de luxo (preço alto). A confiança do distribuidor é tão **acentuada** que ele garante que irá comprar todas as bolsas que forem produzidas nos **próximos** três meses. Uma análise detalhada dos requisitos de fabricação resultaram na especificação da tabela abaixo, a qual **apresenta o tempo** despendido (em horas) para a realização das quatro operações que constituem o processo produtivo, assim como o lucro **estimado por tipo de bolsa:**

Produto	Corte e Coloração	Costura	Acabamento	Inspeção e Empacotamento	Lucro por Bolsa
Padrão	7/10	1/2	1	1/10	R$10,00
De luxo	1	5/6	2/3	1/4	R$9,00
Tempo disponível para os 3 meses	630	600	700	135	–

a) Supondo que a empresa deseja maximizar o lucro, determine quantas bolsas de cada modelo devem ser fabricadas.

b) Qual o lucro obtido pela quantidade ótima de bolsas fabricadas?

c) Quanto tempo deve ser programado para cada **operação do processo** produtivo?

d) **Qual o tempo de sobra em cada** operação?

e) Calcule o espectro de otimalidade dos coeficientes da função-objetivo?

f) Determine o valor de 1 hora adicional de corte e coloração?

g) Qual é o preço-sombra para a restrição de corte e coloração?

h) Qual é o preço-sombra para a restrição de costura?

3. Uma pequena empresa produz pôsteres de bandas de rock. Ela fabrica quatro tipos de pôsteres, que diferem em tamanho e nas cores utilizadas. A empresa conseguiu uma impressora para produzir os pôsteres. Cada pôster deve ser impresso, cortado e dobrado. O tempo (em minutos) para fazer isso para os quatro tipos de pôsteres é de:

Tipo de *Pôster*	Impressão	Corte	Dobragem
A	1	2	3
B	2	4	2
C	3	1	5
D	3	3	3
Disponível	15000	20000	20000

A impressora tem um tempo limitado de utilização. O lucro por pôster, baseado no preço projetado de venda menos custo de impressão e outros custos variáveis, é de $1 para A e B, e $2 para C e D. De modo a ter um *display* de vendas adequado, pelo menos 1.000 de cada tipo devem ser produzidos. Formule o modelo, resolva-o utilizando o Solver, analise o relatório de sensibilidade e responda:

a) Quais as quantidades ótimas produzidas e o lucro projetado?

b) Quanto a empresa está disposta a pagar por tempo extra de impressão, de corte e de dobragem?

c) Suponha que reduzíssemos o limite mínimo de produção de 1.000 em um dos itens para 900. Qual pôster deveria ter sua produção diminuída, e qual seria o lucro adicional da empresa?

4. A Beta Inc. deve produzir 1.000 automóveis Beta. A empresa tem quatro fábricas. Devido a diferenças na mão-de-obra e avanços tecnológicos, as plantas diferem no custo de produção de cada carro. Elas também utilizam diferentes quantidades de matéria-prima e mão-de-obra, resumidas na tabela abaixo:

Fábrica	Custo (R$ mil)	Mão-de-obra (horas)	Matéria-prima (toneladas)
1 – Rio	15	2	3
2 – São Paulo	10	3	4
3 – Vitória	9	4	5
4 – Uberaba	7	5	6

Um acordo trabalhista assinado requer que pelo menos 400 carros sejam produzidos na fábrica de Vitória. A empresa pode transferir seus funcionários livremente entre as fábricas sem nenhum ônus. O fornecedor pode entregar a matéria-prima em qualquer uma das cidades sem nenhum custo adicional. Existe uma disponibilidade de 3.300 horas de mão-de-obra e 4.000 toneladas de matéria-prima que podem ser alocadas entre as quatro fábricas.

O modelo para resolver este problema é mostrado a seguir. Utilize-o para gerar os relatórios de limites, sensibilidade e respostas gerados pelo Excel e os use para responder as seguintes questões.

$$\text{Min } 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4$$
sujeito a
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 3300$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 4000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$$
$$x_3 \ge 400$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Pede-se

a) Quais são as quantias ótimas de produção? Qual o custo de produção?

b) Quanto custaria produzir mais um veículo? Quanto economizamos produzindo um veículo a menos?

c) Como mudaria sua solução se custasse somente R$8.000,00 para produzir na fábrica 2? Como ficaria o custo?

d) Quanto estamos dispostos a pagar por uma hora de trabalho?

e) Quanto acordo trabalhista está custando ? Qual seria a variação no custo total se o acordo fosse de 200 carros? E se fosse de 600?

f) Quanto vale a matéria-prima (conseguir mais uma unidade)? Quantas unidades estamos dispostos a pagar por esse preço? O que ocorre se quisermos mais?

g) Quanto deve aumentar o custo na fábrica 1 para que não seja mais vantajoso produzir lá?

5. A Distribuidora de Bebibas Desce Redondo deseja programar suas vendas para o mês de janeiro, de acordo com as cotas por produtos determinadas pela empresa produtora Ambe, fabricante de diferentes marcas de cerveja. Neste período, a Desce Redondo consegue vender quaisquer quantidades de produto entregues pela Ambe, tendo uma margem de lucro de 12% sobre sua receita (Lucro com vendas=12% da receita). A Ambe autorizou um pedido de 150.000 caixas, com 24 cervejas cada, dos diversos produtos, podendo a Desce Redondo determinar dentro de certos limites impostos pela fábrica que quantidade deseja receber de cada cerveja. A tabela abaixo discrimina os lucros unitários por caixa dos produtos e limites de cotas impostos pela fábrica.

Cerveja	tipo de recipiente	lucro/caixa (R$)	Máx (%)	Mín (%)
Antártida 600 ml (x_1)	600 ml	R$21,00	60%	55%
Antártida 350 ml (x_2)	350 ml	R$14,50	40%	35%
Boemia Regressa (x_3)	600 ml	R$23,00	3%	1%
Mudweiser (x_4)	350 ml	R$15,50	1,5%	0,5%
Malebier (x_5)	350 ml	R$13,00	1,5%	1,0%
Bama Chopp (x_6)	350 ml	R$15,50	1,7%	0,5%
Labati (x_7)	350 ml	R$17,00	5,0%	2,0%
Desce Redondo (x_8)	600 ml	R$17,00	3,0%	0,5%

A gerência da fábrica deseja maximizar seus lucros e montou o seguinte modelo de programação linear.

$$Max\ 2{,}52x_1 + 1{,}74x_2 + 2{,}76x_3 + 1{,}86x_4 + 1{,}56x_5 + 1{,}86x_6 + 2{,}04x_7 + 2{,}04x_8$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 150000$$
$$x_1 \leq 90000 \quad ; \quad x_1 \geq 82500$$
$$x_2 \leq 60000 \quad ; \quad x_2 \geq 52500$$
$$x_3 \leq 4500 \quad ; \quad x_3 \geq 1500$$
$$x_4 \leq 2250 \quad ; \quad x_4 \geq 750$$
$$x_5 \leq 2250 \quad ; \quad x_5 \geq 1500$$
$$x_6 \leq 2550 \quad ; \quad x_6 \geq 750$$
$$x_7 \leq 7500 \quad ; \quad x_7 \geq 3000$$
$$x_8 \leq 4500 \quad ; \quad x_8 \geq 750$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Pede-se

a) Quais são as quantias ótimas a serem solicitadas? Qual o custo de produção?

b) Se você pudesse aumentar seu pedido em 50 caixas, que cerveja solicitaria?

CAPÍTULO 5

Problemas de Rede

De uma forma geral, modelos de rede são utilizados em casos especiais de problemas de programação linear que são mais bem analisados através de uma representação gráfica. Importantes problemas de otimização, tais como problemas de distribuição logística e de energia, produção e outros, são eficientemente resolvidos se modelados como problemas de rede.

Modelos de rede facilitam a visualização das relações entre os componentes do sistema, aumentando o entendimento do problema e de seus possíveis resultados. Devido a estas vantagens, a modelagem de rede está sendo cada vez mais utilizada nas mais diferentes áreas incluindo o mundo dos negócios.

5.1 TERMINOLOGIA

Redes são diagramas compostos por uma coleção de vértices ou nós ligados entre si por um conjunto de arcos (Figura 5.1). Os nós são simbolizados por círculos e representam os pontos de junção que conectam os arcos. Os arcos são representados por linhas, conectam os nós e podem revelar a direção do fluxo de um ponto para outro.

Os problemas modelados como redes geralmente apresentam números associados aos nós e aos arcos (Figura 5.2). O significado de cada valor irá variar de acordo com o tipo de problema com o qual estamos lidando. Em problemas de transportes modelados

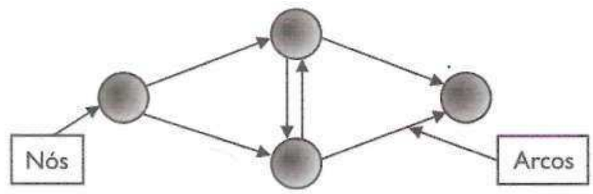


FIGURA 5.1 Componentes de uma rede.

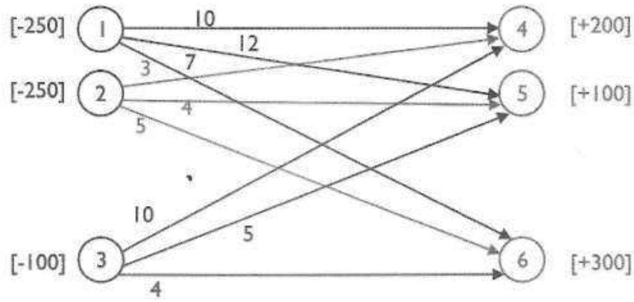


FIGURA 5.2 Exemplo de problemas de transporte.

como redes, por exemplo, os números associados aos nós podem representar a quantidade de produtos ofertada ou demandada pelo nó, ao passo que os valores dos arcos podem refletir o custo de transporte (ou o tempo, ou a distância) entre um nó e outro.

Diversos problemas de tomada de decisão no mundo real estão categorizados como Problemas de Rede. Entre eles podemos citar:

- Problemas de Transporte
- Escala de Produção
- Rede de Distribuição
- Problemas do Menor Caminho
- Problemas de Fluxo Máximo
- Problemas de Caminho Crítico

5.2 PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Um tipo de problema real muito especial e comum de aplicação de Programação Linear é conhecido como Problema de Transporte. Esta classe de problemas recebeu este nome porque seu método de resolução, denominado Método de Transporte, foi inicialmente utilizado para determinar o menor custo de transporte entre diversas fábricas de um produto e diversos centros consumidores. O Método de Transporte resolve esta classe de problemas de programação linear de uma maneira mais eficiente que o Simplex tradicional. Para os leitores curiosos em conhecer o método, sugerimos a leitura do capítulo referente aos problemas de transporte em Hillier & Lieberman (1995).

O Método de Transporte foi especialmente utilizado antes da era da microcomputação. Com o advento dos computadores pessoais, cada vez mais rápidos e com maior capacidade de processamento, diversos sistemas automatizados de resolução de Problemas de Programação Linear têm sido lançados, os quais tornam dispensável a aplicação do Método de Transporte em sua forma original. No entanto, a maneira como o problema pode ser equacionado permanece a mesma.

O Problema de Transporte básico é aquele em que queremos determinar, dentre as diversas maneiras de distribuição de um produto, a que resultará no menor custo de transporte entre as fábricas e os centros de distribuição. Por se tratar de um problema de programação linear, devemos fazer a hipótese de que o custo unitário de transporte de cada fábrica para cada destino é constante, independentemente da quantidade transportada.

Matematicamente, queremos a minimização do custo total de transporte, a qual é dada por:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onde:

- x_{ij} é a quantidade de itens transportados da fábrica *i* para o destino / (variáveis de decisão);
- c_{ij} é o custo unitário de transporte da fábrica *i* para o destino; (constantes);
- *m é* o número de fábricas;
- *n é* o número de destinos (centros de consumidores).

As restrições deste tipo de problema são: as fábricas não podem produzir mais do que suas capacidades instaladas e os centros consumidores não desejam receber volumes acima de suas demandas. Existem duas maneiras para que estas restrições sejam implementadas.

Na primeira, o montante ofertado (somatório das capacidades das fábricas) deve ser igualado ao total demandado (somatório das demandas dos centros consumidores). Para operacionalizar estas restrições de igualdade, as seguintes regras devem ser seguidas:

No caso de a Oferta maior que a Demanda devemos introduzir um destino fantasma *(dummy)* que tenha os custos de transporte unitários de todas as fábricas para este destino iguais a zero. A demanda deste centro consumidor deve ser igual à diferença entre o total ofertado e o total demandado;

No caso de Demanda maior que Oferta devemos introduzir uma fonte de oferta fantasma *(dummy)* que tenha os custos de transporte unitários para todos os destinos iguais a zero e uma capacidade igual à diferença entre o total demandado e o total ofertado.

Inserindo uma demanda ou uma oferta fantasma, garantimos que todas as restrições do problema serão dadas por igualdades. Em outras palavras, o total fabricado será virtualmente igual à demanda dos centros consumidores e vice-versa. Matematicamente, estas restrições serão representadas pelas equações abaixo:

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i$ (para $i = 1,2,\ldots, m$)

  restrições das capacidades das fábricas

O somatório das quantidades enviadas de cada fábrica para os n destinos deve ser igual ao total ofertado por aquela fábrica (f_i).

- $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \; (j = 1,2,\ldots, n)$$

 restrições dos centros consumidores

O somatório das quantidades recebidas por centro consumidor das m fábricas deve ser igual ao total demandado por aquele destino (d_j).

Somando-se todos os lados de todas as restrições, teremos:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} f_i \text{ e } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Como os lados esquerdos das duas equações acima representam o somatório dos custos de todos os itens transportados das fábricas para os destinos, podemos concluir que os lados direitos das equações também devem ser iguais, isto é:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Esta última igualdade é condição necessária e suficiente para que qualquer problema de transporte tenha solução ótima quando modelado utilizando variáveis *dummy.*

A segunda forma de se implementar as restrições varia com o total da capacidade das fábricas e o total demandado pelos centros consumidores. O procedimento é o seguinte:

No caso da oferta total ser maior do que a demanda total, nem todas as fábricas produzirão em plena capacidade, porém os centros consumidores irão receber as quantidades que desejam. Matematicamente, isto pode ser representado por:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq f_i \; (i = 1,2,\ldots,m)$$

restrições das fábricas

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \; (j = 1,2,\ldots,n)$$

restrições dos centros consumidores

No caso da demanda total ser maior do que a oferta total, nem todos os centros consumidores receberão toda a quantidade que desejam, porém as fábricas irão produzir tudo o que puderem, ou seja, irão trabalhar em plena capacidade. Matematicamente,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i \; (i = 1,2,\ldots,m)$$

restrições das fábricas

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \; (j = 1,2,\ldots,n)$$

restrições dos centros consumidores

Conforme vimos, a inserção de variáveis do tipo *dummy* não é obrigatória, porém facilitam a interpretação do resultado da otimização. Quando existe um desequilíbrio entre oferta e demanda, podemos ter as seguintes ações e interpretações (Tabela 5.1) para as variáveis *dummy.*

Tabela 5.1 Ações e interpretações para as variáveis *dummy*

Capacidade > Demanda	*Demanda > Capacidade*
Ação: busca de novos centros consumidores	***Ação***: criação de nova fábrica
Interpretação: capacidade ociosa das fábricas	***Interpretação***: demanda não atendida

Mostraremos agora a resolução de um problema de transporte através das duas formas apresentadas no item anterior, utilizando o Solver do Excel.

Caso LCL Bicicletas Ltda.

A LCL Bicicletas Ltda. é uma empresa fabricante de bicicletas que possui três fábricas localizadas no Rio, em São Paulo e em Belo Horizonte. A produção da empresa deve ser entregue em Recife, Salvador e Manaus. Considerando os custos de transporte unitários, a capacidade de produção das fábricas e a demanda dos centros consumidores ilustrados na Tabela 5.2, determine quanto deve ser produzido e entregue por fábrica em cada centro consumidor, de forma a minimizar os custos de transporte.

Tabela 5.2 Dados do Caso LCL Bicicletas

Fábrica/C. consumidor	***Recife (1)***	***Salvador (2)***	***Manaus (3)***	***Capacidade***
Rio (1)	25	20	30	2000
São Paulo (2)	30	25	25	3000
B. Horizonte (3)	20	15	23	1500
Demanda	2000	2000	1000	

Solução Utilizando Variáveis *Dummy* - Alternativa A

O primeiro passo para a resolução de um problema de otimização é a determinação das variáveis de decisão. Nos problemas de transporte, estas variáveis são as quantidades que devem ser enviadas de cada fábrica para cada centro consumidor (destino), mais as variáveis *dummy*, caso estejamos resolvendo o problema através do primeiro método apresentado. No nosso problema, o total ofertado (6.500 unidades) é superior ao total demandado (5.000 unidades), de forma que um centro consumidor *dummy* deve ser criado com uma demanda de 1.500 unidades (6.500-5.000). Sendo assim, as variáveis do problema são:

- x_{11} – número de bicicletas remetidas do Rio para Recife
- x_{12} – número de bicicletas remetidas do Rio para Salvador
- x_{13} – número de bicicletas remetidas do Rio para Manaus
- x_{14} – número de bicicletas remetidas do Rio para *dummy*
- x_{21} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Recife
- x_{22} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Salvador
- x_{23} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Manaus
- x_{24} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para *dummy*
- x_{31} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Recife
- x_{32} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Salvador
- x_{33} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Manaus
- x_{34} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para *dummy*

A função-objetivo deste problema será a minimização do custo total de transporte, o que matematicamente pode ser representado por:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

ou na forma estendida:

$$Min\ Z = 25X_{11} + 20X_{12} + 30X_{13} + 30X_{21} + 25X_{22} + 25X_{23} + 20X_{31} + 15X_{32} + 23X_{33}$$

Vale ressaltar que as variáveis relativas ao centro consumidor *dummy* não aparecem na função-objetivo, já que o custo unitário de transporte de qualquer fábrica até o mesmo é igual a zero. Matematicamente isto resulta em um custo total de transporte igual a zero para este centro consumidor, de acordo com a realidade do problema, uma vez que nenhuma fábrica remeteria mercadorias para um centro consumidor inexistente.

Restrições de Oferta

Com a inserção da variável *dummy*, todas as restrições são de igualdade. A capacidade de cada fábrica que não for utilizada será virtualmente enviada para o centro consumidor *dummy*. Portanto, as restrições de oferta são:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = f_i \ (i = 1, 2,..., m) \text{ restrições das fábricas}$$

ou seja:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 3000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1500$$

Restrições de Demanda

Seguindo uma lógica similar à aplicada nas restrições de oferta, igualaremos a demanda de cada centro consumidor, inclusive o centro consumidor *dummy*, ao total remetido por fábrica para aquele destino. As restrições de demanda, portanto, serão:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \ (j = 1,2,...n+1) \text{ restrições dos destinos}$$

ou seja:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500$$

Restrições de Não-negatividade

Já que não faz sentido transportar quantidades negativas, temos que incluir uma restrição para que todas as quantidades transportadas sejam maiores ou iguais a zero:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ para } i = 1,2 \text{ e } 3 \text{ e } j = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Resolvendo o Problema com Variáveis *Dummy* no Excel

A Figura 5.3 apresenta a modelagem do problema na planilha Excel, onde consideramos inicialmente que nenhuma quantidade está sendo enviada das fábricas para os centros consumidores. Estas quantidades, que são as variáveis de decisão, estão representadas nas células BIO a D12. A célula B16 representa o custo total de transporte, o qual é a função-objetivo a ser minimizada. Os LHS das restrições são representados pelas células FIO a F12 eB13 aE13, enquanto os RHS são representados pelas células G10 a G12 e B14 a E14. A Tabela 5.3 evidencia as células e fórmulas utilizadas na Figura 5.3. A Figura 5.4 apresenta os parâmetros do Solver e suas opções.

Vale ressaltar que as restrições de não-negatividades não foram colocadas no quadro de restrições e sim através das opções do Solver *(Presumir não Negativos).* O resultado da otimização é mostrado na Figura 5.5.

Tabela 5.3 **Fórmula referentes ao LHS das Restrições do Problema de Transporte**

Função-objetivo	Célula	Fórmula
$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$	B16	=SOMARPRODUTO (B4:D6;B10:D12)
Restrição	Célula	LHS das Restrições
$x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{1D} = 2000$	F10	=SOMA(B10:E10)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{2D} = 3000$	F11	=SOMA(B11:E11)
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{3D} = 1500$	F12	=SOMA(B12:E12)
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$	B13	=SOMA(B10:B12)
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$	C13	=SOMA(C10:C12)
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$	D13	=SOMA(D10:D12)
$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} = 1500$	E13	=SOMA(E10:E12)

	A	B	C	D	E	F	G
1	LCL Bicicletas		Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
3	Fábrica						
4	Rio de Janeiro	25	20	30	0		
5	São Paulo	30	25	25	0		
6	Belo Horizonte	20	15	23	0		
7							
8	Centro Consumidor		Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
10	Rio de Janeiro	0	0	0	0	0	2000
11	São Paulo	0	0	0	0	0	3000
12	Belo Horizonte	0	0	0	0	0	1500
13	Entregue	0	0	0	0		
14	Demanda	2000	2000	1000	1500		
15							
16	Custo Total	0					

FIGURA 5.3 Modelagem do problema de transporte no Excel.

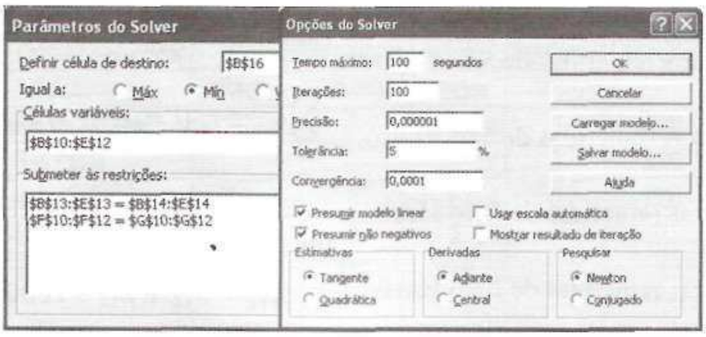


FIGURA 5.4 Parâmetros e opções da ferramenta do Solver do problema de transporte.

	A	B	C	D	E	F	G
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte					
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
3	Fábrica						
4	Rio de Janeiro	25	20	30	0		
5	São Paulo	30	25	25	0		
6	Belo Horizonte	20	15	23	0		
7							
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas				Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
10	Rio de Janeiro	0	2000	0	0	2000	2000
11	São Paulo	500	0	1000	1500	3000	3000
12	Belo Horizonte	1500	0	0	0	1500	1500
13	Entregue	2000	2000	1000	1500		
14	Demanda	2000	2000	1000	1500		
15							
16	Custo Total	110000					

FIGURA 5.5 Resultados da otimização do problema de transporte.

Solução sem Utilizar Variáveis *Dummy* - Alternativa B

Conforme vimos anteriormente, a segunda maneira de resolvermos um problema de transporte em que a oferta é maior do que a demanda é modelarmos de forma tal que as demandas sejam plenamente atendidas, porém as fábricas possam operar abaixo de suas capacidades instaladas. Nesta modelagem alternativa não é necessária a inclusão de variáveis *dummy*, de maneira que as variáveis de decisão do problema serão:

- x_{11} – número de bicicletas remetidas do Rio para Recife
- x_{12} – número de bicicletas remetidas do Rio para Salvador
- x_{13} – número de bicicletas remetidas do Rio para Manaus
- x_{21} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Recife
- x_{22} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Salvador
- x_{23} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Manaus
- x_{31} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Recife
- x_{32} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Salvador
- x_{33} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Manaus

A função-objetivo nesta segunda forma de resolução é igual à primeira, pois naquela as variáveis *dummy* apresentavam custo de transporte igual a zero e, portanto, não apareciam na função-objetivo. Sendo assim, a função-objetivo é:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

ou

$$\text{Min } Z = 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 30x_{21}$$

$$+ 25x_{22} + 25x_{23} + 20x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33}$$

Restrições de Oferta

Como a oferta é maior do que a demanda, as restrições de oferta serão todas do tipo menor ou igual. Estas restrições representam a condição de que as fábricas podem produzir quantidades menores ou iguais às suas capacidades instaladas. São elas:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq f_i \ (i = 1, 2, 3) \text{ restrições da fábricas}$$

ou

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 3000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1500$$

Restrições de Demanda

Como as fábricas possuem capacidade excedente, toda demanda pode ser atendida. Sendo assim, as restrições de demanda serão todas igualdades:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j \; (j = 1, 2, 3) \text{ restrições de destino}$$

ou

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$$

Restrições de Não-negatividade

De forma análoga à resolução pelo método anterior, temos que incluir uma restrição para que todas as quantidades transportadas sejam maiores ou iguais a zero:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

Resolvendo o Problema pelo Método Alternativo no Excel

A modelagem do problema está mostrada na Figura 5.6. A minimização do custo total de transporte, que é a nossa função-objetivo, está representada pela célula BI6 . As células d e B 1 0 a D 1 2 estão representando as variáveis de decisão (quantidades enviadas de cada fábrica para cada centro consumidor), enquanto as células de B4 a D6 representam os custos unitários de transporte destas quantidades para cada fábrica e centro consumidor. As células d e E 1 0 a E 1 2 e d e B 1 3 a D13 representam o LHS das restrições, ao passo que as células de F1O a F12 e de B14 a D14 apresentam o RHS das mesmas. A Tabela 5.4 mostra as fórmulas inseridas na célula da função-objetivo e nas células que representam o LHS das restrições. Os parâmetros do Solver e as Opções selecionadas são mostrados na Figura 5.7, enquanto o resultado da otimização aparece na Figura 5.8.

Tabela 5.4 **Fórmulas Referentes ao LHS** das Restrições **do Problema de Transporte**

Função-objetivo	Célula	Fórmula
$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$	B16	=SOMARPRODUTO (B4:D6;B10:D12)
Restrições	Célula	LHS das Restrições
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2000$	E10	=SOMA(B10:D10)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 3000$	E11	=SOMA(B11:D11)
$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1500$	E12	=SOMA(B12:D12)
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000$	B13	=SOMA(B10:B12)
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000$	C13	=SOMA(C10:C12)
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000$	D13	=SOMA(D10:D12)

Vale ressaltar que os resultados apresentados pelas duas modelagens do Problema de Transporte che-

	A	B	C	D	E	F
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus		
3	Fábrica					
4	Rio de Janeiro	25	20	30		
5	São Paulo	30	25	25		
6	Belo Horizonte	20	15	23		
7						
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus		
10	Rio de Janeiro	0	0	0	0	2000
11	São Paulo	0	0	0	0	3000
12	Belo Horizonte	0	0	0	0	1500
13	Entregue	0	0	0		
14	Demanda	2000	2000	1000		
15						
16	Custo Total	0				

FIGURA 5.6 Modelagem alternativa do problema de transporte.

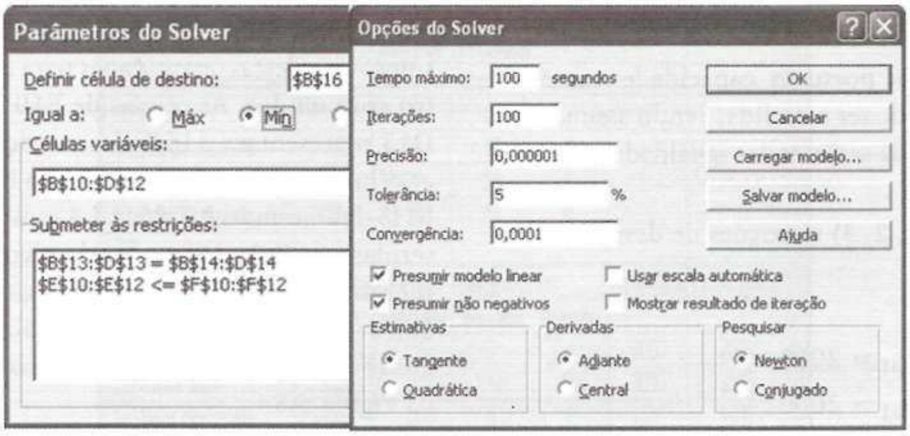


FIGURA 5.7 Parâmetros e opções da ferramenta do solver do problema de transporte.

garam ao mesmo valor ótimo da função-objetivo, porém com soluções ótimas distintas (compare as Figuras *5.5* e 5.8).

Isto ocorreu porque o problema possui soluções ótimas múltiplas. O Solver do Excel, em virtude das modelagens diferenciadas (com e sem variável *dummy),* chegou a soluções ótimas diferentes nas otimizações (isto nem sempre ocorre). A primeira solução ótima (Figura 5.4) indicou que 2.000 unidades deviam ser enviadas da fábrica do Rio de Janeiro ao centro consumidor de Salvador, 500 unidades de São Paulo a Recife, 1.000 de São Paulo a Manaus e 1.500 de Belo Horizonte a Recife, resultando num custo total de transporte de R$110.000,00. Partindo da segunda modelagem, a solução ótima encontrada (Figura 5.8) indicou que 1.500 unidades deviam ser enviadas da fábrica do Rio de Janeiro ao centro consumidor de Recife, 500 unidades do Rio de Janeiro a Salvador, 500 unidades de São Paulo a Recife, 1.000 de São Paulo a Manaus e 1.500 de Belo Horizonte a Salvador, totalizando um custo de transporte também de R$110.000,00.

Para provar que as duas soluções são soluções ótimas do problema e que não há distinção prática entre os resultados das duas modelagens apresentadas, iremos inserir a solução ótima encontrada na primeira modelagem na planilha com a segunda modelagem e observar o que acontece com o valor da função-objetivo (Figura 5.9).

	A	B	C	D	E	F
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus		
3	Fábrica					
4	Rio de Janeiro	25	20	30		
5	São Paulo	30	25	25		
6	Belo Horizonte	20	15	23		
7						
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus		
10	Rio de Janeiro	1500	500	0	2000	2000
11	São Paulo	500	0	1000	1500	3000
12	Belo Horizonte	0	1500	0	1500	1500
13	Entregue	2000	2000	1000		
14	Demanda	2000	2000	1000		
15						
16	Custo Total	110000				

FIGURA 5.8 Resultados da otimização do problema de transporte.

	A	B	C	D	E	F
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus		
3	Fábrica					
4	Rio de Janeiro	25	20	30		
5	São Paulo	30	25	25		
6	Belo Horizonte	20	15	23		
7						
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus		
10	Rio de Janeiro	0	2000	0	2000	2000
11	São Paulo	500	0	1000	1500	3000
12	Belo Horizonte	1500	0	0	1500	1500
13	Entregue	2000	2000	1000		
14	Demanda	2000	2000	1000		
15						
16	Custo Total	110000				

FIGURA 5.9 Solução ótima alternativa para a modelagem sem variáveis *dummy*.

Conforme podemos observar na Figura 53$_9$ ao inserirmos os mesmos valores encontrados na primeira otimização na segunda planilha, o valor da função-objetivo não se alterou, permanecendo um custo cotai de transporte igual a R$ 110.000,00. Esta observação comprova que as duas soluções encontradas são soluções ótimas alternativas para este problema de transporte.

E importante deixar claro que as diferenças de resultado entre as primeiras otimizações ocorreram devido ao fato de estarmos lidando com um problema especial que possui múltiplas soluções ótimas, o qual já foi estudado nas seções anteriores. Se o problema que estivermos tentando resolver apresentar somente uma solução ótima possível, esta única solução será certamente encontrada a partir de ambas as modelagens, isto é, com ou sem a inclusão de variáveis do tipo *dummy*.

Problema de Transporte como uma Rede

O problema em questão pode ser visualizado como uma rede que une as fábricas às revendas. Utilizando as terminologias mostradas na seção 6.1, a Figura 5.10 representa graficamente o caso.Em uma primeira e rápida análise, concluímos facilmente que as variáveis de decisão do modelo serão as quantidades de bicicle-

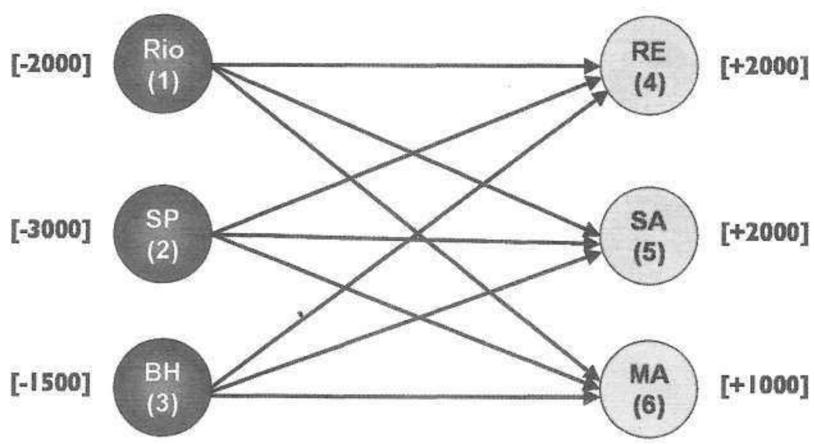


FIGURA 5.10 Diagrama de Rede do Caso LCL Bicicletas sem *dummy*.

tas enviadas de cada fábrica para cada distribuidor e a função-objetivo será a minimização do custo total destes envios. No entanto, o problema apresenta dois detalhes especiais: o número de bicicletas demandadas é menor que a capacidade de produção da empresa.

Existem duas maneiras básicas de resolver este tipo de problema. A primeira consiste em inserir uma unidade *dummy* que iguale a oferta e a demanda totais e que esteja ligada a todas as unidades da demanda ou da oferta. Se a oferta for maior do que a demanda, a variável *dummy* será colocada como uma unidade de demanda ligada às unidades de oferta. De forma inversa, se a demanda for maior do que a oferta, a variável *dummy* representará um novo ponto de oferta para atender à demanda excedente. Em ambos os casos, todas as restrições serão consideradas como igualdades. No nosso caso, como a oferta é maior que a demanda devemos introduzir uma unidade *dummy* com demanda de 1.500 (diferença entre o total de oferta, 6.500 bicicletas, e o total de demanda, 5.000 bicicletas). A Figura 5.11 representaria esta rede.

A segunda forma de resolver problemas de distribuição é seguir a Regra do Fluxo Balanceado para cada nó (unidade) da rede, seis no caso sem *dummy* e sete no caso com *dummy*. Por esta regra não há necessidade de inserção de variáveis do tipo *dummy*, sendo o desequilíbrio entre a oferta total e a demanda total tratado através de restrições de maior ou igual ou de menor ou igual. Vale ressaltar que mesmo não sendo necessária a inclusão de variáveis *dummy* elas podem facilitar a interpretação do problema (capacidade ociosa ou demanda não atendida). A Tabela 5.5 resume a forma de aplicação da Regra do Fluxo Balanceado.

Tabela 5.5 **Regra do Fluxo Balanceado (Ragsdale, 2001)**

Hipótese do Problema	Tipo de Restrição
Oferta > Demanda	Entradas – Saídas ≥ Oferta ou Demanda do Nó
Oferta < Demanda	Entradas – Saídas ≤ Oferta ou Demanda do Nó
Oferta = Demanda	Entradas – Saídas = Oferta ou Demanda do Nó

Resolveremos o problema utilizando a Regra do Fluxo Balanceado com a introdução da variável *dummy*. A Figura 5.11 evidencia o valor do descompasso entre a capacidade de produção da empresa e o número de bicicletas requeridos pelos centros consumidores: há uma oferta de 6.500 e uma demanda de 5.000 bicicletas. Vale ressaltar que com a introdução do nó *dummy* (7) igualamos a oferta total à demanda total, portanto, deveremos utilizar restrições de igualdade para todos os nós.

De acordo com este primeiro método de modelagem, o problema que será inserido na planilha Excel tem as seguintes variáveis de decisão:

- x_{14} – número de bicicletas remetidas do Rio para Recife
- x_{15} – número de bicicletas remetidas do Rio para Salvador

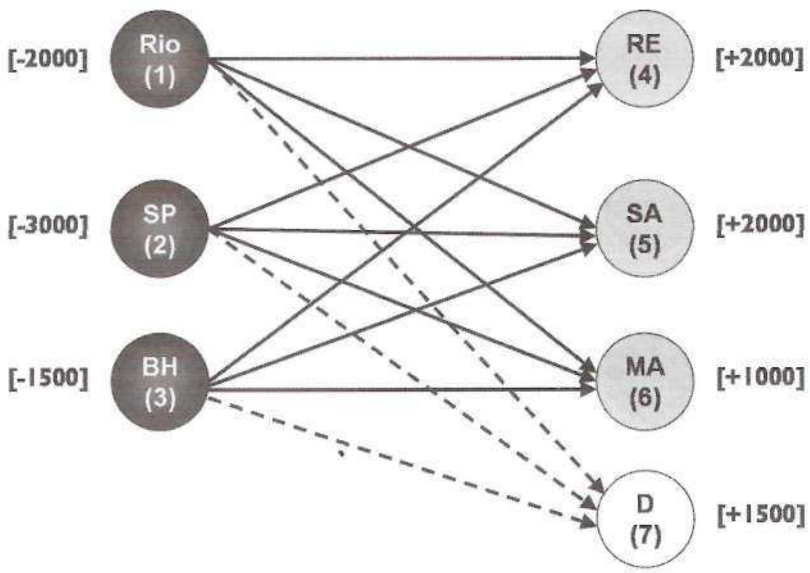


FIGURA 5.11 Diagrama de rede do Caso LCL Bicicletas com *dummy*.

- x_{16} – número de bicicletas remetidas do Rio para Manaus
- x_{17} – número de bicicletas remetidas do Rio para *dummy*
- x_{24} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Recife
- x_{25} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para de Salvador
- x_{26} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para Manaus
- x_{27} – número de bicicletas remetidas de São Paulo para *dummy*
- x_{34} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Recife
- x_{35} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Salvador
- x_{36} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para Manaus
- x_{37} – número de bicicletas remetidas de Belo Horizonte para *dummy*

A função-objetivo deste problema será a minimização do custo total de transporte, o que matematicamente pode ser representado por:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{6} c_{ij}x_{ij}$$

ou na forma estendida:

$$\text{Min } Z = 25x_{14} + 20x_{15} + 30x_{16} + 30x_{24} + 25x_{25} + 25x_{26} + 20x_{34} + 15x_{35} + 23x_{36}$$

Vale ressaltar que as variáveis relativas ao centro consumidor *dummy* não aparecem na função-objetivo, já que o custo unitário de transporte de qualquer fábrica até o mesmo é igual a zero. Matematicamente isto resulta em um custo total de transporte igual a zero para este centro consumidor, de acordo com a realidade do problema, uma vez que nenhuma fábrica remeteria mercadorias para um centro consumidor inexistente.

Montaremos as restrições seguindo a seguinte lógica: o número de bicicletas que chegam ao nó menos o montante que sai deve ser igual à oferta (negativo) ou a demanda (positivo) do nó.

Restrições de Fluxo:

$$
\begin{aligned}
-x_{14} - x_{15} - x_{16} &= -2000 && \text{nó 1}\\
-x_{24} - x_{25} - x_{26} &= -3000 && \text{nó 2}\\
-x_{34} - x_{35} - x_{36} &= -1500 && \text{nó 3}\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= +2000 && \text{nó 4}\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} &= +2000 && \text{nó 5}\\
x_{16} + x_{26} + x_{36} &= +1000 && \text{nó 6}\\
x_{17} + x_{27} + x_{37} &= +1500 && \text{nó 7}
\end{aligned}
$$

Vale ressaltar que as restrições acima são idênticas às da forma tradicional (as três primeiras devem ser multiplicas por - 1 , o que não altera a identidade).

A Figura 5.12 mostra uma das maneiras de o problema ser modelado no Excel. Para inserir a condição de que o fluxo líquido de cada nó (quantidade de veí-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Caso LCL Bicicletas como Problema de Rede										
2	De		Para							Fluxo	Oferta
3	Nó	Cidade	Nó	Cidade	Custo	Unidades		Nó	Cidade	Líquido	Demanda
4	1	Rio de Janeiro	4	Recife	25	0		1	Rio de Janeiro	0	-2000
5	1	Rio de Janeiro	5	Salvador	20	0		2	São Paulo	0	-3000
6	1	Rio de Janeiro	6	Manaus	30	0		3	Belo Horizonte	0	-1500
7	1	Rio de Janeiro	7	Dummy	0	0		4	Recife	0	2000
8	2	São Paulo	4	Recife	30	0		5	Salvador	0	2000
9	2	São Paulo	5	Salvador	25	0		6	Manaus	0	1000
10	2	São Paulo	6	Manaus	25	0		7	Dummy	0	1500
11	2	São Paulo	7	Dummy	0	0			Oferta + Demanda		0
12	3	Belo Horizonte	4	Recife	20	0					
13	3	Belo Horizonte	5	Salvador	15	0					
14	3	Belo Horizonte	6	Manaus	23	0					
15	3	Belo Horizonte	7	Dummy	0	0			Custo Total	0	

Com dummy / Sem dummy / Rede

FIGURA 5.12 Modelagem do Caso LCL bicicletas como Problema de Rede culos que chega menos a quantidade que sai) deve ser igual à respectiva demanda (positivo) ou oferta (negativo) utilizaremos a função *SomaSe do Excel* (ou, *Sumlf* em inglês). Esta função serve para somar as células especificadas por um determinado critério, que pode ser um número, uma expressão (>100, por exemplo) ou um texto. No nosso problema, a função SomaSe irá nos ajudar a calcular o fluxo líquido de cada nó, a partir dos seus critérios de identificação.

A célula J16 representa a função-objetivo e as células de F4 à F15 representam as variáveis de decisão do modelo. As células de J4 à J10 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de K4 à K10 os RHS das mesmas. A Tabela 5.6 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo.

Uma vez feita a modelagem, devemos estabelecer os parâmetros e as opções do Solver (Figura 5.13).

A Figura 5.14 apresenta a solução do problema. Nela verificamos a forma mais econômica da LCL Bicicletas atender a seus centros consumidores. Vale notar que a solução corresponde a uma das soluções ótimas encontradas.

Conforme já sabíamos de antemão, nem todas as fábricas estão produzindo em sua capacidade plena, pois a oferta total é maior do que a demanda dos centros consumidores. Apenas São Paulo apresenta capacidade ociosa na solução ótima do problema.

***Tabela 5.6* Fórmulas Utilizadas** nas **Restrições** do Caso **LCL Bicicletas na forma de Rede**

Função-objetivo	Célula	Fórmula Referente à Função-objetivo
Min $25x_{14} + 20x_{15} + 30x_{16} + 30x_{24} + 25x_{25} + 25x_{26} + 20x_{34} + 15x_{35} + 23x_{36}$	J15	=SOMARPRODUTO (E4:E15;F4:F15)
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referente ao LHS das Restrições*
$-x_{14} - x_{15} - x_{16} = -2000$	J4	=SOMASE($C$4:$C$15;H4; $F$4:$F$15)-SOMASE ($A$4:$A$15;H4;$F$4:$F$15)
$-x_{24} - x_{25} - x_{26} = -3000$	J5	=SOMASE($C$4:$C$15;H5; $F$4:$F$15)-SOMASE($A$4: $A$15;H5;$F$4:$F$15)
$-x_{34} - x_{35} - x_{36} = -1500$	J6	=SOMASE($C$4:$C$15;H6; $F$4:$F$15)-SOMASE($A$4: $A$15;H6;$F$4:$F$15)
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = +2000$	J7	=SOMASE($C$4:$C$15;H7; $F$4:$F$15)-SOMASE ($A$4:$A$15;H7;$F$4:$F$15)
$x_{15} + x_{25} + x_{35} = +2000$	J8	=SOMASE($C$4:$C$15;H8; $F$4:$F$15)-SOMASE($A$4: $A$15;H8;$F$4:$F$15)
$x_{16} + x_{26} + x_{36} = +1000$	J9	=SOMASE($C$4:$C$15;H9; $F$4:$F$15)-SOMASE($A$4: $A$15;H9;$F$4:$F$15)
$x_{27} + x_{37} + x_{78} = +1500$	J10	=SOMASE($C$4:$C$15;H10; $F$4:$F$15)-SOMASE($A$4: $A$15;H10;$F$4:$F$15)

5.3 PROBLEMA DE ESCALA DE PRODUÇÃO

A forma de modelagem dos problemas de transporte não se aplica somente a transportes; também pode ser utilizada em problemas de escala de produção e designação. O importante aqui é a forma de se visualizar o problema. O Caso de Escala de Produção a seguir retrata bem como um problema diferente de transporte pode ser encarado desta maneira.

