

# APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: Um breve relato

Fernando Cardoso de Matos<sup>1</sup>, Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha<sup>2</sup>, Joaquim Clemente da Silva Filho<sup>3</sup>, Marco Antonio de Oliveira Freitas<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Mestre em Ciências Ambientais - IFPA. fernando.matos@ifpa.edu.br,

<sup>2</sup>Doutora em História da Matemática – IFPA. Lucia.rocha@ifpa.edu.br,

<sup>3</sup>Mestre em Educação Matemática – IFPA. joaquim.clemente@ifpa.edu.br,

<sup>4</sup>Mestre em matemática – IFPA. marco.freitas@ifpa.edu.br

**Resumo:** O presente artigo tem a intenção de trabalhar as aplicações da trigonometria esférica a luz dos estudos desenvolvidos ao longo do tempo pelos Astrônomos. A Trigonometria Esférica, ferramenta essencial no estudo da Astronomia Matemática, envolve problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegação. Somente com o desenvolvimento da Física e da Mecânica que a trigonometria plana foi sendo desenvolvendo e hoje faz parte nos conteúdos estudados na matemática da educação básica e em contrapartida a trigonometria esférica é assunto estudado apenas nos cursos técnicos e superiores, de Geomática, Agrimensura, dentre outros e em cursos das Escolas Navais. Durante muitos séculos o desenvolvimento da trigonometria se deu à luz da trigonometria esférica, como ferramenta no estudo da Astronomia Matemática, envolvendo problemas de astronomia, Agrimensura e Navegação. A Trigonometria Esférica trata da resolução de triângulos na esfera, isto é, os "lados" devem ser as geodésicas da superfície. Nesta pesquisa tem como objetivo relatar um breve histórico desta trigonometria e algumas aplicações.

**Palavras-chave:** Trigonometria Esférica, trigonometria plana, educação básica.

## 1.INTRODUÇÃO

Focando o olhar para o ensino de matemática, mais especificamente sobre a apropriação de significação de conceitos científicos, este trabalho faz breve relato histórico da trigonometria esférica e algumas aplicabilidades da mesma. Primeiramente abordaremos os aspectos conceituais da trigonometria esférica. Em um segundo momento introduziremos as aplicações advindas dos estudos históricos desenvolvidos pelos estudiosos da área.

## 2.MATERIAL E MÉTODOS

Para fundamentar a investigação, que visa alcançar os objetivos, foi utilizado principalmente, artigos científicos e literaturas que tratam do tema trigonometria esférica. Portanto uma foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Trigonometria é um ramo da Matemática que estuda a resolução de triângulos<sup>1</sup>. Para melhor esclarecer, podemos voltar para a raiz da palavra trigonometria de origem do grego TRI - três, GONO - ângulo e METRIEN - medida, significando desta forma a medida de triângulos.

A Trigonometria nasceu por volta do ano 300 a.C, entre os gregos, para resolver problemas de Astronomia e Cartografia. Suas primeiras aplicações práticas foram feitas por

---

<sup>1</sup> Polígonos de três lados.

Ptolemaios, em 150, que a usou para determinar a latitude e a longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seus mapas.

Os gregos foram considerados os primeiros estudiosos da trigonometria, marcando bem esse fato ao investigarem as relações entre o arco da circunferência e a corda correspondente, criando assim as primeiras tábuas trigonométricas, idealizadas por Hipocrates de Chios (430 a.C.), um dos mais famosos estudiosos do tema.

Revelando inabilidade para a observação, coleta e cotejo de dados e para o estabelecimento de leis indutivas. Pode-se descrever essa trigonometria como mais aritmética do que geométrica (EVES, 2004, p. 259).

Os hindus e os árabes também se interessaram por tal assunto. Dos hindus, podemos destacar Aryabhata (415 d.C.) que a trigonometria que utilizavam resolvia problemas tanto com triângulos planos como esféricos.

