



MODELAGEM DE UM OSCILADOR NÃO LINEAR OBSERVADO NOS CURSOS DE FÍSICA BÁSICA.

Ronaldo Naziazeno¹, Niels Lima², Shai Sato³

¹ IFBA, campus Salvador. e-mail: rnaziazeno@ifba.edu.br

² IFBA, campus Salvador. e-mail: nielsfl@ifba.edu.br

³ IFBA, campus Salvador. e-mail: shai.sw@gmail.com

Resumo: Nas disciplinas de Física básica ofertada às engenharias, a temática sobre oscilações assume grande destaque. Entretanto é prática comum nesses cursos, limitar a discussão a situações lineares. Mesmo sistemas tipicamente não lineares, são reduzidos a situação onde a linearidade pode ser colocada, como exemplo disso cita-se o caso do pêndulo simples, estudado em “pequenos” ângulos. O laboratório de Física básica II, entretanto, tem brindado os alunos, ainda que acidentalmente, com um típico oscilador não linear. O presente trabalho apresenta uma primeira modelagem de equações que se destina a descrição de tal oscilador, bem como apresenta simulações numéricas realizadas sobre as mesmas.

Palavras-chave: oscilador, não linearidade, pontos críticos

1. INTRODUÇÃO

O problema mais importante (SYMON, 1982) no movimento unidimensional, e felizmente um dos mais fáceis de resolver é o problema do oscilador harmônico simples ou linear. A importância da solução adequada do problema do oscilador harmônico reside no vasto espectro de sua aplicação. Em quase todos os casos do movimento unidimensional, em que a função potencial tem um ou mais pontos de mínimo, o movimento da partícula para pequenas oscilações em torno desses pontos segue a equação de movimento do oscilador harmônico.

Já sua facilidade é notada justamente na linearidade (NUSSENZVEIG, 1997) de sua equação diferencial, a saber:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad [\text{Eq. 1}]$$

Outros sistemas físicos de interesse didático, mesmo quando não lineares, são estudados em regiões em que a linearidade pode ser adotada como aproximação. Um caso típico é o problema do pêndulo simples que, via de regra, é estudado em regiões de pequenos ângulos onde o seno de um ângulo pode ser substituído pelo próprio ângulo, tornando assim a equação linear.

O imperativo da realidade faz com que na literatura se verifique ainda modelos de movimento para partículas submetidas a uma força linear restauradora e uma força de atrito proporcional à sua velocidade. Em outros casos, é comum a introdução de uma força externa, via de regra periódica, que atua sobre os modelos de oscilador apresentados acima. Independentemente do modelo em foco, oscilador harmônico linear, oscilador com força de dissipativa proporcional a velocidade, ou oscilador forçado, os coeficientes permanecem constantes no tempo.

Existe, entretanto, uma enorme gama de eventos físicos que são tipicamente não lineares, e não podem ser reduzidos a esta. Como exemplo, citamos o oscilador de interesse que se constitui num pêndulo de fio extensível.

A observação de tal pêndulo com fio extensível, é comumente relatada por alunos de engenharia que realizam o laboratório de Física II, nos cursos de engenharia. Isso porque, nesse laboratório é realizado o experimento que relaciona o período, amplitude e uma série de grandezas físicas em um oscilador linear vertical. Para uma boa correspondência entre as medidas e a teoria é

importante que o oscilador se mantenha na vertical. Entretanto é muito comum, no manuseio promover-se pequenos deslocamentos laterais, iniciando-se oscilações não lineares.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A figura 1 a seguir, ilustra o pêndulo na situação relatada acima:

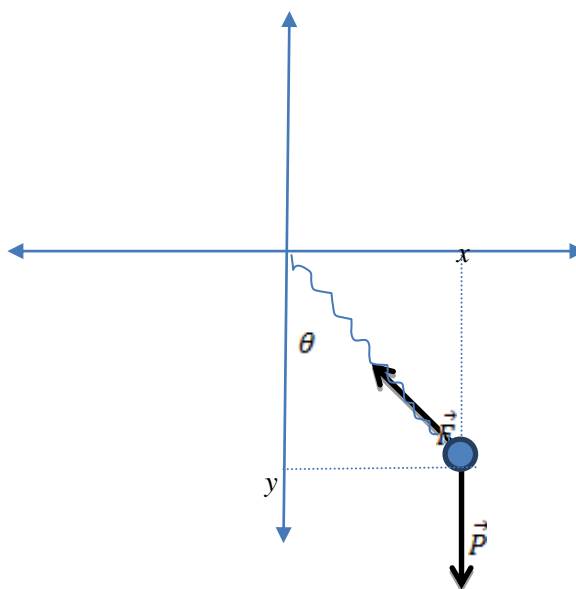


Figura 1. Pêndulo de fio extensível com as forças que atuam sobre a massa.

Onde:

F é a força elástica sobre a massa e;

P é a força peso.

Observa-se que tais vetores podem assim serem descritos no plano cartesiano:

$$\vec{P} = -mg\hat{j} \quad [\text{Eq. 2}]$$

, para a força peso e

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} \quad [\text{Eq. 3}]$$

para a força elástica.