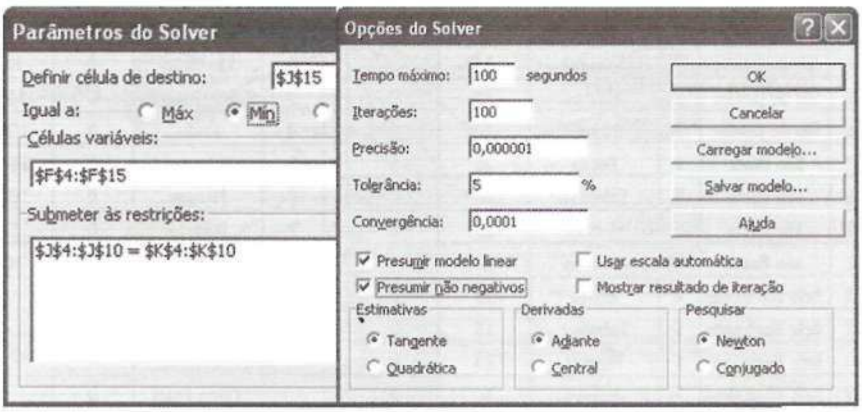


FIGURA 5.13 Condições do Solver para o caso LCL Bicicletas na forma de rede.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
3	Nó	Cidade	Nó	Cidade	Custo	Unidades		Nó	Cidade	Líquido	Demanda
4	1	Rio de Janeiro	4	Recife	25	0		1	Rio de Janeiro	-2000	-2000
5	1	Rio de Janeiro	5	Salvador	20	2000		2	São Paulo	-3000	-3000
6	1	Rio de Janeiro	6	Manaus	30	0		3	Belo Horizonte	-1500	-1500
7	1	Rio de Janeiro	7	Dummy	0	0		4	Recife	2000	2000
8	2	São Paulo	4	Recife	30	500		5	Salvador	2000	2000
9	2	São Paulo	5	Salvador	25	0		6	Manaus	1000	1000
10	2	São Paulo	6	Manaus	25	1000		7	*Dummy*	1500	1500
11	2	São Paulo	7	Dummy	0	1500			Oferta + Demanda		0
12	3	Belo Horizonte	4	Recife	20	1500					
13	3	Belo Horizonte	5	Salvador	15	0					
14	3	Belo Horizonte	6	Manaus	23	0					
15	3	Belo Horizonte	7	Dummy	0	0			Custo Total	110000	

Com dummy / Sem dummy / Rede

FIGURA 5.14 Solução ótima para o caso LCL bicicletas na forma de rede.

Caso LCL Fórmula 1 Ltda.

A LCL Fórmula 1 Ltda. fornece motores para um grande número de equipes de Fórmula 1. A companhia detém uma série de contratos de entregas futuras programadas para o próximo ano. As entregas deverão ocorrer trimestralmente, de acordo com as necessidades das equipes. A Tabela 5.7 resume, por trimestre, as entregas programadas, a capacidade máxima de produção e o custo unitário de produção. As entregas são feitas no final do trimestre e os motores podem ser armazenados por quantos trimestres forem necessários ao custo de 0,015 milhão de reais por trimestre. A diretoria deseja minimizar os custos totais de produção (produção + armazenagem). Quantos e quando os motores pedidos devem ser produzidos e entregues?

Tabela 5.7 Dados Relevantes do Caso de Escala de Produção

Trimestre	Pedidos Contratados	Capacidade de Produção	Custo Unitário de Produção (em milhões R$)
1º	*10*	*25*	*1,08*
2º	*15*	*35*	*1,11*
3º	*25*	*30*	*1,10*
4º	*20*	*10*	*1,13*

Para resolver este problema como um problema de transporte, precisamos primeiramente determinar quais serão as fontes, os destinos e as variáveis de decisão. São elas: ,

Fonte i = Nº de motores a serem produzidos no trimestre i (i = 1,2,3 e 4)

Destino j = Nº de motores entregues às equipes no trimestre j (j= 1,2,3 e 4)

As variáveis de decisão serão do tipo x_{ij} e representarão o número de motores que serão produzidos no trimestre *i* e entregues no trimestre j:

x_{11} – número de motores produzidos no trimestre 1 e entregues no trimestre 1

x_{12} – número de motores produzidos no trimestre 1 e entregues no trimestre 2

x_{13} – número de motores produzidos no trimestre 1 e entregues no trimestre 3

x_{14} – número de motores produzidos no trimestre 1 e entregues no trimestre 4

x_{22} – número de motores produzidos no trimestre 2 e entregues no trimestre 2

x_{23} – número de motores produzidos no trimestre 2 e entregues no trimestre 3

x_{24} – número de motores produzidos no trimestre 2 e entregues no trimestre 4

x_{33} – número de motores produzidos no trimestre 3 e entregues no trimestre 3

x_{34} – número de motores produzidos no trimestre 3 e entregues no trimestre 4

x_{44} – número de motores produzidos no trimestre 4 e entregues no trimestre 4

Estabelecidas estas premissas, podemos montar os Custos Unitários de produção/entrega mostrados na Tabela 5.8. Observem que o custo unitário associado ao motor que é entregue no mesmo trimestre em que é produzido é igual ao custo unitário de produção daquele trimestre, enquanto os motores entregues em trimestres posteriores a sua fabricação têm seu custo unitário acrescido do custo de armazenagem. Por exemplo: um dado motor que tenha sido produzido no 2º trimestre e entregue no 4º terá um custo unitário total igual a 1,140, que corresponde ao custo de produção unitário do 2º trimestre (1,11), acrescido do custo de armazenagem do 2º trimestre para o 3º e do 3º trimestre ao 4º (0,030).

***Tabela 5.8* Custos Unitários Totais dos Motores Produzidos**

Fontes		Destino					
		1	2	3	4	5 (D)	Oferta
	1	1,080	1,095	1,110	1,125	0	25
	2	–	1,110	1,125	1,140	0	35
	3	–	–	1,100	1,115	0	30
	4	–	–	–	1,130	0	10
Demanda		10	15	25	20	30	

Na Tabela 5.8 visualizamos também as informações de oferta (capacidade de produção por trimestre) e de demanda (pedidos contratados por trimestre). Tendo em vista que a capacidade total de produção da companhia nos quatro trimestres supera a quantidade de motores contratados, inserimos na Tabela 5.8 um trimestre *dummy* (destino *n*- 5), o qual terá uma demanda igual à diferença entre as ofertas e as demandas reais. As variáveis *dummy* que serão incluídas na modelagem deste problema têm as seguintes interpretações:

x_{15} – capacidade ociosa do trimestre 1
x_{25} – capacidade ociosa do trimestre 2
x_{35} – capacidade ociosa do trimestre 3
x_{45} – capacidade ociosa do trimestre 4

A função-objetivo deste problema será dada por:

$$\text{Min}\,Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$$

Vale ressaltar que alguns dos custos unitários (c_{ij}) são zero. Como este problema foi modelado com o auxílio de variáveis do tipo *dummy*, todas as restrições, excetuando-se a condição de não-negatividade, serão igualdades. São elas:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=25$$
$$x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=35$$
$$x_{33}+x_{34}+x_{35}=30$$
$$x_{44}+x_{45}=10$$
$$x_{11}=10$$
$$x_{12}+x_{22}=15$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=25$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=30$$
$$x_{ij}\geq 0$$

Nosso próximo passo é inserir o modelo na planilha Excel (Figura 5.15). A Tabela 5.9 apresenta detalhadamente as fómulas da função-objetivo e dos LHS das restrições, utilizadas na modelagem do problema. A Figura 5.16 mostra os parâmetros eopçõesdo Solver e os resultados do problema se encontram na Figura 5.17.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		LCL Fórmula 1 Ltda.								
2				Destino						
3		Custos		1	2	3	4	5(D)		
4			1	1,08	1,095	1,11	1,125	0		
5		Fonte	2		1,11	1,125	1,14	0		
6			3			1,1	1,115	0		
7			4				1,13	0		
8					Destino					
9		Quantidades		1	2	3	4	5(D)	Produzido	Oferta
10			1						0	25
11		Fonte	2						0	35
12			3						0	30
13			4						0	10
14		Entregue		0	0	0	0	0		
15		Demanda		10	15	25	20	30		
16		Custo Total		0						

FIGURA 5.15 Modelagem do Caso LCL Fórmula 1.

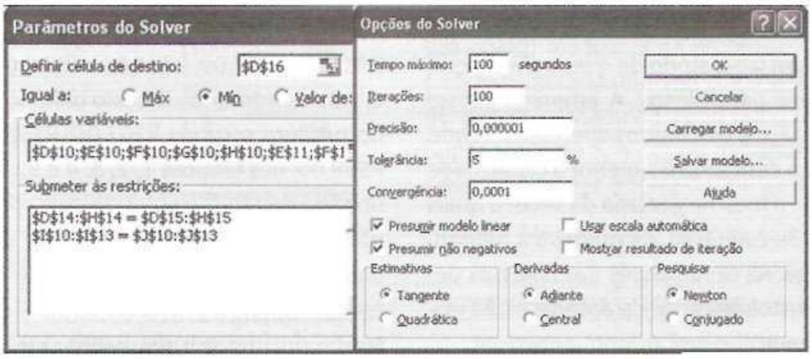


FIGURA 5.16 Parâmetros e opções da ferramenta do Solver do Caso de Escala de Produção.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		LCL Fórmula 1 Ltda.								
2						Destino				
3		Custos		1	2	3	4	5(D)		
4			1	1,08	1,095	1,11	1,125	0		
5		Fonte	2		1,11	1,125	1,14	0		
6			3			1,1	1,115	0		
7			4				1,13	0		
8						Destino				
9		Quantidades		1	2	3	4	5(D)	Produzido	Oferta
10			1	10	15	0	0	0	25	25
11		Fonte	2		0	0	5	30	35	35
12			3			25	5	0	30	30
13			4				10	0	10	10
14		Entregue		10	15	25	20	30		
15		Demanda		10	15	25	20	30		
16		Custo Total		77,3						

FIGURA 5.17 Resultados da otimização do Caso de Escala de Produção,

Tabela 5.9 **Fórmulas Referentes à Função-objetivo e ao LHS das Restrições do Problema**

Função-Objetivo	Célula	Fórmula
$Min\ Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$	D19	=SOMARPRODUTO(D4:H7;D12:H15)
Restrições		LHS das Restrições
$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=25$	I12	=SOMA(D12:H12)
$x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=35$	I13	=SOMA(E13:H13)
$x_{33}+x_{34}+x_{35}=30$	I14	=SOMA(F14:H14)
$x_{44}+x_{45}=10$	I15	=SOMA(G15:H15)
$x_{11}=10$	D16	=D12
$x_{12}+x_{22}=15$	E16	=SOMA(E12:E13)
$x_{13}+x_{23}+x_{33}=25$	F16	=SOMA(F12:F14)
$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20$	G16	=SOMA(G12:G15)
$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=30$	H16	=SOMA(H12:H15)

EXERCÍCIOS 5.1

1. A Miss Daisy Ltda. é um laboratório de manipulação que presta serviços de entrega para idosos. A empresa possui duas filiais e fornece o serviço a seis bairros diferentes. Tendo em vista que atualmente a demanda é superior à capacidade de entrega da companhia, a mesma gostaria de saber a quais clientes atender, a partir de cada filial, de maneira a minimizar o seu custo de entrega. As capacidades das filiais, as demandas do bairros e os custos unitários de entrega estão evidenciados na tabela a seguir:

	Ipanema	Copacabana	Centro	Barra	Leblon	Tijuca	Capacidade
Filial Centro	7,00	9,00	1,00	12,00	7,00	4,00	**2500**
Filial Barra	4,00	5,00	12,00	1,00	3,00	8,00	**2000**
Demanda	**1400**	**1560**	**400**	**150**	**870**	**620**	

Modele este problema como um problema de transporte na forma tradicional e na forma de rede e resolva-o através do Solver.

2. A Maria-Benz produz automóveis de passeio para o mercado local e exportação para diversos países. O primeiro estágio do processo de produção é fazer a fabricação dos monoblocos, que, em seguida, são disponibilizados para a linha de produção para que as outras peças sejam montadas. A Maria-Benz deseja programar a produção dos monoblocos para os próximos três meses. As demandas estimadas, a capacidade de produção e o custo unitário de produção para cada um dos meses em questão estão ilustrados na tabela a seguir. Devido à existência de variações na capacidade de produção e no custo de fabricação entre os meses, a empresa pode produzir alguns monoblocos um mês ou mais antes do que estão programados. A desvantagem é que tais monoblocos têm que ser armazenados até o mês em que serão consumidos a um custo de armazenamento unitário de R$200,00/mês. Por isso, o gerente de produção quer saber quantos monoblocos deve produzir em cada mês de forma a atender a demanda ao menor custo possível de produção e armazenamento. Modele esta questão como um problema de transporte e resolva-a com a ajuda do Solver.

Mês	Demanda Prevista	Produção Máxima	Custo Unitário de Produção
1	1000	2500	3000
2	2000	2500	3000
3	3000	2000	3200

3, Uma grande empresa industrial chegou à conclusão de que deve fabricar três novos produtos. Atualmente existem cinco filiais com capacidade de produção excedente. O custo unitário de fabricação do primeiro produto seria de R$90,00, R$82,00, R$92,00, R$84,00 e R$86,00, nas fábricas 1,2,3,4 e 5, respectivamente. O custo unitário de fabricação do segundo produto seria de R$62,00, R$58,00, R$64,00, R$56,00 e R$58,00, nas fábricas 1,2,3,4 e 5, respectivamente. O custo unitário de fabricação do terceiro produto seria de R$76,00, R$70,00 e R$80,00 nas fábricas 1,2 e 3, respectivamente, sendo que as fábricas 4 e 5 não estão equipadas para produzir este produto. As previsões de vendas indicam que deveriam ser produzidas por dia 5.000, 3.000 e 4.000 unidades dos produtos 1, 2 e 3, respectivamente. As fábricas 1, 2, 3, 4 e 5 têm a capacidade de produzir 2.000, 3.000, 2.000, 3.000 e 5.000 unidades diárias, respectivamente, independentemente do produto ou combinação de produtos envolvidos. A gerência deseja saber como alocar os novos produtos às fábricas de níodo a minimizar o custo total de fabricação. Formule este problema como um problema de transporte, construindo a tabela de custos e requisições apropriada, e resolva-o utilizando o Solver e interprete o resultado.

4. A organização não-governamental Criança Renascer está organizando a festa dos aniversariantes deste mês. Para isto, ela começa a pesquisar o preço de doces e salgados em cinco diferentes bufês do Rio de Janeiro. Como a festa será realizada com o dinheiro de doações, ela deseja ter os menores custos possíveis. Dada a tabela abaixo, que relaciona os custos de cada item por empresa, bem como as quantidades requeridas para a festa (demanda) e as capacidades de produção de cada empresa, determine quantos doces e salgados a organização deve encomendar a cada empresa (resolva com o auxílio do Solver).

	Ouriço (1)	Cajuzinho (2)	Brigadeiro (3)	Bolinha de queijo (4)	Risole (5)	Croquete (6)	Coxinha de galinha (7)	Oferta
Empresa 1	0,080	0,070	0,065	0,080	0,083	0,080	0,083	25.000
Empresa 2	0,075	0,070	0,067	0,060	0,060	0,060	0,060	23.000
Empresa 3	0,045	0,040	0,040	0,027	0,030	0,027	0,030	15000
Empresa 4	0,050	0,045	0,045	0,040	0,040	0,040	0,045	22.000
Empresa 5	0,060	0,055	0,050	0,055	0,055	0,055	0,060	20.000
Demanda	5.000	4.000	7.000	5.000	4.000	3.500	6.000	

5. A PowerCo tem três usinas elétricas para suprir as necessidades de quatro cidades: Feira de Santana, Milagres, Itabuna e Maiquinique, sendo suas potências instaladas, respectivamente, de: 35 milhões kw/hora; 50 milhões kw/hora e 40 milhões kw/hora. A demanda de energia atinge o pico nas cidades no mesmo momento (19:00h) e é o seguinte (em kw/hora): Feira de Santana, 45 milhões; Milagres, 20 milhões; Itabuna, 30 milhões e Maiquinique, 30 milhões. O custo de enviar um milhão de kw/hora de eletricidade de cada usina para cada uma das cidades está disponível na tabela a seguir:

	Feira de Santana	Milagres	Itabuna	Maiquinique
Usina 1	$8	$6	$10	$9
Usina 2	$9	$12	$13	$7
Usina 3	$14	$9	$16	$5

Formule como um problema de transporte e resolva-o utilizando o Solver. Interprete o significado das variáveis e os resultados obtidos.

6. A Pitaf Motores fornece motores para um grande número de equipes de fórmula 2. A companhia detém uma série de contratos de entregas futuras programadas para o próximo ano. As entregas deverão ocorrer trimestralmente de acordo com as necessidades das equipes. A tabela abaixo resume as entregas programadas, bem como a capacidade máxima de produção, o custo de produção por trimestre (variável durante o ano devido a férias, feriados etc.) e o custo de armazenamento que se fizer necessário (as equipes não possuem armazéns para receber os motores com antecedência). A Pitaf deseja ter ao final do ano um estoque de dois motores.

Trimestre	Pedidos Contratados	Capacidade Produção	Custo Unitário*	Custo Arm. por Trimestre*
1	10	25	1,08	
2	30	15	1,11	0,015
3	20	40	1,10	0,015
4	20	10	1,13	0,015

* Custos em milhões de reais.

Modele este problema como um problema de transporte na forma tradicional e como um problema de rede e ache o número de motores que devem ser fabricados em cada trimestre de maneira a atender aos pedidos contratados (resolva com a ajuda do Solver).

7, Uma vinícola do sul de Santa Catarina possui três fábricas e três armazéns nos quais os vinhos são envelhecidos. **Como** as fábricas e os armazéns estão localizados em diferentes locais do estado, a empresa deseja saber quantos tonéis de vinho deve enviar de cada fábrica para cada armazém **de forma** a minimizar o seu custo de transporte. As capacidades das fábricas e dos armazéns (em número de tonéis), bem como os custos de transporte por tonel estão explicitados na tabela a seguir. Resolva este problema como um problema de transporte na forma tradicional com o auxílio do Solver.

		Armazéns			Capacidade das Fábricas
		A_1	A_2	A_3	
Fábricas	F_1	20	16	24	300
	F_2	10	10	8	500
	F_3	12	18	10	200
Capacidade dos armazéns		200	400	300	

8. A tabela abaixo indica o tempo **em horas que cada uma** das quatro máquinas da empresa Super Machine S/A gasta para realizar cada uma das cinco tarefas relacionadas. Sabendo que cada máquina pode realizar somente uma tarefa, a Super Machine S/A deseja designar tarefas às máquinas, visando minimizar o tempo total gasto.

a) Modele este problema como um problema de transporte e resolva-o com o auxílio do Solver;

b) Determine um **modelo que represente** o mesmo problema, porém levando em consideração que cada máquina pode realizar até **duas tarefas.** Resolva-o com a ajuda do Solver.

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5
Máquina 1	14	5	8	7	9
Máquina 2	2	12	6	5	7
Máquina 3	7	8	3	9	7
Máquina 4	2	4	6	10	6

9. A Comes e Bebes Buffets foi **contratada pela organização** de um congresso de Pesquisa Operacional, para prover uma certa quantidade de guardanapos por dia durante **os** sete dias do congresso. Devido à quantidade de guardanapos ser grande, o custo de transporte para levar os guardanapos do Rio de Janeiro (sede da empresa) para Salvador (local do congresso) é inviável. **Desta forma,** todos os guardanapos utilizados durante o congresso serão comprados em Salvador e doados a uma **instituição de caridade ao final** do mesmo. A demanda diária de guardanapos é **dada pela** tabela abaixo:

Dia	1	2	3	4	5	6	7
Demanda	2400	1200	1400	2000	1800	1400	2200

O gerente operacional da Comes e Bebes Buffets descobriu que existem serviços de lavanderia expressos e tradicionais em Salvador. O serviço expresso cobra R$G,60 por guardanapo lavado, recolhendo-os ao **final do dia e** entregando-os no início do próximo dia. O serviço tradicional recolhe os guardanapos ao **final** de um **dia** e o retorna após três dias a tempo de ser utilizado no congresso, cobrando para isso R$0,30. Paralelamente, existem lojas especializadas que vendem guardanapos em Salvador a R$1,20. **Modele** este problema como **um** problema de transporte e resolva-o com o auxílio do Solver ou do Lindo.

10. O gerente de compras da **Faculdade Diploma quer** realizar o máximo **de reformas** possíveis nas instalações da faculdade, dentro do seu orçamento limitado. Para isso contata quatro empresas a apresentarem propostas para cada uma das reformas que ela gostaria que fossem **executadas.**

A tabela abaixo apresenta as propostas das empresas para cada uma das reformas em milhões de reais.

Empresa\ Reforma	1	2	3	4	5	6	7
1	10	21,1	25	26,4	17,1	20	21,3
2	20	17	13,5	14	25	25,3	22,6
3	14	40	20	13	12	15	25
4	17	20	15	20	20	22	19

Entre as exigências da concorrência publicada em edital, constam que:

a) Nenhuma empresa pode realizar mais de duas reformas.

b) 0 total de reformas a ser obtido por cada empreiteiro não pode passar 33 milhões de reais.

c) 0 total a ser gasto pela Faculdade Diploma não será superior a 90 milhões de reais.

Formule o problema como um problema de transporte e resolva-o com o auxílio do Solver.

5.4 PROBLEMAS DE REDE DE DISTRIBUIÇÃO

Problemas que consideram múltiplas fontes, centros consumidores e locais intermediários por onde os produtos simplesmente passam são denominados de problemas de rede de distribuição. Os problemas de transporte podem ser vistos como uma simplificação do problema de rede de distribuição de custo mínimo, onde as localizações intermediárias não existem. O exemplo a seguir ilustra um típico caso de problema de rede distribuição.

Caso LCL Carros Brasil Ltda.

A montadora de veículos LCL Carros Brasil Ltda. está iniciando as suas operações no país, construindo duas fábricas: uma na Bahia e outra em São Paulo. A LCL está estudando a forma de distribuição de seus carros para as diversas revendas, localizadas nos estados de Goiás, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, que minimize o custo total de distribuição (Figura 6.3). As capacidades instaladas de cada uma das fábricas, as demandas das revendas, bem como os custos unitários de transporte entre fábricas e revendas estão evidenciados no diagrama da Figura 6.4.

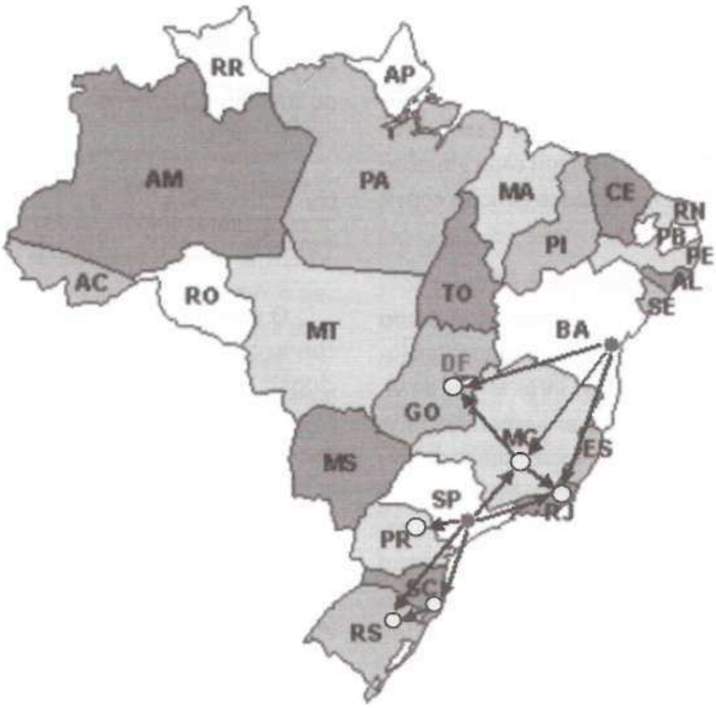


FIGURA 5.18 Localização das fábricas e distribuidores da LCL Carros Brasil.

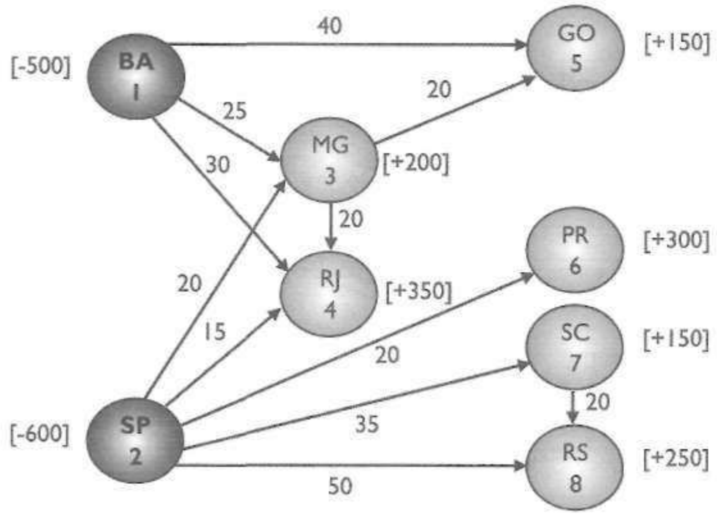


FIGURA 5.19 Diagrama da rede do Caso LCL Carros Brasil.

Em uma primeira e rápida análise, concluímos facilmente que as variáveis de decisão do modelo serão as quantidades de veículos enviadas de cada fábrica para cada distribuidor e a função-objetivo será a minimização do custo total destes envios. No entanto, o problema apresenta dois detalhes especiais: o número de carros demandados é maior que a capacidade de produção da empresa e alguns distribuidores (de Minas Gerais e de Santa Catarina) podem também enviar carros que receberam das fábricas para outros distribuidores.

Existem duas maneiras básicas de resolver este tipo de problema. A primeira consiste em inserir uma unidade *dummy* que iguale a oferta e a demanda totais e que esteja ligada a todas as unidades da demanda ou da oferta. Se a oferta for maior do que a demanda, a variável *dummy* será colocada como uma unidade de demanda ligada às unidades de oferta. De forma inversa, se a demanda for maior do que a oferta, a variável *dummy* representará um novo ponto de oferta para atender à demanda excedente. Em ambos os casos, todas as restrições serão consideradas como igualdades.

A segunda forma de resolver problemas de distribuição é seguir a Regra do Fluxo Balanceado para cada nó (unidade) da rede. Por esta regra não há necessidade da inserção de variáveis do tipo *dummy,* sendo o desequilíbrio entre a oferta total e a demanda total tratado através de restrições de maior ou igual ou de menor ou igual. A Tabela 5.10 resume a forma de aplicação da Regra do Fluxo Balanceado.

Resolveremos o problema da LCL Carros Brasil pelos dois métodos. A Figura 5.20 evidencia o valor do descompasso entre a capacidade de produção da empresa e o número de carros requeridos pelos estados: há uma oferta de 1.100 veículos e uma demanda de 1.400. Sendo assim, nosso primeiro passo para resolvermos este problema pela primeira opção é inserir uma unidade de oferta *dummy* com disponibilidade de 300 veículos e conectada a todos os nós de demanda com custo zero de transporte.

Tabela 5.10 **Regra do Fluxo Balanceado (Ragsdale, 2001)**

Hipótese do Problema	Tipo de Restrição
Oferta > Demanda	Entradas – Saídas ≥ Oferta ou Demanda do Nó
Oferta < Demanda	Entradas – Saídas ≤ Oferta ou Demanda do Nó
Oferta = Demanda	Entradas – Saídas = Oferta ou Demanda do Nó

De acordo com este primeiro método de modelagem, o problema que será inserido na planilha Excel é o seguinte:

Variáveis de Decisão:

x_{13} - número de carros enviados da Bahia para Minas Gerais

x_{14} - número de carros enviados da Bahia para o Rio de Janeiro

x_{15} - número de carros enviados da Bahia para Goiás

x_{23} - número de carros enviados de São Paulo para Minas Gerais

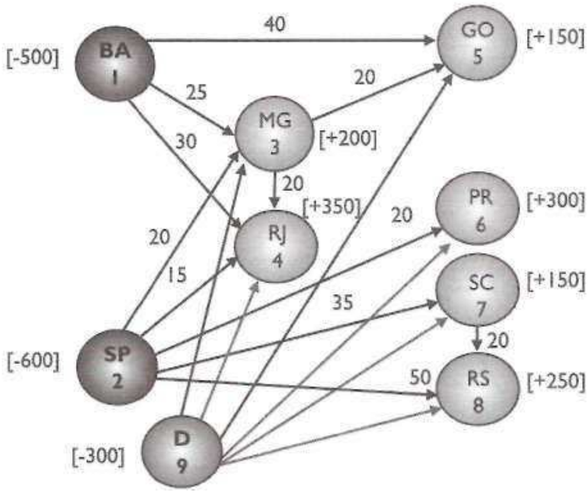


FIGURA 5.20 Diagrama de Rede do Caso LCL Carros Brasil -]° Método.

x_{24} - número de carros enviados de São Paulo para o Rio de Janeiro

x_{26} - número de carros enviados de São Paulo para o Paraná

x_{27} - número de carros enviados de São Paulo para Santa Catarina

x_{28} - número de carros enviados de São Paulo pars o Rio Grande do Sul

x_{34} - número de carros enviados de Minas Gerais para o Rio de Janeiro

x_{35} - número de carros enviados de Minas Gerais para Goiás

x_{78} - número de carros enviados de Santa Catarina para o Rio Grande do Sul

x_{93} - número de carros que o distribuidor de Minas Gerais deixará de receber

x_{94} - número de carros que o distribuidor do Rio d< Janeiró deixará de receber

x_{95} - número de carros que o distribuidor de Goiás deixará de receber

x_{96} - número de carros que o distribuidor do Paraná deixará de receber

x_{97} - número de carros que o distribuidor de Santa Catarina deixará de receber

x_{98} - número de carros que o distribuidor do Rio Grande do Sul deixará de receber

Função-objetivo

$Min\ 25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + 20x_{35} + 20x_{78}$

Montaremos as restrições conforme a seguinte lógica: o número de carros que chegam ao nó menos o montante que sai deve ser **igual** à oferta (negativo) ou a demanda (positivo) do nó.

Restrições de Fluxo:

$-x_{13} - x_{14} - x_{15} = -500$ nó 1

$-x_{23} - x_{24} - x_{26} - x_{27} - x_{28} = -600$ nó 2

$x_{13} + x_{23} + x_{93} - x_{34} - x_{35} = 200$ nó 3

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{94} = 350$ nó 4

$x_{15} + x_{35} + x_{95} = 150$ nó 5

$x_{26} + x_{96} = 300$ nó 6

$x_{27} + x_{97} - x_{78} = 150$ nó 7

$x_{28} + x_{78} + x_{98} = 250$ nó 8

$-x_{93} - x_{94} - x_{95} - x_{96} - x_{97} - x_{98} = -300$ nó 9

A Figura 5.21 mostra uma das maneiras de o problema ser modelado no Excel. Para inserir a condição de que o fluxo líquido de cada nó (quantidade de veículos que chega menos a quantidade que sai) deve ser igual à respectiva demanda (positivo) ou oferta (negativo) utilizaremos a função SomaSe do Excel (ou *SumIf*, em inglês). Esta função serve para somar as células especificadas por um determinado critério, que pode ser um número, uma expressão (>100, por exemplo) ou um texto. No nosso problema, a função *SomaSe* irá nos ajudar a calcular o fluxo líquido de cada nó, a partir dos seus critérios de identificação.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	PROBLEMA DE REDE DE DISTRIBUIÇÃO - LCL CARROS BRASIL							
2								
3	De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Liquido	Oferta/Demanda
4	1	3	25	0		1	0	-500
5	1	4	30	0		2	0	-600
6	1	5	40	0		3	0	200
7	2	3	20	0		4	0	350
8	2	4	15	0		5	0	150
9	2	6	20	0		6	0	300
10	2	7	35	0		7	0	150
11	2	8	50	0		8	0	250
12	3	4	20	0		9	0	-300
13	3	5	20	0				
14	7	8	20	0				
15	9	3	0	0				
16	9	4	0	0			Custo Total	0
17	9	5	0	0				
18	9	6	0	0				
19	9	7	0	0				
20	9	8	0	0				
21								

METODO 1 / Sheet2 / Sheet3 /

FIGURA 5.21 Modelagem da rede do Caso LCL Carros Brasil - 1º Método

A célula 116 representa a função-objetivo e as células de E4 à E20 representam as variáveis de decisão do modelo. As células de H4 à H12 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de 14 à 112 os RHS das mesmas. A Tabela 5.11 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo.

Uma vez feita a modelagem, devemos estabelecer os parâmetros e as opções do Solver (Figura 5.22).

A Figura 5.23 apresenta a solução do problema. Nela verificamos que a forma mais econômica de a LCL Carros Brasil atender a seus distribuidores é enviando 200 carros da fábrica da Bahia para o distribuidor de Minas Gerais, 150 da Bahia ao Rio de Janeiro, 150 da Bahia para Goiás, 200 de São Paulo para o Rio de Janeiro, 300 de São Paulo para o Paraná e 100 de São Paulo para Santa Catarina.

Conforme já sabíamos de antemão, nem todos os distribuidores poderiam ter suas demandas completamente atendidas, pois a demanda total é maior do que a capacidade de produção da companhia. Os distribuidores que não devem ter sua demanda total suprida, de acordo com a solução ótima apresentada pelo Solver, são os dos estados de Santa Catarina e do Rio Grande do Sul. Santa Catarina deixará de receber 50 carros e o Rio Grande do Sul, 250.

Para resolver o problema da montadora de veículos LCL Carros Brasil pela forma alternativa (sem inclusão de variáveis *dummy)*, modelaremos o problema tratando as restrições como de menor ou igual, já que a oferta é menor do que a demanda. A modelagem do problema, portanto, será a seguinte:

Tabela 5.11 **Fórmulas Utilizadas nas Restrições do Problema de Redes de Distribuição**

Função-objetivo	Célula	Fórmula Referente à Função-objetivo
Min $25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + 20x_{35} + 20x_{78}$	I16	=SOMARPRODUTO(D4:D14;E14:E14)
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referente ao LHS das Restrições*
$-x_{13} - x_{14} - x_{15} = -500$	H4	=SOMASE($C$4:$C$20;G4;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G4;$E$4:$E$20)
$-x_{23} - x_{24} - x_{26} - x_{27} - x_{28} = -600$	H5	=SOMASE($C$4:$C$20;G5;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G5;$E$4:$E$20)
$x_{13} + x_{23} + x_{93} - x_{34} - x_{35} = 200$	H6	=SOMASE($C$4:$C$20;G6;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G6;$E$4:$E$20)
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{94} = 350$	H7	=SOMASE($C$4:$C$20;G7;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G7;$E$4:$E$20)
$x_{15} + x_{35} + x_{95} = 150$	H8	=SOMASE($C$4:$C$20;G8;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G8;$E$4:$E$20)
$x_{26} + x_{96} = 300$	H9	=SOMASE($C$4:$C$20;G9;$E$4:$E$20)-SOMASE$B$4:$B$20;G9;$E$4:$E$20)
$x_{27} + x_{97} - x_{78} = 150$	H10	=SOMASE($C$4:$C$20;G10;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G10;$E$4:$E$20)
$x_{28} + x_{78} + x_{98} = 250$	H11	=SOMASE($C$4:$C$20;G11;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G11;$E$4:$E$20)
$-x_{93} - x_{94} - x_{95} - x_{96} - x_{97} - x_{98} = -300$	H12	=SOMASE($C$4:$C$20;G12;$E$4:$E$20)-SOMASE($B$4:$B$20;G12;$E$4:$E$20)

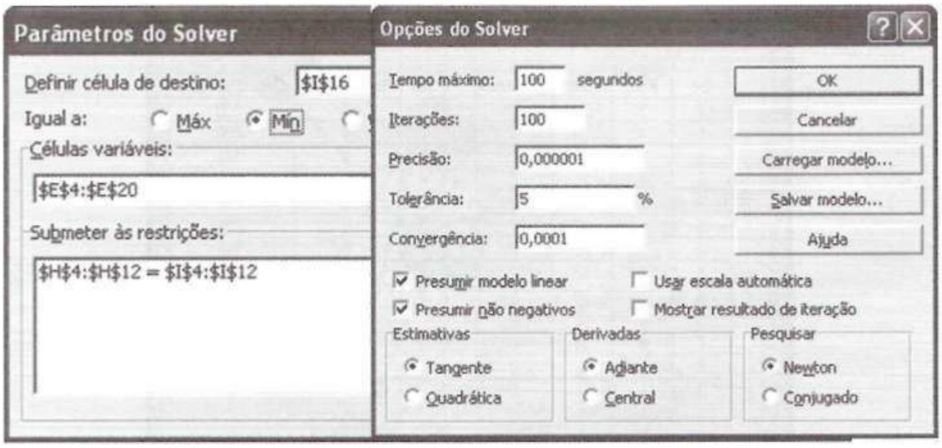


FIGURA 5.22 Condições do Solver para o Caso LCL Carros Brasil - 1º Método.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	PROBLEMA DE REDE DE DISTRIBUIÇÃO - LCL CARROS BRASIL								
2									
3		De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Líquido	Oferta/Demanda
4		1	3	25	200		1	-500	-500
5		1	4	30	150		2	-600	-600
6		1	5	40	150		3	200	200
7		2	3	20	0		4	350	350
8		2	4	15	200		5	150	150
9		2	6	20	300		6	300	300
10		2	7	35	100		7	150	150
11		2	8	50	0		8	250	250
12		3	4	20	0		9	-300	-300
13		3	5	20	0				
14		7	8	20	0				
15		9	3	0	0				
16		9	4	0	0			Custo Total	28000
17		9	5	0	0				
18		9	6	0	0				
19		9	7	0	50				
20		9	8	0	250				
21									

FIGURA 5.23 Solução ótima para o Caso LCL Carros Brasil – 1º Método.

Variáveis de Decisão:

x_{13} - número de carros enviados da Bahia para Minas Gerais

x_{14} - número de carros enviados da Bahia para o Rio de Janeiro

x_{15} – número de carros enviados da Bahia para Goiás

x_{23} - número de carros enviados de São Paulo para Minas Gerais

x_{24} - número de carros enviados de São Paulo para o Rio de Janeiro

x_{26} - número de carros enviados de São Paulo para o Paraná

x_{27} - número de carros enviados de São Paulo para Santa Catarina

x_{28} - número de carros enviados de São Paulo para o Rio Grande do Sul

x_{34} - número de carros enviados de Minas Gerais para o Rio de Janeiro

x_{35} - número de carros enviados de Minas Gerais para Goiás

x_{78} - número de carros enviados de Santa Catarina para o Rio Grande do Sul

Função-objetivo:

$$\text{Min } 25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + 20x_{35} + 20x_{78}$$

PROBLEMA DE REDE DE DISTRIBUIÇÃO - CARRO BRASIL

De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Liquido	Oferta/Demanda
1	3	25	0		1	0	-500
1	4	30	0		2	0	-600
1	5	40	0		3	0	200
2	3	20	0		4	0	350
2	4	15	0		5	0	150
2	6	20	0		6	0	300
2	7	35	0		7	0	150
2	8	50	0		8	0	250
3	4	20	0				
3	5	20	0				
7	8	20	0				
						Custo Total	0

METODO 1 | METODO 2 | Sheet3

FIGURA 5.24 Modelagem do Caso LCL Carros Brasil - 2ª Método

A montagem das restrições segue a lógica utilizada na modelagem anterior e as restrições serão do tipo menor ou igual, representadas abaixo.

$-x_{13} - x_{14} - x_{15} \leq -500$ nó 1

$-x_{23} - x_{24} - x_{26} - x_{27} - x_{28} \leq -600$ nó 2

$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} \leq 200$ nó 3

$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 350$ nó 4

$x_{15} + x_{35} \leq 150$ nó 5

$x_{26} \leq 300$ nó 6

$x_{27} - x_{78} \leq 150$ nó 7

$x_{28} + x_{78} \leq 250$ nó 8

A Figura 5.24 mostra o problema de transporte da LCL Carros Brasil, modelado de acordo com o segundo método. A célula 116 representa a função-objetivo e as células de E4 à E14 representam as variáveis de decisão do modelo. As células de H4 à Hl 1 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de 14 à 111 os RHS das mesmas. A Tabela 5.12 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo. A Figura 5.25 representa os parâmetros e as opções do Solver utilizadas no problema.

Observando a Figura 5.26, que mostra o resultado da otimização do problema, notamos que a solução ótima apresentada pelo Solver neste modelo é exatamente igual à solução da modelagem anterior, que incluía a variável *dummy.* É indiferente utilizarmos um ou outro método de modelagem, devendo o modelador escolher o que mais lhe convém. No caso de soluções múltiplas, os resultados poderiam até ser diferentes, isto é, um método poderia chegar a uma solução enquanto o método alternativo à outra solução, porém, ambas com o mesmo valor para a função-objetivo.

Tabela 5.12 **Fórmulas Utilizadas nas Restrições do Problema de Redes de Distribuição**

Função-objetivo	Célula	Formula Referente à Função-objetivo
Min $25x_{13} + 30x_{14} + 40x_{15} + 20x_{23} + + 15x_{24} + 20x_{26} + 35x_{27} + 50x_{28} + 20x_{34} + +20x_{35} + 20x_{78}$	I16	=SOMARPRODUTO (D4:D14;E4:E14)
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referente ao LHS das Restrições*
$-x_{13} - x_{14} - x_{15} \leq -500$	H4	=SOMASE($C$4:$C$14;G4;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G4;$E$4:$E$14)
$-x_{23} - x_{24} - x_{25} - x_{27} - x_{28} \leq -600$	H5	=SOMASE($C$4:$C$14;G5;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G5;$E$4:$E$14)
$x_{13} + x_{23} + x_{34} - x_{35} \leq 200$	H6	=SOMASE($C$4:$C$14;G6;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G6;$E$4:$E$14)
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 350$	H7	=SOMASE($C$4:$C$14;G7;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G7;$E$4:$E$14)
$x_{15} + x_{35} \leq 150$	H8	=SOMASE($C$4:$C$14;G8;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G8;$E$4:$E$14)
$x_{26} \leq 300$	H9	=SOMASE($C$4:$C$14;G9;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G9;$E$4:$E$14)
$x_{27} - x_{78} \leq 150$	H10	=SOMASE($C$4:$C$14;G10;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G10;$E$4:$E$14)
$x_{28} + x_{78} \leq 250$	H11	=SOMASE($C$4:$C$14;G11;$E$4:$E$14)-SOMASE($B$4:$B$14;G11;$E$4:$E$14)

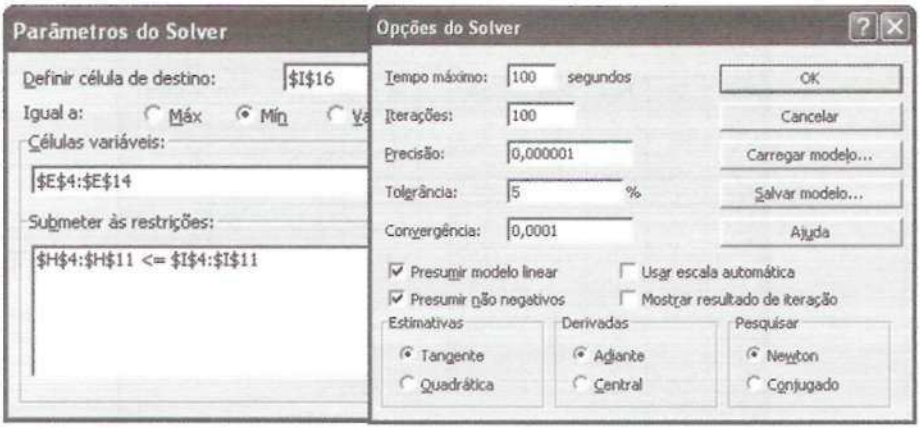


FIGURA 5.25 Condições do Solver para o Caso LCL Carros Brasil – 2º Método.

PROBLEMA DE REDE DE DISTRIBUIÇÃO - CARRO BRASIL

De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Líquido	Oferta/Demanda
1	3	25	200		1	-500	-500
1	4	30	150		2	-600	-600
1	5	40	150		3	200	200
2	3	20	0		4	350	350
2	4	15	200		5	150	150
2	6	20	300		6	300	300
2	7	35	100		7	100	150
2	8	50	0		8	0	250
3	4	20	0				
3	5	20	0				
7	8	20	0				
						Custo Total	28000

METODO 1 | METODO 2 | Sheet3

FIGURA 5.26 Solução ótima para o Caso LCL Carros Brasil – 2º Método.

5.5. PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

O problema de menor caminho representa um caso especial de problemas de redes, em que os arcos significam a distância entre dois pontos (nós). Quando desejamos achar a rota que une estes pontos com distância mínima entre as possíveis, teremos um problema do tipo do menor caminho. Este tipo de problema pode ser generalizado e aplicado à distribuição de energia, entre outros.

