

## Semântica da Lógica Proposicional

1. Responda os itens a seguir:

- (a) Seja  $A = p \rightarrow (q \rightarrow r)$  uma fórmula e  $v$  uma valoração tal que  $v(A) = F$ . Quais os valores possíveis para  $v(p)$ ,  $v(q)$  e  $v(r)$ ?
  - (b) Seja  $A = (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$  uma fórmula e  $v$  uma interpretação tal que  $v(A) = F$ . Quais os valores possíveis para  $v(p)$ ,  $v(q)$  e  $v(r)$ ?
  - (c) Seja  $A = p \rightarrow (q \rightarrow r)$  uma fórmula e  $v$  uma valoração tal que  $v(A) = T$  e  $v(p) = T$ . Quais os valores possíveis para  $v(q)$  e  $v(r)$ ?
  - (d) Seja  $v$  uma interpretação tal que  $v(p \rightarrow q) = T$ . O que podemos dizer a respeito do resultado de  $v((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$ ?
  - (e) Seja  $v$  uma interpretação tal que  $v(p \rightarrow q) = F$ . O que podemos dizer a respeito do resultado de  $v((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$  e de  $v(r)$ ?
  - (f) Seja  $A = (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$  uma fórmula e  $v$  uma interpretação tal que  $v(A) = F$  e  $v(p \rightarrow q) = T$ . Quais os valores possíveis para  $v(q)$  e  $v(r)$ ? O que podemos dizer sobre a valoração  $v$ ?
  - (g) Seja  $A = p \rightarrow (q \wedge \neg q)$  uma fórmula e  $v_1$  e  $v_2$  valorações tal que  $v_1(A) = T$  e  $v_2(p \vee (p \wedge q)) = T$ . Quais os valores possíveis para  $v_1(A \wedge (p \vee (p \wedge q)))$  e  $v_2(A \wedge (p \vee (p \wedge q)))$ ?
2. Ache uma fórmula  $A$  tal que  $atoms(A) = \{p, q, r\}$  de forma que, para toda valoração  $v$ ,  $v(A) = T$  se e somente se  $v(p) = v(q) = F$  ou  $v(\neg r) = v(p) = T$ .
3. Seja  $*$  um novo conectivo lógico, de modo que, para quaisquer fórmulas  $A$  e  $B$  e para qualquer valoração  $v$ ,  $v(A * B) = F$  se e somente se  $v(A) = v(B) = F$  ou  $v(A) = v(B) = T$ .
- (a) Escreva a tabela verdade para  $(p * q)$ .
  - (b) Escreva a tabela verdade para  $((p * p) * (q * q))$ .
  - (c) Nós definimos as fórmulas da lógica proposicional apenas com os conectivos binários  $\wedge, \vee, \rightarrow$ . Veja que o conectivo  $*$  definido acima tem semântica diferente da semântica dos outros conectivos binários mencionados. Quantos conectivos binários com semânticas diferentes podemos definir? Observe que não é necessário que os conectivos binários tenham um nome conhecido.
4. Considere o problema de decidir se uma fórmula da lógica proposicional é verdadeira em uma determinada interpretação.
- (a) Escreva uma definição para a função `truth_value(formula, interpretation)` que retorna o valor-verdade de `formula` em `interpretation`. Ou seja, a função `truth_value` deve retornar `True` quando `formula` é verdadeira na interpretação `interpretation` e deve retornar `False` quando a fórmula `formula` é falsa em `interpretation`.
  - (b) Em geral, a interpretação atribui um valor-verdade para cada átomo da fórmula. Uma **interpretação parcial** para uma fórmula é uma interpretação que não especifica um valor-verdade para alguns dos átomos da fórmula. Por exemplo, a interpretação  $v = \{(p, F)\}$  é parcial para a fórmula  $p \rightarrow q$ . Veja que mesmo  $v$  sendo

parcial, podemos descobrir o valor-verdade de  $p \rightarrow q$  em  $v$ , ou seja,  $v(p \rightarrow q) = T$ . Como outro exemplo, seja a valoração  $v' = \{(r, F), (q, T)\}$  e  $A = (p \vee q) \rightarrow r$ . Veja que mesmo que  $v'$  não especifique um valor-verdade para  $p$ , podemos determinar que  $v'(A) = F$ . Para um terceiro exemplo, seja  $v'' = \{(p, T), (s, F)\}$  e  $B = p \rightarrow (r \vee s)$ . Observe que nesse caso não podemos determinar o valor de  $v''(B)$  pois é necessário saber o valor de  $v''(r)$ . Escreva uma definição para o algoritmo `partial_truth_value(formula, partial_interpretation)` que às vezes consegue descobrir o valor-verdade de `formula` na interpretação parcial `partial_interpretation`. Quando não for possível determinar o valor-verdade, a sua definição deve retornar um valor diferente de `True` e `False`.