Segundo Mendes (1997),

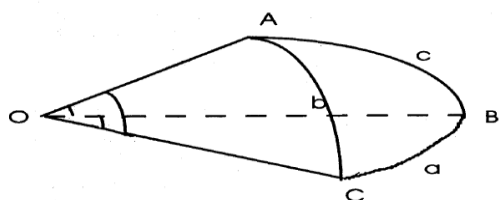
Falar de história nos leva a pensar em narração de fatos e acontecimentos ocorridos na evolução das sociedades ou, ainda, no grupo de conhecimentos adquiridos através da tradição e/ou mediante documentos ligados ao passado da humanidade. Não se pode, contudo, perder a certeza de que somos hoje o resultado das revoluções mentais, sociais, físicas e climáticas do ontem. O ontem é o ocorrido, às vezes, documentado, ou mesmo transmitido oralmente e que assim se transforma em história (MENDES, 1997, p. 24).

Manoel Guimarães escrevera o primeiro opúsculo em 1812 onde o autor introduz a ideia de diferencial de triângulos esféricos. Considera alguns ângulos e ou lados como variáveis e outros como constantes, procura determinar as diferenciais da medida dos ângulos e lados dos triângulos (SILVA, 1996).

Em triângulos esféricos não se considera a grandeza absoluta dos lados, mas somente o número de graus que eles contêm. É possível se mostrar alguns resultados de aplicações destes triângulos na Astronomia desde que se relacionem as diferenciais com funções dos ângulos e lados do triângulo.

Para termos a solução de um triângulo esférico temos que conhecer no mínimo três elementos<sup>2</sup>, diferentemente da trigonometria plana em que precisamos conhecer dois elementos do triângulo plano para termos a solução do mesmo. Para se obter um triângulo esférico, temos as seguintes propriedades (ROCHA, 2009):

- A soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que  $180^\circ$ , e menor do que  $540^\circ$ , e não é constante, dependendo do triângulo. De fato, o excesso a  $180^\circ$  é diretamente proporcional à área do triângulo.
- A soma dos lados de um triângulo esférico é maior do que zero e menor do que  $180^\circ$ .
- Os lados maiores estão opostos aos ângulos maiores no triângulo.
- A soma de dois lados do triângulo é sempre maior do que o terceiro lado, e a diferença é sempre menor.
- Cada um dos lados do triângulo é menor do que  $180^\circ$ , e isso se aplica também aos ângulos.



os, três lados, dois lados e um ângulo ou um ângulo e

Figura 1. Triângulo Esférico

Fonte: (SILVA, 1996).

Utilizando relações trigonométricas, da Figura 1 e usando alguns ângulos constantes, além de  $b$  e  $c$ , deduz-se as razões diferenciais  $dA/da = dA/dB$ ,  $dC/dB, da/dB$ .

As diferenciais são expressas em termos das funções trigonométricas, como por exemplo,  $dA/da = \text{cosec}B/\text{senc}$ .

Segundo (SILVA, 1996), as diferenciais podem ser aplicada na Astronomia, pois se supõe  $A$  como pólo,  $B$  como Zênit e  $C$  o lugar do Sol.  $A$  significa a variação do ângulo horário e  $da$  a variação da altura.

Segundo SILVA (2006), quando se altera os vértices do triângulo como exemplo,  $B$  como pólo,  $A$  o Zênit e  $C$  o lugar do sol encontra-se a fórmula de correção do meio dia. Sendo a forma do planeta Terra semelhante a uma esfera faz-se necessário o estudo desta trigonometria, como ferramenta para o cálculo de rotas de navegação marítima e até de aviões, pois as distâncias percorridas por esses são arcos de círculo máximo. Com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a trigonometria esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som, o fluxo de corrente alternada, relações entre trajetórias de projeteis. É usado intensamente na Física e pode gerar vários gráficos e inúmeras ilustrações.