Em problemas de menor caminho haverá sempre dois tipos de nós especiais chamados de origem e destino. Entre um nó de origem e um nó de destino geralmente existem nós intermediários, que podem representar cidades que conectam rodovias, subestações em problemas de distribuição de energia, e assim por diante.

Caso LCL Adornos & Tecidos

A fábrica de artigos de decoração LCL Adornos & Tecidos, localizada em Lambari, Minas Gerais, deve entregar uma grande quantidade de peças na cidade de Baependi, localizada no mesmo estado. A empresa quer saber qual o caminho que seu caminhão de entregas deve fazer para minimizar a distância total percorrida. A Figura 5.27 mostra o mapa rodoviário da região do estado em que se situam as duas cidades e a Figura 5.28 ilustra o mesmo mapa e as distâncias entre as cidades em forma de rede.

A modelagem do problema terá variáveis binárias do tipo x_{ij}, indicando o sentido da cidade *i* para a cidade j. Se o valor da variável for igual a um, significa que aquele trecho deve ser percorrido. De forma inversa, se o valor da variável for igual a zero, a estrada que liga a cidade *i* à cidade j não deverá ser utilizada.

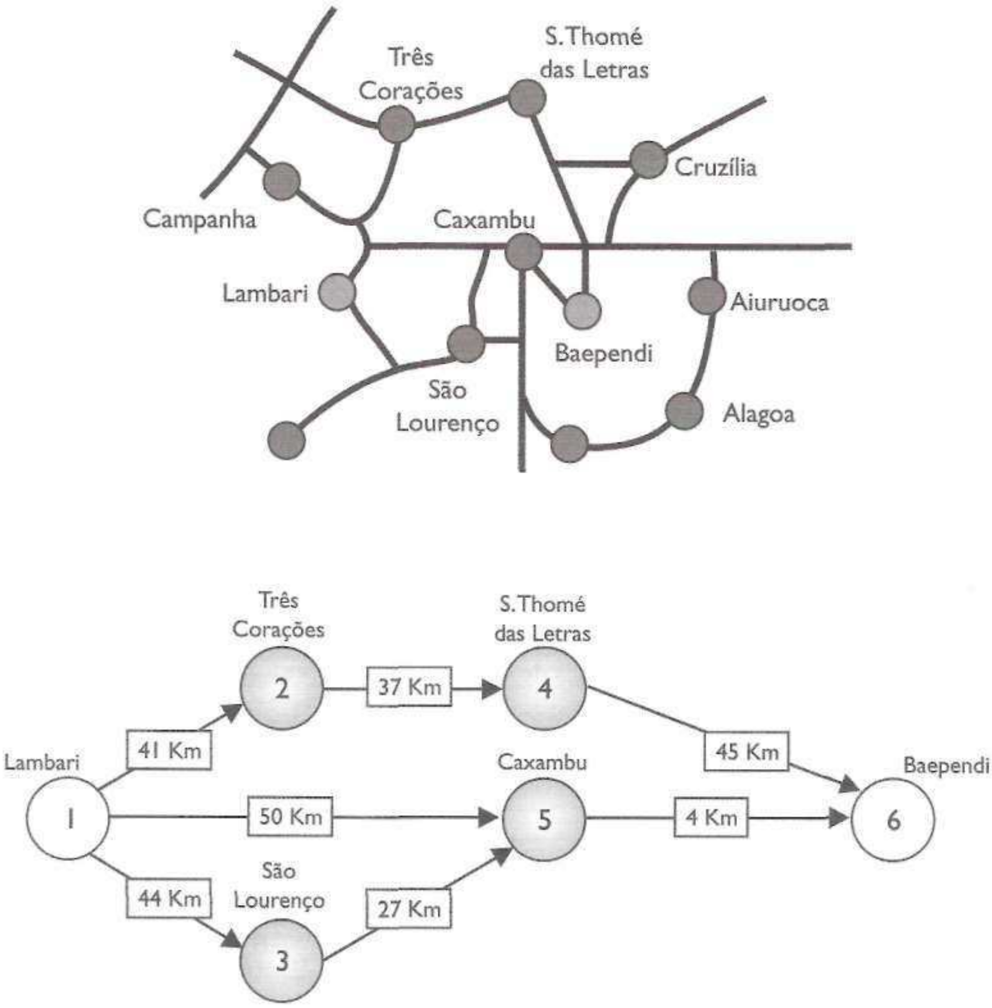


FIGURA 5.28 Representação em rede do Caso LCL Adornos & Tecidos.

Variáveis de Decisão

x_{12} - trecho Lambari (1) - Três Corações (2)

x_{13} - trecho Lambari (1) - São Lourenço (3)

x_{15} - trecho Lambari (1) - Caxambu (5)

x_{24} - trecho Três Corações (2) - São Thomé das Letras (4)

x_{35} - trecho São Lourenço (3) - Caxambu (5)

x_{46} - trecho São Thomé das Letras (4) - Baependi (6)

x_{56} - trecho Caxambu (5) - Baependi (6)

A função-objetivo visa minimizar a distância percorrida pelo caminhão; logo, se as variáveis de decisão assumem zero ou um, a multiplicação destas pelas distâncias entre as respectivas cidades será zero (caso a estrada não seja utilizada) e igual à distância entre as cidades se esta for utilizada. Logo, o somatório destes produtos será a distância percorrida, isto é, a função-objetivo, que matematicamente pode ser representada por:

$$Min\ 41x_{12} + 44x_{13} + 50x_{15} + 37x_{24} + 27x_{35} + 45x_{46} + 4x_{56}$$

A demanda de Baependi será de um caminhão (+1) e a oferta de Lambari será de um caminhão (1). Todas as outras cidades intermediárias terão demanda e oferta iguais a zero. Desta forma, as restrições de fluxo podem ser matematicamente representadas por:

$$-(x_{12} + x_{13} + x_{15}) = -1 \qquad \text{nó 1}$$
$$x_{12} - x_{24} = 0 \qquad \text{nó 2}$$
$$x_{13} - x_{35} = 0 \qquad \text{nó 3}$$
$$x_{24} - x_{46} = 0 \qquad \text{nó 4}$$
$$x_{15} + x_{35} - x_{56} = 0 \qquad \text{nó 5}$$
$$x_{46} + x_{56} = 1 \qquad \text{nó 6}$$

Uma das possíveis modelagens deste problema na planilha Excel é mostrada na Figura 5.29. A célula E12

Caso LCL Adornos & Tecidos

De	Para	Distância (Km)	Rota Selecionada
1	2	41	0
1	3	44	0
1	5	50	1
2	4	37	0
3	5	27	0
4	6	45	0
5	6	4	1
		Distância Total	54

Nó	Fluxo Líquido	Oferta Demanda
1	-1	-1
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	1	1

FIGURA 5.29 Modelagem do Caso LCL Adornos & Tecidos.

representa a função-objetivo e as células de E4 à E10 representam as variáveis de decisão do modelo. As células de H4 à H9 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de 14 à 19 os RHS das mesmas. A Tabela 5.13 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo.

***Tabela S. 13* Fórmulas Utilizadas nas Restrições do Caso LCL Adornos & Tecidos**

Função-objetivo	Célula	Formula Referente à Função-objetivo
Min $41x_{12} + 44x_{13} + 50x_{15} + 37x_{24} + 27x_{35} + 45x_{46} + 4x_{56}$	E12	=SOMARPRODUTO(D4:D10;E4:E10)
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referentes ao LHS das Restrições*
$-(x_{12} + x_{13} + x_{15}) = -1$	H4	=SOMASE($C$4:$C$10;G4;$E$4:$E$10)-SOMASE($B$4:$B$10;G4;$E$4:$E$10)
$x_{12} - x_{24} = 0$	H5	=SOMASE($C$4:$C$10;G5;$E$4:$E$10)-SOMASE($B$4:$B$10;G5;$E$4:$E$10)
$x_{13} - x_{35} = 0$	H6	=SOMASE($C$4:$C$10;G6;$E$4:$E$10)-SOMASE($B$4:$B$10;G6;$E$4:$E$10)
$x_{24} - x_{46} = 0$	H7	=SOMASE($C$4:$C$10;G7;$E$4:$E$10)SOMASE($B$4:$B$10;G7;$E$4:$E$10)
$x_{15} + x_{35} - x_{56} = 0$	H8	=SOMASE($C$4:$C$10;G8;$E$4:$E$10)-SOMASE($B$4:$B$10;G8;$E$4:$E$10)
$x_{46} + x_{56} = 1$	H9	=SOMASE($C$4:$C$10;G9;$E$4:$E$10)-SOMASE($B$4:$B$10;G9;$E$4:$E$10)

As condições especificadas para os parâmetros e as opções do Solver estão evidenciadas na Figura 5.30.

A Figura 5.31 evidencia a solução ótima do problema. Segundo ela, o caminho através da malha rodoviária da região que resulta na menor distância entre as cidades de Lambari e Baependi é o que passa pelo município de Caxambu. Desta forma, o caminhão de entregas da LCL Adornos & Tecidos deve sair de Lambari, seguir a estrada que leva até Caxambu ($x_{15} = 1$) e, de lá, partir para Baependi ($x_{56} = 1$); percorrendo uma distância total de 54 quilômetros (50 km de Lambari a Caxambu e mais 4 km de Caxambu à Baependi).

5,6, PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO

O tipo de Problema de Fluxo Máximo é utilizado quando queremos maximizar a quantidade de fluxo de um ponto de origem para um ponto de destino e estamos sujeitos a restrições de capacidade de fluxo nos arcos. Estes problemas geralmente envolvem o fluxo de materiais como água, óleo, gás, energia através de uma rede de tubos ou cabos; porém, também podem representar o fluxo máximo de carros em uma malha rodoviária, de produtos em linhas de produção, e assim por diante.

Caso LCL GasoBras Ltda.

A empresa distribuidora de gás LCL GasoBras Ltda. deseja determinar a quantidade máxima de metros cúbicos por segundo de gás que pode bombear da estação de Campos para o centro consumidor do Rio de Janeiro, através da rede de gasodutos existentes. A Figura 5.32 ilustra a estrutura da rede de distribuição e apresenta a capacidade de fluxo máximo nos trechos (em metros cúbicos por segundo).

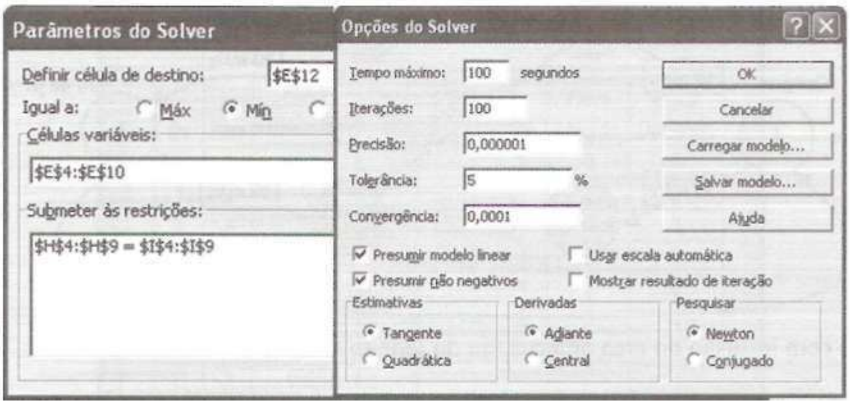


FIGURA 5.30 Condições do Solver para o Caso LCL Adornos & Tecidos.

De	Para	Distância (Km)	Rota Selecionada		Nó	Fluxo Líquido	Oferta Demanda
1	2	41	0		1	-1	-1
1	3	44	0		2	0	0
1	5	50	1		3	0	0
2	4	37	0		4	0	0
3	5	27	0		5	0	0
4	6	45	0		6	1	1
5	6	4	1				
	Distância Total		54				

FIGURA 5.31 Solução ótima para o Caso LCL Adornos & Tecidos.

Para resolver este problema, utilizaremos um pequeno artifício: adicionaremos um arco virtual ligando o nó B ao nó A (Figura 5.33). A função-objetivo, portanto, será a maximização do fluxo de gás que passa de B para A. Como o fluxo do Rio de Janeiro para Campos na realidade não existe, o valor do fluxo no arco artificial representará o total de gás que pode chegar ao Rio de Janeiro vindo de Campos por mais de um caminho simultaneamente.

Variáveis de Decisão:

x_{A1} - m^3/s de gás que saem de Campos (A) e chegam na Estação 1

x_{A2} - m^3/s de gás que saem de Campos (A) e chegam na Estação 2

x_{13} - m^3/s de gás que saem da Estação 1 e chegam na Estação 3

x_{14} - m^3/s de gás que saem da Estação 1 e chegam na Estação 4

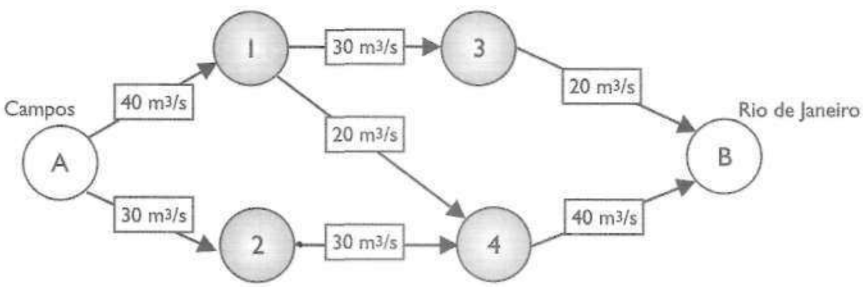


FIGURA 5.32 Rede de gasodutos que ligam Campos ao Rio de Janeiro.

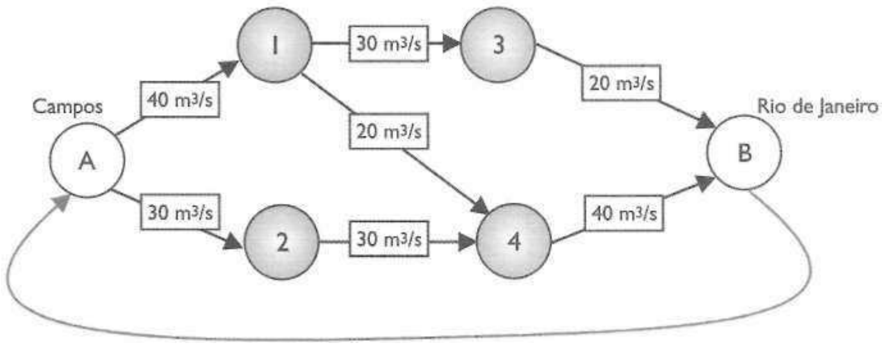


FIGURA 5.33 Rede com inclusão do arco artificial Rio de Janeiro - Campos.

x_{24} – m^3/s de gás que saem da Estação 2 e chegam na Estação 5

x_{3B} – m^3/s de gás que saem da Estação 3 e chegam no Rio de Janíeiro (B)

x_{4B} – m^3/s de gás que saem da Estação 4 e chegam no Rio de Janíeiro (B)

x_{BA} – m^3/s de gás que saem do Rio de Janeiro (B) e chegam em Campos (A) (arco artificial)

Função-objetivo: *Max* x_{BA}

A composição das restrições seguirá as seguintes condições:

a) O fluxo em cada arco deverá ser maior ou igual a zero.

b) O fluxo em cada arco deverá ser menor ou igual à capacidade do arco.

c) O fluxo que chega em cada nó deverá ser igual ao fluxo que sai do mesmo.

d) O fluxo do arco artificial (desconhecido) deve ser grande o bastante para assumir qualquer valor possível, já que este será maximizado.

As restrições de capacidade podem ser matematicamente representadas por:

$$x_{A1} \leq 40 \quad ; \quad x_{A2} \leq 30$$
$$x_{13} \leq 30 \quad ; \quad x_{14} \leq 20$$
$$x_{24} \leq 30 \quad ; \quad x_{3B} \leq 20$$
$$x_{4B} \leq 40 \quad ; \quad x_{BA} \leq 9999$$

As restrições de fluxo podem ser matematicamente representadas por:

$$x_{BA} - (x_{A1} + x_{A2}) = 0$$
$$x_{A1} - (x_{13} + x_{14}) = 0$$
$$x_{A2} - (x_{24}) = 0$$
$$x_{13} - (x_{3B}) = 0$$
$$x_{14} + x_{24} - (x_{4B}) = 0$$
$$x_{3B} + x_{4B} - (x_{BA}) = 0$$

Uma das possíveis modelagens deste problema na planilha Excel é mostrada na Figura 5.34. A célula E13 representa a função-objetivo e as células de E4 à Eli representam as variáveis de decisão do modelo. As células de H4 à H9 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de 14 à *19* os RHS das mesmas. A Tabela 5.14 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo. As condições especificadas para os parâmetros e as opções do Solver estão evidenciadas na Figura 5.35.

Tabela 5.14 **Fórmulas Utilizadas nas Restrições do** Caso **LCL CasoBras**

Função-objetivo	Célula	Fórmula Referente à Função-objetivo
Max x_{BA}	E16	=E11
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referente ao LHS das Restrições*
$x_{BA} - (x_{A1} + x_{A2}) = 0$	H4	=SOMASE($C$4:$C$11;G4;$E$4:$E$11)-SOMASE$B$4:$B$11;G4;$E$4:$E$11)
$x_{A1} - (x_{13} + x_{14}) = 0$	H5	=SOMASE($C$4:$C$11;G5;$E$4:$E$11)-SOMASE($B$4:$B$11;G5;$E$4:$E$11)
$x_{A2} - (x_{24}) = 0$	H6	=SOMASE($C$4:$C$11;G6;$E$4:$E$11)-SOMASE($B$4:$B$11;G6;$E$4:$E$11)
$x_{13} - (x_{3B}) = 0$	H7	=SOMASE($C$4:$C$11;G7;$E$4:$E$11)-SOMASE($B$4:$B$11;G7;$E$4:$E$11)
$x_{14} + x_{24} - (x_{4B}) = 0$	H8	=SOMASE($C$4:$C$11;G8;$E$4:$E$11)-SOMASE($B$4:$B$11;G8;$E$4:$E$11)
$x_{3B} + x_{4B} - (x_{BA}) = 0$	H9	=SOMASE($C$4:$C$11;G9;$E$4:$E$11)-SOMASE($B$4:$B$11;G9;$E$4:$E$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	LCL GasoBras Ltda.								
2									
3		De	Para	Fluxo Máximo (m^3)	Capacidade Utilizada		Nó	Fluxo Liquido	Oferta Demanda
4		A	1	40	0		A	0	0
5		A	2	30	0		1	0	0
6		1	3	30	0		2	0	0
7		1	4	20	0		3	0	0
8		2	4	30	0		4	0	0
9		3	B	20	0		B	0	0
10		4	B	40	0				
11		B	A	9999	0				
12									
13				Fluxo Total	0				

FIGURA 5.34 **Modelagem do** Caso LCL GasoBras,

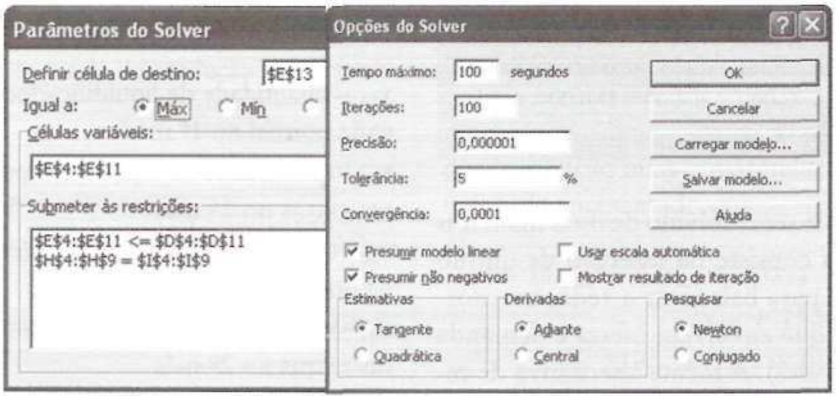


FIGURA 5.35 **Condições para resolução do Caso LCL GasoBras.**

A Figura 5.36 evidencia a solução ótima apresentada pelo Solver para o Problema da LCL GasoBras. Conforme podemos observar, em função dos limites de fluxos dos gasodutos, o fluxo máximo que pode chegar ao Rio de Janeiro é de 60 metros cúbicos de gás por segundo.

5.7 PROBLEMAS DE ESCALAS DE PRODUÇÃO COMO MODELOS DE REDE

Conforme vimos no início desta seção, o caso dos problemas de escala de produção pode ser visto como problemas de transporte na forma tradicional. Como um problema de transporte podemos modelar este tipo de pro-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	LCL GasoBras Ltda.								
2									
3		De	Para	Fluxo Máximo (m^3)	Capacidade Utilizada		Nó	Fluxo Liquido	Oferta Demanda
4		A	1	40	40		A	0	0
5		A	2	30	20		1	0	0
6		1	3	30	20		2	0	0
7		1	4	20	20		3	0	0
8		2	4	30	20		4	0	0
9		3	B	20	20		B	0	0
10		4	B	40	40				
11		B	A	9999	60				
12									
13				Fluxo Total	60				

FIGURA 5.36 Solução ótima para o Caso da LCL GasoBras.

blemas como um problema de rede. O caso a seguir mostra como este tipo de problemas pode ser visto como um modelo de rede.

Caso LCL EletroBrasil Ltda.

A fábrica de eletrodomésticos LCL EletroBrasil Ltda. deseja realizar o escalonamento de sua produção de liquidificadores para os próximos quatro meses. A fábrica pode produzir mensalmente, em jornada normal, 150.000 unidades a um custo unitário de R$15,00. Através do pagamento de horas extras, a capacidade mensal de produção da fábrica pode ser aumentada em 50.000 liquidificadores, a um custo de produção unitário de R$22,00 (somente os adicionais). Existe a possibilidade de armazenagem (ilimitada) de unidades de um mês para outro a um custo unitário mensal de R$3,00. Sabendo que as demandas de liquidificadores para os próximos quatro meses são de 120.000, 200.000, 120.000 e 180.000, resolva o problema com o auxílio do Solver.

Este problema pode ser resolvido de duas maneiras distintas. A primeira consiste na inserção de um nó *dummy*, que servirá para balancear a rede, transformando as restrições que envolvem oferta e demanda em equações (igualdades). A forma alternativa de resolução seria a utilização da regra de Fluxos Balanceados apresentada no item 6.2. No problema da fábrica de eletrodomésticos LCL EletroBrasil há excesso de capacidade de produção (somando-se a capacidade em turnos normais e em horas extras). Sendo assim, devemos inserir um nó *dummy* de demanda (Figura 5.37) caso optemos pela primeira forma de solução ou sem a variável *dummy* (Figura 5.38) caso optemos pela solução alternativa.

Resolveremos o problema utilizando a introdução da variável *dummy*. O que nós desejamos descobrir é a melhor forma de programar a produção de liqüidificadores, de modo a atender a toda a demanda ao menor custo possível. Dessa forma, as variáveis de decisão serão as quantidades de liqüidificadores produzidos em cada sistema (horário padrão ou horas extras) em cada mês, bem como a quantidade de liqüidificadores deixadas em estoque de um mês para outro.

As variáveis de decisão são:

x_{1A} – quantidade de liquidificadores produzidos em jornada normal no 1º mês

x_{2A} – quantidade de liquidificadores produzidos em horas extras no 1º mês

x_{3B} – quantidade de liquidificadores produzidos em jornada normal no 2º mês

x_{4B} – quantidade de liquidificadores produzidos em horas extras no 2º mês

x_{5C} – quantidade de liquidificadores produzidos em jornada normal no 3º mês

x_{6C} – quantidade de liquidificadores produzidos em horas extras no 3º mês

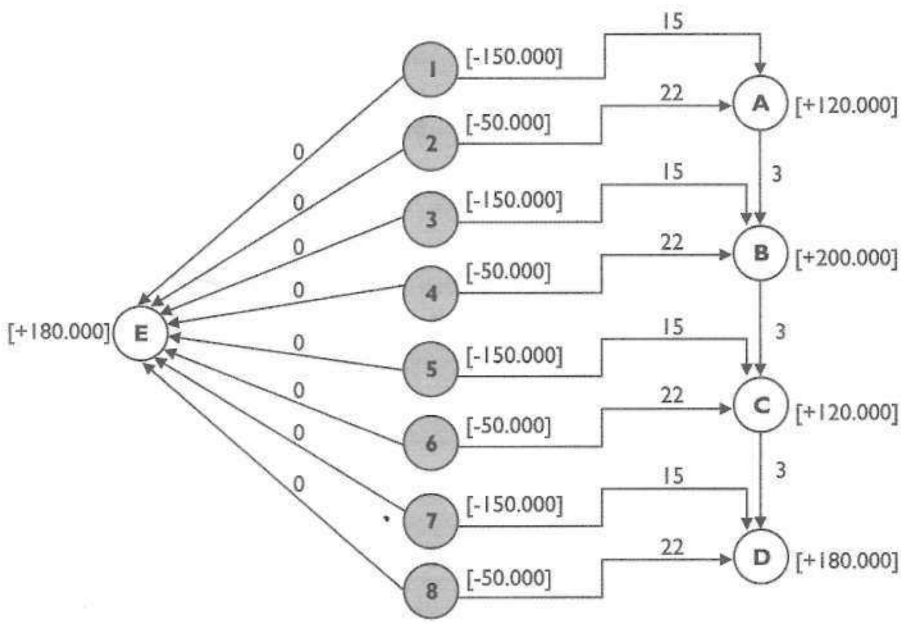


FIGURA 5.37 Rede de escala de produção para o problema (com *dummy*).

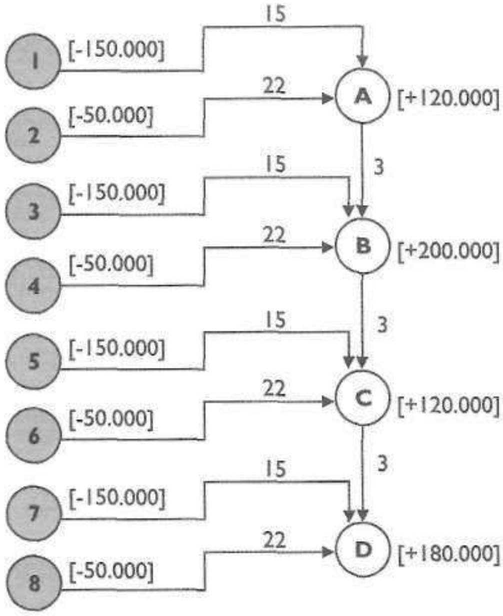


FIGURA 5.38 Rede de escala de produção para o problema (sem *dummy).*

x_{7D} – quantidade de liquidificadores produzidos em jornada normal no 4º mês

x_{8D} – quantidade de liquidificadores produzidos em horas extras no 4º mês

x_{AB} – quantidade de liquidificadores estocados do 1º até o 2º mês

x_{BC} – quantidade de liquidificadores estocados do 2º até o 3º mês

x_{CD} – quantidade de liquidificadores estocados do 3º até o 4º mês

x_{1E} – capacidade ociosa de produção em jornada normal no 1º mês

x_{2E} – capacidade ociosa de produção em jornada extra no 1º mês

x_{3E} – capacidade ociosa de produção em jornada normal no 2º mês

x_{4E} – capacidade ociosa de produção em jornada extra no 2º mês

x_{5E} – capacidade ociosa de produção em jornada normal no 3º mês

x_{6E} – capacidade ociosa de produção em jornada extra no 3º mês

x_{7E} – capacidade ociosa de produção em jornada normal no 4º mês

x_{8E} – capacidade ociosa de produção em jornada extra no 4º mês

A função-objetivo do problema será a minimização de todos os custos envolvidos no atendimento da demanda, ou seja: os custos totais dos produtos produzidos (produção mais armazenagem). Matematicamente isto é representado por:

$$\text{Min } 15x_{1A} + 22x_{2A} + 15x_{3B} + 22x_{4B} + 15x_{5C} + 22x_{6C} + 15x_{7D} + 22x_{8D} + 3x_{AB} + 3x_{BC} + 3x_{CD}$$

As restrições deste problema seguirão a mesma lógica utilizada para resolver problemas de distribuição com o uso de variáveis do tipo *dummy*, isto é, o número de unidades que chegam ao nó menos o que sai deve ser **igual** à oferta ou à demanda do nó. Em outras palavras, o fluxo líquido de cada nó deverá ser igual à sua demanda/oferta. Matematicamente as restrições podem ser expressas como:

$-(x_{1A} + x_{1E}) = -150000$ nó 1
$-(x_{2A} + x_{2E}) = -50000$ nó 2
$-(x_{3B} + x_{3E}) = -150000$ nó 3
$-(x_{4B} + x_{4E}) = -50000$ nó 4
$-(x_{5C} + x_{5E}) = -150000$ nó 5
$-(x_{6C} + x_{6E}) = -50000$ nó 6
$-(x_{7D} + x_{7E}) = -150000$ nó 7
$-(x_{8D} + x_{8E}) = -50000$ nó 8
$x_{1A} + x_{2A} - (x_{AB}) = 120000$ nó A
$x_{3B} + x_{4B} + x_{AB} - (x_{BC}) = 200000$ nó B
$x_{5C} + x_{6C} + x_{BC} - (x_{CD}) = 120000$ nó C
$x_{7D} + x_{8D} + x_{CD} = 180000$ nó D
$x_{1E} + x_{2E} + x_{3E} + x_{4E} + x_{5E} + x_{6E} + x_{7E} + x_{8E} = 180000$ nó E

LCL EletroBrasil Ltda.

De	Para	Custo	Unidades	Nó	Fluxo Liquido	Oferta/Demanda
1	A	15	0	1	0	-150000
1	E	0	0	2	0	-50000
2	A	22	0	3	0	-150000
2	E	0	0	4	0	-50000
3	B	15	0	5	0	-150000
3	E	0	0	6	0	-50000
4	B	22	0	7	0	-150000
4	E	0	0	8	0	-50000
5	C	15	0	A	0	120000
5	E	0	0	B	0	200000
6	C	22	0	C	0	120000
6	E	0	0	D	0	180000
7	D	15	0	E	0	180000
7	E	0	0			
8	D	22	0			
8	E	0	0			
A	B	3	0			
B	C	3	0		Custo Total	0
C	D	3	0			

FIGURA 5.39 Modelagem do problema de escala de produção (com *dummy*).

Uma das possíveis modelagens deste problema na planilha Excel é mostrada na Figura 5.39. A célula 121 representa a função-objetivo e as células de E4 à E22 representam as variáveis de decisão do modelo. As células de H4 à H16 representam os LHS das restrições de fluxo e as células de 14 à 116 os RHS das mesmas.

A Tabela 5.15 mostra as fórmulas utilizadas nos LHS das restrições e na célula que denota a função-objetivo. As condições especificadas para os parâmetros e as opções do Solver estão evidenciadas na Figura 5.40.

Tabela 5.15
Fórmulas Utilizadas nas Restrições do Problema de Escala de Produção

Função-objetivo	Célula	Fórmula Referente à Função-objetivo
Min $15x_{1A} + 22x_{2A} + 15x_{3B} + 22x_{4B} + 15x_{5C} + 22x_{6C} + 15x_{7D} + 22x_{8D} + 3x_{AB} + 3x_{BC} + 3x_{CD}$	I21	=SOMARPRODUTO (D4:D22;E4:E22)
Restrição	*Célula*	*Fórmula Referentes ao LHS das Restrições*
$-(x_{1A} + x_{1E}) = -150000$	H4	=SOMASE($C$4:$C$22;G4;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G4;$E$4:$E$22)
$-(x_{2A} + x_{2E}) = -50000$	H5	=SOMASE($C$4:$C$22;G5;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G5;$E$4:$E$22)
$-(x_{3B} + x_{3E}) = -150000$	H6	=SOMASE($C$4:$C$22;G6;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G6;$E$4:$E$22)
$-(x_{4B} + x_{4E}) = -50000$	H7	=SOMASE($C$4:$C$22;G7;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G7;$E$4:$E$22)
$-(x_{5C} + x_{5E}) = -150000$	H8	=SOMASE($C$4:$C$22;G8;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G8;$E$4:$E$22)
$-(x_{6C} + x_{6E}) = -50000$	H9	=SOMASE($C$4:$C$22;G9;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G9;$E$4:$E$22)
$-(x_{7D} + x_{7E}) = -150000$	H10	=SOMASE($C$4:$C$22;G10;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G10;$E$4:$E$22)
$-(x_{8D} + x_{8E}) = -50000$	H11	=SOMASE($C$4:$C$22;G11;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G11;$E$4:$E$22)
$x_{1A} + x_{2A} - (x_{AB}) = 120000$	H12	=SOMASE($C$4:$C$22;G12;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G12;$E$4:$E$22)
$x_{3B} + x_{4B} + x_{AB} - (x_{BC}) = 200000$	H13	=SOMASE($C$4:$C$22;G13;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G13;$E$4:$E$22)
$x_{5C} + x_{6C} + x_{BC} - (x_{CD}) = 120000$	H14	=SOMASE($C$4:$C$22;G14;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G14;$E$4:$E$22)
$x_{7D} + x_{8D} + x_{CD} = 180000$	H15	=SOMASE($C$4:$C$22;G15;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G15;$E$4:$E$22)
$x_{1E} + x_{2E} + x_{3E} + x_{4E} + x_{5E} + x_{6E} + x_{7E} + x_{8E} = 180000$	H16	=SOMASE($C$4:$C$22;G16;$E$4:$E$22)-SOMASE($B$4:$B$22;G16;$E$4:$E$22)

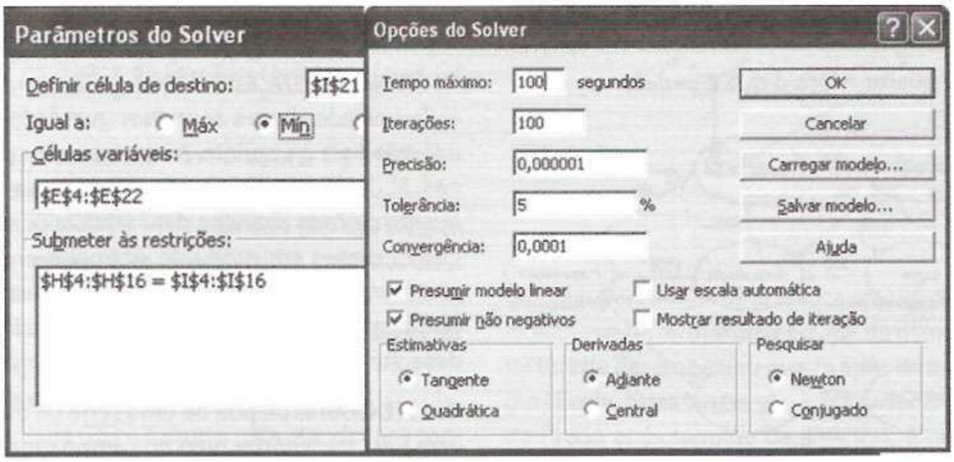
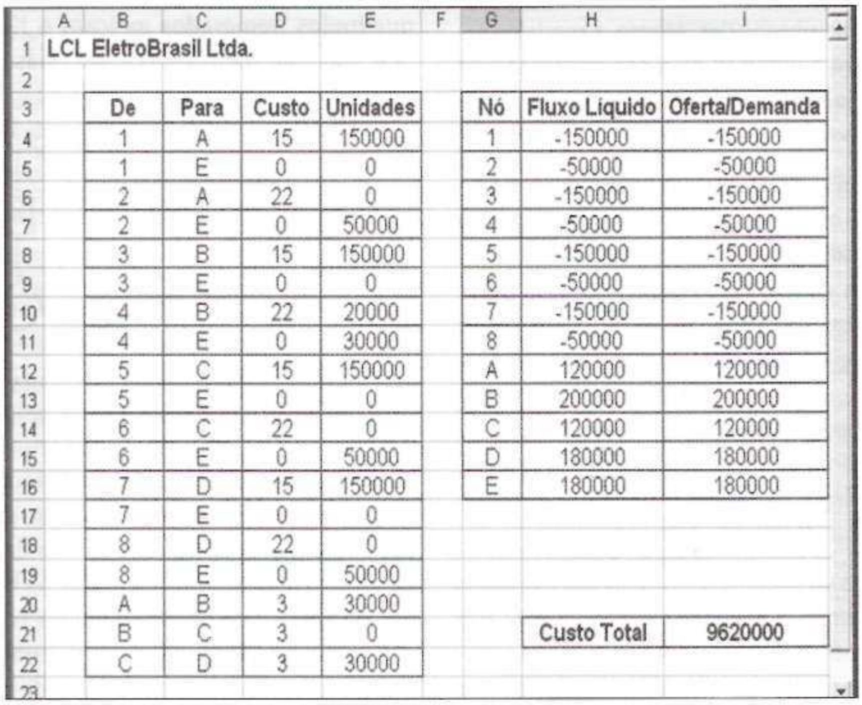


FIGURA 5.40 Condições para resolução do Caso LCL EletroBrasil.



LCL EletroBrasil Ltda.

De	Para	Custo	Unidades		Nó	Fluxo Líquido	Oferta/Demanda
1	A	15	150000		1	-150000	-150000
1	E	0	0		2	-50000	-50000
2	A	22	0		3	-150000	-150000
2	E	0	50000		4	-50000	-50000
3	B	15	150000		5	-150000	-150000
3	E	0	0		6	-50000	-50000
4	B	22	20000		7	-150000	-150000
4	E	0	30000		8	-50000	-50000
5	C	15	150000		A	120000	120000
5	E	0	0		B	200000	200000
6	C	22	0		C	120000	120000
6	E	0	50000		D	180000	180000
7	D	15	150000		E	180000	180000
7	E	0	0				
8	D	22	0				
8	E	0	50000				
A	B	3	30000				
B	C	3	0			Custo Total	9620000
C	D	3	30000				

FIGURA 5.41 Solução ótima do Caso LCL EletroBrasil.

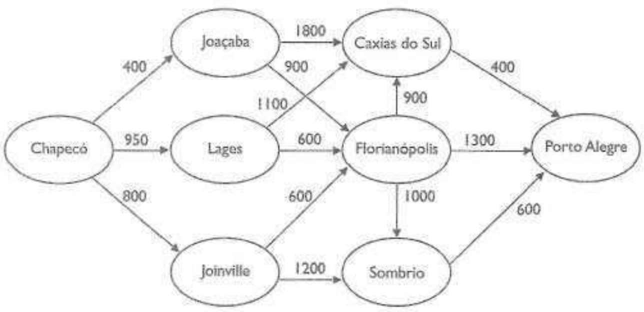
O resultado encontrado pelo Solver é apresentado na Figura 5.41.

De acordo com a solução ótima, as demandas dos quatro meses serão atendidas da seguinte maneira:

Mês	Demanda	Forma como a demanda será atendida
1	120.000	120.000 liquidificadores produzidos no primeiro mês em horário normal
2	200.000	30.000 liquidificadores produzidos no primeiro mês em horário normal e estocados até o segundo mês + 150.000 produzidos no segundo mês em horário normal + 20.000 produzidos no segundo mês em horas extras
3	120.000	120.000 liquidificadores produzidos no terceiro mês em horário normal
4	180.000	30.000 liquidificadores produzidos no terceiro mês em horário normal e estocados até o quarto mês + 150.000 produzidos no quarto mês em horário normal

EXERCÍCIOS 5.2

1, Analise a rede abaixo e faça o que é pedido:



Considere que os números indicados em cada aresta significam o número de quilômetros necessários para um automóvel percorrer a estrada entre duas cidades indicadas pelos nós extremos das arestas observadas. Monte o modelo que determine a rota que um automóvel deve seguir para sair de Chapecó e chegar a Porto Alegre, percorrendo a menor quantidade de quilômetros possível (resolva através do Solver).

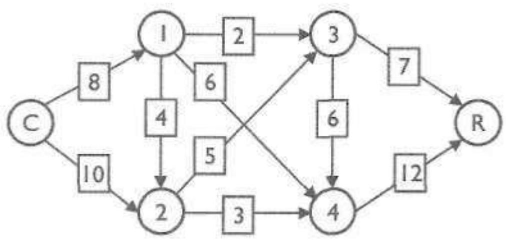
2. Utilizando a mesma rede do exercício anterior (questão 1), considere agora que os números indicados nas arestas indicam a quantidade máxima de milhões de kw/hora possível de ser enviada de uma cidade para outra (indicadas pelos nós extremos das arestas), e que a cidade de Porto Alegre precisa de toda a energia possível que possa ser enviada a partir de Chapecó, para suprir uma deficiência temporária do seu sistema de abastecimento. Monte um modelo que determine a quantidade máxima de energia que pode sair de Chapecó e chegar a Porto Alegre, respeitando os limites de transmissão de cada eletrovia (resolva através do Solver).

3. A Aracne S/A fabrica uma variedade de aparelhos domésticos em uma única fábrica. A demanda esperada para um desses aparelhos domésticos durante os próximos quatro meses está representada na tabela abaixo, junto com os custos de produção esperados, além da capacidade de produção desses itens. Além da produção normal, é possível uma produção extra, a um custo maior em RS 10,00, ou seja, no primeiro mês a produção normal custa R$49,00, e a produção extra custa R$59,00 (custos unitários). A capacidade de produção extra também pode ser observada na tabela abaixo:

	Mês			
	1	2	3	4
Demanda	420	580	310	540
Custo de Produção	$49,00	$45,00	$46,00	$47,00
Capacidade de Produção	500	470	300	450
Capacidade Extra	50	60	45	20

A Aracne S/A estima que gastará $1,50 por mês para cada unidade desses aparelhos guardados em estoque de um mês para o seguinte. A empresa quer produzir pelo menos 300 unidades por mês. A empresa quer determinar quanto de cada aparelho deve fabricar durante cada um dos quatro meses em produção normal e em produção extra, para atender às demandas ao menor custo. Determine um problema de programação linear adequado para tanto. Dica: desenhe uma rede para escala de produção.

4. A Oleobrás dispõe de uma série de oleodutos que servem para transportar óleo do campo produtor para as refinarias. Considere o esquema abaixo onde são mostradas as possíveis ligações entre o campo C e a refinaria R, onde os círculos numerados são estações de bombeamento e os quadrados numerados indicam o fluxo máximo de óleo que pode ser bombeado entre duas estações.



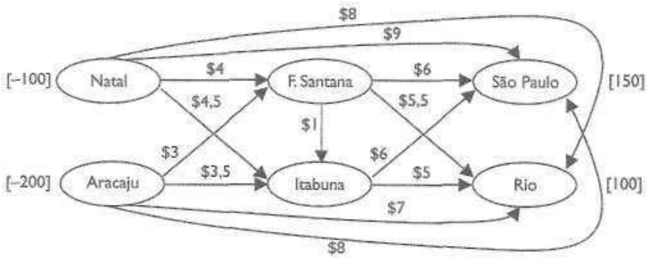
Formule o problema de maneira a determinar o fluxo máximo de óleo que pode chegar à refinaria R.

5. A Ego Trip S.A. manufatura ferramentas em duas fábricas: uma em São Paulo e outra no Rio de Janeiro. A fábrica de São Paulo pode produzir até 150 unidades por dia e a do Rio de Janeiro pode produzir até 200. As ferramentas são enviadas via aérea para os distribuidores em Brasília e em Salvador, que requerem, cada um, 130 unidades por dia. A Ego Trip pode transportar os produtos diretamente a Brasília ou Salvador, ou então transportar as ferramentas primeiro até Vitória ou Belo Horizonte, para depois levar até o destino final. Os custos de transporte unitários estão mostrados na tabela a seguir:

	Para					
De	São Paulo	Rio de Janeiro	Vitória	Belo Horizonte	Brasília	Salvador
São Paulo	$0	–	$9	$12	$20	$29
Rio de Janeiro	–	$0	$14	$13	$22	$27
Vitória	–	–	$0	$5	$18	$18
Belo Horizonte	–	–	$7	$0	$16	$17
Brasília	–	–	–	–	$0	–
Salvador	–	–	–	–	–	$0

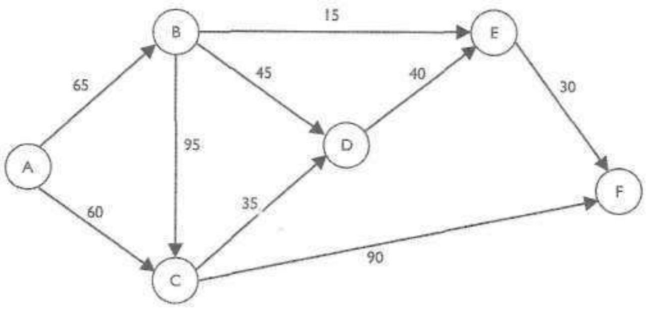
Determine a configuração ideal da distribuição de maneira a minimizar os custos da Ego Trip (resolva através do Solver).