Observa-se com facilidade que:

$$F_x = F\sin\theta, \text{ e } F_y = F\cos\theta; \quad [\text{Eq. 4}]$$

e que o módulo da força elástica pode ser dado:

$$F = -k\Delta l = -k(l - l_0) \quad [\text{Eq. 5}]$$

Onde:

- k é a constante elástica da mola;

- l é o comprimento da mola e;

- l_0 é o comprimento da mola no equilíbrio.

Logo, a força elástica passa a ser assim descrita:

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\sin\theta\hat{i} - k(l - l_0)\cos\theta\hat{j} \quad [\text{Eq. 6}]$$

Por conta do sistema de referência escolhido podemos ainda notar que:

$$\text{sen}\theta = \frac{x}{l}; \cos\theta = \frac{y}{l} \text{ e } l = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [\text{Eq. 7}]$$

Logo o vetor força resulta em:

$$\vec{F} = -kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{i} - ky \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \hat{j} \quad [\text{Eq. 8}]$$

Aplicando a segunda lei de Newton para cada uma das direções (x e y) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - mg \end{cases} \quad [\text{Eq. 10}]$$

Por facilidade computacional propõem-se a seguinte transformação: $q_1 = x; q_2 = y; q_3 = \dot{x}; q_4 = \dot{y}$, o que resulta no novo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_3 \\ \dot{q}_2 = q_4 \\ \dot{q}_3 = -\frac{k}{m} q_1 \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \right) \\ \dot{q}_4 = -\frac{k}{m} q_2 \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \right) - g \end{cases} \quad [\text{Eq. 11}]$$

Boyce e DiPrima (2005) afirmam que se sistemas de equações diferenciais autônomos na forma: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, possuem pontos onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, atribui-se a esses pontos o nome de críticos. Em

tais pontos $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ de modo que nesses pontos encontram-se soluções constantes ou de equilíbrio para o sistema de equações diferenciais.

A abordagem numérica passa pela fórmula de Runge-Kuta, que envolve uma média ponderada de valores para $f(t,y)$ e $f(t,x)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n < t < t_{n+1}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na busca dos pontos críticos, passamos a ter o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_3 = 0 \\ \dot{q}_2 = q_4 = 0 \\ \dot{q}_3 = -\frac{k}{m}q_1 \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}\right) = 0 \\ \dot{q}_4 = -\frac{k}{m}q_2 \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}\right) - g = 0 \end{cases}$$

[Eq. 12]

resolvendo então o sistema acima, obtém-se o seguinte resultado:

$q_3 = 0$; $q_4 = 0$; $q_1 = 0$; e q_2 assumido qualquer valor. Observando a primeira transformação vemos que o ponto crítico ($\dot{x}=0$; $\dot{y}=0$; $x=0$; y), corresponde ou a uma oscilação vertical (MHS), ou ao equilíbrio estável do sistema.

Como forma de verificação admitiu-se a situação acima descrita como valores iniciais com $k = 1$ e $m = 1$, e realizou-se a simulação numérica com o auxílio do software MATLAB. O resultado pode ser visto na figura 2.

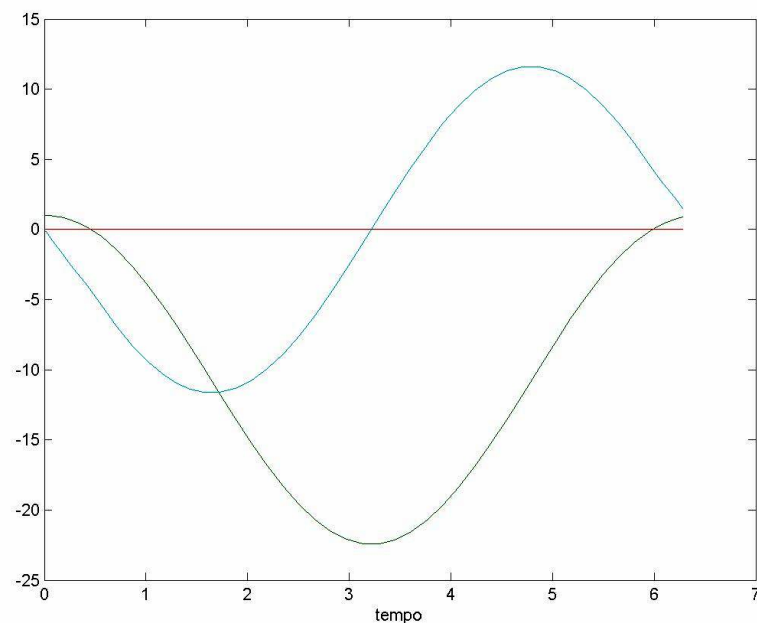


Figura2. Resultado da simulação no ponto crítico.

Onde a linha azul claro se refere a componente da velocidade na direção do eixo y; e a linha azul escuro se refere a posição no eixo y. As demais se referem a posição e velocidade na direção do eixo x.