Vejamos dois exemplos utilizados em Topografia

1- Como os agrimensores e topógrafos do passado resolviam seus problemas. Suas técnicas eram baseadas no uso da semelhança de triângulos:

- Determinação da altura  $h$  de uma montanha usando duas sombras de uma vareta de comprimento  $v$ ,

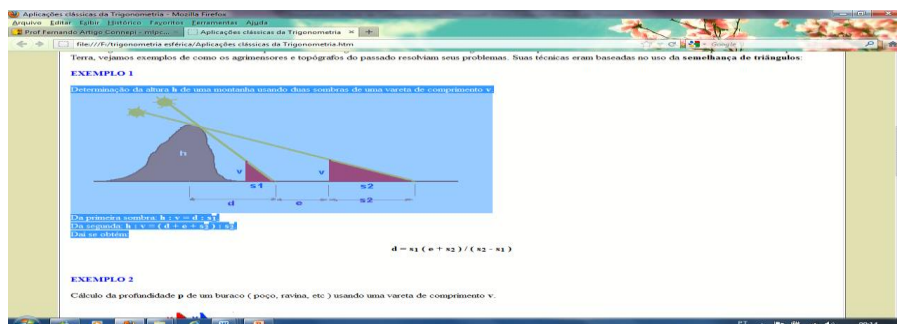


FIGURA 2.

Figura 2 - Determinação da altura  $h$  de uma montanha usando duas sombras de uma vareta de comprimento  $v$ .

Fonte: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa2c.html>

a primeira sombra:  $h : v = d : s_1$ .

Da segunda:  $h : v = (d + e + s_2) : s_2$ .

Daí se obtém:

Eq.1

2-Cálculo da profundidade  $p$  de um buraco (poço, ravina, etc) usando uma vareta de comprimento  $v$ , FIGURA 3.



Figura 3 – Ilustra o cálculo da profundidade de um poço p.

Fonte: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa2c.html>.

- da primeira posição da vareta obtemos:  $p : R = v : s_1$
- e da segunda posição ( beirada do buraco ) :  $p : ( R - s_2 ) = v : s_2$ , de modo que, após eliminar o R, conseguimos:

$$p = v s_2 / ( s_2 - s_1 ) \quad \text{Eq. 2}$$

## 6. CONCLUSÕES

A nossa intenção neste artigo foi mostrar o valor histórico do estudo da trigonometria, fato que na maioria das vezes não são narradas em salas de aula, e os porquês dos alunos são deixados de lado pelo professor.

A trigonometria influenciou e influência na vida do ser humano basta procurar os seus fundamentos por meio da história que vamos nos deparar com aplicações que nos mostram a sua importância na Astronomia, na Cartografia e na Navegação Oceânica, e assim consegue viabilizar e facilitar os cálculos de triangulações topográficas e geodésicas entre outras aplicações.

Neste trabalho foi mostrado um breve histórico da trigonometria e aplicações da trigonometria esférica, contribuindo com o conhecimento trigonométrico em relação ao que hoje se estuda.

## REFERENCIAS

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004.

MENDES, I. A. **Ensino da trigonometria através de atividades históricas**. Dissertação de Mestrado. Programa de pós-graduação em educação , UFRN, natal, 1997.

ROCHA, M. L. P . C. **Notas conceituais e históricas da trigonometria plana e esférica**. IV Congresso de Pesquisa e Inovaçãoda rede Norte e Nordeste de Educação Tecnológica. Belém-Pa. 2009.

SILVA, C.M.S. **A variação dos triângulos esféricos de Manuel Araújo Guimarães: primeiro impresso de Matemática, no Brasil, após liberação da imprensa em 1810.** Revista da SBPC, n. 15, p. 53-66, 1996.

\_\_\_\_\_. As aplicações clássicas da trigonometria esférica. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa2c.html>>. Acesso em: 02 Jun. 2012.