6. Considere o modelo de rede de transporte representado na figura abaixo, onde Natal (NA) e Aracaju (AR) são fábricas de tratores e São Paulo (SP) e Rio de Janeiro (RJ) são centros consumidores. As capacidades de produção e quantidades demandadas estão indicadas entre colchetes. No modelo, as setas indicam as possíveis rotas, e a elas estão associados os custos unitários de transporte. Estabeleça o modelo para determinar as rotas a serem seguidas através, ou não, das cidades de Feira de Santana (FS) e Itabuna, para atender aos consumidores. Resolva através do Solver.

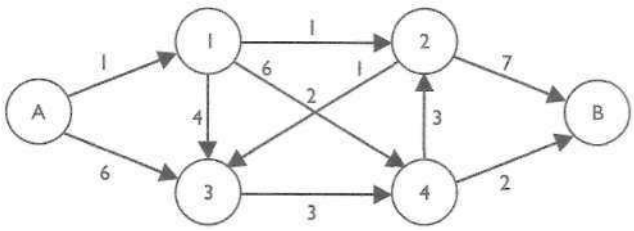


7, A empresa de logística Best Way S/A deseja saberá tonelagem máxima de material que ela pode transportar do Porto A para o Porto F através de vias fluviais. O diagrama abaixo apresenta os portos intermediários e a tonelagem máxima que pode sair de um porto para outro:

Modele o problema e resolva-o com o auxílio do Solver.



8. A rede abaixo representa uma rede de transmissão de músicas em formato MP3 entre duas estações de rádio (nós A e B) pertencentes a uma mesma empresa. O envio das músicas da estação A para a estação B pode se dar através de diversos pontos de transmissão, os quais estão representados pelos nós 1,2,3 e 4. Os valores sobre os arcos representam o tempo de transmissão (em segundos) de uma música de um nó para outro. Pede-se: descubra qual é o caminho mais rápido que a empresa deve escolher para enviar uma música da estação A para a estação B. Resolva com a ajuda do Solver.

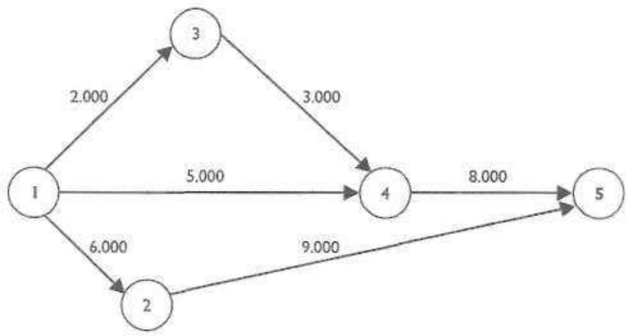


3. O supervisor de uma fábrica precisa designar quatro funcionários para formar uma equipe de manutenção. Esta equipe terá de desempenhar quatro tipos de tarefas diferentes em um cliente. Estas tarefas são executadas em forma sequenciada (início após término da anterior), e nenhum funcionário pode executar mais de uma tarefa devido a problemas sindicais. A tabela abaixo mostra o desempenho em horas dos seis melhores funcionários disponíveis no momento:

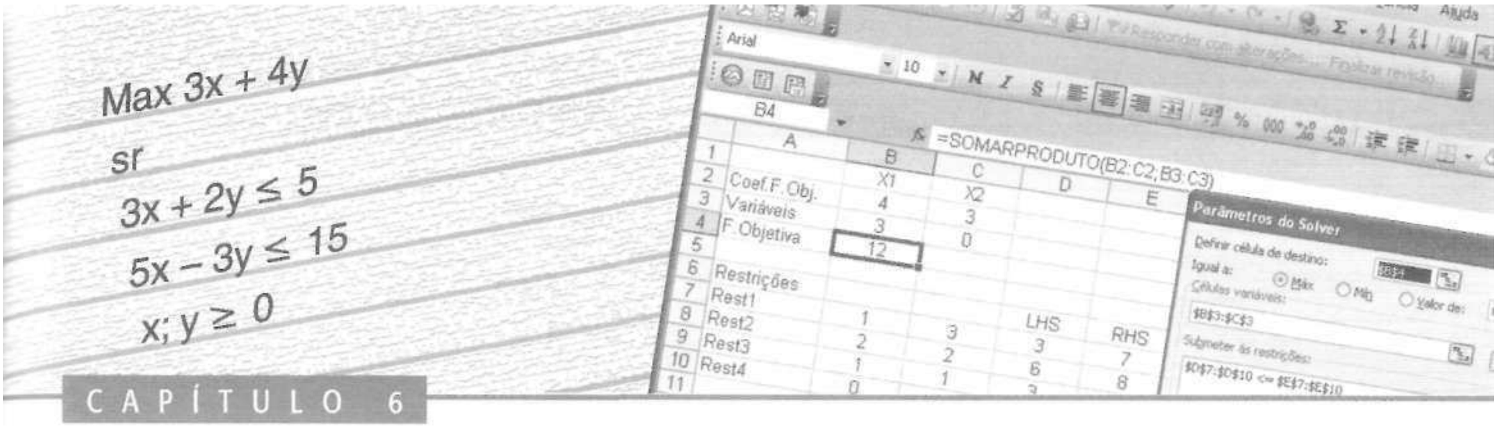
Tarefa/ Funcionário	Ubiratan (1)	Paulo (2)	Roberto (3)	Antônio (4)	Celso (5)	Plínio (6)
Tarefa 1	37,7	32,9	33,8	37	35,4	30,2
Tarefa 2	43,4	33,1	42,2	34,7	31,8	31,0
Tarefa 3	33,3	28,5	38,9	30,4	33,6	28,2
Tarefa 4	29,2	26,4	29,6	28,5	31,1	27,0

Como a maioria dos funcionários é muito rápida em mais de uma tarefa, não é fácil designar a equipe que conseguirá minimizar o tempo total de realização das tarefas. Formule o problema como uma rede e encontre a melhor equipe com a ajuda do Solver.

10. Uma firma industrial localizada na Cidade 1 embarca seu produto através de via férrea para a Cidade 5. Várias rotas diferentes estão disponíveis, como mostrado no diagrama de rede a seguir:



Cada círculo na cadeia representa uma cidade com junção de via férrea. Cada seta é uma filial de via férrea entre duas cidades. O número sobre cada seta é o custo necessário para transportar 1 tonelada de produto de cidade para cidade. A empresa quer transportar 5 toneladas de seu produto da Cidade 1 para a Cidade 5 a custo mínimo. Resolva com o auxílio do Solver.



CAPÍTULO 6

Programação Inteira

Problemas de Programação Inteira são problemas de programação matemática em que uma ou mais variáveis de decisão são representadas apenas por valores inteiros. Estes problemas podem apresentar dois tipos básicos:

- Programação Inteira total: todas as variáveis de decisão são do tipo inteiro.
- Programação Inteira mista: apenas uma parte das variáveis são do tipo inteiro, enquanto outras são do tipo real.

Neste capítulo abordaremos os Problemas de Programação Linear Inteira, que são problemas de programação matemática em que a função-objetivo, bem como as restrições são lineares, porém uma ou mais variáveis de decisão são representadas apenas por valores inteiros. Podemos dizer que a diferença entre problemas de programação linear inteira e programação linear é a inclusão de pelo menos uma restrição que limita o espectro de variação de uma variável de decisão. Matematicamente, um problema de programação linear inteira total pode ser descrito como:

Otimizar: $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\text{Sujeito a: } \left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são inteiros

onde:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ (i = 1, 2, ..., m)

A primeira idéia que pode vir à mente é a de resolver o problema como se fosse um problema de programação linear e truncar os valores ótimos encontrados para cada uma das variáveis de decisão. Para problemas de grande porte, isto geralmente resultará numa solução aceitável (próxima do ótimo real) sem a violação de nenhuma das restrições.

Para problemas menores, este tipo de procedimento geralmente nos levará a soluções inaceitáveis, às vezes longe do valor ótimo.

A todo problema de programação linear inteira está associado um problema com a mesma função-objetivo e as mesmas restrições, com exceção da condição de variáveis inteiras. A este problema se dá o nome de **Problema Relaxado.**

ILP	*Problema Relaxado*
Max $3x_1 + 3x_2$	Max $3x_1 + 3x_2$
Sujeito a:	Sujeito a:
$2x_1 + 4x_2 \le 12$	$2x_1 + 4x_2 \le 12$
$6x_1 + 4x_2 \le 24$	$6x_1 + 4x_2 \le 24$
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$
x_1, x_2 são inteiros	

Quando o problema envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um problema de programa-

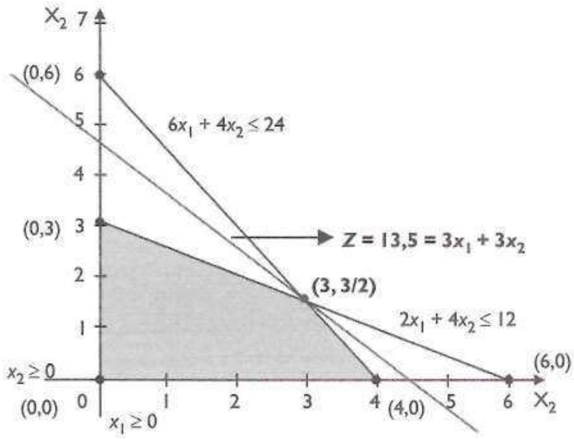


FIGURA 6.1 Solução do problema relaxado.

ção linear inteira pode ser encontrada graficamente. O problema anterior de programação linear inteira tem a seguinte solução relaxada (do problema relaxado) mostrada na Figura 6.1.

No caso do problema real, de Programação Linear Inteira, o conjunto de soluções viáveis não incluiria a solução do problema relaxado, já que o valor de x_2 na solução ótima é igual a 1,5 (não inteiro). A Figura 6.2 mostra todas as possíveis soluções para o problema inteiro (pontos nos encontros das retas tracejadas).

Vale notar que a mesma técnica de resolução utilizada em programação linear pode ser usada para se descobrir a solução do problema inteiro. Neste caso, como mostrado na Figura 6.2, a solução ótima do problema inteiro é múltipla ([2;2] , [3;1] e [4;0]) e o valor ótimo (I) é igual a 12. Neste caso, a técnica de arredondamento da solução ótima do problema relaxado traria um resultado correto, o que geralmente não é o caso.

Observemos agora o problema de programação linear inteira apresentado na Figura 6.3, que mostra a resolução gráfica do problema relaxado e a solução do problema de programação inteira.

Diversos problemas podem ocorrer pela utilização da técnica de arredondamento da solução do LP relaxado. Entre eles podemos citar:

- Nenhum ponto inteiro vizinho ao ponto ótimo relaxado é necessariamente viável.
- Mesmo que um dos vizinhos seja viável, ele pode não ser necessariamente o ponto ótimo inteiro.

Uma idéia que pode resultar em uma solução para um problema de programação inteira é o de se enumerar todas as possíveis soluções.

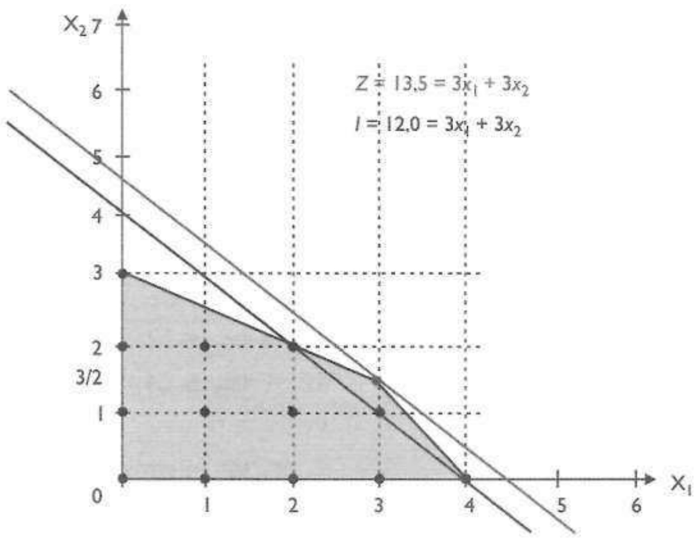


FIGURA 6.2 Solução do problema inteiro.

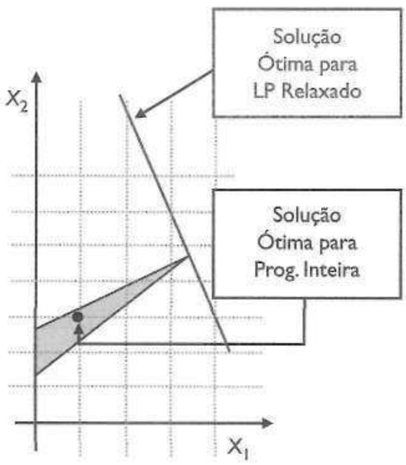


FIGURA 6.3 Solução do problema relaxado e inteiro.

De forma exaustiva, todos os valores possíveis para a função-objetivo são calculados e é escolhido aquele que apresenta o maior valor, no caso de maximização, ou **o** menor valor, no caso de minimização. O problema está no fato de que ela só consegue ser aplicada a problemas pequenos. O número de combinações possíveis de soluções cresce de forma exponencial, isto é, de forma muito rápida. Um ILP com 100 variáveis de decisão do tipo binária (variáveis que assumem os valores 0 ou 1) terá até 2^{100} soluções viáveis, isto é, 1,27 $\times$ 10^{30} soluções possíveis.

Em um problema de MAXIMIZAÇÃO, o valor ótimo da função-objetivo do LP **Relaxado** sempre representa um limite superior ao respectivo valor do **Problema Inteiro.** Em um problema de MINIMIZAÇÃO, o valor ótimo da função-objetivo de um **LP Relaxado** sempre representa um limite inferior ao respectivo **Problema Inteiro.**

Uma outra observação importante está no fato de que cada solução viável resulta num problema de MAXIMIZAÇÃO, em um limite inferior para o valor ótimo da função-objetivo. Em um problema de MINIMIZAÇÃO cada solução viável resulta num limite superior para o valor ótimo da função-objetivo.

6.1 ALGORITMO *BRANCH AND BOUNDS*

O algoritmo de *Branch and Bounds* é o procedimento mais utilizado atualmente na resolução de problemas do tipo ILP ou MILP. Existem diversas variantes deste método para tratamento de diversos tipos de problemas específicos. A idéia geral é o de se dividir o conjunto de soluções viáveis, em subconjuntos sem interseções entre si, calculando-se os limites superiores e inferiores para cada subconjunto e eliminar certos subconjuntos de acordo com regras preestabelecidas.

Considere o problema a seguir.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } 3x_1 + 3x_2\\
&\text{Sujeito a:}\\
&x_1 + 4x_2 \le 12\\
&6x_1 + 4x_2 \le 24\\
&x_1, x_2 \ge 0\\
&x_1, x_2 \text{ são inteiros}
\end{aligned}
$$

A Figura 6.4 apresenta a solução ótima ($x_1=2{,}4$ e $x_2=2{,}4$) do problema relaxado que, por se tratar de um problema de maximização, impõe um limite superior (72/5) ao valor ótimo da função-objetivo. Como o ponto $x_1=1$; $x_2=2$ faz parte do conjunto de soluções viáveis, ele impõe um limite inferior (9) ao valor ótimo da função-objetivo. Com estas observações, estabelecemos um intervalo para o valor ótimo da função-objetivo ($9 \le$ valor da função ótima $\le 72/5$).

Chamaremos $72/5$ de LSA (Limite Superior Atual) e 9 de LIA (Limite Inferior Atual) e a solução do problema relaxado de $x_1=2{,}4$ e $x_2=2{,}4$. Poderemos representar estas condições como um ponto inicial do algoritmo representado da forma a seguir.

$x_1 = 2{,}4$
$x_2 = 2{,}4$
LSA = 72/5
LIA = 9

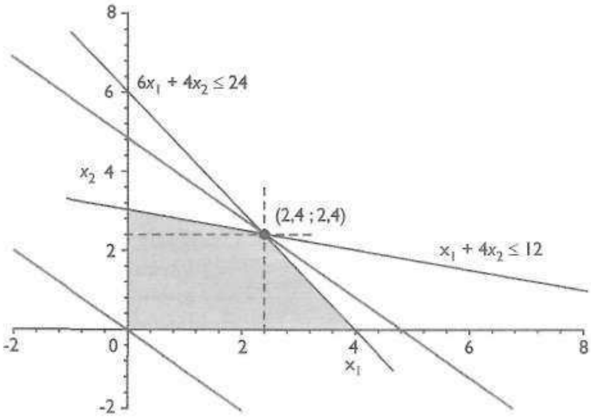


FIGURA 6.4 Solução do problema relaxado.

Como sabemos que os valores de x_1 e x_2 não podem ser fracionários, podemos escolher um dos dois para tentar torná-lo inteiro. Escolhendo a variável x_2 estaremos dizendo que seu valor deve ser menor ou igual a dois ou então maior ou igual a três, já que nenhum número neste intervalo é viável. Podemos então dividir este problema original em dois subproblemas (problemas 2 e 3).

Problema 2	*Problema 3*
Max $3x_1 + 3x_2$	Max $3x_1 + 3x_2$
Sujeito a:	Sujeito a:
$x_1 + 4x_2 \leq 12$	$x_1 + 4x_2 \leq 12$
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$	$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
$x_1 \leq 2$	$x_1 \geq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$
x_1, x_2 são inteiros	x_1, x_2 são inteiros

Isto representa a eliminação de uma parte do conjunto de soluções viáveis do problema, mostrado na Figura *6.5.*

O próximo passo é verificar quais as soluções para os problemas relaxados 2 e 3 (Figura *6.6).* As respostas podem ser observadas na Figura 6.7.

Por mero acaso a solução ótima para ambos os problemas tem a mesma reta como suporte. No problema 2 relaxado a solução ótima é $X\backslash=2$ e $x_2 = 5/2$, levando a um valor ótimo da função-objetivo de 27/2. No problema relaxado 3 a solução ótima é $xj = 3$ e $x_2 = 3/2$, levando a um valor ótimo da função-objetivo também de 27/2 (lembre-se de que ambas as soluções estão sobre a mesma reta).

Podemos representar graficamente estas soluções como apresentado na Figura 6.7.

Como em ambos os casos o valor ótimo do problema relaxado é menor que o LSA, este valor passa a ser o melhor valor que a função ótima pode atingir. Com estas observações estabelecemos um intervalo para o valor ótimo da função-objetivo (9 < valor da função ótima < 27/2).

Vale observar que o valor de x_2 ainda é fracionário em ambos os casos (problemas 2 e 3). Portanto, podemos subdividir ambos os problemas em duas partes. O problema 2 pode ser dividido como mostrado a seguir:

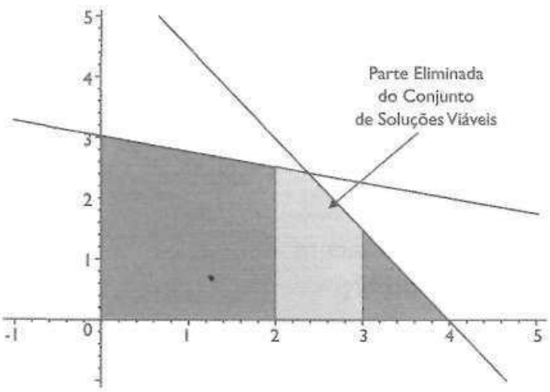


FIGURA 6.5 Região eliminada do conjunto de soluções viáveis.

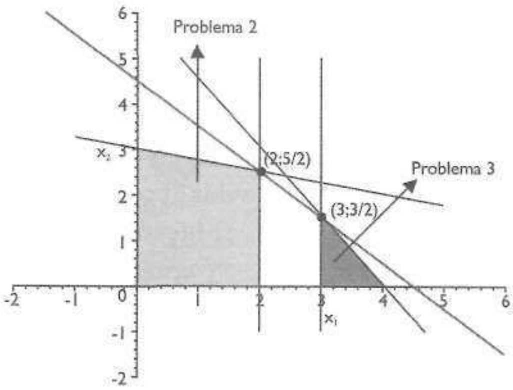


FIGURA 6.6 Resultado dos problemas relaxados 2 e 3.

Problema 4

Max $3x_1 + 3x_2$

Sujeito a:

$$x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 são inteiros

Problema 5

Max $3x_1 + 3x_2$

Sujeito a:

$$x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_2 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 são inteiros

Problema 6

Max $3x_1 + 3x_2$

Sujeito a:

$$x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 são inteiros

Problema 7

Max $3x_1 + 3x_2$

Sujeito a:

$$x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 3$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 são inteiros

O problema 3 pode ser dividido como mostrado a seguir:

O próximo passo, portanto, é resolver este conjunto de problemas relaxados. A resposta para o problema 4 é mostrada na Figura 6.8.

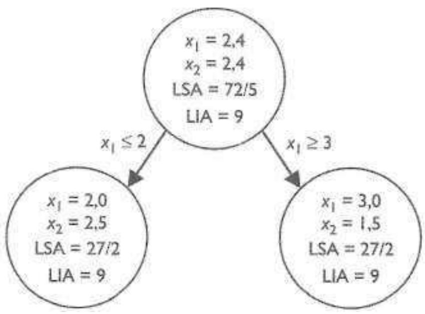


FIGURA 6.7 Árvore de solução de algoritmo de *Branch and Bounds.*

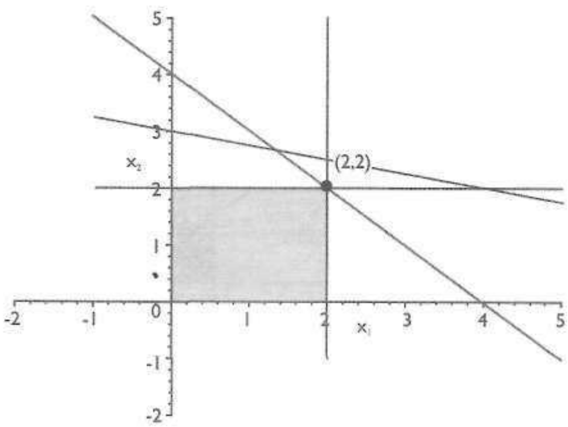


FIGURA 6.8 Solução do problema relaxado 4.

Como a solução do problema 4 relaxado é inteiro, isto encerra este ramo da árvore do algoritmo, já que ambos os valores de x_1 e x_2 são inteiros. Vale notar que o problema 5 tem apenas 1 ponto no conjunto de soluções viáveis, $x_1=0$ e $x_2=3$, sendo esta, portanto, a solução ótima do mesmo.

A resposta para o problema 6 é mostrada na Figura *6.9.* Também podemos observar da Figura *6.9* o conjunto de soluções viáveis do problema 7 é vazio, isto é, o problema é inviável.

Estas soluções podem ser representadas pela árvore a seguir (Figura 6.10).

Como podemos verificar, apenas um ramo da árvore ainda não tem uma solução definitiva. Portanto, devemos dividir este ramo em duas partes, como mostrado a seguir:

Problema 8

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 3x_1 + 3x_2\\
&\text{Sujeito a:}\\
&x_1 + 4x_2 \le 12\\
&6x_1 + 4x_2 \le 24\\
&x_1 \ge 3\\
&x_2 \le 1\\
&x_1 \le 3\\
&x_1, x_2 \ge 0\\
&x_1, x_2 \text{ são inteiros}
\end{aligned}$$

Problema 9

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 3x_1 + 3x_2\\
&\text{Sujeito a:}\\
&x_1 + 4x_2 \le 12\\
&6x_1 + 4x_2 \le 24\\
&x_1 \ge 3 \quad \text{(Redundante)}\\
&x_2 \le 2\\
&x_1 \ge 4\\
&x_1, x_2 \ge 0\\
&x_1, x_2 \text{ são inteiros}
\end{aligned}$$

Naturalmente que os problemas poderiam ser reduzidos. Por exemplo: dizer que $x_1 \ge 3$ e $x_1 \le 3$ é o mesmo que dizer $x_1 = 3$. Os problemas são mostrados desta maneira para ressaltar a forma como o processo ocorre, sem nenhuma preocupação com performance.

A solução para o problema 8 pode ser vista na Figura 6.11. Vale notar que, como o valor de x_t tem que ser igual a três, o conjunto de soluções viáveis é o segmento de reta perpendicular ao eixo das abscissas de x_2 igual a zero até x_2 igual a um. A solução ótima é, portanto, o ponto x_x igual a três e x_2 igual a um. O valor da função-objetivo neste ponto é de 12.

O problema 9 apresenta apenas um ponto no conjunto de soluções viáveis. Portanto, este ponto, x_z igual a quatro e x_2 igual a zero, é a solução ótima do problema com valor ótimo de 12.

Estes resultados podem ser incorporados à nossa árvore como mostrado na Figura 6.12.

Como podemos notar, todos os ramos da árvore apresentam soluções inteiras e/ou inviáveis. Isto, portanto, encerra o processo do algoritmo. Observando os anéis finais de cada ramo, podemos notar que a solução para o ILP é múltipla, já que três ramos atingiram a mesma solução ótima inteira. Caso uma das soluções finais dos ramos fosse maior que as outras, escolheríamos a maior solução inteira. As soluções ótimas do problema inteiro e do linear relaxado são mostradas na Figura 6.13.

Independentemente da ordem em que os problemas são resolvidos, isto é, como a árvore de soluções é percorrida (Figura 6.14), a solução ótima achada será a mesma.

Comparativamente ao LP correspondente, o ILP levará muito mais tempo para ser resolvido. Isto está ligado ao fato de que mais de um (algumas vezes centenas) problema de LP são resolvidos para se obter a solução de um IP.

Se o problema for interrompido no meio do processo, o valor de LIA será uma solução aproximada do

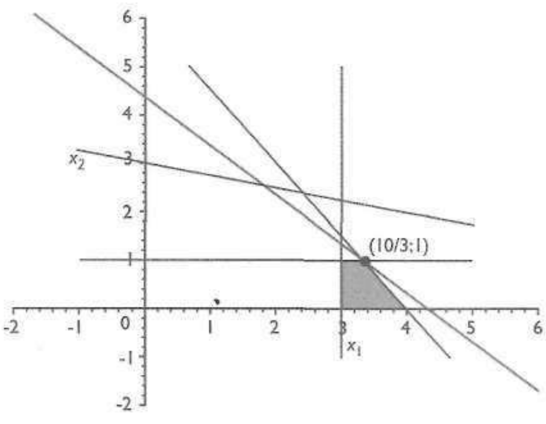


FIGURA 6.9 Solução do problema relaxado 6.

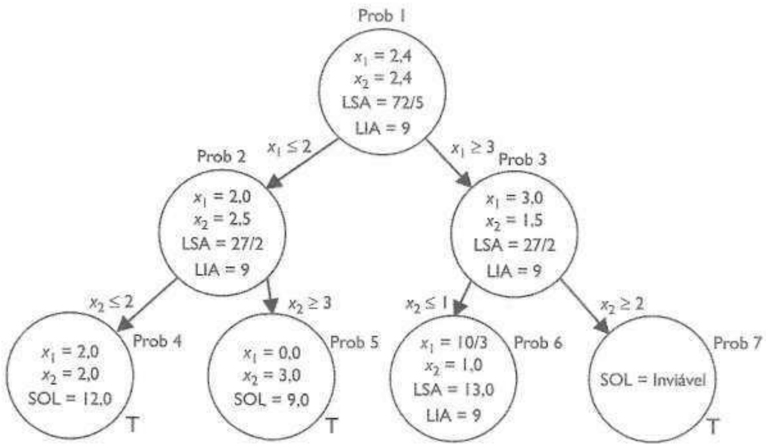


FIGURA 6.10 Árvore de resolução do algoritmo de *Branch and Bounds.*

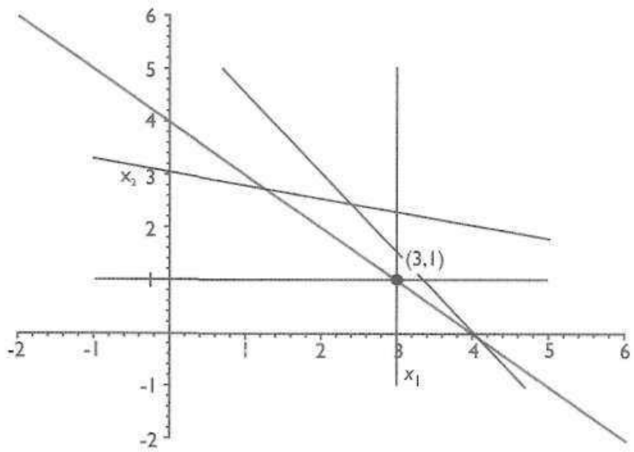


FIGURA 6.11 Solução do problema relaxado 8.

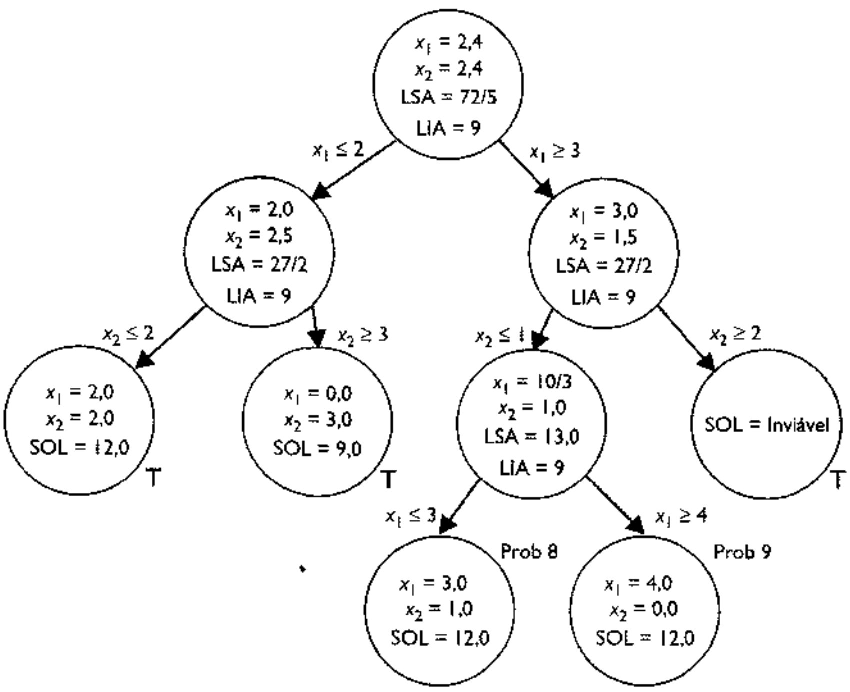


FIGURA 6.12 Árvore de solução de algoritmo de *Branch and Bound.*

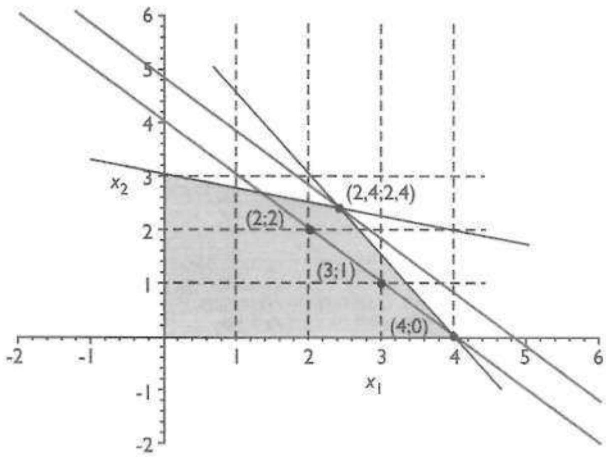


FIGURA 6.13 Soluções do problema inteiro e do relaxado.

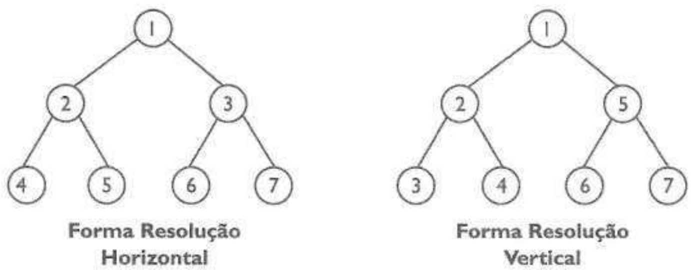


FIGURA 6.14 Representação da forma de resolução de um ILP.

problema inteiro. A diferença entre LSA e LIA será o erro máximo que nossa solução ótima do problema inteiro pode apresentar.

A solução obtida num problema IPL ou MIPL contém menos informações que o problema PL correspondente. Algumas diferenças são:

- Inexistência de análise de sensibilidade. Este tipo de análise deve ser efetuada alterando-se o problema e obtendo-se nova solução.
- Inexistência de informação similar ao preço-sombra.
- Muitos softwares que realizam programação inteira são parte integrante de pacotes de programação linear e produzem análise de sensibilidade, independente desta não ter valor no âmbito de programação inteira. Nestes casos devemos desconsiderar estas análises.

Para avisar o Solver do Excel que uma ou mais variáveis são inteiras, devemos adicionar uma restrição ao problema. Para tal, quando estivermos adicionando restrições, a coluna intermediária deve ter a opção *num (int)* ou bin *(bin)* assinalada. As Figuras 7.15 e 7.16 mostram as janelas em que as duas opções estão disponíveis.

A opção *num* denota que a variável pode assumir qualquer valor inteiro, enquanto a opção *bin* denota que a variável pode apenas assumir os valores zero ou um, isto é, ser uma variável inteira binária.

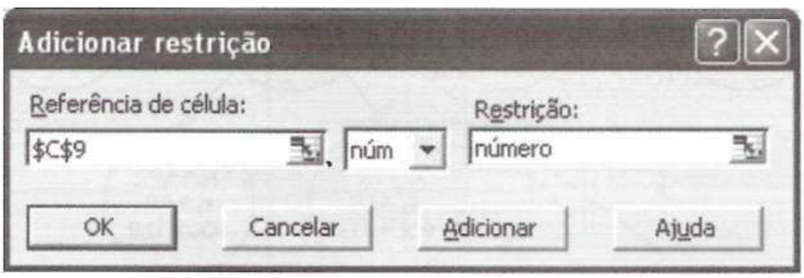


FIGURA 6.15 Janela com escolha de opção de variável inteira.

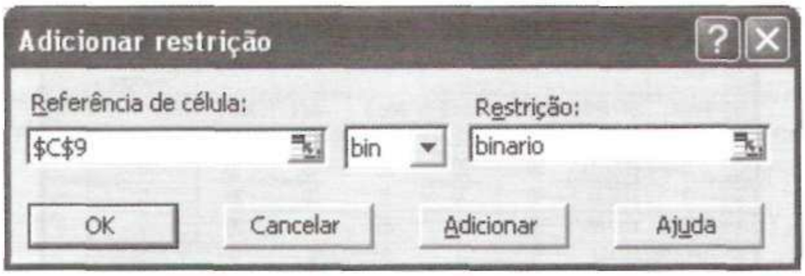


FIGURA 6.16 Janela de adição de restrições para denotar variáveis binárias.

6.2 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Nesta seção mostraremos uma série de exemplos de problemas reais em que a programação inteira pode ser utilizada.

Caso LCL Tecnologia Ltda.

A LCL Tecnologia tem que planejar seus gastos em Pesquisa e Desenvolvimento para os próximos cinco anos. A empresa pré-selecionou quatro projetos e deve escolher dentre estes quais priorizar. Os dados relevantes ao problema encontram-se na Tabela 6.1. Nela também se encontra a disponibilidade de capital a ser alocado em cada um dos anos, bem como o valor presente líquido de cada projeto. Como todos os projetos apresentam NPV positivos, todos seriam candidatos. Vale notar que existe uma limitação no valor a ser investido anualmente.

Tabela 6.1 **Dados Relativos à Alocação de Recursos em Projetos**

		Capital Requerido em mil R$				
Proj.	**NPV(8%) (mil R$)**	**Ano 1**	**Ano 2**	**Ano 3**	**Ano 4**	**Ano 5**
1	$105,99	70	15	0	20	20
2	$128,90	80	20	25	15	10
3	$136,14	90	20	0	30	20
4	$117,38	50	30	40	0	20
Capital Disponível		200	70	70	70	70

O primeiro passo de um problema de programação matemática é a definição das variáveis de decisão. Neste caso a decisão é simples. Devemos ter quatro variáveis binárias, cada uma delas assumindo valor zero quando o projeto não for selecionado e o valor um quando o projeto for selecionado. Matematicamente podemos representar as variáveis como:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o projeto } i \text{ for selecionado} \\ 0, & \text{se o projeto } i \text{ não for selecionado} \end{cases} \quad i = 1,2,3,4$$

O que a empresa pretende é alocar seus recursos de uma maneira eficiente, isto é, maximizar o somatório dos valores presentes líquidos dos projetos a serem executados. Matematicamente isto pode ser representado por:

$$Max\, 105{,}99X_1 + 128{,}90X_2 + 136{,}14X_3 + 117{,}38X_4$$

As únicas restrições impostas ao modelo são as orçamentárias, isto é, as limitações de recursos a serem aplicados anualmente. Matematicamente estas restrições podem ser representadas pelas inequações a seguir:

$$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200 \qquad \text{Ano 1}$$
$$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70 \qquad \text{Ano 2}$$
$$25X_2 + 40X_4 \leq 70 \qquad \text{Ano3}$$
$$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70 \qquad \text{Ase}$$
$$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70 \qquad \text{Ano 5}$$

Uma das maneiras de modelar este problema utilizando a planilha Excel é apresentada na Figura 6.17. Nela, as células de H4 à H7 representam as variáveis de decisão do problema, as células de C8 à G8 o LHS das cinco restrições e as células de C9 à G9 os RHS das mesmas. As fórmulas utilizadas nas restrições são apresentadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 **Restrições do Problema de Alocação de Recursos em Projetos**

Restrição	Célula	Fórmulas Referentes ao LHS das Restrições
$70X_1 + 80X_2 + 90X_3 + 50X_4 \leq 200$	C8	=SOMARPRODUTO (C4:C7;$H$4:$H$7)
$15X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \leq 70$	D8	=SOMARPRODUTO (D4:D7;$H$4:$H$7)
$25X_2 + 40X_4 \leq 70$	E8	=SOMARPRODUTO (E4:E7;$H$4:$H$7)
$20X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 70$	F8	=SOMARPRODUTO (F4:F7;$H$4:$H$7)
$20X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 20X_4 \leq 70$	G8	=SOMARPRODUTO (G4:G7;$H$4:$H$7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			LCL Tecnologias - Planejamento Orçamentário					
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	0
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	0
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	0
8	Capital Necessário		0	0	0	0	0	
9	Capital Disponível		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	0					
12								

FIGURA 6.17 Modelagem do Caso LCL Tecnologia.

O último passo a ser seguido é a definição do modelo na ferramenta Solver do Excel. As janelas de parâmetros e opções do Solver devem ser preenchidas como apresentadas nas Figura 6.18.

O resultado da otimização é mostrado na Figura 6.19.

Vale observar que o projeto com o maior NPV não foi selecionado. Isto se deve, possivelmente, à restrição do primeiro ano, já que a aceitação do Projeto 3 implicaria a não-aceitação de outros dois projetos.

As variáveis binárias também se prestam a selecionar alternativas que sejam condicionais. Imagine que apenas um dos projetos 1, 3 e 4 pudesse ser selecionado. Para que tal condição estivesse contida no problema, deveríamos então adicionar a seguinte restrição:

$$X_1 + X_3 + X_4 \leq 1$$

Agora, se um e apenas um dos projetos 1, 2 e 4, tivesse que ser escolhido, então a restrição (abaixo) deveria ser introduzida:

$$X_1 + X_2 + X_4 = 1$$

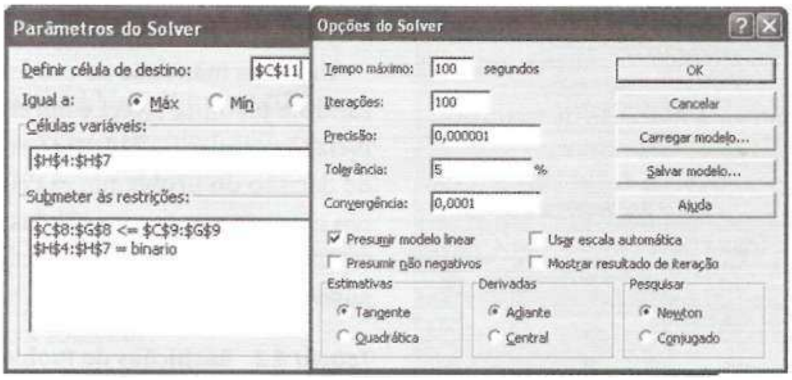


FIGURA 6.18 Parâmetros e opções do Solver do problema de alocação de recursos.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			LCL Tecnologias - Planejamento Orçamentário					
2								Seleciona
3	Projeto	NPV (8%)	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	0-Não / 1 - Sim
4	1	$105,99	70	15	0	20	20	1
5	2	$128,90	80	20	25	15	10	1
6	3	$136,14	90	20	0	30	20	0
7	4	$117,38	50	30	40	0	20	1
8	Capital Necessário		200	65	65	35	50	
9	Capital Disponível		200	70	70	70	70	
10								
11		NPV Total =	352,2665					

FIGURA 6.19 Resultado da otimização do problema de alocação de recursos.

Imagine agora que o projeto 1 dependa de uma tecnologia que deve ser desenvolvida pelo projeto 2, isto é, o projeto 1 só pode ser aprovado se, e somente se, o projeto 2 for aceito. Deveríamos então incluir a seguinte restrição

$$X_1 - X_2 \leq 0 \begin{cases} X_1 = 0, X_2 = 0 \Rightarrow \text{nenhum dos projetos aceitos} \\ X_1 = 1, X_2 = 1 \Rightarrow \text{ambos os projetos aceitos} \\ X_1 = 0, X_2 = 1 \Rightarrow \text{apenas o projeto 2 foi aceito} \\ X_1 = 1, X_2 = 0 \Rightarrow \text{inviável} \end{cases}$$

Caso LCL Equipamentos Ltda.

A LCL Equipamentos Ltda. produz três tipos de furadeiras, que necessitam de tempos diferentes na linha de montagem. Para que cada tipo de furadeira seja fabricada, um custo de preparação da fábrica é incorrido (ajustes que devem ser efetuados na linha de montagem). Suponha que todas as furadeiras do mesmo tipo serão produzidas de uma só vez (apenas uma preparação por tipo). Os dados relevantes à análise do problema encontram-se na Tabela 6.3. Ache as quantidades a serem fabricadas para maximização do lucro do próximo mês.

***Tabela 6.3* Dados Relevantes ao Problema de Preparação de Linhas de Montagem**

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Total Disponível
Montagem	2h	3h	2,5h	600h
Pintura	3h	2h	2,5h	500h
Lucro Unitário	R$50	R$60	R$65	
Preparação	R$5.000	R$4.000	R$3.000	

O primeiro passo é a determinação das variáveis de decisão. Este é um caso de problema de programação mista, já que parte das restrições é real e parte é binária. Isto se deve ao fato de que os custos de preparação do maquinário só serão incorridos se os referidos produtos tiverem, pelo mesmo, uma unidade produzida. Isto cria uma interdependência entre as variáveis de decisão, que será refletida nas restrições. Neste caso as variáveis de decisão são:

$$X_i = \text{Quantidade a ser produzida do produto } i (i = 1, 2, 3)$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i > 0 \\ 0, & \text{se } X_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

Repare que os valores de Y_i serão dependentes de X_i. O segundo passo é identificar a função-objetivo do problema. Neste caso queremos maximizar os lucros, que matematicamente são representados por:

$$Max\ 50X_1 + 60X_2 + 65X_3$$
$$-5000Y_1 - 4000Y_2 - 3000Y_3$$

As parcelas negativas correspondem aos valores gastos com a preparação do maquinário. Estes valores serão diferentes de zero se, e somente se, o correspondente Y_i for diferente de zero, isto é, se o produto X_i for produzido.

Existem dois tipos de restrições neste problema. O primeiro tipo diz respeito às restrições de produção. Os departamentos de montagem e pintura têm um limite de horas disponíveis para produção no próximo mês. Isto restringe a produção dos itens. Estas restrições podem ser matematicamente descritas por:

$$2X_1 + 3X_2 + 2{,}5X_3 \leq 600\ ; 3X_1 + 2X_2 + 2{,}5X_3 \leq 500$$

O outro tipo de restrição diz respeito às relações entre as variáveis. Elas podem ser descritas pelas seguintes inequações:

$$X_1 \leq 600Y_1 \quad ; \quad X_2 \leq 600Y_2 \quad ; \quad X_3 \leq 600Y_3$$

Vale observar os coeficientes 600 existentes do lado direito da inequações. Este valor é muito maior do que cada uma das variáveis X_i pode assumir. Note que se X_1, X_2 ou X_3 forem iguais a 600, a restrição relativa à produção no departamento de montagem seria falsa, tornando a solução inviável. As restrições só serão válidas se os valores de Y_i e os correspondentes X_i forem iguais a zero ou se os valores de Y_i, e os correspondentes X_i forem diferentes de zero.