O espaço de fase na situação descrita pode ser visualizado na figura 3.

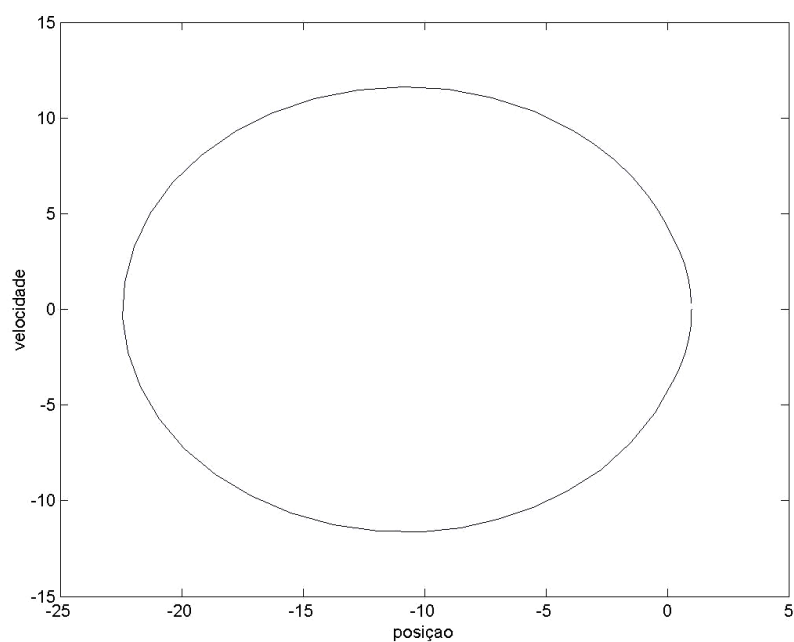


Figura 3. Espaço de fase no ponto crítico.

Testando ainda a não linearidade, simulou-se uma situação fora do ponto crítico. A trajetória simulada do pêndulo pode ser vista na figura 4.

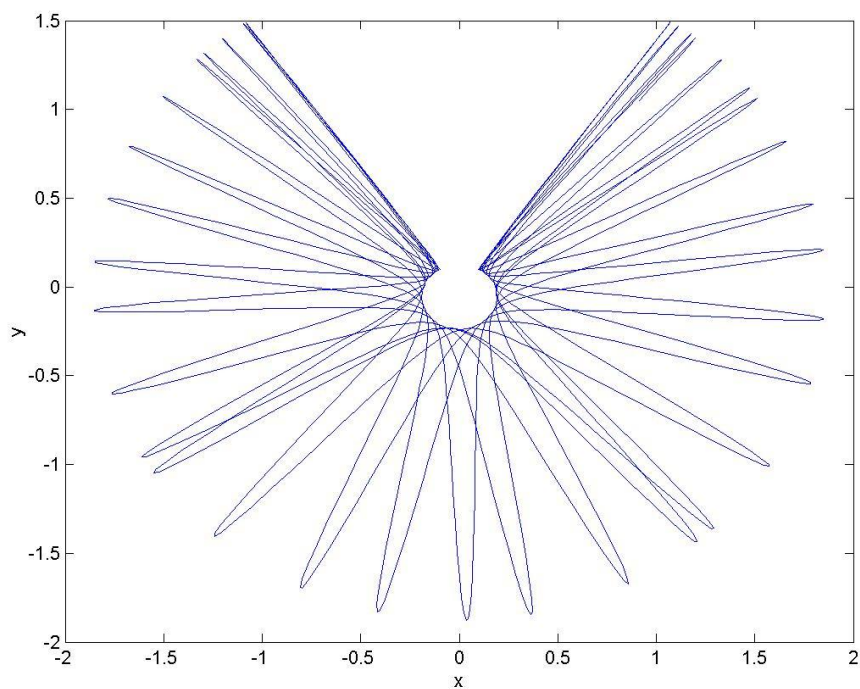


Figura 4. Trajetória simulada com os seguintes valores para o sistema de equações diferenciais $k/m = 1000$, $x_0 = 0,1$ e $y_0 = 0,1$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$



6. CONCLUSÕES

O sistema de equações diferenciais conduz a um conjunto de pontos críticos que correspondem ao esperado teórico, ou seja, os pontos críticos descrevem um MHS vertical; Ao lançar-se mão da simulação numérica, encontrou-se resultados coerentes com o esperado teórico, pois a velocidade e a posição na direção vertical se comportam como oscilações senoidais. Já a posição e velocidade na direção do eixo x, mantêm-se constantes e igual a zero.

O espaço de fase no ponto crítico corresponde ao esperado teórico, e apresenta-se como uma elipse.

Fora do ponto crítico, o sistema é não linear e bastante sensível as condições iniciais.

AGRADECIMENTOS

A FAPESB/IFBA pela bolsa de iniciação científica, associada a esse trabalho.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno** 9ª Edição – 2010.

NUSSENZVEIG, H. M.; **Física Básica**; vol.2, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1997

SYMON, K. R. **Mecânica**. Editora Campus, 4 edição, São Paulo, 1982.