Uma das possíveis modelagens é mostrada na Figura 6.20. A célula BI 1 representa a função-objetivo. As células de B9 à D10 representam as variáveis de decisão. As células E3 a E4 representam os LHS, e F3 à F4 os RHS das restrições de produção. As células de B9 à D9 também representam os LHS das restrições que relacionam as variáveis de decisão. Os RHS destas são denotadas pelas células de B8 à D8. Todas as fórmulas referentes às restrições são mostradas na Tabela 6.4.

O último passo a ser seguido é a definição do modelo na ferramenta Solver do Excel. As janelas de parâmetros e opções do Solver devem ser preenchidas como apresentado na Figura 6.21.

Os resultados da otimização são apresentados na Figura 6.22.

	A	B	C	D	E	F
1			Furadeira		Horas	Horas
2		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Produção	Disponíveis
3	Montagem	2	3	2,5	0	600
4	Pintura	3	2	2,5	0	500
5	Lucro Unitário	50	60	65		
6	Custo Preparação	5000	4000	3000		
7	Limites Produção	600	600	600		
8	Limites Reais	0	0	0		
9	Unid.Produzidas	0	0	0		
10	Produção (0/1)	0	0	0		
11	Lucro Total	0				

FIGURA 6.20 Modelagem do Caso LCL Equipamentos.

Tabela 6.4 **Fórmulas das Restrições do Problema de Preparação de Linhas de Montagens**

Função-objetivo	Célula	Fórmula
$Max\ 50X_1 + 60X_2 + 65X_3$ $-5000Y_1 - 4000Y_2 - 3000Y_3$	B11	=SOMARPRODUTO(B5:D5;B9:D9) -SOMARPRODUTO(B6:D6,B10:D10)
Restrição	*Célula*	*Fórmulas Referentes ao LHS/RHS*
$2X_1 + 3X_2 + 2{,}5X_3 \leq 600$	E3	=SOMARPRODUTOT(B3:D3;\$B\$9:\$D\$9)
$3X_1 + 2X_2 + 2{,}5X_3 \leq 500$	E4	=SOMARPRODUTO(B4:D4;\$B\$9:\$D\$9)
$X_1 \leq 600Y_1$	B8	=B7*B10
$X_2 \leq 600Y_2$	C8	=C7*C10
$X_3 \leq 600Y_3$	D8	=D7*D10

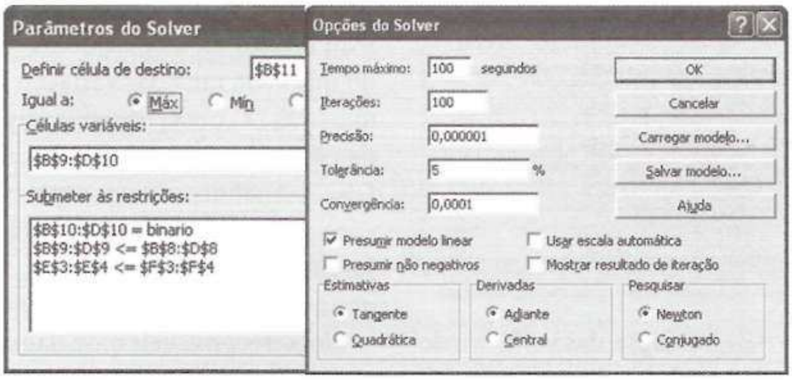


FIGURA 6.21 Parâmetros e opções do solver do Caso LCL Equipamentos.

	A	B	C	D	E	F
1			Furadeira		Horas	Horas
2		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Produção	Disponíveis
3	Montagem	2	3	2,5	500	600
4	Pintura	3	2	2,5	500	500
5	Lucro Unitário	50	60	65		
6	Custo Preparação	5000	4000	3000		
7	Limites Produção	600	600	600		
8	Limites Reais	0	0	600		
9	Unid.Produzidas	0	0	200		
10	Produção (0/1)	0	0	1		
11	Lucro Total	10000				

FIGURA 6.22 Resultados da otimização do Caso LCL Equipamentos.

EXERCÍCIOS 6

1, A Arte & Design Ltda. produz três tipos de estantes, que necessitam de tempos diferentes na linha de montagem. Para que cada tipo de estante seja fabricada, um custo de preparação da fábrica é incorrido. Suponha que todas as estantes do mesmo tipo serão produzidas de uma só vez (apenas uma preparação por tipo). A tabela a seguir resume os dados relevantes para a análise do problema:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Total Disponível
Montagem	2 horas	5 horas	3,5 horas	400 horas
Pintura	3 horas	2 horas	1,5 horas	800 horas
Preço Unitário	R$40,00	R$30,00	R$25,00	–
Custo de Preparação	R$5.000,00	R$2.000,00	R$5.000,00	–

Sabendo que o mercado está disposto a absorver toda a produção da Arte & Design Ltda. e que as quantidades são necessariamente inteiras, determine quantas estantes de cada tipo devem ser produzidas para que a empresa maximize o seu resultado.

2. A empresa Diversão&Arte Ltda. produz dois tipos de vasos de cerâmica: pequenos vasos para arranjos de mesa e grandes vasos de chão. A capacidade de produção é de 7 vasos pequenos e de 5 vasos grandes por dia. Cada vaso grande necessita de 4 horas de secagem em estufa e um total de 22 horas diárias de estufa está disponível. Além disso, cada vaso pequeno necessita de 2,4 horas de polimento e cada vaso grande necessita de 3 horas. Um total de 19 horas de polimento está disponível diariamente. Sabendo que cada vaso pequeno é vendido com um lucro de RS 10,00 e que cada vaso grande é vendido com um lucro de R$30,00:

a) Encontre a programação ótima de produção utilizando a solução relaxada.
b) Encontre a programação ótima de produção definindo as variáveis como inteiras.
c) Encontre uma solução inteira arredondando os valores da solução encontrada no problema relaxado (letra a) para a sua parte inteira. Esta solução é viável?
d) Quanto lucro a Diversão&Arte Ltda. poderia perder se adotasse a solução encontrada no item c?

3. O prefeito de uma determinada cidade deseja determinar onde instalar postos policiais para atender a diferentes regiões metropolitanas. Os custos de instalação dos postos variam de acordo com a localização: local 1, R$3.000,00; local 2, R$5.000,00; local 3, R$1.000,00; local 4, R$2.000,00; local 5, R$1.000,00; local 6, R$4.000,00; local 7, R$3.000,00; local 8, R$1.000,00; local 9, R$2.000,00; local 10, R$2.000,00. Cada possível localização pode atender a uma série de regiões, conforme evidenciado na tabela a seguir:

Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Região1	x	x		x	x			x	x	
Região2	x		x							
Região3		x			x		x			x
Região4			x			x		x		
Região5	x	x		x		x	x		x	x

O prefeito exige que cada região da cidade seja atendida por pelo menos um posto. Formule um problema de programação inteira que determine os locais em que os postos policiais devem ser construídos de forma a minimizar os custos e atender às condições exigidas.

4. A SuperTech S/A está planejando os seus gastos em Pesquisa e Desenvolvimento para o próximo ano. A empresa selecionou quatro alternativas de projetos e deve escolher quais priorizar. Os dados do probiema encontram-se na tabela a seguir:

Projeto	Valor Presente (em mil R$)	*Capital Requerido (em mil R$)* Ano1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
1	$ 100,05	70	15	0	20	20
2	$ 170,90	80	20	25	15	10
3	$ 130,14	90	30	0	40	20
4	$ 147,30	50	20	80	0	20
Capital Disponível		150	80	90	100	70

Maximize a lucratividade da empresa

5. Uma pequena fábrica de artigos de couro faz jaquetas e bolsas à mão. Cada semana a fábrica dispõe de 80 horas de trabalho, tendo 36 metros^2 de couro disponíveis. São necessários 2 metros^2 de couro e 8 horas de trabalho para se fazer uma bolsa e 8,5 metros^2 de couro e 10,5 horas de trabalho para se fazer uma jaqueta. As bolsas geram um lucro unitário de R$100,00 enquanto as jaquetas geram um lucro unitário de R$400,00. A pequena fábrica deseja saber quanto deve produzir de cada item para minimizar os seus custos. Determine:

a) A solução inteira para este problema.
b) A solução do problema relaxado.
c) Se truncarmos a solução do item *b* chegaríamos à solução do probiema.

6. Uma empresa industrial está planejando colocar no mercado nos próximos meses um sistema de ar-condicionado que ela desenvolveu. O produto será distribuído por grandes lojas de departamentos localizadas em São Paulo, no Rio de Janeiro e em Belo Horizonte.

Devido à existência de custos diferentes de promoção e de distribuição, a receita realizada pela empresa varia em função do distribuidor. A tabela a seguir apresenta os dados relevantes para o problema:

Distribuidores	Receita por unidade vendida	Custo estimado de propaganda por unidade vendida	Esforço do grupo de vendas por unidade vendida (em horas)
Loja Depto. RJ	100	10,5	2,5
Loja Depto. BH	85	8,7	3,3
Loja Depto. SP	70	15,3	2,2

Sabe-se também que a empresa tem um orçamento semanal de propaganda no valor de R$5.000,00, além de um grupo de 20 vendedores com jornada de trabalho de 40 horas por semana. A capacidade produtiva é de até 500 unidades do produto por semana. É importante acrescentar que um acordo realizado com a loja de departamentos de São Paulo permite que esta receba, no mínimo, 20% da produção realizada.

A empresa deseja saber como realizar a colocação deste produto no mercado em termos de distribuição ótima semanal para cada um dos distribuidores. Pede-se:

a) Encontre a programação ótima de produção utilizando a solução relaxada.

b) Encontre a programação ótima de produção definindo as variáveis como inteiras.

c) Encontre uma solução inteira arredondando os valores da solução encontrada no problema relaxado (letra a) para a sua parte inteira. Esta solução é viável?

7. Uma empresa industrial fabrica três produtos, pi, p2 e p3, com lucro unitário de, respectivamente, R$2,00, R$3,00 e R$4,00. No entanto, o gerente de produção identificou as seguintes restrições no processo produtivo:

a) A capacidade produtiva total é de 30 unidades por mês.

b) Por utilizar material radioativo, a empresa recebe uma autorização do governo federal para importar apenas uma quantidade fixa de 60kg deste material, o qual deve ser plenamente utilizado durante o mês por questões de segurança.

c) As quantidades necessárias do material radioativo para fabricação dos produtos pi, p2 e p3 são de, respectivamente, 2,2kg, 1,5kg e 3,2kg.

Determine a solução inteira e a solução relaxada para este problema. Compare e interprete os resultados.

8. A Cultura para Todos é uma instituição não-governamental que periodicamente promove seminários de serviço público e programas abertos à população em geral. As alternativas de veiculação dos seminários incluem televisão, rádio e jornal. A população atingida estimada, os custos e o número máximo de inserções para cada tipo de anúncio são mostrados a seguir:

	Mídia		
	Televisão	Rádio	Jornal
População Atingida p/Anúncio	100.000	18.000	40.000
Custo por anúncio	R$1.200,00	R$145,00	R$310,00
Nº máximo de inserções	10	20	10

Se o gasto de veiculação está limitado em R$10.000,00, quantos comerciais podem ser inseridos em cada meio de comunicação buscando uma maximização do total de audiência atingida? Qual é a alocação destes R$10.000,00 dentre os três tipos de mídia, e qual o total de pessoas atingidas? Determine a solução inteira e a solução relaxada para este problema. Compare e interprete os resultados.

9. A cidade do Rio de Janeiro está estudando a realocação de diversos postos de saúde de maneira a atingir o maior número possível de bairros. As possíveis localizações para os postos e o conjunto de bairros a que estes poderiam atender são mostrados na tabela a seguir:

Localização Potencial dos Postos	Bairros Cobertos
Localização 1	1, 5, 7
Localização 2	1, 2, 7
Localização 3	1, 3, 5
Localização 4	2, 4, 5
Localização 5	3, 4, 6
Localização 6	4, 5, 6
Localização 7	1, 5, 6, 7

Dado que os terrenos são da prefeitura e que o custo de construção dos postos é constante, determine as localizações em que a prefeitura deveria construir seus postos de maneira a minimizar seus custos e atender a todos os sete bairros.

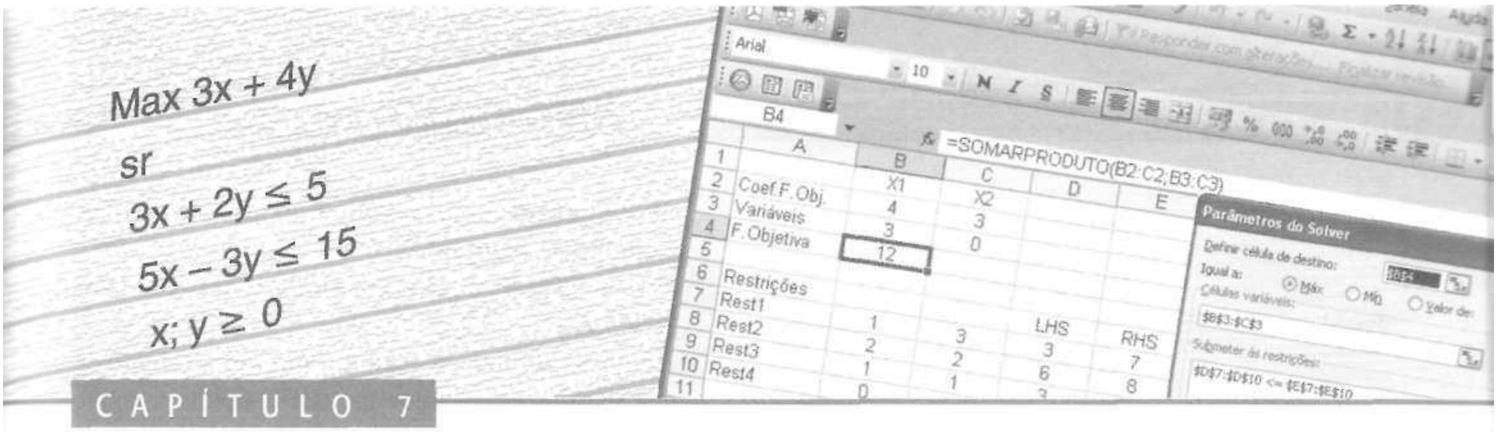
10. Uma empresa produz quatro artigos AI, A2, A3 e A4. As exigências de matéria-prima, espaço para estocagem, taxa de produção, assim como os lucros por artigo, são apresentados na tabela a seguir:

Artigos	A1	A2	A3	A4
Matéria-prima (kg/artigo)	2	2	1,3	4
Espaço (m^3/artigo)	2	2,5	2	1,5
Taxa de produção (artigo/hora)	15	33	10	15
Lucro (u.m./artigo)	5	6,5	5	5,5

A quantia total de matéria-prima disponível por dia para **todos os quatro artigos é de 180kg, o espaço disponível é** de **$230m^3$ e utilizam-se 7h30min por dia para a** produção.

Quantas unidades de cada artigo devem ser produzidas **por dia para se maximizar o lucro?**

Determine a solução inteira para esre problema- Compare esta solução com a solução do problema relaxado e indique se o valor **arredondado desta última seria a** solução ótima do **problema.**



Programação Não-linear

Conforme estudamos no início deste livro, um modelo é uma representação simplificada de uma situação real. O conceito de simplificação inerente aos modelos está principalmente relacionado ao fato de que, dada à complexidade da realidade, é praticamente impossível e/ou economicamente inviável, incluir na representação do problema todas as variáveis que podem interferir no resultado do fenômeno que estamos estudando, ou pelo seu grande número ou por desconhecimento. Assim, o modelo geralmente abrange apenas as variáveis mais relevantes e que exercem maior impacto sobre o problema.

Trabalhando com um grupo restrito de aspectos, um modelo só será útil e adequado caso represente, da maneira mais fidedigna possível, o comportamento das variáveis selecionadas. Este comportamento, no entanto, raramente se mostra tão simples de ser trabalhado como nos problemas de programação linear. Na realidade, a maioria dos modelos que trata de problemas reais apresenta algum grau de não-linearidade.

Problemas de *mix* de produtos, em que a margem de lucro por produto varia conforme a quantidade vendida, e problemas de transporte, com custos variáveis dependendo da quantidade enviada, são apenas alguns exemplos corriqueiros nos quais o comportamento das variáveis relevantes é não-linear.

Problemas de otimização em que a função-objetivo e/ou pelo menos uma das restrições envolvidas não são funções lineares das variáveis de decisão são denominados Problemas de Programação Não-linear (PNL ou *Non Linear Programming* em inglês). Neste capítulo, abordaremos as principais características deste tipo de problema, bem como apresentaremos diversas técnicas de resolvê-los com o auxílio de uma planilha eletrônica.

Um problema de programação não-linear pode ser genericamente representado da seguinte forma:

$$\text{Otimizar: } Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeito a: } \left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

Percebemos que esta representação é ampla demais para que haja um único algoritmo capaz de resolver todos os problemas que podem ser incluídos neste formato. Os problemas abaixo, por exemplo, são extremamente diferentes entre si; contudo, são todos problemas de programação não-linear:

Problema 1

$$\begin{aligned} &\text{Max } \sqrt{x_1 + x_2} + x_3^2 \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\quad e^{x_1} + x_2 + x_3 \le 43 \\ &\quad x_1, x_2 \le 30 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Problema 2

$$\begin{aligned} &\text{Min } sen x_1^2 + 3\cos x_2^3 \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\quad x_1 + \sqrt[3]{x_2} \ge 26 \\ &\quad 7x_1 + 4x_2^4 \ge 53 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Problema 3

$$\text{Max}\, Log\, x_1 + x_2 \frac{x_3}{4} + x_4^2$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 50$$
$$x_1 + 2x_2x_3x_4 \leq 30$$
$$3x_1 + \sqrt{x_3} \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Para entendermos claramente as diferenças entre problemas de programação **linear** e problemas de programação não-linear, desenvolveremos alguns exemplos. Iniciaremos com o seguinte problema de Programação Linear (PL):

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 8x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 5$$
$$2x_2 \leq 14$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

O conjunto de soluções viáveis deste problema é representado na Figura 7.1.

A solução gráfica para o mesmo é representada na Figura 7.2.

Resolver problemas lineares como este é relativamente simples. Precisamos apenas: 1) definir a região viável delimitada pelas restrições; e 2) identificar o extremo (no caso de solução ótima única) da região viável em que a função-objetivo apresenta o maior valor, no caso de um problema de maximização, ou o menor valor, para problemas de minimização.

Em nosso exemplo, a solução ótima está no ponto extremo formado por $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$, pois o mesmo apresenta o maior valor possível para a função-objetivo (Z = 58).

Agora modificaremos um pouco o problema original. Manteremos a função-objetivo, porém trocaremos as restrições lineares $2x_2 \leq 14$ e $3x_1 + 2x_2 \leq 17$ pela restrição não-linear $4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 144$:

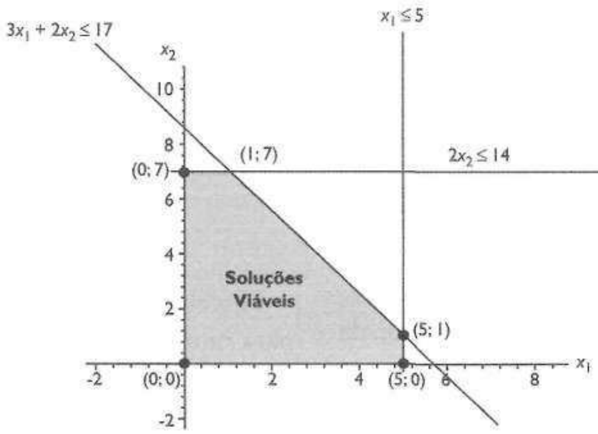


FIGURA 7.1 Conjunto de soluções viáveis.

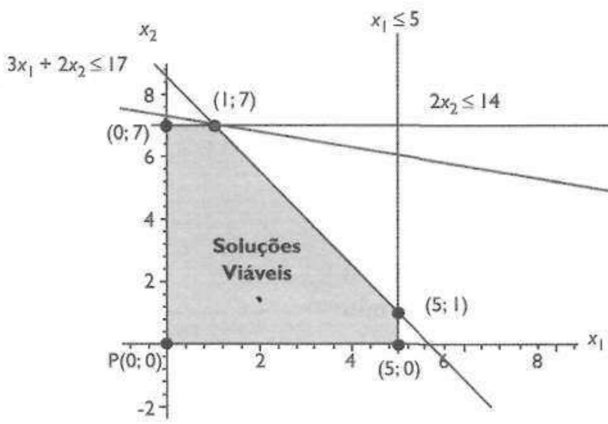


FIGURA 7.2 Solução gráfica.

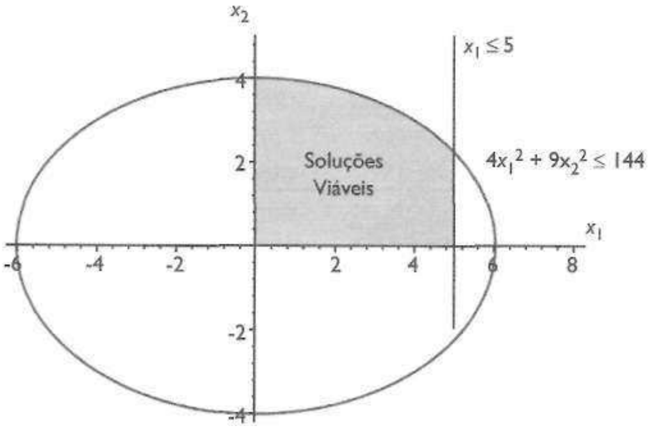


FIGURA 7.3 Conjunto de soluções viáveis do exemplo 2.

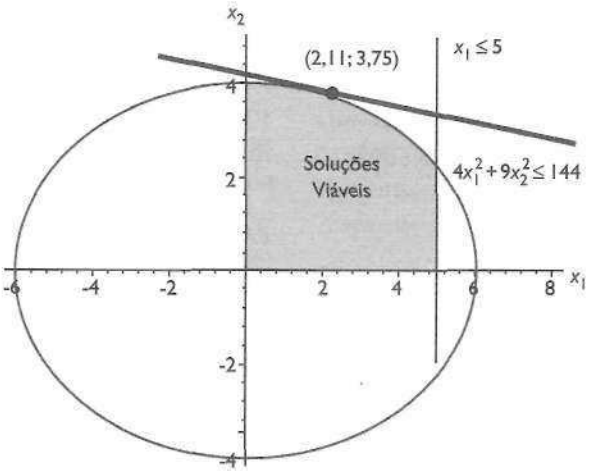


FIGURA 7.4 Solução ótima do exemplo 2.

Max $Z = 2x_1 + 8x_2$
Sujeito a:
$x_1 \leq 5$
$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 144$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Esta modificação introduz a não-linearidade no problema, modificando as fronteiras do conjunto de soluções viáveis de apenas retas para retas e curvas. Neste caso, o conjunto de soluções viáveis (Figura 7.3) tem uma fronteira delimitada por uma elipse (lugar geométrico representado pela restrição introduzida) e por diversas retas.

Neste caso, a função-objetivo é uma reta e a metodologia para se encontrar a solução ótima,é a mesma do problema de programação linear, isto é, ir incrementando o valor de Z até que nenhum ponto da reta pertença ao conjunto de soluções viáveis (Figura 7.4).

Conforme podemos perceber, a solução ótima ainda situa-se na fronteira do conjunto de soluções viáveis. No entanto, neste segundo problema, a solução ótima não é mais um extremo do conjunto de soluções viáveis. Esta constatação reflete uma das características dos problemas de programação não-linear, que é a possibilidade da solução ótima assumir qualquer valor do conjunto de soluções viáveis, não havendo a simplificação existente nos problemas de programação linear.

Suponha agora o seguinte problema não-linear em que todas as restrições são lineares (as mesmas do exemplo 1) e apenas a função-objetivo é não-linear.

Max $Z = 784x_1 - 49x_1^2 + 576x_2 - 36x_2^2$
Sujeito a:
$x_1 \leq 5$
$2x_2 \leq 14$
$3x_1 + 2x_2 \leq 17$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

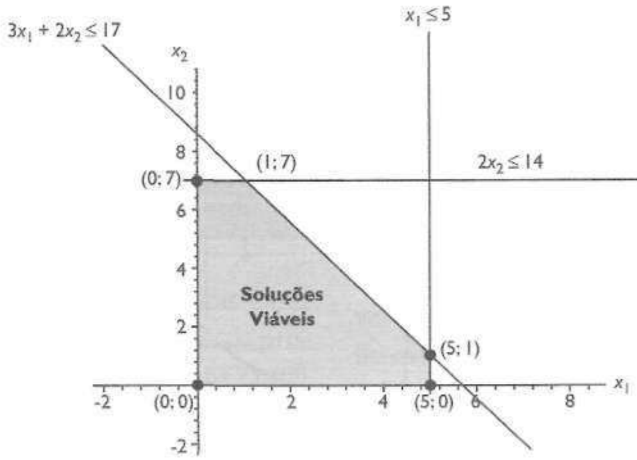


FIGURA 7.5 Conjunto de soluções viáveis do exemplo 3.

O conjunto de soluções viáveis é representado na Figura 7.5.

Assumindo que Z pode ser considerado como uma constante, temos que a função-objetivo é uma equação quadrática (uma elipse) e pode ser assim desenvolvida:[1]

$$Z = 784x_1 - 49x_1^2 + 576x_2 - 36x_2^2$$
$$Z = -49(x_1 - 8)^2 - 36(x_2 - 8)^2 + 49 \times 8^2 + 36 \times 8^2$$
$$Z = -49(x_1 - 8)^2 - 36(x_2 - 8)^2 + 3136 + 2304$$
$$Z - 5440 = -49(x_1 - 8)^2 - 36(x_2 - 8)^2$$
$$5440 - Z = +49(x_1 - 8)^2 + 36(x_2 - 8)^2$$

A metodologia para se encontrar a solução ótima do problema é a mesma dos problemas anteriores, isto é, ir se incrementando o valor de Z até que nenhum ponto da respectiva elipse faça parte do conjunto de soluções viáveis. Escolhendo três valores para "Z", temos que:

$$\text{Para} \quad Z = 3982 \Rightarrow 1458 = 49(x_1 - 8)^2 + 36(x_2 - 8)^2$$
$$\text{Para} \quad Z = 3676 \Rightarrow 1764 = 49(x_1 - 8)^2 + 36(x_2 - 8)^2$$
$$\text{Para} \quad Z = 3312 \Rightarrow 2128 = 49(x_1 - 8)^2 + 36(x_2 - 8)^2$$

Todas as três equações representam elipses no espaço R^2 (de x_1 e x_2). As equações quadráticas encontradas para os três valores escolhidos para a constante Z (3312, 3676 e 3982) estão representadas na Figura 7.6.

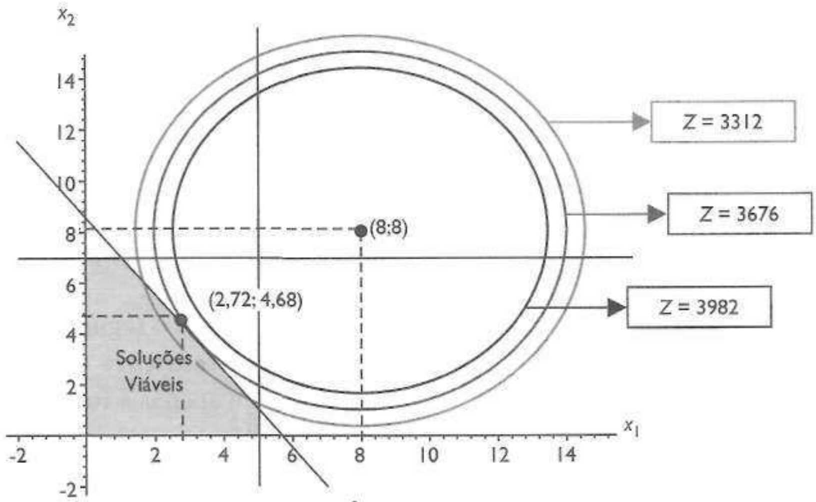


FIGURA 7.6 Solução ótima para o exemplo 3.

[1] Para aqueles que sentirem dificuldades em entender o que será desenvolvido, aconselhamos uma consulta ao Capítulo 1 de:
– WEBER, Jean E. (1986). *Matemática para Economia e Administração*. 2ed. São Paulo:Harbra.

Analisando o gráfico resultante, observamos que a função-objetivo deste problema é uma elipse. Quando o valor de Z aumenta, a elipse diminui de tamanho, convergindo para seu centro (8;8). Tendo em vista que o centro da elipse encontra-se fora do conjunto de soluções possíveis, a solução ótima do problema será o ponto do conjunto de soluções viáveis em que a curva da função assumirá o maior valor de Z. Neste caso, o ponto $x_1 = 2{,}72$ e $x_2 = 4{,}68$, onde a elipse (Z = 3676) tangencia o conjunto de soluções viáveis.

O principal objetivo deste exemplo é verificar que a solução ótima encontra-se fora dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis (independente da forma do conjunto de soluções viáveis). Com base nos problemas apresentados, o leitor pode pensar que, apesar de nem sempre se encontrar um extremo, a solução ótima de problemas não-lineares estará sempre nas fronteiras do conjunto de soluções viáveis. Mas será que esta afirmativa é verdadeira ou é apenas uma conclusão precipitada? Consideremos agora o exemplo 4 (Figura 7.7) com as mesmas restrições do exemplo anterior, porém com uma nova função-objetivo (outra elipse).

$$\text{Max}\, Z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 5$$
$$2x_2 \leq 14$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

O conjunto de soluções viáveis é o mesmo do exemplo 3, uma vez que o conjunto de restrições é o mesmo nos dois exemplos. Assumindo que Z pode ser considerado uma constante, temos que a função-objetivo é uma equação quadrática (uma elipse) e pode ser desenvolvida da seguinte maneira.

$$Z = 64x_1 - 16x_1^2 + 36x_2 - 9x_2^2$$
$$Z = -16(x_1 - 2)^2 - 9(x_2 - 2)^2 + 16 \times 2^2 + 9 \times 2^2$$
$$Z = -16(x_1 - 2)^2 - 9(x_2 - 2)^2 + 64 + 36$$
$$Z - 100 = -16(x_1 - 2)^2 - 9(x_2 - 2)^2$$
$$100 - Z = 16(x_1 - 2)^2 + 9(x_2 - 2)^2$$

Escolhendo três valores para "Z", temos que:

$$\text{Para } Z = 100 \Rightarrow 0 = 16(x_1 - 2)^2 + 9(x_2 - 2)^2$$
$$\text{Para } Z = 85 \Rightarrow 15 = 16(x_1 - 2)^2 + 9(x_2 - 2)^2$$
$$\text{Para } Z = 62 \Rightarrow 38 = 16(x_1 - 2)^2 + 9(x_2 - 2)^2$$

A metodologia para se encontrar a solução ótima é a mesma do exemplo anterior, isto é, encontrar o maior valor de Z em que pelo menos um dos pontos da respectiva curva pertença ao conjunto de soluções viáveis. O gráfico das equações quadráticas encontradas para os três valores escolhidos para a constante Z (100, 85 e 62) e o conjunto de soluções viáveis do problema estão representados na Figura *7.7*. Analisando os gráficos resultantes, observamos que a função-objetivo deste problema é uma elipse na qual o valor de Z aumenta conforme a curva converge para seu centro (2;2). Tendo em vista que o centro da elipse encontra-se dentro do conjunto de soluções viáveis, a solução ótima do problema será este ponto, obtido pelo maior valor de Z. Neste caso, o ponto $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$ que leva Z ao valor de 100.

Sendo assim, diferentemente dos exemplos anteriores, verificamos que a solução que maximiza o valor da

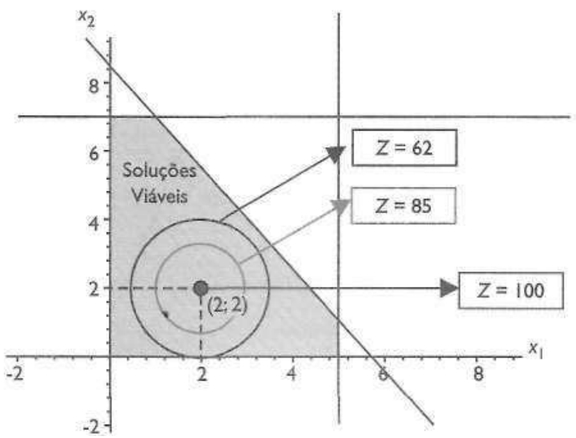


FIGURA 7.7 Solução ótima e soluções viáveis do exemplo 4.

função-objetivo é encontrada não mais nas fronteiras do conjunto de soluções viáveis, mas sim no seu interior.

Utilizando o mesmo conjunto de soluções viáveis para diferentes exemplos, verificamos que, dependendo da função-objetivo do modelo, a solução ótima de um problema de programação não-linear pode estar localizada tanto num extremo, como na fronteira ou até mesmo num ponto interno do conjunto de soluções viáveis.

Esta característica torna os problemas de programação não-linear muito mais complexos, pois para descobrirmos qual a solução viável que fornece o maior ou o menor valor possível para a função-objetivo é preciso pesquisar todos os valores possíveis que se encontram dentro do conjunto de soluções viáveis (um conjunto infinito de pontos).

Diante da dificuldade de encontrarmos a solução ótima de PNL, a utilização de ferramentas tais como o Solver do Excel torna-se imprescindível. Todavia, a validação do resultado obtido através destes algoritmos requer que sejam feitas algumas considerações sobre as características das funções que compõem o modelo.

7. I PROGRAMAÇÃO CONCAVA, CONVEXA E QUADRATICA

Trabalhando com problemas de programação não-linear, o nosso principal interesse é saber se algoritmos eletrônicos, como o Solver do Excel, o LINGO (Lindo Systems) e outros, encontrarão a solução ótima do problema sem dificuldades.

O Solver Premium, por exemplo, utiliza um algoritmo chamado GRG *{generalized reduced gradient)* e também inclui um algoritmo genético, para chegar à solução de um determinado problema. O trabalho deste algoritmo consiste em, a partir de uma condição iniciai, seguir passo a passo, calculando valores para as variáveis do modelo e checando o comportamento da função-objetivo. No momento em que o valor da função-objetivo inverte de tendência, ou seja, deixa de crescer para diminuir (caso de maximização) ou deixa de diminuir para começar a crescer (caso de minimização), o Solver assume que encontrou um ponto de máximo ou de mínimo da função, que pode ser tanto um extremo local quanto global.

No entanto, com este procedimento, o algoritmo não garante que a solução encontrada seja a solução global, pois a princípio não há certeza se aquela função analisada não irá inverter o seu comportamento novamente. Se nós utilizarmos o Solver para encontrarmos o ponto de máximo da função da Figura 7.8, por exemplo, é bastante provável que o algoritmo encontre diversas soluções. Dependendo dos valores com os quais iniciamos a otimização, o Solver pode indicar o ponto 1 ou o ponto 3 como o ponto que maximiza a função, sendo que, no entanto, apenas o ponto 3 é o máximo global da função e, portanto, o resultado que buscamos.

Diante da incerteza quanto ao resultado apresentado pelo Solver, precisamos saber se o tipo do modelo permite que a solução dada pelo algoritmo seja assumida como a solução ótima do problema,

Devemos relembrar alguns conceitos matemáticos antes de prosseguirmos. Uma função é dita convexa, se ela a forma da Figura 7.9, isto é, tem valores marginais crescentes. Uma maneira alternativa de se verificar se uma função é convexa é o de unir quaisquer dois pontos da função e verificar se o segmento de

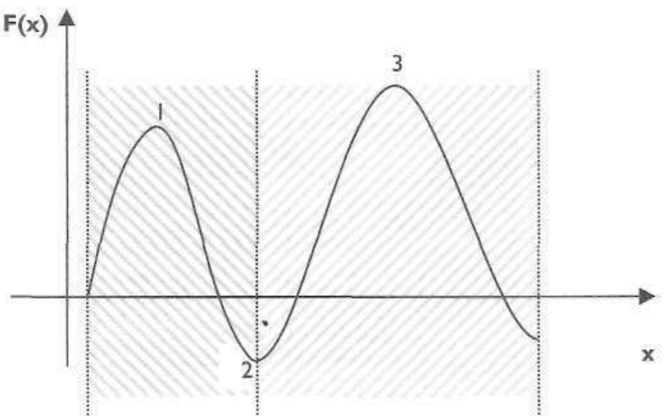


FIGURA 7.8 Função com vários máximos.

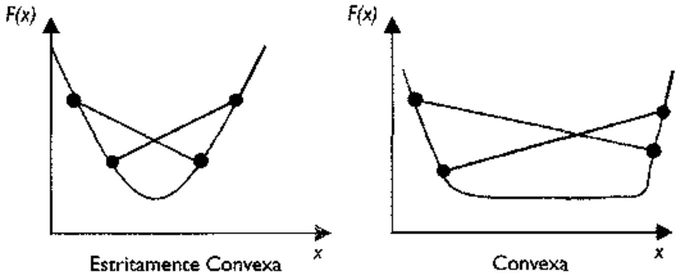


FIGURA 7.9 Função Convexa.

reta que os une está sempre acima ou sobre a função. Se isto ocorrer podemos também dizer que a função é convexa.

Uma função é dita côncava, se tem a forma da Figura 7.10, isto é, tem valores marginais decrescentes. Uma maneira alternativa de se verificar se uma função é côncava é o de unir quaisquer dois pontos da função e verificar se o segmento de reta que os une está sempre abaixo ou sobre a função. Se isto ocorrer podemos também dizer que a função é côncava.

O último conceito matemático relevante é o de conjunto convexo. Um conjunto e dito convexo se todos os pontos que formam o segmento de reta que une quais dois pontos deste conjuto também pertencem ao coniunto (Figura 2 19)

Quando o modelo não apresenta restrições, esta análise fica bastante simples. O fato de a função-objetivo ser côncava é condição necessária e suficiente para garantirmos que o máximo encontrado pelo algoritmo é o máximo global. De forma análoga, o fato da função-objetivo de um PNL sem restrições ser convexa é condição necessária e suficiente para garantirmos que o mínimo encontrado também seja global.

Em se tratando de PNLs com restrições, é necessário adicionar algumas condições para que possamos garantir que a solução encontrada pelo algoritmo seja a solução ótima do problema. Há três tipos de problemas de programação não-linear muito freqüentes que atendem àquelas condições: a programação côncava, a programação convexa e a programação quadrática. As demonstrações destas condições estão fora do escopo deste livro e podem ser encontradas em Taha (1997).

7.1.1 Programação Concava

Um problema de programação não linear é dito ser de Programação Côncava se atender as seguintes características (Bertsimas &Freund, 2000):

- Se a otimização for de maximização
- Se a função-objetivo for uma função côncava
- Se cada restrição for do tipo $g_i(x) \leq b_i$ (menor ou igual) e $g_i(x)$ for uma função convexa.
- Se cada restrição for do tipo $g_i(x) \geq b_i$ (maior ou igual) e $g_i(x)$ for uma função côncava
- Se cada restrição de igualdade for linear.

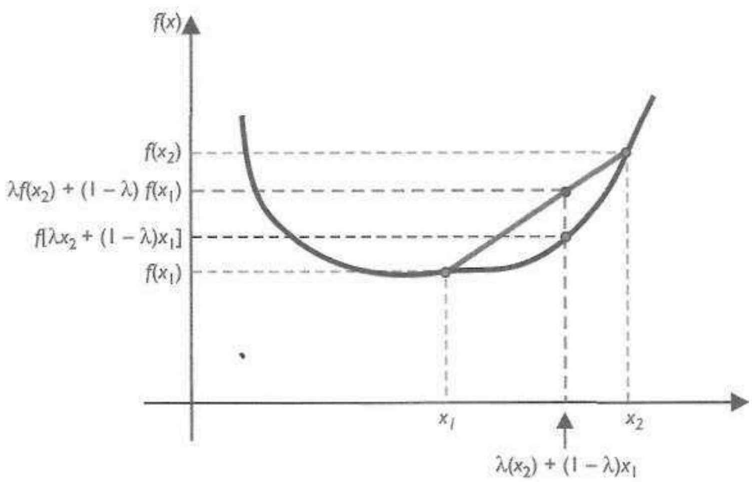


FIGURA 7.10 Função Côncava.

O fato relevante deste tipo de modelo está no fato que um problema de programação côncava, terá o máximo global igual ao máximo local, isto significa que o modelo será eficientemente resolvido pelo algoritmo aplicado.

Vale ressaltar que outros autores (Eppen et al., 1998) definem um problema de programação côncava de maneira distinta (porém equivalentes), como tendo as seguintes características:

- Se a otimização for de maximização
- Se o conjunto de restrições formar um conjunto convexo.

Podemos garantir que o conjunto de soluções viáveis de um PNL com restrições (apenas inequações) é um conjunto convexo se todas as restrições respeitarem as regras abaixo (Eppen et ai., 1998):

- Se a restrição for do tipo $g_i(x) \le b_i$ (menor ou igual) e $g_i(x)$ for uma função convexa.
- Se a restrição for do ti $g_i(x) \ge b_i$ aior ou igual) e $g_i(x)$ for uma função côncava.

Decorre desta consideração que, se o modelo é uma maximização, a função-objetivo é uma função côncava e o conjunto de soluções viáveis é um conjunto convexo, o PNL é dito de Programação Côncava (Eppen et ai., 1998) e o máximo encontrado é global.

Note que a única diferença entre as duas definições está no fato de uma incluir igualdades lineares e o outro não.

O fato de o conjunto de restrições de um problema de PNL incluir igualdades não lineares tem como conseqüência a complexidade na determinação se o conjunto de soluções viáveis é ou não um conjunto convexo. Portanto, quando existirem igualdades não lineares no nosso problema, não poderemos garantir que a solução encontrada pelo solver é ou não a solução global.

Vale ressaltar que, se o conjunto de restrições apresentar apenas restrições lineares, podemos garantir que o conjunto de soluções viáveis será um conjunto convexo, portanto, se existir uma função-objetivo côncava e o problema for de maximização teremos um problema de programação côncava.

7.1.2 Programação Convexa

Um problema de programação não linear é dito ser de Programação Convexa se atender as seguintes características (Bertsimas & Freund, 2000):

- Se a otimização for de minimização.
- Se a função-objetivo for uma função convexa.
- Se a restrição for do tipo g,(x) < b_f (menor ou igual) e *gj (x)* for uma função convexa.
- Se a restrição for do tipo g, *(x)* > b_t (maior ou igual) e *gj(x)* for uma função côncava.
- Se cada restrição de igualdade for linear.

O fato relevante deste tipo de modelo está no fato que um problema de programação convexa terá o mínimo global igual ao mínimo relativo, isto significa que o modelo será eficientemente resolvido pelo algoritmo aplicado.

Vale ressaltar que outros autores (Eppen et ai., 1998) definem um problema de programação convexa de maneira distinta, como tendo as seguintes características:

- Se a otimização for de minimização.
- Se o conjunto de restrições formar um conjunto convexo.

Podemos garantir que o conjunto de soluções viáveis de um PNL com restrições (apenas inequações) é um conjunto convexo se todas as restrições respeitarem as regras abaixo (Eppen et ai., 1998):

- Se a restrição for do tipo $g_i(x) \le b_i$ (menor ou igual) e $g_i(x)$ for uma função convexa.
- Se a restrição for do tipo $g_i(x) \ge b_i$ (maior ou igual) e $g_i(x)$ for uma função côncava.

Decorre desta consideração que, se o modelo é uma minimização, a função-objetivo é uma função convexa e o conjunto de soluções viáveis é um conjunto convexo, o PNL é dito de Programação Convexa (Eppen et ai., 1998) e o mínimo encontrado é global.

Note que a única diferença entre as duas definições está no fato de uma incluir igualdades lineares e o outro não.

O fato de o conjunto de restrições de um problema de PNL incluir igualdades não lineares tem como conseqüência a complexidade na determinação se o conjunto de soluções viáveis é ou não um conjunto convexo. Portanto, quando existirem igualdades não lineares no nosso problema, não poderemos garantir que a solução encontrada pelo solver é ou não a solução global.

Vale ressaltar que, se o conjunto de restrições apresentar apenas restrições lineares, podemos garantir que o conjunto de soluções viáveis será um conjunto convexo, portanto, se existir uma função-objetivo convexa e o problema for de minimização teremos um problema de programação convexa.

7.1.3 Programação Quadrática

Os problemas que forem classificados como de Programação Quadrática, independentemente de o modelo se tratar de uma maximização ou de uma minimização, terão a sua solução ótima encontrada pelos algoritmos de resolução de problemas não—lineares sem dificuldades. Antes de aprendermos como identificar um problema de Programação Quadrática, precisamos apenas relembrar o que é uma função quadrática.

Uma função quadrática de n variáveis $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ é uma função que pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Em outras palavras, a função quadrática é a soma de termos envolvendo quadrado de variáveis $(A_i x_i^2)$ e produto de duas variáveis $(B_{ij} x_i x_j)$.

Seguindo esta definição, uma função quadrática de uma variável é dada por $f(x_1) = ax_1^2$, uma função quadrática de duas variáveis é dada por $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ e assim por diante.

Sendo assim, um problema de programação cujo modelo é uma maximização ou uma minimização é dito de Programação Quadrática se:

- A função-objetivo for uma função quadrática.
- O conjunto de restrições apresentar somente restrições lineares (igauldades e desigualdades).

Como o conjunto de restrições é formado apenas por funções lineares, da mesma maneira que nos problemas de programação linear, podemos garantir que o conjunto de soluções será um conjunto convexo (Goldbarg & Luma, 2000). Portanto, num caso de Programação Quadrática de Maximização em que a função-objetivo é uma função côncava, o algoritmo encontrará o máximo global. Naturalmente num caso de Programação Quadrática de Minimização em que a função-objetivo é uma função convexa, o algoritmo encontrará o mínimo global.

7.2 PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR UTILIZANDO O EXCEL

Agora que já sabemos identificar qual tipo de problema de programação não-linear temos em mãos, podemos aprender como resolvê-lo através das ferramentas do Excel.

Contudo, antes de começar a apresentar alguns exemplos, é importante acrescentar um método utilizado pelos especialistas em PNLs para tentar descobrir se o valor encontrado é um extremo local ou global. Quando o modelo não se tratar de um problema de programação côncava, convexa ou quadrática, uma maneira prática para tentar minorar os problemas de máximos e mínimos locais é começar a otimização de diversos pontos iniciais, gerados aleatoriamente. Se todas as otimizações gerarem o mesmo resultado, então podemos ter maior confiança - porém não a certeza - de termos atingido um ponto global. Caso contrário, deveremos supor a existência de diversos extremos locais (relativos) e assumir o melhor valor encontrado.

Exemplos de Resolução de PNL Através do Solver

Согл:ьle de Estoque

Um dos modelos mais elementares de controle de estoque chama-se Modelo do Lote Econômico. Este modelo é simples, dentre outras razões, porque assume que a demanda anual de um produto a ser pedido é praticamente constante e que cada novo pedido do produto deve chegar no exato momento em que o estoque chegar a zero.

O objetivo do Modelo do Lote Econômico é determinar, através do balanceamento dos custos associados ao estoque, o tamanho e a periodicidade do pedido que minimizam o custo total. Os custos mais relevantes que determinam o custo total de estocagem são os seguintes:

- *Custo de Manutenção do Estoque* - Custo associado ao valor em estoque e que poderia estar aplicado em diversas formas de investimentos, rendendo benefícios financeiros para a empresa, além dos custos de armazenagem.
- *Custo do Pedido* - Custo associado ao trabalho de efetuar o pedido de determinado lote de produtos, engloba custos de mão-de-obra, de transporte do

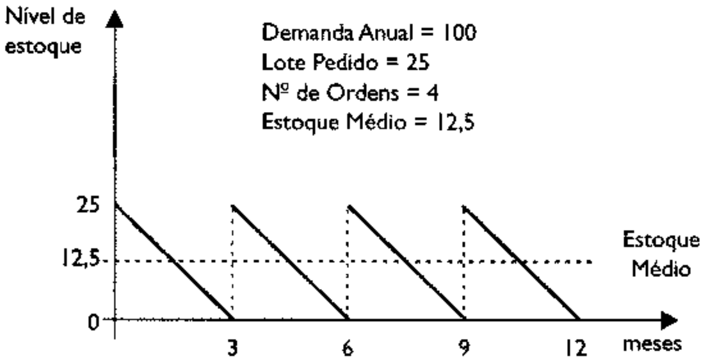


FIGURA 7.11 Nível de estoque e estoque médio para pedidos trimestrais.

pedido e outros, tais como controle do recebimento do pedido e controle de qualidade do lote recebido.

- *Custo de Falta* - Custo relacionado a perdas decorrentes da interrupção da produção devido à falta do produto.

Vejamos um exemplo de uma empresa que demanda anualmente 100 unidades de um determinado produto. Caso ela decida realizar quatro pedidos trimestrais, teremos a representação de sua política de estoque conforme apresentamos na Figura 7.11.

Se, em vez de quatro pedidos anuais, a empresa decidir realizar apenas duas solicitações do produto durante o ano, as variáveis relevantes e a representação gráfica se alteram, conforme podemos conferir na Figura 7.12.

As políticas de estoque apresentadas acima são apenas duas das diversas formas de atender à demanda anual de 100 unidades que a empresa pode realizar. Porém, como poderemos saber qual é a mais econômica?

Para responder a essa pergunta, podemos modelar o problema utilizando a seguinte equação como função-objetivo:

Minimizar Custo Total $= D \cdot C + \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot C_m$,

onde:

D = demanda anual do produto

C = custo unitário do produto

Q = quantidade de unidades por pedido (tamanho do lote)

S = custo unitário do pedido (custo de fazer o pedido)

C_m = custo unitário de manutenção do produto em estoque por ano

Resolvendo problemas deste tipo, dispomos geralmente dos valores da demanda anual, do custo unitário do produto, do custo unitário de pedido e do custo unitário de manutenção, de forma que a variável que irá alterar o valor do custo total anual será a quantidade de unidades por pedido (Çj).

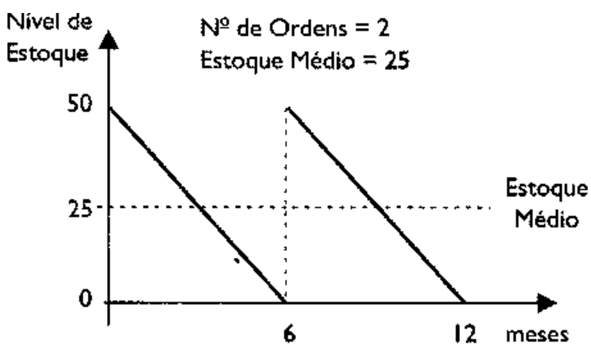


FIGURA 7.12 Nível de estoque e estoque médio para pedidos semestrais.

Considerando-se que a variável Çj aparece tanto no numerador (Q^1) quanto no denominador (Q^{-1}) da função-objetivo, o modelo é um problema de programação não-linear. Vejamos um exemplo prático de aplicação deste modelo.

Caso LCL Computadores

A LCL Computadores Ltda., empresa montadora de computadores, deseja diminuir o seu estoque de *mainboards*. Sabendo-se que o custo unitário da *mainboard* é de R$50,00, o custo anual unitário de manutenção de estoque é de R$20,00 e o custo unitário do pedido é de R$10,00, encontre o lote econômico para atender a uma demanda anual de 1.000 *mainboards*.

Antes de inserirmos o problema na planilha eletrônica, precisamos analisar o tipo de programação do modelo. Se o PNL de controle de estoque for classificado como de programação convexa ou quadrática (não poderia ser um caso de programação côncava, por se tratar de uma minimização), teremos condições de afirmar que a solução ótima apresentada pelo Solver é o mínimo global da função do custo total anual, como dito anteriormente.

Denominando a quantidade de unidades por pedido de Çj, o problema pode ser modelado da seguinte maneira:

$$Min\ 1000 \cdot 50 + \frac{1000}{Q} \cdot 10 + \frac{Q}{2} \cdot 20 \text{ (custo total anual)}$$

Sujeito a:

$Q \geq 1$(restrição de quantidade mínima por lote)

$Q \geq 0$(restrição de não-negatividade, redundante)

Sabemos que uma programação é do tipo quadrática quando o modelo apresenta somente restrições lineares e a função-objetivo é uma função quadrática, isto é da forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + D.$$

Apesar de nosso problema de lote econômico só apresentar restrições lineares e, portanto, o conjunto de soluções viáveis ser um conjunto convexo, a função-objetivo do custo total anual não é uma função quadrática. Por conseguinte, o modelo de programação também não é quadrático.

Desta forma, temos que analisar se o modelo é uma programação convexa. Como já verificamos que as restrições formam um conjunto convexo, precisamos apenas saber se a função-objetivo do problema é uma função convexa.

Como a função-objetivo do problema apresenta somente uma variável (quantidade de unidades por lote – Q), a convexidade da função será dada através da análise de sua derivada de segunda ordem. A função-objetivo e suas derivadas de primeira e segunda ordem são as seguintes:

Função-objetivo

$$f(Q) = 50.000 + \frac{10.000}{Q} + 10 \cdot Q$$

Derivada de *1*- ordem

$$\frac{df(Q)}{dQ} = -10.000 \cdot Q^{-2} + 10$$

Derivada de *2*- ordem

$$\frac{d^2 f(Q)}{dQ^2} = 20.000 \cdot Q^{-3} = \frac{20.000}{Q^3}$$

Considerando-se que Q só pode assumir números positivos (pois não existe lote com quantidade negativa ou zero), a segunda derivada da função será sempre positiva e maior que zero, logo, a função é estritamente convexa em seu domínio.

Tendo comprovado que o problema de minimização do custo total anual da fábrica de computadores é um modelo de programação convexa (função-objetivo convexa e conjunto convexo de restrições), sabemos de antemão que a solução que o Solver encontrará será certamente a solução ótima do problema.

Para começar a nossa resolução com a ajuda do Solver, devemos colocar os valores que possuímos e a fórmula do custo total anual nas células da planilha, conforme mostra a Figura 7.13. Observe que a quantidade por pedido é a variável de decisão (Célula B7) e, portanto, não temos um valor inicial para ela. No entanto, para modelagem do problema na planilha Excel, uma boa prática é a atribuição de valores diferentes de zero na célula correspondente à(s) variável(is) de decisão, pois isto facilita a verificação das diversas fórmulas. Neste caso assumimos o valor inicial do lote como sendo igual a 1. A função-objetivo está representada pela

	A	B
1	FÁBRICA DE COMPUTADORES	
2		
3	Demanda Anual (D)	1000
4	Custo Unitário (C)	50
5	Custo Unitário do Pedido (S)	10
6	Custo Unitário de Manutenção por Ano (Cm)	20
7	Quantidade por pedido - Lote (Q)	1
8		
9	CUSTO TOTAL ANUAL	60010
10		

FIGURA 7.13 Modelagem do Caso de Lote Econômico.

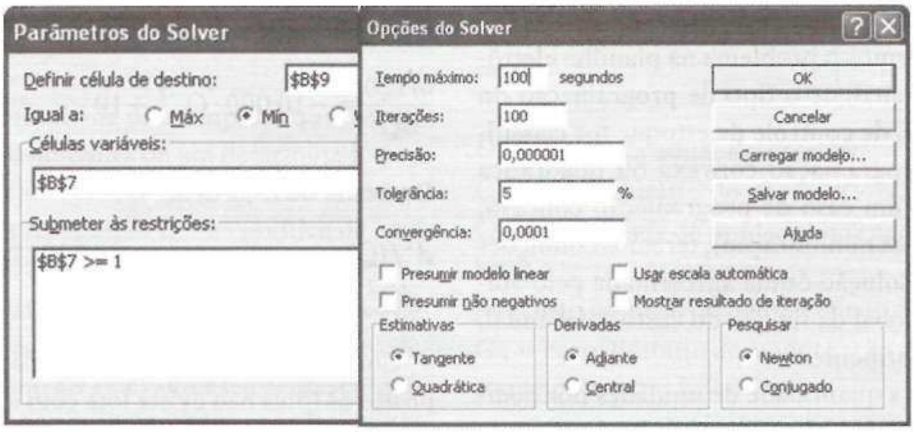


FIGURA 7.14 Modelo e opções do Solver utilizados no Caso LCL Computadores.

	A	B
1	FÁBRICA DE COMPUTADORES	
2		
3	Demanda Anual (D)	1000
4	Custo Unitário (C)	50
5	Custo Unitário do Pedido (S)	10
6	Custo Unitário de Manutenção por Ano (Cm)	20
7	Quantidade por pedido - Lote (Q)	31,62
8		
9	CUSTO TOTAL ANUAL	50632
10		

FIGURA 7.15 Solução do Caso LCL Computadores.

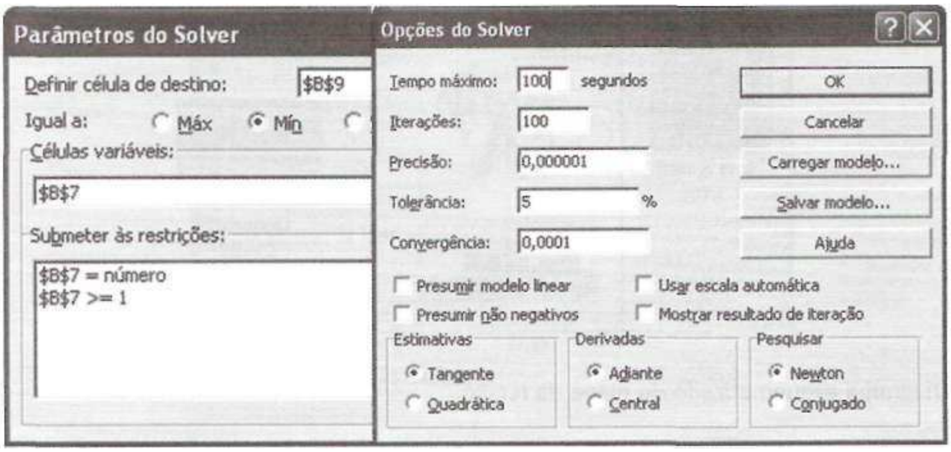


FIGURA 7.16 Modelo do Solver no Caso LCL Computadores com integralidade.

célula B9. Todas as outras informações dizem respeito aos valores dos parâmetros do problema.

Após a inclusão do problema na planilha, devemos definir o modelo no *Solver.* A Figura 7.14 mostra os parâmetros do nosso modelo e as opções do Solver utilizadas.

A solução apresentada pelo Solver do Excel é apresentada na Figura 7.15.

O Solver identificou como solução ótima (mais econômica) atender à demanda anual através de lotes de 31,62 *mainboards.* Alguns leitores podem questionar o fato de a solução ótima implicar um número de unidades fracionário a ser pedido em cada lote. Para calcularmos o problema com a resposta exata, bastaria que introduzíssemos uma condição para que o número de unidades fosse inteiro. A Figura 7.16 mostra os parâmetros do nosso modelo com essa condição e a Figura 7.17, a solução do problema de programação inteira.

O leitor pode ainda questionar o fato de o número de pedidos ser fracionado. Podemos determinar o número de pedidos a ser efetuado por ano através do cálculo a seguir.

$$\textit{Número de Lotes} = \frac{\textit{Demanda Anual}}{\textit{Número de Unidade por Lote}} = \frac{1000}{32} = 31{,}25$$

No entanto, existe uma interpretação lógica para esta aparente incongruência. Considerando-se que as operações das empresas são geralmente contínuas, isto é, ocorrem por períodos superiores a um ano, concluímos que o 31º pedido ocorre no final do primeiro ano e que o consumo das unidades do mesmo terminará no início do segundo ano. Desta forma, o atendimento da demanda anual de 1.000 unidades de *mainboards* é garantido.

Problema de Localização

Na área de negócios é muito comum a identificação de problemas de localização de fábricas, armazéns, centros de distribuição, torres de transmissão telefônicas, entre outros. Em problemas deste tipo, um dos métodos utilizados de resolução é o de minimizar a distância total entre os centros consumidores e o centro de distribuição, reduzindo assim, teórica-

	A	B
1	FÁBRICA DE COMPUTADORES	
2		
3	Demanda Anual (D)	1000
4	Custo Unitário (C)	50
5	Custo Unitário do Pedido (S)	10
6	Custo Unitário de Manutenção por Ano (Cm)	20
7	Quantidade por pedido - Lote (Q)	32
8		
9	CUSTO TOTAL ANUAL	50633
10		

FIGURA 7.17 Solução do problema inteiro da LCL Computadores.

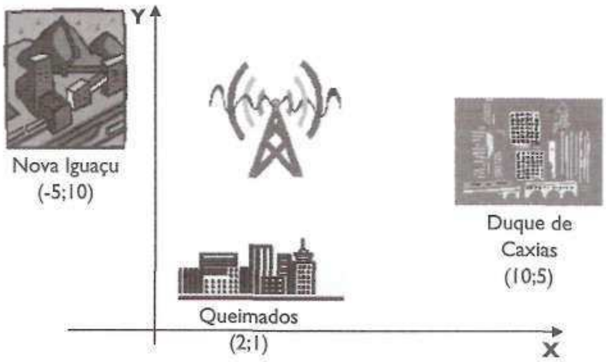


FIGURA 7.18 Diagrama esquematizado do mapa da região.

mente, o custo de transporte ou as perdas de sinal em transmissão.

Para trabalhar com as distâncias, usualmente coloca-se um eixo cartesiano sobre o mapa da região e determina-se a posição dos centros consumidores em relação a uma origem aleatória. Veremos este tipo de aplicação no exemplo a seguir.

Caso LCL Telefonia Celular S.A.

O Gerente de Projetos da LCL Telefonia Celular S.A. precisa localizar uma antena de transmissão para atender a três localidades da Baixada Fluminense no estado do Rio de Janeiro. Devido a problemas técnicos, a torre não pode estar a mais de 10km do centro de cada cidade. Considerando as localizações relativas abaixo, o gerente deve tomar a decisão do melhor posicionamento para a antena.

LOCALIDADE	X	Y
Nova Iguaçu	−5	10
Queimados	2	1
Duque de Caxias	10	5

Reparem que as localizações relativas foram determinadas a partir de um ponto de origem qualquer estabelecido sobre o mapa do estado do Rio de Janeiro. Estas coordenadas estão ilustradas no plano cartesiano da Figura 7.18.

Assumindo que as localizações agora são pontos num plano cartesiano que podem ser identificados pelas coordena $(x_i ; y_i)$ ara as diferentes regiões e pelas coordenadas $(X; Y)$ para a torre de transmissão, e tendo em vista que o nosso objetivo é minimizar a distância total entre o ponto da antena e os centros consumidores, as Variáveis de Decisão serão dadas por:

X - coordenada no eixo X da torre de transmissão

Y - coordenada no eixo Y da torre de transmissão

Lembre-se de que a distância entre dois pontos $P_1(x_1 ; y_1)$ e $P_2 (x_2 ; y_2)$ num plano cartesiano é dada pela equação abaixo.

$$distância_{P_1 \to P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

A distância entre a antena e uma cidade qualquer representada no plano cartesiano é a hipotenusa do triângulo retângulo obtido através das diferenças entre as coordenadas x_i e X e as coordenadas y_i e Y. Os valores absolutos destas diferenças formam os catetos do triângulo retângulo, ao passo que a distância entre o ponto em que se situa a cidade e o ponto em que está a

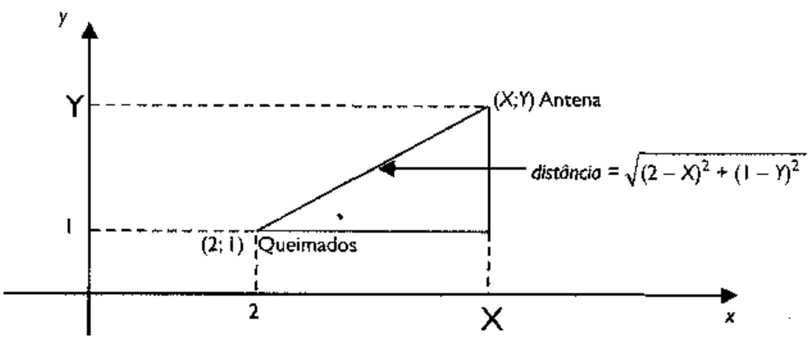


FIGURA 7.19 Determinação da distância entre dois pontos.

	A	B	C	D	E
1	Localidade	X	Y	Distância	Limite
2	Nova Iguaçu	-5	10	11,18034	10
3	Queimados	2	1	2,236068	10
4	Duque de Caxias	10	5	11,18034	10
5					
6	Localização da Torre	0	0		
7					
8	Menor Distância	24,59675			

FIGURA 7.20 Modelagem do Caso LCL Telefonia Celular.

antena forma a hipotenusa. No caso da localização de Queimados, por exemplo, a explicação acima pode ser ilustrada na Figura 7.19.

Nesta ilustração localizamos a antena em um ponto acima e à direita da localização de Queimados para facilitar a visualização. No entanto, a mesma fórmula vale para qualquer posição da antena, pois sempre teremos condições de formar um triângulo retângulo e a diferença das coordenadas é elevada ao quadrado, eliminando desta forma os sinais negativos.

A função-objetivo do modelo é a minimização da soma das distâncias entre o centro de cada cidade e a antena de transmissão. Como temos três centros consumidores, nossa função-objetivo é dada por:

$$Min \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2}$$

$$\Rightarrow Min \sqrt{(-5 - X)^2 + (10 - Y)^2} + \sqrt{(2 - X)^2 + (1 - Y)^2} + \sqrt{(10 - X)^2 + (5 - Y)^2}$$

As restrições de distância representam a condição de que a torre não pode estar localizada a uma distância superior a 10km do centro de cada cidade e são matematicamente dadas por:

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2} \leq 10$$

$$\sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2} \leq 10$$

$$\sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2} \leq 10$$

Antes de inserirmos o problema na planilha, precisamos analisar o tipo de programação apresentado pelo modelo. Como as restrições não são lineares e a função-objetivo não é uma função quadrática, sabemos de antemão que o modelo não se encaixa na definição de programação quadrática.

Desta forma, tendo em vista que o PNL é de minimização, o Solver resolverá sem dificuldades se o modelo for de programação convexa. Através da análise da convexidade da função-objetivo e das funções que compõem as restrições poderemos determinar se o problema é de programação convexa.

Como neste caso é difícil comprovar se a função-objetivo é convexa ou não, bem como se o conjunto de restrições é convexo, devemos utilizar a solução alternativa de se proceder à inicialização do Solver de diversos pontos iniciais como sugerido anteriormente.

O próximo passo, então, é inserir o modelo na planilha Excel (Figura 7.20).

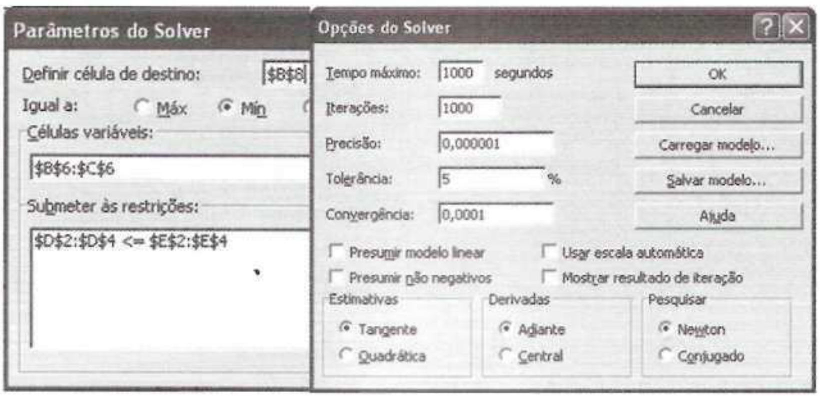


FIGURA 7.21 Parâmetros e opções do modelo do Caso LCL Telefonia Celular.

	A	B	C	D	E
1	Localidade	X	Y	Distância	Limite
2	Nova Iguaçu	-5	10	10	10
3	Queimados	2	1	2,233562	10
4	Duque de Caxias	10	5	7,867666	10
5					
6	Localização da Torre	2,339212	3,207654		
7					
8	Menor Distância	20,10123			

FIGURA 7.22 Resultados obtidos com inicialização X=0 e Y=0.

De forma semelhante ao exemplo anterior, abrimos a ferramenta Solver do Excel e inserimos os parâmetros e as condições da otimização (Figura 7.21). Observe que, neste problema, há mais de uma variável que pode ser alterada para alcançar o menor valor possível para a função-objetivo, pois podemos modificar tanto a coordenada X da localização da antena, quanto a coordenada *Y*. A solução para o problema, com inicialização em X= 0 e *Y*— 0, é apresentada na Figura 7.22.

Se repetirmos a otimização, começando agora de $X=5$ e $Y=10$ e $X=100$ e $Y=50$, poderemos verificar que, em ambos os casos, as soluções apresentadas são as mesmas da Figura 7.22. Não poderemos garantir que este será o máximo global, porém temos uma maior confiança do que quando apenas tínhamos otimizado uma única vez.

O Solver indicou o ponto formado por $X = 2{,}339$ e $Y = 3{,}208$ como a localização ótima para a antena de transmissão, ou seja, aquela que minimiza a distância total entre a torre e as três localidades (Figura 7.23). Apesar de estudarmos problemas de transporte em programação linear, algumas condições, muito comuns na vida real, tornam o modelo não-linear. Por exemplo: a existência de desconto por unidade adicional transportada. Vejamos um exemplo.

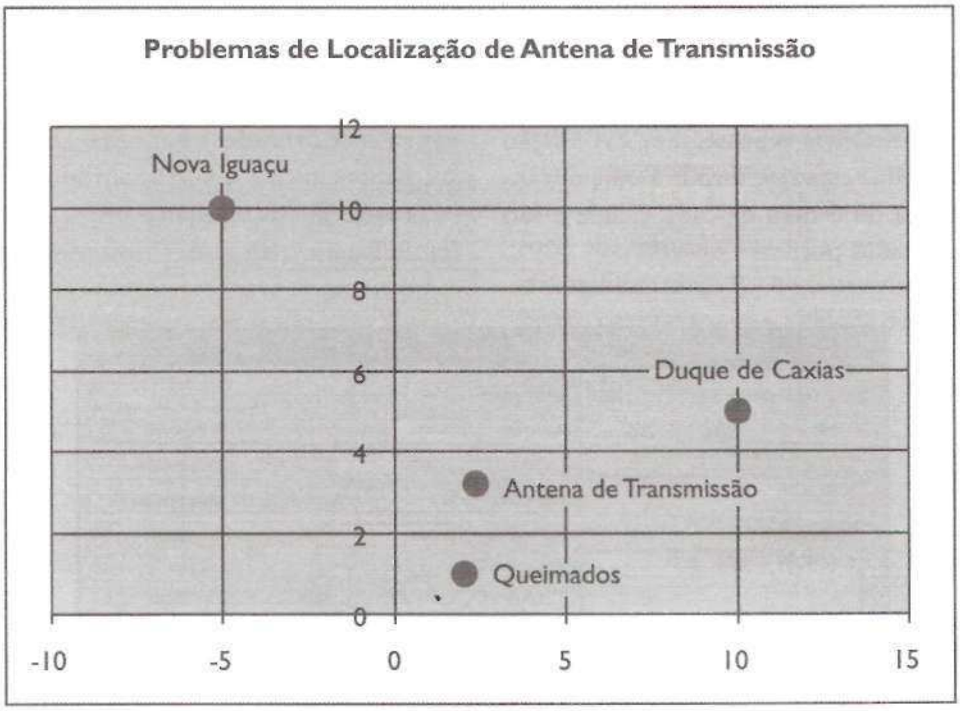


FIGURA 7.23 Resultado do Solver no Caso LCL Telefonia Celular.

Caso LCL Transportes Ltda

A LCL transportes Ltda. está interessada em determinar a configuração ótima que minimize os custos com transporte de suas fábricas em Salvador e Brasília, para distribuidores no Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte. Os custos unitários de transporte, bem como demandas e capacidades estão descritos na tabela abaixo. O serviço de transporte é terceirizado e a transportadora oferece um desconto sobre o preço unitário em função da quantidade de bens transportados entre as cidades. Este desconto é proporcional a um milésimo de quantidade de bens transportados entre cada fábrica e cada centro de distribuição.

	Distribuidores			*Capacidade (unidades)*
Fábricas	**Rio de Janeiro**	**São Paulo**	**Belo Horizonte**	
Salvador	R$ 20,00	R$ 25,00	R$ 30,00	600
Brasília	R$ 25,00	R$ 20,00	R$ 30,00	900
Demanda (unid.)	550	400	300	

Tendo em vista que os valores que irão variar em nosso modelo são as quantidades transportadas das fábricas para os distribuidores, as variáveis de decisão podem ser definidas como do tipo x,;, representando, assim, a quantidade transportada da fábrica i para o distribuidor j:

Variáveis de Decisão:

x_{ij} – quantidade transportada de i para j
i – 1 = Salvador j – 1 = Rio de Janeiro
2 = Brasília 2 = São Paulo
3 = Belo Horizonte

A função-objetivo será, por sua vez, a minimização da multiplicação dos custos unitários finais de transporte (custos de transporte unitários C_{ij} reduzidos do desconto por quantidade $0{,}001x_{ij}$) pelas respectivas quantidades transportadas de cada fábrica i para cada distribuidor j (x_{ij}):

$$Min \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(C_{ij} - 0{,}001x_{ij}) \cdot x_{ij}$$

Considerando-se que as fábricas não podem produzir mais do que as suas capacidades individuais, mas as demandas dos distribuidores precisam ser totalmente atendidas, as restrições de nosso problema são:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 900$ - restrição de capacidade da fábrica de Salvador

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$ - restrição de capacidade da fábrica de Brasília

$x_{11} + x_{21} = 550$ - restrição de demanda do distribuidor do Rio de Janeiro

$x_{12} + x_{22} = 400$ - restrição de demanda do distribuidor de São Paulo

$x_{13} + x_{23} = 300$ - restrição de demanda do distribuidor de Belo Horizonte

A função-objetivo deste problema é uma função quadrática e as restrições são lineares; por conseguinte, o modelo é de programação quadrática e será eficazmente resolvido pelo Solver se a mesma for convexa. Como esta determinação é complexa, utilizaremos a técnica de inicialização da otimização de diversos

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	LCL Transportes Ltda							
2			PARA					
3	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte				
4	SALVADOR	20	25	30				
5	BRASILIA	25	20	30				
6								
7	Quatidade Transportada							
8			PARA		Quantidade			
9	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	Enviada	Capacidade		
10	SALVADOR	1	1	1	3	900		
11	BRASILIA	1	1	1	3	600		
12	Quantidade Recebida	2	2	2		=SOMA(B11:D11)		
13	DEMANDA	550	400	300				
14					=SOMA(D10:D11)			
15	Custo Total	149,994						
16								
17		=SOMARPRODUTO(B4:D5;B10:D11)-0,001*((B10^2)+(C10^2)+(D10^2)+(B11^2)+(C11^2)+(D11^2))						

FIGURA 7.24 Modelagem do Caso LCL Transportes com custo unitário variável.

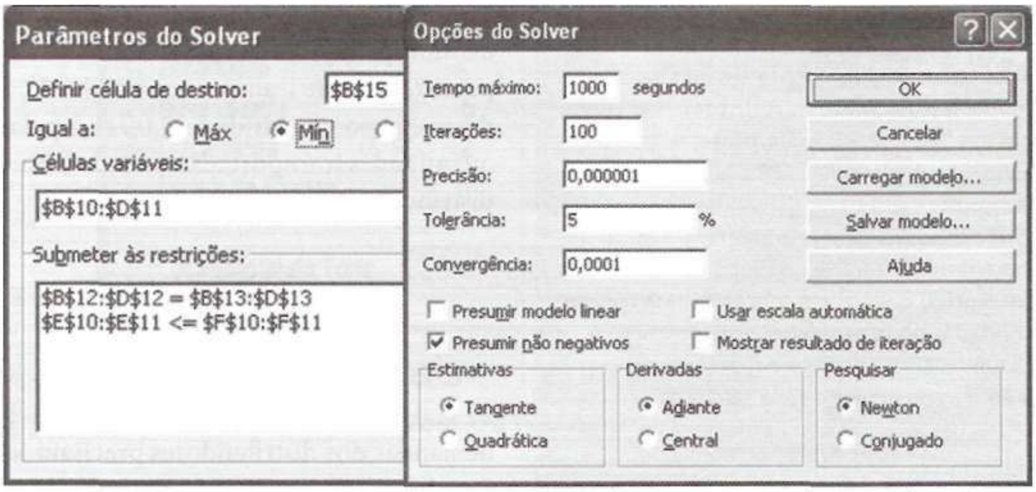


FIGURA 7.25 Parâmetros e opções do modelo do Caso LCL Transportes com custo unitário variável.

pontos. Partimos para a modelagem na planilha Excel, conforme a Figura 7.24.

Na Figura 7.25 vemos os parâmetros e as opções do modelo inseridos no Solver. Notem que, para evitarmos que o algoritmo encontrasse valores negativos para as variáveis do modelo, selecionamos uma restrição na caixa de opções que garante a "não-negatividade" das variáveis do problema.

Com todas as condições especificadas, solicitamos a resolução do problema ao Solver, que pode ser visualizada na Figura 7.26.

De acordo com a solução dada pelo Solver, o menor custo total de transporte é obtido quando o distribuidor de Salvador tem sua demanda atendida somente pelas fábricas do Rio de Janeiro (550 unidades) e Belo Horizonte (100 unidades); e o distribuidor de Brasília é atendido por São Paulo (400 unidades) e Belo Horizonte (200 unidades).

Se repetirmos a solução do problema diversas vezes, poderemos obter a validação da solução do modelo. Reinicializamos o modelo com a seguinte condição inicial (Figura 7.27).

A solução encontrada foi a apresentada na Figura 7.28. Como podemos notar, a solução encontrada foi diferente e menor do que a primeira, o que nos leva a concluir que existem múltiplos mínimos locais. Entre as duas soluções, a segunda é preferível pois nos leva a um menor custo total.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	LCL Transportes Ltda							
2		PARA						
3	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte				
4	SALVADOR	20	25	30				
5	BRASILIA	25	20	30				
6								
7	Quatidade Transportada							
8		PARA			Quantidade			
9	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	Enviada	Capacidade		
10	SALVADOR	550	0	100	650	900		
11	BRASILIA	0	400	200	600	600		
12	Quantidade Recebida	550	400	300		=SOMA(B11:D11)		
13	DEMANDA	550	400	300				
14					=SOMA(D10:D11)			
15	Custo Total	27487,5						
16								
17		=SOMARPRODUTO(B4:D5;B10:D11)-0,001*((B10^2)+(C10^2)+(D10^2)+(B11^2)+(C11^2)+(D11^2))						

FIGURA 7.26 Resolução do Caso LCL Transportes com custo unitário variável.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	LCL Transportes Ltda							
2		PARA						
3	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte				
4	SALVADOR	20	25	30				
5	BRASILIA	25	20	30				
6								
7	Quatidade Transportada							
8		PARA			Quantidade			
9	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	Enviada	Capacidade		
10	SALVADOR	550	250	300	1100	900		
11	BRASILIA	0	150	0	150	600		
12	Quantidade Recebida	550	400	300		=SOMA(B11:D11)		
13	DEMANDA	550	400	300				
14					=SOMA(D10:D11)			
15	Custo Total	28772,5000						
16								
17		=SOMARPRODUTO(B4:D5;B10:D11)-0,001*((B10^2)+(C10^2)+(D10^2)+(B11^2)+(C11^2)+(D11^2))						

FIGURA 7.27 Reinicialização do Caso LCL Transportes com custo unitário variável.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	LCL Transportes Ltda							
2		PARA						
3	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte				
4	SALVADOR	20	25	30				
5	BRASILIA	25	20	30				
6								
7	Quatidade Transportada							
8		PARA			Quantidade			
9	DE	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	Enviada	Capacidade		
10	SALVADOR	550	0	300	850	900		
11	BRASILIA	0	400	0	400	600		
12	Quantidade Recebida	550	400	300		=SOMA(B11:D11)		
13	DEMANDA	550	400	300				
14					=SOMA(D10:D11)			
15	Custo Total	27447,5000						
16								
17		=SOMARPRODUTO(B4:D5;B10:D11)-0,001*((B10^2)+(C10^2)+(D10^2)+(B11^2)+(C11^2)+(D11^2))						

FIGURA 7.28 Nova solução do Caso LCL Transportes com custo unitário variável.

7.3 PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR UTILIZANDO O SOLVER PREMIUM

No item anterior mencionamos na dificuldade que temos ao resolver problemas de programação não-linear. Mostramos algumas classes de problemas em que o solver encontra o máximo ou mínimo global do problema.

Devemos ressaltar que até agora não mencionamos outra dificuldade do solver do Excel. Toda vez que, em nosso problema, utilizamos as funções do Excel SE (IF), MAX e MIN, provocamos descontinuidades que impossibilita o algoritmo *standard* do Solver de resolver o nosso problema.

A empresa Frontline Systems que desenvolveu a ferramenta Solver que é incluída no Excel (que a partir de agora chamaremos de Solver Standard) desenvolveu uma versão chamada de Solver Premiun onde além do algoritmo GRG, ela também disponibiliza um outro algoritmo que pode ser utilizado para resolver problemas de programação não-linear, chamado de algoritmo genético.

Recentemente este tipo de algoritmo tem se constituído um dos mais excitantes desenvolvimentos na área de otimização. O nome algoritmo genético advém do fato que o seu desenvolvimento ser inspirado na teoria de Darwin de Evolução das Espécies. Nesta teoria os seres vivos existentes nos dias de hoje evoluíram durante os tempos e os mais adaptados sobreviveram.

Analogamente os pesquisadores da área de otimização desenvolveram um algoritmo capaz de mimicar o mecanismo de seleção natural e evolução. Podemos considerar que a evolução dos seres vivos de nosso planeta como um processo de modificações cromossomiais. Nos cromossomas são codificados todas as características dos seres vivos.

No processo de seleção natural os seres vivos com melhores características de sobrevivência se reproduzem com maior freqüência. Adicionalmente algum fenômeno da natureza pode provocar mutações aleatórias nos códigos cromossomiais.

Basicamente podemos ver o algoritmo genético como a seqüência dos seguintes passos:

1. Estabelecer a população inicial de cromossomos
2. Determinar o ajustamento de cada cromossomo
3. Gerar novos cromossomos a partir da população atual através de cruzamentos e mutações
4. Determinar a nova geração da população e retornar ao passo 2 até que uma certa condição for atingida.

Basicamente os algoritmos genéticos são métodos inteligentes de procura da solução ótima de modelos de otimização dentro do conjunto de soluções viáveis. A função-objetivo é a função de ajustamento e os valores das variáveis de decisão são representadas geralmente em codificação binária, isto é uma seqüência de zeros e uns.

Diversas tipologias foram se consolidando e hoje a mais utilizada é a de base decimal, isto é, a que utiliza dez símbolos distintos para representar todas as infinitas quantidades. Os dez símbolos naturalmente são os algarismos:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

qualquer número natural pode ser representado por estes algarismos através de sua combinação. Uma'forma ordenada de fazer as combinações possíveis é feita começando-se por algarismos isolados e depois a sua combinação dois a dois, três a três e assim por diante. Logo os números naturais são representados na base decimal por:

$$N = \{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10\quad 11\quad \ldots\}$$

Os mesmos números naturais poderiam ser representados em outras bases numéricas como a binária ou a hexadecimal, ambas muito utilizadas em ciência de computação.

Na binária, apenas dois símbolos, são utilizados:

$$0\ 1$$

sendo os números naturais representados por:

$$N = \{1\quad 10\quad 11\quad 100\quad 101\quad 110\quad 111\quad 1000\quad \ldots\}$$

observe que em todas as formas de representação a lógica de repetição dos símbolos é a mesma, isto é grupos de 1 elemento, depois grupos de 2 elementos e assim por diante.

A tabela abaixo resume as representações dos números naturais nas bases apresentadas acima.

Tabela 7.1
Representação dos Números Naturais na Base Binária

Decimal	Binária	Decimal	Binária
1	1	11	1011
2	10	12	1100
3	11	13	1101
4	100	14	1110
5	101	15	1111
6	110	16	10000
7	111	17	10001
8	1000	18	10010
9	1001	19	10011
10	1010	20	10100

Uma maneira fácil de se converter um número em binários para base decimal é a utilização de potências de 2. Por exemplo o número 1111 em binário é equivalente ao número 15 na base decimal, isto pode ser entendido da seguinte maneira:

1 1 1 1

ordem

$$2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$$

$$= 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$= 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

O número 10100 na base binária é o número 20 na base decimal, isto pde ser entendido como:

$$
\begin{array}{l}
\quad 1 \quad\quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
ordem \\
\quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \\
= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\
= 16 + 0 + 4 + 0 + 0 = 20
\end{array}
$$

Agora temos todos os ingredientes para compreender a maneira como algoritmo genético funciona. Vamos resolver o problema de maximização da função sujeito às seguintes restrições:

$$
\begin{array}{l}
Max\ f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y} \\
sujeito\ a \\
x + y + z \leq 20 \\
x, y, z \geq 0
\end{array}
$$

A nossa função-objetivo será a nossa função de ajustamento e o valor das variáveis de decisão são os cromossomas.

Passo 1 e 2 Gerar a população inicial e calcular seu ajustamento

Devemos gerar aproximadamente 50 ou mais soluções viáveis. Neste caso estaremos assumindo apenas três soluções viáveis (cromossomos):

Cromossoma 1

$$
\begin{array}{l}
x = 2 \Rightarrow x = 00010 \\
y = 4 \Rightarrow y = 00100 \Rightarrow ajustamento = 4 \\
z = 8 \Rightarrow z = 01000
\end{array}
$$

Cromossoma 2

$$
\begin{array}{l}
x = 3 \Rightarrow x = 00011 \\
y = 6 \Rightarrow y = 00110 \Rightarrow ajustamento = 1 \\
z = 2 \Rightarrow z = 00010
\end{array}
$$

Cromossoma 3

$$
\begin{array}{l}
x = 8 \Rightarrow x = 01000 \\
y = 4 \Rightarrow y = 00100 \Rightarrow ajustamento = 14 \\
z = 7 \Rightarrow z = 00111
\end{array}
$$

Passo 3 Gerar novos cromossomas através de cruzamentos e mutações.

Vamos supor que neste caso os cruzamentos serão efetuados através da troca de parte das cadeias que representam cada cromossoma com cada um dos outros cromosomos. Neste nosso exemplo faremos o cruzamento de 1 com 2, criando novos cromossomos considerando dois dígitos do primeiro cromossoma e três dígitos finais do segundo.

Por exemplo o cruzamento de 1 com 2

$$
1 \begin{bmatrix} 00010 \\ 00100 \\ 01000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 00011 \\ 00110 \\ 00010 \end{bmatrix} 2
$$

$$
1 \begin{bmatrix} 00011 \\ 00110 \\ 01010 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 00010 \\ 00100 \\ 00000 \end{bmatrix} 2
$$

O segundo tipo de acontecimento que pode levar a um novo cromossoma é a mutação. A mutação é a toca de um dígito da cadeia que representa o valor da variável de decisão pelo seu recíproco (um vira zero e zero vira um).

Por exemplo faremos uma mutação no cromossoma número 3 no 1º dígito à direita, representada na Tabela 7.2.

Tabela 7.2
Mutação de Cromossomos

Cromo.	Binários	Resultado
3	x=01000=8	x=01001=9
	y=00100=4	y=00100=4
	z=00111=7	z=00111=7

Passo 4. Gerar a nova população

Para tal compare cada novo cromossoma com o anterior. O que tiver melhor ajuste permanecerá na nova população.

Voltar ao passo 2 até que a população não tenha se alterado por alguns ciclos.

7.3.1 **Pontos fortes e fracos do GA**

O algoritmo genético encontrará a solução para quaisquer problemas de otimização não linear desde que fique processando por um tempo suficiente. O problema é descobrir qual o tempo suficiente. Para problemas relativamente simples com poucas restrições não deve levar mais de 60 minutos de processamento. Como não sabemos se o tempo foi suficiente, não saberemos que a solução apresentada seja a ótima. Po-

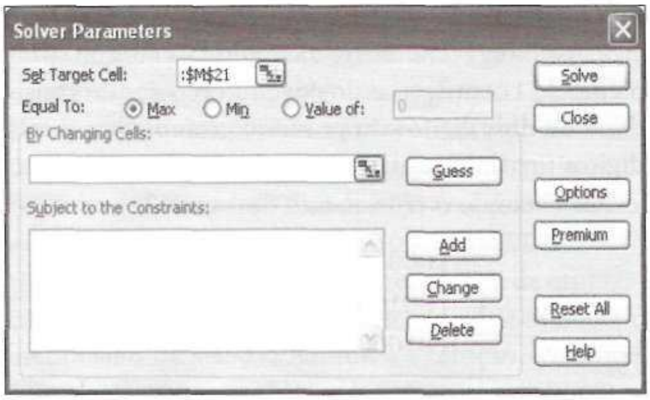


FIGURA 7.29 Parâmetros do Solver Standard

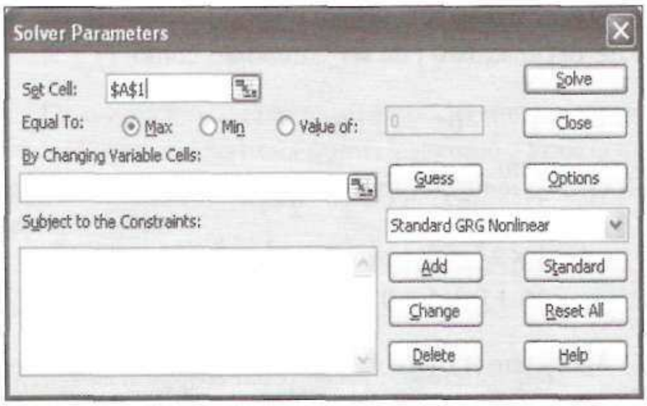


FIGURA 7.30 Parâmetros do Solver Premium

rém o que podemos assegurar com um certo grau de certeza é que será uma boa solução, isto é próxima da solução ótima.

Como uma regra geral os algoritmos genéticos tem uma boa performance em problemas com poucas retrições, não são afetados pela complexidade da função-objetivo e finalmente não são afetados pelo uso de funções (SE, MAX e MIN) do Excel, que provocam de descontinuidades nas funções da otimização.

7.3.2 O Solver Premiun

A instalação do Solver Premium deve ser feita seguindo instruções do CD-ROM encartado no livro. A instalação substituirá o Solver Standard pelo Premium. A Figura 7.29 apresenta a caixa de diálogos do Solver Standard do Excel após a instalação do Solver Premium. Nota que a aparência é a mesma do Solver empacotado junto ao Excel. A única diferença está num botão adicional escrito Premium que, se você clicar com o mouse sobre ele, aparecerá uma nova versão do Solver, apresentado na Figura 7.30.

Agora um combobox é apresentado onde o tipo de algoritmo a ser utilizado é apresentado. Como default o GRG é escolhido. Porém, você pode optar pelo algoritmo genético ou evolucionário.

EXERCÍCIOS 7

1, Considere a seguinte função, que representa o lucro de uma empresa, e que depende de certos insumos x_1, x_2 e x_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Determine para quais valores àe$x_h x_2$ ex_3 a empresa terá o maior lucro possível, sabendo que estes insumos estão disponíveis em qualquer quantidade.

2. A LCL Ltda. está considerando a implantação de uma nova fábrica em adição às três já existentes no Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte. As duas localidades que estão sendo estudadas são Brasília e Salvador. O custo de transporte é fundamental para a empresa, e como qualquer uma das duas fábricas novas cobrirá a demanda extra, o critério adotado para a escolha do local será o de menor custo de transporte para os quatro centros distribuidores existentes em Curitiba, Recife, Cuiabá e Belém. Os dados relevantes para esta decisão são mostrados nas tabelas abaixo.

Distribuidores	Custos e Capacidade das Fábricas Existentes			Demanda
	Rio de Janeiro	São Paulo	Belo Horizonte	
Curitiba	R$20,00	R$25,00	R$30,00	550
Recife	R$25,00	R$30,00	R$25,00	400
Cuiabá	R$20,00	R$25,00	R$20,00	300
Belém	R$55,00	R$60,00	R$50,00	250
Capacidade	500	300	400	

	Novas Fábricas	
Distribuidores	**Brasília**	**Salvador**
Curitiba	R$35,00	R$40,00
Recife	R$40,00	R$20,00
Cuiabá	R$20,00	R$35,00
Belém	R$50,00	R$40,00
Capacidade	300	500

A LCL conseguiu um desconto junto à empresa transportadora. Para cada 200 unidades transportadas por trecho, haverá R$5,00 de desconto unitário. Por exemplo: transportando até 199 unidades no trecho Rio de Janeiro - Curitiba não há desconto, mas transportando qualquer quantidade entre 200 e 399 neste trecho, o preço unitário passa para R$15,00 (desconto de R$5,00); transportando entre 400 e 599, o preço unitário passa para R$I 0,00, e assim por diante. É estabelecido que o preço mínimo para qualquer trecho depois de aplicados os descontos é de R$5,00. O modelo usado para resolver o problema é Linear ou Não-linear? Você pode garantir que será encontrada uma solução ótima?

3. Uma empresa chamada *Carvões com Dendê S/A* extrai carvão de três minas localizadas em três cidades do interior da Bahia, Milagres, Macarani e Itarantim, e envia para quatro consumidores que os manufaturam. O custo por tonelada de produção de carvão, o conteúdo de cinza e de enxofre (por tonelada) e a capacidade de produção em toneladas de cada mina estão resumidos na Tabela 1. O número de toneladas demandada por consumidor é dado na Tabela 2.

O custo (em reais) de enviar uma tonelada de uma mina para cada consumidor é dado na Tabela 3. Os limites de qualidade do carvão determinam as quantidades máximas de resíduo: 4% de enxofre e 5% de cinza.

Tabela 1

	Custo de Produção	Capacidade	Conteúdo de Carvão	Conteúdo de Enxofre
Milagres	R$ 50,00	50	0,05/ ton	0,05 /ton
Macarani	R$ 55,00	100	0,06/ ton	0,04 /ton
Itarantim	R$ 62,00	175	0,04/ ton	0,03 /ton

Tabela 2

Têca	Lero	Degas	Mabel
80	70	60	90

Tabela 3

	Têca	Lero	Degas	Mabel
Milagres	4	6	8	12
Macarani	9	6	7	11
Itarantim	8	12	3	5

a) Monte um PPL que minimize o custo da Carvões com Dendê de maneira a atender à demanda dos consumidores.

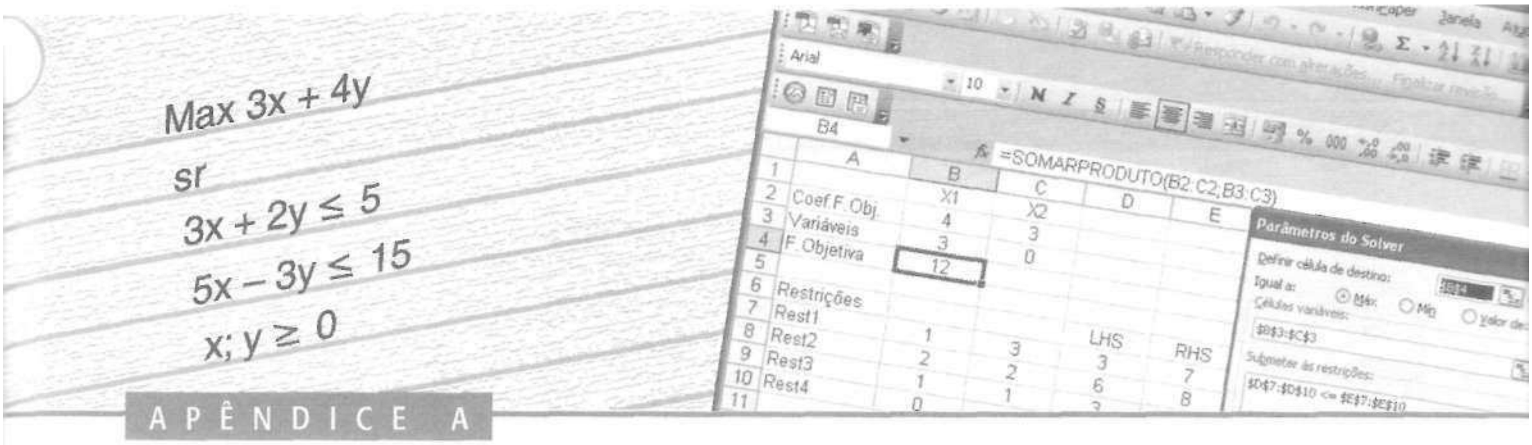
b) Considere que existe um desconto de R$2,00 para cada 10 unidades enviadas das minas de Macarani e Itarantim para um mesmo consumidor. Determine o que muda no problema.

4. Uma companhia possui três fábricas produzindo o mesmo produto. Se as fábricas Д *BeC* produzem x, y e z unidades, respectivamente, seus custos de fabricação são $(3x^2 + 200)$, $(y^2 + 400)$ e $(2z^2 + 300)$. Se um pedido de 1.100 unidades deve ser entregue, como a produção deve ser distribuída entre as três fábricas de maneira a minimizar os custos com a produção? Resolva este problema com o auxílio do Solver.

5. Um fabricante monopolista produz dois tipos de lâmpadas. De sua experiência, o fabricante determinou que se x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo forem feitas, cada uma delas poderá ser vendida pelos valores $(100 - 2x)$ e $(125 - 3y)$, respectivamente. O custo de fabricação de x lâmpadas do primeiro tipo e y lâmpadas do segundo

tipo é de $(12x + 11y + 4xy)$. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo, e qual é o lucro máximo?

6. Uma empresa de tecnologia apresenta um custo variável de R$100,00 para cada minicomputador produzido, mais um custo fixo de R$5.000,00 que é incorrido independentemente da quantidade produzida. Se esta companhia investe x reais em propaganda, ela consegue vender $x^{0,5}$ minicomputadores ao preço de R$300,00 cada. De que forma esta empresa pode maximizar o seu lucro? Se os custos fixos fossem iguais a R$20.000,00, o que a empresa deveria fazer?



Programação Linear Utilizando Lindo

Como dito anteriormente, os mesmos problemas resolvidos com Planilha Eletrônica podem ser resolvidos através de software específico para solução de problemas de Programação Linear. Dentre estes um dos mais populares é o LINDO. O Lindo (Linear, Interative, Discrete Optimizer) é um software interativo para resolução de problemas de Programação Linear, Quadrática ou Inteira. O algoritmo utilizado pelo Lindo é superior ao utilizado pelo Excel, tornando sua solução mais eficiente, rápida e segura. Utilizado para resolução de problemas reais de mais de 10.000 variáveis, dispõe de características que mostram os passos e quadros intermediários do método Simplex.

A versão educacional para ambiente *Windows* do programa pode ser obtida gratuitamente via download da página Web da LINDO SYSTEMS (www.lindo.com). Versões profissionais, sem os limites impostos à versão educacional, podem ser adquiridas diretamente pela página Web.

Uma vez instalado, o programa é iniciado de uma das maneiras usuais do ambiente Windows, a janela de trabalho representada na Figura A.l é apresentada.

Vamos resolver o mesmo problema solucionado com a planilha eletrônica na seção 3.1 e mostrar os relatórios de sensibilidade gerados pelo Lindo, apresentado a seguir.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

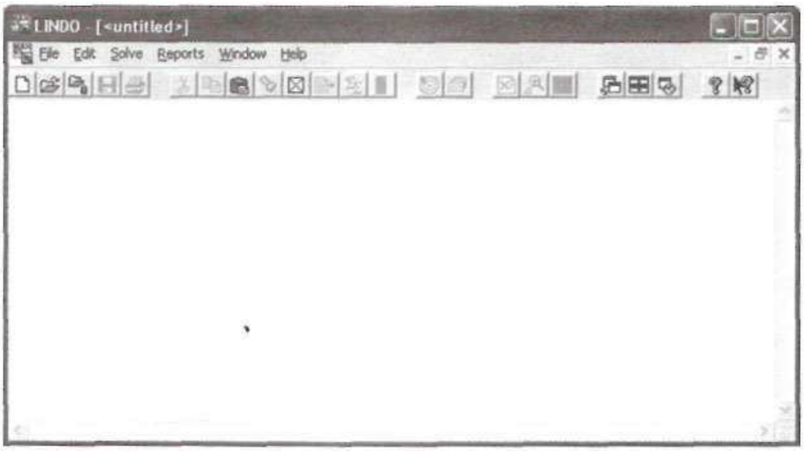


FIGURA A.1 Tela Inicial do software LINDO.

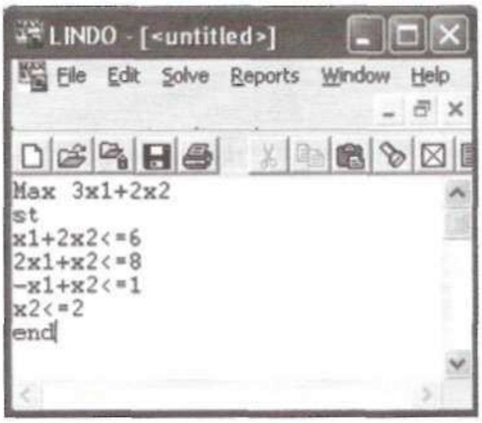


FIGURA A.2 Tela do software LINDO com o problema proposto.

Para tal devemos inserir o modelo na área de modelagem ou de trabalho do LINDO. A área de trabalho funciona de maneira análoga ao programa *bloco de notas*, que acompanha o ambiente Windows. Para escrever alguma coisa, basta clicar o mouse na posição desejada e digitar o texto. Algumas regras de formulação do problema são impostas pelo software e estaremos explicando algumas delas. Não pretendemos de maneira nenhuma explicar todos os comandos existentes no software (um manual em formato pdf pode ser obtido via download da página Web da Lindo Systems), mas apenas salientar os relevantes para modelar um problema e analisar seu resultado.

Os comandos necessários à modelagem de um problema de LP são:

- MAX - Inicia um problema de maximização
- MIN - Inicia um problema de minimização
- END - Termina a entrada de um problema
- ST ou Subject To – Para iniciar o conjunto de restrições

Os operadores que podem ser utilizados nas restrições são:

- < Para restrições menores que
- > Para restrições maiores que
- <= Para restrições do tipo menor ou igual
- >= Para restrições do tipo maior ou igual

Vale ressaltar que restrições do tipo < serão processadas como se fossem < = (menor ou igual) e restrições do tipo > serão processadas como se fossem > = (maior ou igual).

No caso do nosso problema a seguinte tela (Figura A.2) representaria o modelo. Vale a pena ressaltar que todas as variáveis do modelo são assumidas do tipo não-negativas, por definição padrão do software, logo não precisaram ser inseridas no modelo abaixo. Uma outra característica interessante é que o comando END nem sempre é necessário. Mas por facilidade no entendimento optaremos por sempre inseri-lo.

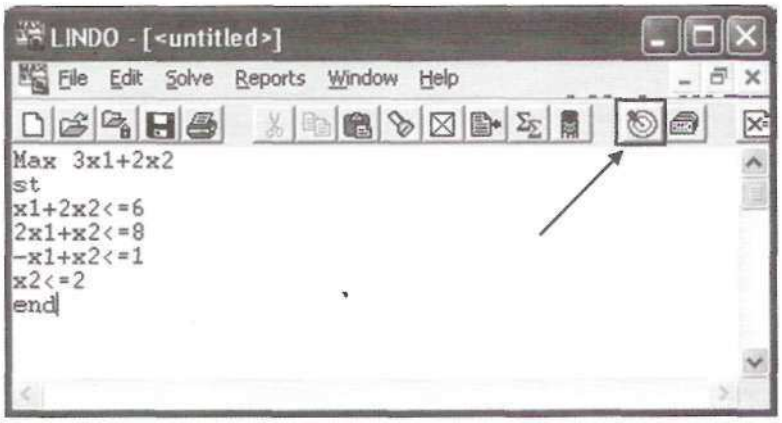


FIGURA A.3 Iniciando a solução pelo ícone.

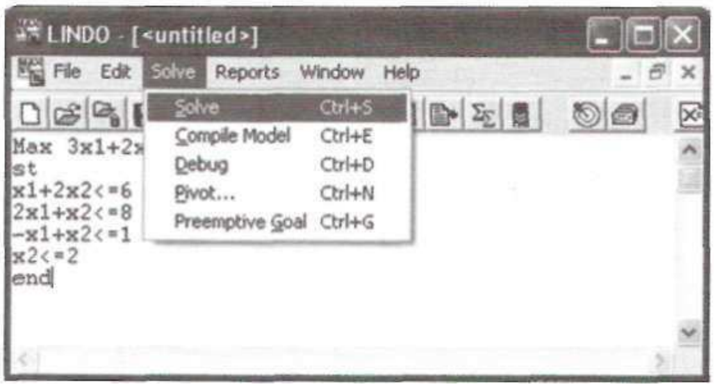


FIGURA A.4 Iniciando a solução pelo menu.

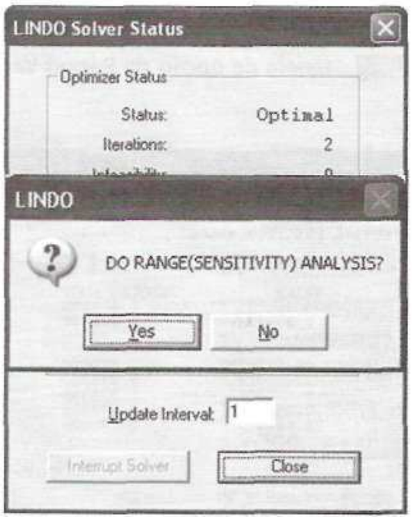


FIGURA A.5 Janela de opção de análise de sensibilidade.

Após a entrada do modelo desejamos obter os resultados, ou seja, encontrar o valor máximo (neste caso) da função objetiva e a solução ótima. Duas maneiras existem para tal. A primeira é clicar com o mouse sobre o ícone marcado na Figura A.3 e a segunda através do menu Solve e opção Solve (Figura A.4).

Se nenhum erro ocorrer durante a compilação, a tela (Figura A.5) aparecerá. Se a análise de sensibilidade for desejada, responda sim. Por ora não desejamos ver a análise de sensibilidade que será estudada posteriormente.

Quando o problema estiver resolvido, uma janela denominada "Reports Window" ou janela de relatórios aparecerá automaticamente. Esta janela de relatórios é o lugar onde todos os resultados serão lançados. Se dois problemas forem resolvidos e houver espaço na janela, suas resoluções apareceram uma seguida da outra. Para se examinar esta janela basta clicar na menu Windows | Reports Windows (Figura A. 6).

A janela de relatório para o nosso problema seria a representada pela Figura A.7.

O resultado pode ser visto como duas respostas distintas. O lado esquerdo corresponde aos valores das variáveis (decisão e folga/excesso) do Primai. Enquanto o lado direito corresponde aos valores das variáveis (decisão e folga/excesso) do Dual. Como já mencionado, existem duas interpretações para o Reduced Cost (folga/excesso do Dual):

A quantidade que o coeficiente da função objetiva de uma variável original deve melhorar antes desta variável se tornar básica.

- A quantidade de penalização deverá ser paga se quisermos tornar uma variável básica.

A interpretação para o Dual Price (variáveis originais do problema Dual) são as seguintes:

- A quantidade pela qual a função objetiva será melhorada dado um incremento de uma unidade na constante de uma restrição.

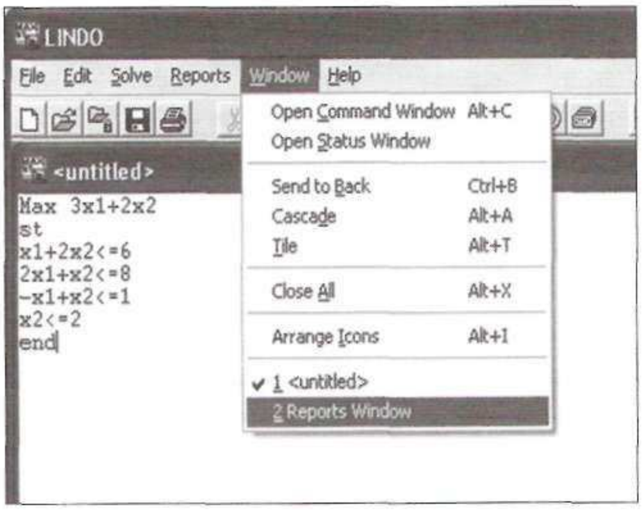
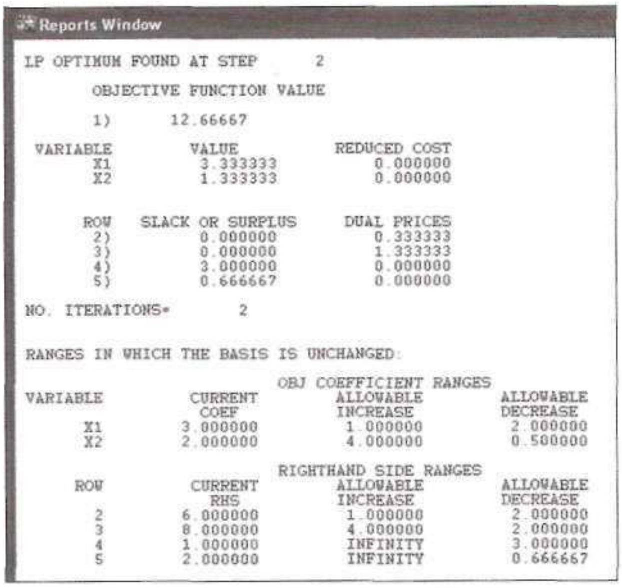


FIGURA A.6 Janela de opção de Report Windows.



```
Reports Window
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       12.66667

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         3.333333          0.000000
       X2         1.333333          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.333333
       3)         0.000000          1.333333
       4)         3.000000          0.000000
       5)         0.666667          0.000000

NO. ITERATIONS=       2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        3.000000        1.000000         2.000000
      X2        2.000000        4.000000         0.500000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2        6.000000        1.000000         2.000000
       3        8.000000        4.000000         2.000000
       4        1.000000        INFINITY         3.000000
       5        2.000000        INFINITY         0.666667
```

FIGURA A.7 Janela de relatórios do problema.

- Quanto estaríamos dispostos a pagar por uma unidade adicional de um recurso.

O nome de uma variável no LINDO pode conter até 8 caracteres, deve começar por uma letra e não deve conter um dos seguintes caracteres: !) + − = < > . ? . Opcionalmente podemos nomear as restrições de um modelo. O nome das restrições segue as mesmas convenções dos nomes das variáveis. Este procedimento facilita a leitura dos resultados do modelo. Para nomear uma restrição, basta iniciá-la com o nome seguido de um) e restrição propriamente dita [EX.: NOME) 2x+4y<=10].

O LINDO não aceita parênteses () como indicadores de preferência de ordem de precedência. Todas as operações são executadas da esquerda para a direita. Somente constantes (não variáveis) são permitidas do lado direito das restrições. Somente variáveis e seus coeficientes (não constantes) podem ser colocados do lado esquerdo das restrições.

APÊNDICE B

Respostas dos Exercícios

EXERCÍCIOS 2.1

1. Solução Ótima $x_1=3$; $x_2=0$; $Z=12$

2. Solução Ótima $x_1=80/31$; $x_2=45/31$; $Z=170/31$

3. Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=5$; $Z=40$

4. Solução Ótima $x_1=2$; $x_2=4$; $Z=56$

5. Problema Inviável.

6. x_1 – Nº de dias de operação da fábrica de SP
x_2 – Nº de dias de operação da fábrica de RJ
Solução Ótima $x_1=14/5$; $x_2=16/5$; $Z=920$

7. x_1 – Quantidade de horas que serão utilizadas no preparo de pizzas
x_2 – Quantidade de horas que serão utilizadas no preparo de calzones
Solução Ótima $x_1=125/16$; $x_2=0$; $Z=2250$

8. x_1 – Quantidade de Pára-Quedas produzidos/vendidos
x_2 – Quantidade de Asa-Deltas produzidas/vendidas
Solução Ótima $x_1=10$; $x_2=0$; $Z=600$

9. x_1 – Quantidade de Doses de Solução Red por lata
x_2 – Quantidade de Doses de Solução Blue por lata
Solução Ótima $x_1=12/5$; $x_2=24/5$; $Z=0{,}528$

10. x_1 – Quantidade em quilos de semente transportada
x_2 – Quantidade em quilos de grãos transportada
Solução Ótima $x_1=75000$; $x_2=85000$; $Z=38750$

EXERCÍCIOS 2.2

1. Solução Ótima $x_1=3$; $x_2=0$; $Z=12$

2. Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=5$; $Z=40$

3. Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=4$; $Z=24$

4. Solução Ótima $x_1=15$; $x_2=5$; $x_3=0$; $Z=25$

5. Solução Ótima $x_1=13$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=0$; $Z=104$

6. Variáveis de Decisão
x_1 = quantidade de km^2 de área plantada de trigo
x_2 = quantidade de km^2 de área plantada de arroz
x_3 = quantidade de km^2 de área plantada de milho
Solução Ótima
$x_1=200$; $x_2=0$; $x_3=0$; $Z=432000$

7. Variáveis de Decisão
x_1 = quantidade de jangadas alugadas por dia
x_2 = quantidade de supercanoas alugadas por dia
x_3 = quantidade de arcas com cabine alugadas por dia
Solução Ótima
$x_1=4$; $x_2=4$; $x_3=2$; $Z=680$

8. Variáveis de Decisão
x_1 = Nº de malas a serem produzidas por dia
x_2 = Nº de mochilas a serem produzidas por dia
Resposta item a) Solução Ótima
$x_1=150$; $x_2=70$; $Z=10300$

Resposta item b)
Para uma produção de 120 malas e 30 mochilas teríamos um lucro de
Lucro = 50(120) + 40(30) = 7200
Logo, o lucro adicional seria de 10300-7200=3100

9. Variáveis de Decisão
x_1 = Nº de picolés de morango a serem produzidos/vendidos por dia
x_2 = Nº de picolés de uva a serem produzidos/vendidos por dia
x_3 = Nº de picolés de limão a serem produzidos/vendidos por dia

Solução Ótima
$x_1=0$; $x_2=300$; $x_3=75$; $Z=341,25$

10. Variáveis de Decisão
x_1 = Nº de placas do tipo A, a serem produzidas/vendidas no período
x_2 = Nº de placas do tipo B, a serem produzidas/vendidas no período
x_3 = Nº de placas do tipo C, a serem produzidas/vendidas no período
Solução Ótima
$x_1=137,5$; $x_2=25$; $x_3=0$; $Z=6250$

EXERCÍCIOS 2.3

1. Maximizar $Z=4x_1+3x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (0,2) , $Z=6$
ponto (1,2) , $Z=10$
ponto (3,0) , $Z=12$
Solução Ótima $x_1=3$; $x_2=0$; $Z=12$

2. Minimizar $Z=x_1+2x_2$
ponto (80/31,45/31) , $Z=170/31$
ponto (0,3) , $Z=6$
Solução Ótima $x_1=80/31$; $x_2=45/31$; $Z=170/31=5,484$

3. Maximizar $Z=4x_1+8x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (0,5) , $Z=40$
ponto (4,1) , $Z=24$
ponto (4,0) , $Z=16$
Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=5$; $Z=40$

4. Maximizar $Z=80x_1+75x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (0,4/3) , $Z=100$
ponto (4,0) , $Z=320$
Solução Ótima $x_1=4$; $x_2=0$; $Z=320$

5. Minimizar $Z=4x_1+8x_2$
ponto (0,5) , $Z=40$
ponto (0,9) , $Z=72$
ponto (4,3) , $Z=40$
ponto (4,1) , $Z=24$
Solução Ótima $x_1=4$; $x_2=1$; $Z=24$

6. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de toneladas de analgésico a serem produzidas/vendidas
x_2 – quantidade de toneladas de antibiótico a serem produzidas/vendidas

Maximizar $Z=5x_1+8x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (0,2) , $Z=16$
ponto (4,1) , $Z=28$
ponto (5,0) , $Z=25$
Solução Ótima $x_1=4$; $x_2=1$; $Z=28$

7. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de camisas de manga curta a serem produzidas/vendidas
x_2 – Quantidade de camisas de manga comprida a serem produzidas/vendidas

Maximizar $Z=2x_1+3x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (70,0) , $Z=140$
ponto (60,10) , $Z=150$
ponto (20,50) , $Z=190$
ponto (0,60) , $Z=180$
Solução Ótima $x_1=20$; $x_2=50$; $Z=190$

8. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de bonecas Vampirescas a serem produzidas por dia.
x_2 – Nº de unidades de bonecas Lobimulher a serem produzidas por dia.

Maximizar $Z=2x_1+1x_2$
ponto (80/3,320/3) , $Z=160$
ponto (95/3,290/3) , $Z=160$
ponto (25,100) , $Z=150$
ponto (20,110) , $Z=150$
Como dois pontos extremos levam ao mesmo valor máximo, então todos os pontos do segmento de reta que une estes dois extremos também são soluções ótimas.

9. Variáveis de Decisão
x_1 – Nº de saídas com a Sheila por mês
x_2 – Nº de saídas com a Ana Paula por mês
Maximizar $Z=x_1+x_2$
ponto (0,0) , $Z=0$
ponto (0,4) , $Z=4$
ponto (3,2) , $Z=5$
ponto (4,0) , $Z=4$
Solução Ótima $x_1=3$; $x_2=2$; $Z=5$

10. Variáveis de Decisão
x_1 – Percentual de Mistura de Frango num quilo do produto
x_2 – Percentual de Mistura de Peixe num quilo do produto
Minimizar $Z=3x_1+5x_2$
ponto (0,100) , $Z=100$
ponto (100/3, 200/3) , $Z=1300/3$ - Solução Ótima

EXERCÍCIOS 2.4

1. Solução Ótima $x_1=3;\ x_2=0;\ Z=12$
2. Solução Ótima $x_1=0;\ x_2=5;\ Z=40$
3. Solução Ótima $x_1=15;\ x_2=5;\ x_3=0;\ Z=-25$
4. Solução Ótima $x_1=50;\ x_2=0;\ x_3=350;\ Z=6050$
5. Solução Ótima $x_1=2;\ x_2=0;\ x_3=1;\ Z=13$
6. Resposta do item a) $x_1=7{,}6923, x_2=6{,}8376, x_3=11{,}1111, x_4=0, x_5=0, x_6=0, Z=135{,}8974$
Resposta do item b) Nenhuma das máquinas tem horas de sobra (as variáveis de folga X4, X5 e X6 têm valores iguais a zero).
7. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de quilos de carne a serem transportados
x_2 – quantidade de quilos de grãos a serem transportados
Solução Ótima $x_1=85000; x_2=75000; x_3=0; x_4=23000; x_5=0; x_6=25000; Z=38750$
8. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de litros de combustível A a ser produzido/vendido
x_2 – quantidade de litros de combustível B a ser produzido/vendido
x_3 – quantidade de litros de combustível C a ser produzido/vendido
Resposta do item a) o modelo abaixo descrito

$$
\begin{aligned}
&Max\ 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 \\
&st \\
&\tfrac{8}{13}x_1 + \tfrac{5}{9}x_2 + \tfrac{4}{6}x_3 \le 120 \\
&\tfrac{5}{13}x_1 + \tfrac{4}{9}x_2 + \tfrac{2}{6}x_3 \le 200 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Solução Ótima $x_1=0; x_2=216; x_3=0; x_4=0; x_5=104; Z=4752$

Resposta do item b) A solução ótima sugere apenas a produção do combustível B na quantidade 216 litros, produzindo um lucro de R$ 4752,00.
Resposta do item c) Na solução ótima apenas existe sobra de 104 litros de extrato mineral.

9. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de fardos de madeira a serem transportados numa viagem
x_2 – quantidade de sacos de frutas a serem transportados numa viagem
Resposta do item a) O modelo

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } 20x_1 + 35x_2 \\
&st \\
&x_1 + x_2 \le 12 \\
&2x_1 + 3x_2 \le 10 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Resposta do item b)
Solução Ótima $x_1=0; x_2=3{,}33; x_3=8{,}67; x_4=0; Z=116{,}67$
Resposta do Item c) Sobrará capacidade de peso já que a variável de folga X3 apresenta o valor de 8,67 kg

10. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de toneladas de P1 que será fabricada
x_2 – quantidade de toneladas de P2 que será fabricada

Resposta do item a) O faturamento máximo é de R$150,00

Resposta do item b) Deve ser fabricado apenas o produto P2 na quantidade de 2,5 toneladas.

Resposta do Item c)
O recurso R1 será todo consumido já que X3=0.
O recurso R2 não será todo consumido já que X4=3,5, significando dizer que sobrarão 3,5 unidades deste recurso.

EXERCÍCIOS 2.5

1. Solução Inviável.
2. Solução Ótima $x_1=80/3; x_2=45/31; Z=170/31$
3. Solução Inviável.
4. Solução Ótima $x_1=2;\ x_2=4;\ x_3=0; x_4=72; x_5=4; x_6=0; Z=56$
5. Problema Inviável.
6. Solução Ótima $x_1=7{,}692; x_2=6{,}837; x_3=11{,}111; x_4=0; x_5=0;\ x_6=0;\ x_7=40;\ x_8=40;\ x_9=40;\ Z=135{,}897$
7. Variáveis de Decisão
x_{11} – quantidade de quilos de arroz transportado no compartimento dianteiro
x_{12} – quantidade de quilos de arroz transportado no compartimento traseiro
x_{21} – quantidade de quilos de feijão transportado no compartimento dianteiro
x_{22} – quantidade de quilos de feijão transportado no compartimento traseiro
Solução Ótima $x_{11}=66.666{,}67;\ x_{12}=80.000; x_{21}=0; x_{22}=0; Z=51.333{,}33$
8. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de litros de combustível A a ser produzido/vendido
x_2 – quantidade de litros de combustível B a ser produzido/vendido
x_3 – quantidade de litros de combustível C a ser produzido/vendido
Solução Ótima Inviável

9. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de fardos de madeira a serem transportados numa viagem
x_2 – quantidade de sacos de frutas a serem transportados numa viagem
Solução Ótima $x_1 = 20$; $x_2 = 3320$; $Z = 116600$.

10. Variáveis de Decisão
x_1 – quantidade de Ervilha produzida por dia
x_2 – quantidade de Milho produzido por dia
Solução Ótima $x_1 = 0{,}9411$; $x_2 = 2{,}8235$; $Z = 235{,}2941$.

EXERCÍCIOS 3.1

1. Solução Ótima $x_1=3$; $x_2=0$; $Z=12$

2. Solução Ótima $x_1=80/31$; $x_2=45/31$; $Z=170/31$

3. Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=5$; $Z=40$

4. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de produto P1 a ser fabricado/vendido
x_2 – Quantidade de produto P2 a ser fabricado/vendido
x_3 – Quantidade de produto P3 a ser fabricado/vendido
Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=15$; $x_3=15$; $Z=105$

5. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade do ingrediente A no aditivo
x_2 – Quantidade do ingrediente B no aditivo
x_3 – Quantidade do ingrediente C no aditivo
Solução Ótima $x_1= 4$; $x_2= 4$; $x_3= 2$; $Z=0{,}7$

6. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de motocicletas C250 produzidas/vendidas diariamente
x_2 – Quantidade de motocicletas C750 produzidas/vendidas diariamente
x_3 – Quantidade de motocicletas C1000 produzidas/vendidas diariamente
Solução Ótima $x_1=0$; $x_2=40$; $x_3=40$; $Z=28000$

7. Variáveis de Decisão
X_{CD} – Quantidade de entrevistas diurnas em domicílios com crianças
X_{SD} – Quantidade de entrevistas diurnas em domicílios sem crianças
X_{CN} – Quantidade de entrevistas noturnas em domicílios com crianças
X_{SN} – Quantidade de entrevistas noturnas em domicílios sem crianças
Solução Ótima $x_{CD}=0$; $x_{SD}=500$; $x_{CN}=400$; $x_{CN}=100$; $Z=9800$

8. Variáveis de Decisão
x_1 – Nº de horas que o inspetor Pedro trabalhará diariamente na inspeção
x_2 – Nº de horas que o inspetor João trabalhará diariamente na inspeção
x_3 – Nº de horas que o inspetor Marcelo trabalhará diariamente na inspeção
Solução Ótima $x_1=4$; $x_2=2{,}6666$; $x_3=0{,}7619$; $Z=41{,}6571$

9. Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de Multi-Tic a ser fabricado/vendido mensalmente
x_2 – Nº de unidades do modelo Star-Tic a ser fabricado/vendido mensalmente
x_3 – Nº de unidades do modelo Vulcano a ser fabricado/vendido mensalmente
Solução Ótima $x_1=980$; $x_2=120$; $x_3=390$; $Z=220700$

10. Codificação dos Gerentes
1 – João Bom de Papo
2 – Zé do Desconto
3 – Luiz Grana Fácil
Codificação das Localidades
1 – São Paulo
2 – Rio de Janeiro

Variáveis de Decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \textit{Se o gerente i for alocado a localidade j} \\ 0 - \textit{Se o gerente i não for alocado a localidade j} \end{cases}$$

Solução Ótima $x_{11}=0$; $x_{12}=1$; $x_{21}=0$; $x_{22}=0$; $x_{31}=1$; $x_{32}=0$; $Z=185$

EXERCÍCIOS 3.2

1. Variáveis de Decisão

x_{ij} – Produto (i)	Tipo de Fabricação (j)
1 – Unidades de Disquete	1 – Própria
2 – Hard Drive	2 – Terceirizada
3 – CD-ROM	
4 — CD-RW	

Solução Ótima $x_{11}=4500$; $x_{12}=500$; $x_{21}= 4500$; $x_{31}=470$; $x_{32}=530$; $x_{41}=3500$; $x_{42}=0$; $Z=2.418.650$

2. Variáveis de Decisão
x_1 – Percentual investido em ações do Banco A
x_2 – Percentual investido em ações do Banco B
x_3 – Percentual investido em ações do Banco C
x_4 – Percentual investido em Renda Fixa

Solução Ótima $x_1=76{,}40\%$; $x_2=15{,}00\%$; $x_3=8{,}59\%$; $x_4=0\%$; $Z=40{,}70$

3. Resposta do item a)
Variáveis de Decisão

$$x_i = \begin{cases} 1 - \textit{se o projeto i for realizado} \\ 0 - \textit{se o projeto i não for realizado} \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} 1 - \textit{Expansão da fábrica} \\ 2 - \textit{Expansão do depósito} \\ 3 - \textit{Novas máquinas} \\ 4 - \textit{Pesq. novos produtos} \end{cases}$$

Solução Ótima $x_1=1; x_2=0; x_3=0; x_4=1;\ Z=97000$

Resposta do item b) Deveríamos incluir a restrição $x_4=1$ e rodar de novo o modelo, o que nos levaria à Solução Ótima $x_1=1; x_2=0; x_3=0; x_4=1;\ Z=97000$.

Resposta do item c) Solução Ótima $x_1=1; x_2=1; x_3=1; x_4=0;$ $Z=110000$.

4. Variáveis de Decisão

x_{ij} – Quantidade de litros da matéria-prima i utilizada para produzir j

$$i = \begin{cases} \textit{Fórmula Especial} \\ \textit{Álcool} \\ \textit{Água} \\ \textit{Fragrância} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 - \textit{Flat de bolso com Perfume} \\ 2 - \textit{Flat de bolso sem Perfume} \\ 3 - \textit{Flat família com Perfume} \\ 4 - \textit{Flat família sem Perfume} \end{cases}$$

Variáveis de Auxiliares

x_j – Quantidade de itens produzidos do produto j

y_j – Quantidade de litros produzidos do produto j

Solução Ótima $Z=1880205$

Variáveis X_{ij}	Matéria-prima			
Produtos	**Form. Especial**	**Álcool**	**Água**	**Fragrância**
Flat de Bolso c/Perfume	2625	1050	6300	525
Flat de Bolso s/Perfume	2812,5	1125	7312,5	
Flat Família c/Perfume	7500	3000	18000	1500
Flat Família s/Perfume	9000	3600	23400	

5. Variáveis de Decisão

x_{ij} – Quantidade de metros do tecido i utilizado para produzir a camisa j

Variáveis Auxiliares N_j – Número de camisas do tipo j produzidas.

$$i = \begin{cases} 1 - \textit{Brim} \\ 2 - \textit{Algodão} \\ 3 - \textit{Tergal} \end{cases} \qquad j = \begin{cases} 1 - \textit{Baby-look} \\ 2 - \textit{Manga 3/4} \\ 3 - \textit{Tradicional Curta} \\ 4 - \textit{Tradicional Longa} \end{cases}$$

Solução Ótima $Z=18180{,}50$

Variáveis	Matéria-prima		
Produtos	**Brim**	**Algodão**	**Tergal**
Baby-look	540	0	0
Manga 3/4	475	0	0
Tradicional Curta	400	400	0
Tradicional Longa	252	0	108

6. Variáveis de Decisão

x_i – Quantidade de empregados que iniciam o turno às i horas

Solução Ótima $Z=215$ empregados que iniciam seus turnos de acordo com a tabela a seguir

Hora – Início	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
xi	0	0	8	0	10	3	22	3	29	0	10	0
Hora – Início	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
xi	20	15	36	9	0	3	27	0	20	0	0	0

7. Variáveis de Decisão

x_i – Quantidade de auxiliares que iniciam o turno às i horas

Solução Ótima $Z=230$

Hora – Início	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
xi	30	0	10	20	50	10	0	20	40	10	0

8. Variáveis de Decisão

QC_i – Quantidade de grãos comprados no mês i

QV_i – Quantidade de grãos vendidos no mês i

Variáveis Auxiliares

S_i – Saldo em estoque ao final do mês i

Solução Ótima $Z=2935475$

Mês	Vendas (QV_i)	Compras (QC_i)
Jan.	0	0
Fev.	5000	0
Mar.	0	300000
Abr.	0	0
Maio	0	0
Jun.	300000	300000
Jul.	300000	0
Ago.	0	300000

Set.	0	0
Out.	0	0
Nov.	0	0
Dez.	300000	0

9. Variáveis de Decisão

X_{ij} – Nº de chamadas realizadas no mês *i* e atendidas no mês *j*

NC_i – Nº de contratações feitas no início do mês *i*

ND_i – Nº de demissões feitas ao final do mês *i*

Variáveis Auxiliares

N_i – Nº de funcionários que trabalharão durante o mês *i*

Variáveis	Mês de Atendimento		
Mês da Chamada	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Janeiro	100	0	0
Fevereiro	-x-	250	50
Março	-x-	-x-	200
Contratados no Mês	2	15	0
Demissões no Mês	0	0	17

10. Variáveis de Decisão

x_{ij} – Valor investido na aplicação *i* ao final do ano *j* (i=A,B,C.D, E e F; j=0,1,2)

Obs.: F representa a aplicação em caderneta de poupança

Variáveis Auxiliares

S_i – Saldo Disponível após aplicação no início do ano *i*

Solução Ótima z=33324

Investimento	R$
Investimento A	0,00
Investimento B	75000,00
Investimento C	75000,00
Investimento D	75000,00
Investimento E	75000,00
Renda Fixa Ano 0	0,00
Renda Fixa Ano 1	37500,00
Renda Fixa Ano 2	3000,00

EXERCÍCIOS 4.1

1. O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
&Min\ 4y_1 + 6y_2 + 18y_3\\
&st\\
&1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3\\
&0y_1 + 1y_2 + 2y_3 = 5\\
&y_1, y_2 \geq 0 \ e \ \forall y_3 \in \Re
\end{aligned}
$$

2. O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
&Max\ D = 7y_1 + 4y_2\\
&st\\
&2y_1 + 3y_2 \leq 4\\
&2y_1 + 5y_2 \leq 3\\
&5y_1 + 1y_2 \leq 1\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solução Ótima y_1=0,086956; y_2=0,565217; D=2,8695

3. O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
&Max\ D = 16y_1 + 13y_2\\
&st\\
&2y_1 + 3y_2 \leq 5\\
&3y_1 + 4y_2 \leq 1\\
&5y_1 + 1y_2 \leq 1\\
&5y_1 + 2y_2 \leq 3\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solução Ótima y_1=0,176470; y_2=0,117647; D=4,35294

4. O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
&Max\ D = -9y_1 - 2y_2\\
&st\\
&1y_1 + 1y_2 \geq 1\\
&0y_1 + 1y_2 \geq -1\\
&0y_1 + 1y_2 \geq 1\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solução Ótima y_1=0; y_2=1; D= −2

5. Resolução do item a) O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
&Max\ D = -20y_1 + 36y_2\\
&st\\
&-10y_1 + 6y_2 \leq 3\\
&-2y_1 + 6y_2 = 6\\
&\forall y_1 \in \Re\\
&y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solução Ótima y_1=0,375; y_2=1,125; D= 33

Resolução do Item b) Ambos os problemas apresentam o mesmo número de variáveis e o mesmo número de restrições, portanto, ambos têm a mesma complexidade.

6.

Variáveis de Decisão

x_1 – Quantidade de quilos de Milho na alimentação dos animais

x_2 – Quantidade de quilos de Ração na alimentação dos animais

x_3 – Quantidade de quilos de Alfafa na alimentação dos animais

Resolução do item a) O problema Dual é dado por:
O problema Primal é dado por:

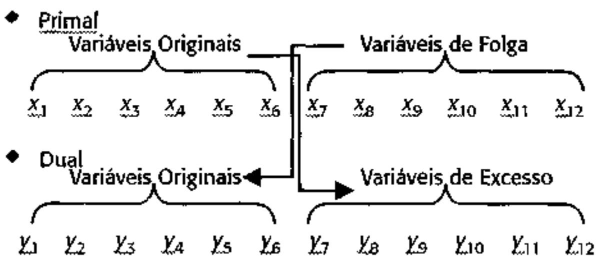
$$
\begin{aligned}
& Min\ 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \\
& st \\
& 10x_1 + 10x_2 + 40x_3 \geq 200 \\
& 20x_1 + 20x_2 + 30x_3 \geq 250 \\
& 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 \geq 120 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução do item b) O problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
& Max\ D = 200y_1 + 250y_2 + 120y_3 \\
& st \\
& 10y_1 + 20y_2 + 20y_3 \leq 20 \\
& 10y_1 + 20y_2 + 40y_3 \leq 30 \\
& 40y_1 + 30y_2 + 20y_3 \leq 35 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução do item c) Escolheremos resolver o problema Dual, já que este se encontra na forma-padrão.
Resolução do item d) Solução Ótima y_1=0,2; y_2=0,9; y_3=0; D= 265

7. As variáveis dos problemas Primal e Dual se relacionam como mostrado na figura abaixo.



Substituindo os valores apontados como solução do problema podemos obter os valores para as variáveis de folga $x_7 = 0; x_8 = 0; x_9 = 0{,}5; x_{10} = 0{,}5; x_{11} = 0; x_{12} = 1;$

Se as variáveis do problema primal têm valor diferente de zero (teorema da dualidade), então as variavéis associadas a elas (y_3, y_4, y_6, y_9, y_{10} e y_{12}) no problema Dual devem ter valor igual a zero. O problema Dual pode ser descrito por:

$$
\begin{aligned}
& Min\ y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 5y_4 + 7y_5 + 5y_6 \\
& st \\
& y_1 + 5y_2 + 4y_3 - 2y_5 + 2y_6 \geq 4 \\
& 3y_2 + 5y_3 - y_4 + y_5 - 3y_6 \geq 5 \\
& -4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_5 + 2y_6 \geq 1 \\
& 3y_1 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_6 \geq 3 \\
& y_1 - 5y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 4y_6 \geq -5 \\
& y_1 + 3y_2 + 1y_3 - 5y_4 + 2y_5 + 5y_6 \geq 8 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Se introduzirmos as variáveis de excesso no problema Dual teremos o seguinte sistema de equações.

$$
\begin{aligned}
& y_1 + 5y_2 + 4y_3 - 2y_5 + 2y_6 - y_7 = 4 \\
& 3y_2 + 5y_3 - y_4 + y_5 - 3y_6 - y_8 = 5 \\
& -4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_5 + 2y_6 - y_9 = 1 \\
& 3y_1 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_6 - y_{10} = 3 \\
& y_1 - 5y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 4y_6 - y_{11} = -5 \\
& y_1 + 3y_2 + 1y_3 - 5y_4 + 2y_5 + 5y_6 - y_{12} = 8
\end{aligned}
$$

Que pode ser reduzido ao sistema de equações a seguir, já que y_3, y_4, y_6, y_9, y_{10} e y_{12} devem ser iguais a zero.

$$
\begin{aligned}
& y_1 + 5y_2 - 2y_5 - y_7 = 4 \\
& 3y_2 + y_5 - y_8 = 5 \\
& -4y_1 + y_2 + y_5 = 1 \\
& 3y_1 + y_5 = 3 \\
& y_1 - 5y_2 + 2y_5 - y_{11} = -5 \\
& y_1 + 3y_2 + 2y_5 = 8
\end{aligned}
$$

Se este sistema de equações tiver solução, então, a solução está correta. Caso contrário a solução não é válida. Neste caso a solução existe e é dada por:

$y_1 = 0{,}5;\ y_2 = 1{,}5;\ y_3 = 0;\ y_4 = 0;\ y_5 = 1{,}5;\ y_6 = 0;$
$y_7 = 1;\ y_8 = 1;\ y_9 = 0;\ y_{10} = 0;\ y_{11} = 1;\ y_{12} = 0;$

8. Variáveis

x_1 – Quantidade de mesas quadradas que serão produzidas/vendidas

x_2 – Quantidade de mesas retangulares que serão produzidas/vendidas

x_3 – Quantidade de mesas redondas que serão produzidas/vendidas

Resposta do Item a) O modelo do problema Primal é dado por:

$$
\begin{aligned}
& Max\ Z = 30x_1 + 60x_2 + 80x_3 \\
& st \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resposta do item b) O modelo do problema Dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
& Min\ D = 1000y_1 + 600y_2 \\
& st \\
& 2y_1 + 2y_2 \geq 30 \\
& 3y_1 + 2y_2 \geq 60 \\
& 4y_1 + 2y_2 \geq 80 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resposta do item c) Resolvendo o Primal temos a seguinte solução ótima:
1ª Solução Ótima – $x_1=0$; $x_2=200$; $x_3=100$; $x_4=0$; $x_5=0$; $Z=20000$;
2ª Solução Ótima – $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=250$; $x_4=0$; $x_5=100$; $Z=20000$;

9. Resposta do item a) O modelo do problema Primal é dado por:
Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de dias de trabalho em imagens de Cristo
x_2 – Quantidade de dias de trabalho em imagens de Nossa Senhora

$$Max\ Z = 40x_1 + 25x_2$$
$$st$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 2{,}5x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resposta do item b) O modelo do problema Dual é dado por:
Variáveis de Decisão
y_1 – Receita Marginal obtida pelo incremento de 1 dia de trablho
y_2 – Receita Marginal obtida pelo incremento de 1 peça de madeira

$$Min\ D = 10y_1 + 16y_2$$
$$st$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 40$$
$$y_1 + 2{,}5y_2 \geq 25$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Resposta do item c) Resolvendo o Primal temos a seguinte solução ótima:
$x_1 = 8; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 0; Z=320;$
Resposta do item d) O artesão deve trabalhar apenas 8 dias fazendo imagens de Cristo.
Resposta do item e) O modelo passaria a ser o seguinte:

$$Max\ Z = 10x_1 - 10x_2$$
$$st$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 2{,}5x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

O lucro do artesão seria de R$80,00 fazendo apenas imagens de Cristo.

10. Resposta do item a)
Variáveis de Decisão
x_1 – Quantidade de Cheeseburgers em cada lanche
x_2 – Quantidade de Pizzas em cada lanche

O modelo do problema Primal é dado por:

$$Min\ Z = 10x_1 + 16x_2$$
$$st$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 50$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resposta do item b) O modelo do problema Dual é dado por:

$$Max\ D = 40y_1 + 50y_2$$
$$st$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 10$$
$$2y_1 + 5y_2 \leq 16$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Resposta do item c) Resolvendo o Dual temos a seguinte solução ótima:
$y_1 = 8; y_2 = 0; y_3 = 2; y_4 = 0; D=320;$

Resposta do item d) Os coeficientes das variáveis de folga/excesso do Dual (y_3, y_4) na solução ótima são os valores das variáveis originais associadas a elas no problema Primal (x_1 , x_2). Logo a dieta deve ser composta de 20 pizzas (coeficiente de y_4) e nenhum cheeseburger (coeficiente de y_3).
Resposta do item e) O limite mínimo de carboidratos é igualado e o de lipídios é superado em 50 u.n.

EXERCÍCIOS 4.2

1. Resposta do item a)
O relatório de limites mostra os valores máximo e mínimo que cada variável pode assumir, considerando todas as outras variáveis constantes, de maneira que a solução continue viável. Neste problema, cada variável aparece juntamente com uma outra em uma restrição de igualdade (especificação de demanda). Naturalmente, é impossível alterar apenas uma variável e manter a solução viável.

Resposta do item b)
Na verdade não existe contradição. De fato, o custo de produzir ou terceirizar (adquirir) o componente da base é o mesmo. Esta é uma questão de otimização do uso dos recursos (neste caso atividades – tempo): a produção do componente base consome tempo, que poderia ser utilizado na produção de um outro componente, que apresenta uma diferença entre o custo de produção e o de terceirização (aquisição).

Resposta do item c)
A restrição de tempo consumido com o molde tem preço-sombra negativo indicando que o recurso (tempo) é escasso; se pudesse ser ampliado o custo total (função objeti-

va) seria reduzido. Em contrapartida, as restrições de quantidades totais apresentam preço-sombra positivo indicando que, se fossem requeridos mais componentes, o preço total (função objetiva) aumentaria.

Resposta do item d)
Observando o relatório de análise de sensibilidade na parte referente às restrições, verificamos que, nas três restrições que representam o número de corpos, bases e blindagem, o acréscimo de 900 unidades se encontra dentro do intervalo permissível.
Sabemos, porém, que o relatório só tem valor para uma única alteração acontecendo de uma única vez. Portanto, não podemos simplesmente somar os produtos de preço-sombra pelo número de unidades para cada um dos insumos. Porém, o que podemos garantir é que no mínimo o custo irá aumentar do valor igual ao menor dos produtos entre o preço-sombra e o número de unidades. Logo, como o número de unidades utilizadas na produção de motores dos três insumos é o mesmo, o menor produto será o que tiver o menor preço-sombra. Isto nos leva a dizer que no mínimo o preço subirá de R$9.000,00 (900x10 do corpo).

Resposta do item e)
O acréscimo permitido (1E+30) foi infinito (representação do EXCEL®). Observando o Relatório de Respostas, podemos notar que este recurso apresenta uma folga de 15.450 horas. Portanto, o acréscimo da quantidade de horas disponíveis para esta atividade não apresentará vantagem alguma para o custo total (apenas iria sobrar mais deste recurso). A redução máxima permitida é exatamente o valor da folga, afinal representa a hora excedente não utilizada.

Resposta do item f)
O máximo que se deve pagar pelo tempo de molde é exatamente o preço-sombra desta atividade, ou seja R$0,50. Então, a hora de molde será comprada por R$0,40. O total de horas que deve ser comprada é de 5.700 horas, pois além deste valor o preço-sombra deve cair. Portanto, o investimento total será de R$2.280,00 (5700 x 0,40). O retorno será de R$0,10 por hora comprada, portanto, R$570,00.

2. Resposta do item a)
Variáveis de Decisão
x_1 = Nº de bolsas tipo padrão a serem produzidas nos próximos três meses
x_2 = Nº de bolsas tipo De Luxo a serem produzidas nos próximos três meses
Solução Ótima x_1=525; x_2=262,5; Z= 7612,5

Resposta do item b)
O lucro esperado para a quantidade ótima de bolsas é de R$7.612,50

Resposta do item c)
Devem ser programadas 630 horas para o processo de Corte e Coloração, 481,25 horas (481 horas e 15 minutos) para o processo de costura, 700 horas para o processo de Acabamento e 118,25 horas (18 horas e 15 minutos) para o processo de Inspeção e Empacotamento.

Resposta do item d)
O processo de Corte e Coloração e o processo de Acabamento não possuem tempo de sobra. O processo de Costura apresenta 118,75 horas (118 horas e 45 minutos) de sobra e o processo de Inspeção e Empacotamento apresenta 16,75 horas (16 horas e 45 minutos) de sobra.

Resposta do item e)
O coeficiente da variável x_1 (quantidade de bolsas tipo Padrão) pode variar de 6,3 a 13,5. O coeficiente da variável x_2 (quantidade de bolsas tipo De Luxo) pode variar de 6,67 a 15,29 (aproximadamente).

Resposta do item f)
Uma hora adicional de corte e coloração tem o valor de R$4,37.

Resposta do item g)
O preço de sombra para a restrição de corte e coloração é 4,375.

Resposta do item h)
O preço de sombra para a restrição de costura é 0.

3. Resposta do item a)
Variáveis de Decisão
x_1 = Nº de pôsteres do tipo A a serem produzidos
x_2 = Nº de pôsteres do tipo B a serem produzidos
x_3 = Nº de pôsteres do tipo C a serem produzidos
x_4 = Nº de pôsteres do tipo D a serem produzidos
Solução Ótima x_1=1500; x_2=1000; x_3=1000; x_4=2833,33; Z=10166,67

Resposta do item b)
A empresa está disposta a pagar $0,5 por minuto extra de impressão e $0,17 por minuto extra de dobragem. Como existem minutos de corte sobrando (folga de 3.500), a empresa não está disposta a pagar nada por minuto extra de corte.

Resposta do item c)
Os pôsteres do tipo B e do tipo C não dão lucro. Cada unidade produzida dá um prejuízo de R$0,33. E como o decréscimo permitido para ambos é igual, não há distinção entre os dois.

4. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade de carros fabricados na fábrica

$$i = \begin{cases} 1 - \text{Rio de Janeiro} \\ 2 - \text{São Paulo} \\ 3 - \text{Vitória} \\ 4 - \text{Uberaba} \end{cases}$$

Resposta do item a)
A fábrica 1 produzirá 400 automóveis, a fábrica 2 produzirá 200 automóveis e a fábrica 3 produzirá 400 automóveis. A fábrica 4 não produzirá nenhum automóvel. O custo total de produção será de R$11.600 mil, ou R$11.600.000,00.

Resposta do item b)
O custo de produção de um automóvel é de R$30 mil. Este valor é o mesmo para produzir um a mais ou um a menos (relatório de sensibilidade, preço-sombra da restrição de número de carros).

Resposta do item c)
A solução não mudaria se o custo de produção na fábrica 2 passasse de 10 mil para 8 mil reais. O custo total teria uma redução total de 200x2.000 = 400.000 reais (relatório de sensibilidade, custo reduzido do coeficiente de variável x_2).

Resposta do item d)
Existem 300 horas de mão-de-obra sobrando. Logo, não existe disposição de adquirir hora-extra, ou seja, não estamos dispostos a pagar nada por uma hora extra de mão-de-obra (relatório de análise de sensibilidade, preço-sombra da restrição de mão-de-obra).

Resposta do item e)
O acordo trabalhista está custando 4 mil reais por automóvel. Se o limite passasse para 200 automóveis (reduzisse 200 automóveis), a economia total seria de 200x4 = 800 mil reais. Nada poderia ser dito se o limite fosse para 600 automóveis, pois o aumento de 200 unidades deve provocar uma alteração no preço-sombra (não é suportado pelo relatório). Fazendo a alteração e rodando de novo o Solver, chegaríamos a uma solução inviável.

Resposta do item f)
Como uma unidade a mais de matéria-prima pode reduzir o custo em R$5 mil, este é o valor máximo que a empresa está disposta a pagar por esta hora. O relatório de sensiblidade indica que apenas 300 horas devem ser adquiridas por este valor.

Resposta do item g)
Qualquer que seja o custo de produção, continuará sendo necessário fabricar 400 carros na fábrica 1, pois é a que oferece melhor aproveitamento de mão-de-obra e de matéria-prima.

5. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade de caixas de cerveja do tipo

$$i = \begin{cases} 1 - \text{Antartida } 600ml \\ 2 - \text{Antartida } 350ml \\ 3 - \text{Boemia Regressa} \\ 4 - \text{Mudwieser} \\ 5 - \text{Malebier} \\ 6 - \text{Bama Chopp} \\ 7 - \text{Labati} \\ 8 - \text{Desce Redondo} \end{cases}$$

Resposta do item a)
Solução Ótima Z=333.900

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
86250	52500	4500	750	1500	750	3000	750

Resposta do item b)
Solução Ótima Z=334026

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
86300	52500	4500	750	1500	750	3000	750

EXERCÍCIOS 5.1

1. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade de entregas da filial i para o bairro j

$$i = \begin{cases} 1 - \text{Filial Centro} \\ 2 - \text{Filial Barra} \end{cases} \qquad j = \begin{cases} 1 - \text{Ipanema} \\ 2 - \text{Copacabana} \\ 3 - \text{Centro} \\ 4 - \text{Barra} \\ 5 - \text{Leblon} \\ 6 - \text{Tijuca} \end{cases}$$

Solução Ótima Z=21060

	Ipanema	Copacabana	Centro	Barra	Leblon	Tijuca
Centro	1400	80	400	0	0	620
Barra	0	980	0	150	870	0
Não Atendida	0	500	0	0	0	0

2. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade de produtos fabricados no mês i *e entregues no mês j*
Solução Ótima Z= 18700000

Variáveis X_{ij}	Entrega no Mês		
Produzido no Mês	1	2	3
1	1000	0	500
2	-X-	2000	500
3	-X-	-X-	2000

Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade fabricada na fábrica *i* do produto *j*
Solução Ótima Z= 884000

3.

Variáveis	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Fábrica 1	0	0	1000
Fábrica 2	0	0	3000
Fábrica 3	0	0	0
Fábrica 4	3000	0	
Fábrica 5	2000	3000	

4. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade produzida pela empresa *i* do produto *j*
Solução Ótima Z= 1309,50

Variáveis	Ouriço (1)	Cajuzinho (2)	Brigadeiro (3)	Bolinha de queijo (4)	Risole (5)	Croquete (6)	Coxinha de Galinha (7)	Capac. Ociosa (8)
Empresa 1	0	0	0	0	0	0	0	25000
Empresa 2	0	0	0	0	0	0	0	23000
Empresa 3	0	0	0	5000	500	3500	6000	0
Empresa 4	5000	4000	7000	0	3500	0	0	2500
Empresa 5	0	0	0	0	0	0	0	20000

5 Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade de energia da usina *i* entregue na cidade *j*
Solução Ótima Z= 1020

Variáveis	F. Santana (1)	Milagres (2)	Itabuna (3)	Maiquinique (4)
Usina 1	0	10	25	0
Usina 2	45	0	5	0
Usina 3	0	10	0	30

6. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade produzida no trimestre *i* entregue estoque no trimestre *j*
Solução Ótima Z= 88,175

Variáveis	Entrega no Trimestre			
Produzido no trim.	1	2	3	4
1	10	15	0	0
2	-X-	15	0	0
3	-X-	-X-	20	20
4	-X-	-X-	-X-	2

7. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade produzida fabrica *i* entregue no armazém *j*
Solução Ótima Z= 10000

Variáveis	Armazéns		
Fábricas	1	2	3
1	0	200	0
2	200	200	100
3	0	0	200

8. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Se a máquina *i* fará a tarefa *j* (x_{ij}=0 – não faz; x_{ij}=1 – faz)
Solução Ótima Z= 20

Trimestre (fábrica x armazém)	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5
Máquina 1	0	0	0	0	0
Máquina 2	1	0	0	1	0
Máquina 3	0	0	1	0	0
Máquina 4	0	1	0	0	1

9. Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidade de Toalhas de Compradas/Utilizadas em i Utilizadas em j (i < j).
Solução Ótima Z=8400

Variáveis	Utilização no Dia						
Comprados/Utilizados	1	2	3	4	5	6	7
Comprados no Dia	2400	1000	0	0	0	0	0
Utilizado no Dia 1	-X-	200	200	2000	0	0	0
Utilizado no Dia 2	-X-	-X-	1200	0	0	0	0
Utilizado no Dia 3	-X-	-X-	-X-	0	0	1400	0
Utilizado no Dia 4	-X-	-X-	-X-	-X-	1800	0	200
Utilizado no Dia 5	-X-	-X-	-X-	-X-	-X-	0	1800
Utilizado no Dia 6	-X-	-X-	-X-	-X-	-X-	-X-	200

10. Variáveis de Decisão

x_{ij} – Se a empresa i fará o projeto j ($x_{ij}=0$ – não faz; $x_{ij}=1$ – não faz)

Solução Ótima $Z=6$

Variável X_{ij}	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	Projeto 4	Projeto 5	Projeto 6	Projeto 7
Empresa 1	1	0	0	0	0	0	0
Empresa 2	0	1	1	0	0	0	0
Empresa 3	0	0	0	1	1	0	0
Empresa 4	0	0	0	0	0	0	1

EXERCÍCIOS 5.2

1. Solução Ótima $Z=2450$

Quantidade	De		Para	
Remetida	Nó	Cidade	Nó	Cidade
0	1	Chapecó	2	Joaçaba
1	1	Chapecó	3	Lages
0	1	Chapecó	4	Joinville
0	2	Joaçaba	5	Caxias do Sul
0	2	Joaçaba	6	Florianópolis
1	3	Lages	5	Caxias do Sul
0	3	Lages	6	Florianópolis
0	4	Joinville	6	Florianópolis
0	4	Joinville	7	Sombrio
1	5	Caxias do Sul	8	Porto Alegre
0	6	Florianópolis	5	Caxias do Sul
0	6	Florianópolis	7	Sombrio
0	6	Florianópolis	8	Porto Alegre
0	7	Sombrio	8	Porto Alegre

2. Solução Ótima $Z=2150$

Quantidade	De		Para		
Remetida	Nó	Cidade	Nó	Cidade	Energia
400	1	Chapecó	2	Joaçaba	400
950	1	Chapecó	3	Lages	950
800	1	Chapecó	4	Joinville	800
0	2	Joaçaba	5	Caxias do Sul	1800
400	2	Joaçaba	6	Florianópolis	900
400	3	Lages	5	Caxias do Sul	1100
550	3	Lages	6	Florianópolis	600
200	4	Joinville	6	Florianópolis	600
600	4	Joinville	7	Sombrio	1200
400	5	Caxias do Sul	8	Porto Alegre	400
0	6	Florianópolis	5	Caxias do Sul	900
0	6	Florianópolis	7	Sombrio	1000
1150	6	Florianópolis	8	Porto Alegre	1300
600	7	Sombrio	8	Porto Alegre	600
2150	8	Porto Alegre	1	Chapecó	90000

3. Solução Ótima $Z=88140$

Quantidade	De		Para	
Remetida	Nó	Período/Mês	Nó	Entrega/Mês
500	1	P.Normal em 1	9	Entrega em 1
5	2	P.Extra em 1	9	Entrega em 1
470	3	P.Normal em 2	10	Entrega em 2
60	4	P.Extra em 2	10	Entrega em 2
300	5	P.Normal em 3	11	Entrega em 3
45	6	P.Extra em 3	11	Entrega em 3
450	7	P.Normal em 4	12	Entrega em 4
20	8	P.Extra em 4	12	Entrega em 4
85	9	Entrega em 1	10	Entrega em 2
35	10	Entrega em 2	11	Entrega em 3
70	11	Entrega em 3	12	Entrega em 4

4. Solução Ótima $Z=16$

Quantidade	De	Para
Remetida	Nó	Nó
8	C	1
8	C	2
0	1	2
2	1	3
6	1	4
5	2	3
3	2	4
0	3	4
7	3	R
9	4	R
16	R	C

5. Solução Ótima $Z=6110$

Quantidade	De		Para	
Remetida	Nó	Cidade	Nó	Cidade
0	1	São Paulo	3	Vitória
0	1	São Paulo	4	Belo Horizonte
130	1	São Paulo	5	Brasília
0	1	São Paulo	6	Salvador
0	2	Rio de Janeiro	3	Vitória
0	2	Rio de Janeiro	4	Belo Horizonte

0	2	Rio de Janeiro	5	Brasília
130	2	Rio de Janeiro	6	Salvador
0	3	Vitória	4	Belo Horizonte
0	3	Vitória	5	Brasília
0	3	Vitória	6	Salvador
0	4	Belo Horizonte	3	Vitória
0	4	Belo Horizonte	5	Brasília
0	4	Belo Horizonte	6	Salvador

6. Solução Ótima Z=1950

Quantidade	De		Para	
Remetida	Nó	Cidade	Nó	Cidade
0	1	Natal	3	F. Santana
0	1	Natal	4	Itabuna
0	1	Natal	5	São Paulo
50	1	Natal	6	Rio
0	2	Aracaju	3	F. Santana
0	2	Aracaju	4	Itabuna
150	2	Aracaju	5	São Paulo
50	2	Aracaju	6	Rio
0	3	F. Santana	4	Itabuna
0	3	F. Santana	5	São Paulo
0	3	F. Santana	6	Rio
0	4	Itabuna	5	São Paulo
0	4	Itabuna	6	Rio

7. Solução Ótima Z=120

Quantidade	De	Para
Remetida	Nó	Nó
60	A	B
60	A	C
60	B	C
0	B	D
0	B	E
30	C	D
90	C	F
30	D	E
30	E	F
120	F	A

8. Solução Ótima Z=9

Quantidade	De	Para
Transmitida	Nó	Nó
1	A	1
0	A	3
1	1	2
0	1	3
0	1	4
0	2	3
1	2	B
0	3	4
0	4	2
0	4	B

9. Solução Ótima Z=118,8

Quantidade	De		Para	
Remetida	Nó	Nome	Nó	Tarefa
0	1	Ubiratan	T1	Tarefa 1
0	1	Ubiratan	T2	Tarefa 2
0	1	Ubiratan	T3	Tarefa 3
0	1	Ubiratan	T4	Tarefa 4
0	2	Paulo	T1	Tarefa 1
0	2	Paulo	T2	Tarefa 2
0	2	Paulo	T3	Tarefa 3
1	2	Paulo	T4	Tarefa 4
0	3	Roberto	T1	Tarefa 1
0	3	Roberto	T2	Tarefa 2
0	3	Roberto	T3	Tarefa 3
0	3	Roberto	T4	Tarefa 4
0	4	Antônio	T1	Tarefa 1
0	4	Antônio	T2	Tarefa 2
1	4	Antônio	T3	Tarefa 3
0	4	Antônio	T4	Tarefa 4
0	5	Celso	T1	Tarefa 1
1	5	Celso	T2	Tarefa 2
0	5	Celso	T3	Tarefa 3
0	5	Celso	T4	Tarefa 4
1	6	Plínio	T1	Tarefa 1
0	6	Plínio	T2	Tarefa 2
0	6	Plínio	T3	Tarefa 3
0	6	Plínio	T4	Tarefa 4

10. Solução Ótima Z=65000

Rota	De	Para
Escolhida	**Nó**	**Nó**
0	1	2
1	1	3
0	1	4
0	2	5
1	3	4
1	4	5

EXERCÍCIOS 6

1. Solução Ótima Z=3000

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Quantidades Estantes	200	0	0
Setup (S/N)	1	0	0

2. Resposta do item a)
Solução Ótima Z=166,667; Vasos Pequenos=1,667; Vasos Grandes = 5;

Resposta do item b)
Solução Ótima Z=160; Vasos Pequenos=1; Vasos Grandes = 5;

Resposta do item c)
A solução é viável

Resposta do item d)
Como o valor ótimo da função-objetivo, considerando que a solução ótima truncada é a mesma da solução ótima inteira então não haveria perda neste caso.

3. Solução Ótima Z=4000

Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Construir(S/N)	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

4. Solução Ótima Z=277,44

Projeto	0-Não/1-Sim
1	0
2	0
3	1
4	1

5. Resposta do item a)
Solução Ótima Bolsas=5; Jaquetas=3; Z=1700

Resposta do item b)
Solução Ótima Bolsas=6,4255; Jaquetas=2,7324; Z=1731,91

Resposta do item c)
Solução Ótima Bolsas=6; Jaquetas=2; Z=1400. Logo é diferente da solução ótima do problema inteiro.

6. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade de unidades de ar-condicionado vendido na loja i

$$i = \begin{cases} 1 - \textit{Loja Depto RJ} \\ 2 - \textit{Loja Depto BH} \\ 3 - \textit{Loja Depto SP} \end{cases}$$

Resposta do item a)
Solução Ótima x_1=262,2951; x_2=0; x_3=65,57377; Z=27062,3

Resposta do item b)
Solução Ótima x_1=260; x_2=0; x_3=65; Z=26825,5

Resposta do item c)
A solução truncada do item a) não é uma solução viável

7. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade de unidades do produto i a ser fabricado

Problema Relaxado
Solução Ótima x_1=0; x_2=21,17647; x_3=8,8235; Z=98,8235

Problema Inteiro
Solução Ótima x_1=2; x_2=20; x_3=8; Z=96

8. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade de anúncios na mídia i

$$i = \begin{cases} 1 - \textit{Televisão} \\ 2 - \textit{Rádio} \\ 3 - \textit{Jornal} \end{cases}$$

Problema Relaxado
Solução Ótima x_1=3,3333; x_2=20; x_3=10; Z=1093333,3

Problema Inteiro
Solução Ótima x_1=3; x_2=20; x_3=10; Z=1060000

9. Variáveis de Decisão
x_i – Construir o posto de saúde no local i (0-não; 1-sim)
Solução Ótima x_1=0; x_2=1; x_3=1; x_4=0; x_5=1; x_6=0; x_7=0; x_8=0; Z=3.

10. Variáveis de Decisão
x_i – Quantidade do Artigo *i* a ser produzido;

Problema Relaxado
Solução Ótima x_1=0; x_2=81,333; x_3=13,333; x_4=0; Z=595,333.

Problema Inteiro
Solução Ótima x_1=0; x_2=80; x_3=15; x_4=0; Z=595

EXERCÍCIOS 7

1. x_1=0,5; x_2=0,6666; x_3=1,3332; Z=1,58333.

2. O problema de programação não-linear não tem apenas um mínimo local. Partindo de diversas condições iniciais, o modelo chega a respostas distintas.

3. Resposta do item a)
Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidades (toneladas) de carvão enviadas da mina *i* para o consumidor j.

Solução Ótima Z=19290

Quantidade	Para			
De	Teca	Lero	Degas	Mabel
Milagres	27	23	0	0
Macarani	27	23	30	20
Itarantim	27	23	30	70

Resposta do item b)
Variáveis de Decisão
x_{ij} – Quantidades (toneladas) de carvão enviadas da mina *i* para o consumidor j.
Solução Ótima Z=17527

Quantidade	Para			
De	Teca	Lero	Degas	Mabel
Milagres	8	23	0	0
Macarani	0	23	30	40
Itarantim	72	23	30	50

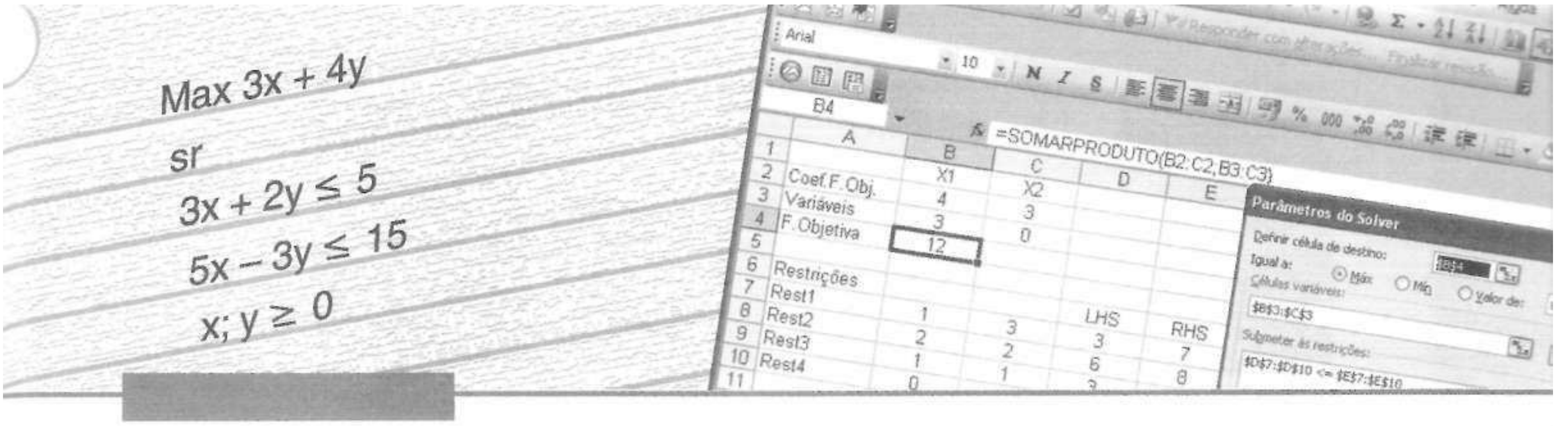
4. Solução Ótima Z=255.393.424

Fábricas	Unid. Produzidas
A	278
B	482
C	340

5. Solução Ótima Z=1137

Lâmpadas	Quant. Produzidas
X	9
Y	13

6. Resposta do item a)
Solução Ótima Z=5000; investimento em propaganda=100;
Resposta do item b)
Solução Ótima Z= −1000; investimento em propaganda=100;



Bibliografia

ANDERSON, David R.; SWEENEY Dennis J.; WILLIAMS, Thomas A. (1983). *Quantitative Methods for Business.* 2. ed. St. Paul: West Publishing Company. 534 p.

BERTSIMAS, Dimitris; FREUND, Robert M. (2000). *Data, Models, and Decisions: The Fundamentals of Management Sciences.* Cincinnati: South-Western College Publishing. 530 p.

CHVATAL, Vasek (1983). *Linear Programming.* Nova York: W. H. Freeman and Company. 487 p.

EPPEN, G. D. etal. (1998). *Introductory Management Science.* 5. ed. Nova Jersey: Prentice Hall. 702 p.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. (2000). *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos.* Rio de Janeiro: Campus. 649 p.

HILLIER, Frederick S.; HILLIER, Mark S.; LIEBERMAN, Gerald J. (2000). *Introduction to Management Sciences.* 1. ed. Nova York: McGraw-Hill, Inc. 720 p.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. (1995). *Introduction to Operations Research.* 6. ed. Nova York: McGraw-Hill, Inc. 998 p.

JANG, J. S. R.; SUN, CT.; MIZUTANI, E. (1997) *Neuro-Fuzzy and Soft Computing.* Nova Jersey: Prentice Hall. 614 p.

RAGSDALE, Cliff T. (2004). *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis.* 4. ed. Cincinnati: South-Western College Publishing. 842 p.

SCHARAGE, Linus (1997). *Optimization Modeling with Lindo.* 5. ed. Pacific Grove: Duxbry Press. 470 p.

TAHA, Hamdy A. (1997). *Operations Research: An Introduction.* 6. ed. Nova Jersey: Prentice Hall. 916 p.

TAYLOR III, Bernard W. (1996). *Introduction to Management Science.* 5. ed. Nova Jersey: Prentice Hall. 902 p.

WINSTON, Wayne L. (1994). *Operations research: Applications and Algorithms.* 3. ed. Belmont: International Thomson Publishing Company. 1319 p.

WINSTON, Wayne L.; ALBRIGHT, S. Christian (2001). *Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications.* 2. ed. Belmont: International Thomson Publishing Company. 953 p.

Conheça também:

Logística
Antonio Galvão Novaes

ISBN 85-352-1452-6
ou ISBN 978-85-352-1452-9
432 páginas

Administração de Materiais
Paulo Sérgio Gonçalves

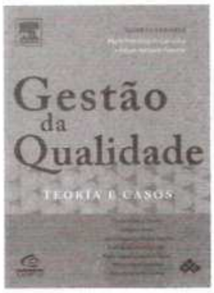
ISBN 85-352-1342-2
ou ISBN 978-85-352-1342-3
320 páginas

Administração da Produção e Operações
Steve Brown, Richard Lamming,
John Bessant, Peter Jones

ISBN 85-352-1748-7
ou ISBN 978-85-352-1748-3
384 páginas

Comércio Exterior
Ligia Maura Costa

ISBN 85-352-1996-X
ou ISBN 978-85-352-1996-8
320 páginas



Gestão da Qualidade
Marly Monteiro de Carvalho, Roberto Gilioli, Gregório Bouer, José Joaquim do Amaral Ferreira, Edson Pacheco Paladini, Robert Wayne Samohyl, Paulo Augusto Cauchick Miguel

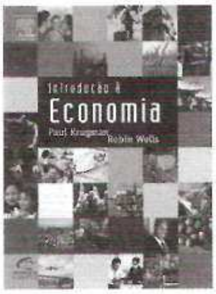
ISBN 85-352-1752-5
ou ISBN 978-85-352-1752-0
376 páginas

Gestão da Inovação
Paulo Bastos Tigre

ISBN 85-352-1785-1
ou ISBN 978-85-352-1785-8
304 páginas

Gestão de Inovação de Produtos
Sérgio Takahashi,
Vânia Passarini Takahashi

ISBN 85-352-2090-9
ou ISBN 978-85-352-2090-2
256 páginas



Introdução à Economia
Paul Krugman e Robin Wells

ISBN 85-352-1108-X
ou ISBN 978-85-352-1108-5
860 páginas

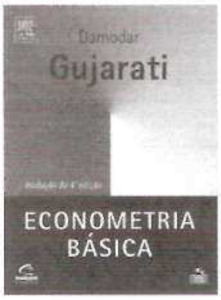
Administração de Marketing
Michael J. Baker

ISBN 85-352-1414-3
ou ISBN 978-85-352-1414-7
604 páginas

ELSEVIER

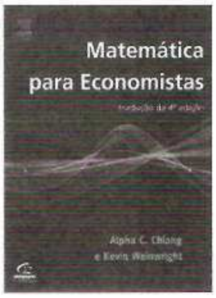
EDITORA CAMPUS Uma empresa Elsevier
www.campus.com.br

Conheça também:



Econometria Básica
Damodar Gujarati

ISBN 85-352-1664-2
ou ISBN 978-85-352-1664-6
840 páginas



Matemática para Economistas
Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright

ISBN 85-352-1769-X
ou ISBN 978-85-352-1769-8
692 páginas

Teoria dos Jogos
Ronaldo Fiani

ISBN 85-352-2073-9
ou ISBN 978-85-352-2073-5
408 páginas

Estratégia e Gestão Empresarial
Betânia Tanure, Sumantra Ghoshal

ISBN 85-352-1529-8
ou ISBN 978-85-352-1529-8
296 páginas

Como Escrever Teses e Monografias
Magda Alves

ISBN 85-352-2212-X
ou ISBN 978-85-352-2212-8
120 páginas

Direito, Economia e Mercados
Armando Castelar, Jairo Saddi

ISBN 85-352-1528-X
ou ISBN 978-85-352-1528-1
588 páginas

Ética e Economia
Marcos Fernandes Gonçalves da Silva

ISBN 85-352-2075-5
ou ISBN 978-85-352-2075-9
232 páginas

Economia do Setor Público
Ciro Biderman, Paulo Arvate

ISBN 85-352-1530-1
ou ISBN 978-85-352-1530-4
592 páginas

Estatística Usando Excel
Juan Carlos Lapponi

ISBN 85-352-1574-3
ou ISBN 978-85-352-1574-8
496 páginas

ELSEVIER
EDITORA CAMPUS
Uma empresa Elsevier
www.campus.com.br

Outras maneiras fáceis de receber informações sobre nossos lançamentos e ficar atualizado.

- ligue grátis: **0800-265340** (2ª a 6ª feira, das 8:00 h às 18:30 h)
- preencha o cupom e envie pelos correios (o selo será pago pela editora)
- ou mande um e-mail para: **info@elsevier.com.br**

ELSEVIER

CAMPUS

Nome: ______________________________

Escolaridade: ______________ ❑ Masc ❑ Fem Nasc ___/___/___

Endereço residencial: ______________________________

Bairro: ________ Cidade: ________ Estado: ________

CEP: ________ Tel.: ________ Fax: ________

Empresa: ______________________________

CPF/CNPJ: ________ e-mail: ________

Costuma comprar livros através de: ❑ Livrarias ❑ Feiras e eventos ❑ Mala direta ❑ Internet

Sua área de interesse é:

❑ **UNIVERSITÁRIOS**
- ❑ Administração
- ❑ Computação
- ❑ Economia
- ❑ Comunicação
- ❑ Engenharia
- ❑ Estatística
- ❑ Física
- ❑ Turismo
- ❑ Psicologia

❑ **EDUCAÇÃO/ REFERÊNCIA**
- ❑ Idiomas
- ❑ Dicionários
- ❑ Gramáticas
- ❑ Soc. e Política
- ❑ Div. Científica

❑ **PROFISSIONAL**
- ❑ Tecnologia
- ❑ Negócios

❑ **DESENVOLVIMENTO PESSOAL**
- ❑ Educação Familiar
- ❑ Finanças Pessoais
- ❑ Qualidade de Vida
- ❑ Comportamento
- ❑ Motivação

20299-999 - Rio de Janeiro - RJ

O SELO SERÁ PAGO POR
Elsevier Editora Ltda

CARTÃO RESPOSTA
Não é necessário selar

ELSEVIER

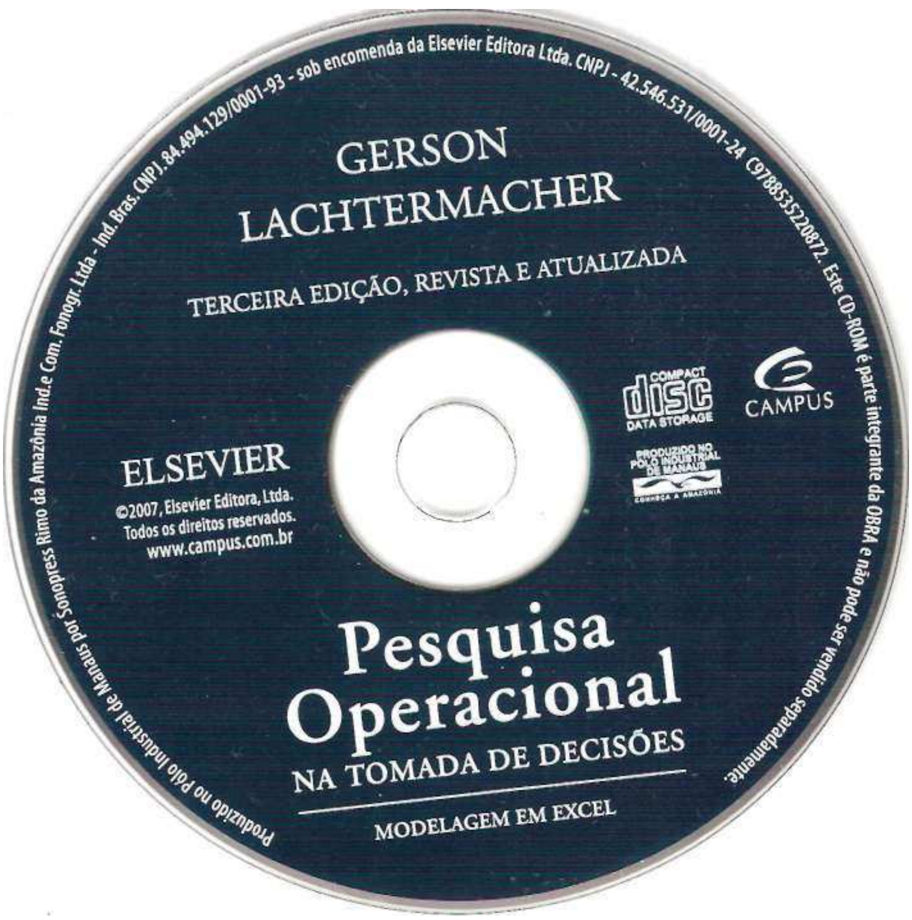
CAMPUS

Cartão Resposta
050120048-7/2003-DR/RJ
Elsevier Editora Ltda
CORREIOS

O CONTEĐDO DESTE CD ESTĆ INCLUSO NO ARQUIVO DIGITALIZADO, NA PASTA "SOLVER",

att,

Cesar



"Este livro preenche uma importante lacuna nos livros-texto de Pesquisa Operacional/Métodos Quantitativos, dirigindo-se a estudantes e profissionais de Administração e áreas como Economia, Contabilidade e Engenharia de Produção. O professor Gerson tempera sua racionalidade matemática com experiência profissional, resultando em um trabalho bem fundamentado, claro e aplicado à realidade brasileira."

ANTÔNIO FREITAS, Ph.D.
Chefe do Centro da Graduação EBAPE/FGV-RJ e
Diretor Executivo IDE/FGV-RJ

"Ao invés das enfadonhas apresentações de formas canônicas e operações elementares, o autor foi capaz de iniciar o leitor em seus fundamentos por meio de exemplos simples, mas suficientemente elucidativos. Também digno de nota é o capítulo que trata da programação não linear. Os exemplos ali apresentados também, com rara felicidade, constituem-se em valiosa introdução a este tão complexo assunto."

CLOVIS DE FARO
Diretor do Instituto de Desenvolvimento Educacional
da Fundação Getulio Vargas

"Este livro é altamente recomendado a todos os estudantes que queiram ter uma visão prática e objetiva de Pesquisa Operacional e que queiram saber modelar problemas complexos de forma simples, utilizando os recursos comumente disponíveis na instituição de ensino, em casa ou no trabalho."

Do prefácio de
CLÁUDIO L.S. HADDAD, Ph.D.

ELSEVIER

CAMPUS

Uma empresa Elsevier
www.campus.com.br

ISBN 978-85-352-2087-2
9788535220872