5. Especifique um conjunto de variáveis que será usado em **todos** os itens da questão. Em seguida, represente o conjunto de sentenças abaixo na linguagem da lógica proposicional podendo usar apenas os conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\neg$ . Em seguida, apresente uma valoração na qual todas as fórmulas são verdadeiras.
  - Se José é adulto e trabalha, então ele não é aposentado.
  - Se José é jovem, ele trabalha ou estuda, mas não ambos.
  - Para José ser aposentado, ele deve ser adulto ou idoso.
  - José está em exatamente uma das seguintes categorias: criança, jovem, adulto e idoso.
  - José é definido como estudante quando está exatamente em uma das seguintes opções: idoso que é aposentado, adulto que trabalha, jovem ou criança.
6. Represente cada sentença abaixo na linguagem da lógica proposicional usando apenas os conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\neg$ .
  - (a) Se a produção agrícola declina e a população mundial aumenta, então novas fontes de alimento ficarão disponíveis ou acontecerá uma redistribuição radical de recursos alimentares.
  - (b) Se estiver chovendo, não irei para casa, caso contrário, irei para casa.
  - (c) Se o Japão continuar a aumentar a exportação de automóveis, então um dos dois países seguintes sofrerá um declínio econômico: Coréia do Sul ou Tailândia.
  - (d) Se a Angola atingir uma estabilidade, então exatamente dois dos países seguintes adotarão políticas mais liberais: Botswana, Namíbia, Zâmbia.
  - (e) A reunião deve ocorrer em pelo menos um e em no máximo dois dos seguintes dias: segunda, terça, quarta e quinta.
7. O Campo Minado, o conhecido jogo de computador, consiste de uma grade retangular de quadrados com minas invisíveis espalhadas entre eles. Qualquer quadrado pode ser sondado pelo jogador, mas ele perde se uma mina for sondada. O jogo indica a presença de minas, revelando, em cada quadrado sondado, o número de minas que são direta ou diagonalmente adjacentes. O objetivo é sondar todos os quadrados sem mina.

- (a) Assuma que a posição do canto superior esquerdo da grade é a posição  $(1, 1)$  e as outras posições seguem a ordem ilustrada na Figura 1. Seja a fórmula atômica  $x_{i,j}$  representando que o quadrado  $(i, j)$  tem uma mina, para  $i, j \in \{1, 2\}$ . Ou seja, são fórmulas atômicas:  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$ ,  $x_{2,1}$  e  $x_{2,2}$ . Escreva a afirmação de que exatamente uma mina é adjacente à posição  $(1, 1)$  como uma fórmula que envolve as atômicas mencionadas.
- (b) Agora escreva a afirmação de que exatamente duas minas são adjacentes à posição  $(1, 1)$ .

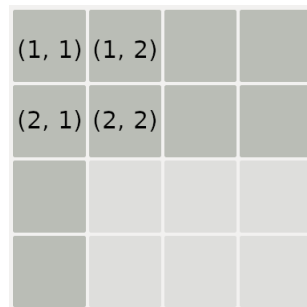


Figura 1: Grade do Campo Minado

8. Assuma que toda pessoa é honesto ou desonesto, mas não ambos. Além disso, toda pessoa honesta sempre fala a verdade e toda pessoa desonesto sempre mente. Você conhece José e Maria. José faz a seguinte afirmação: “Maria é desonesto”. Maria faz a seguinte afirmação: “Nem José nem eu somos desonestos”. Represente cada informação abaixo na linguagem da lógica proposicional podendo usar apenas os conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\neg$ .
- (a) A frase dita por José.
- (b) A frase dita por Maria.
- (c) O fato de que: se José é honesto, então o que ele disse é verdade.
- (d) O fato de que: se o que José disse é verdade, então ele é honesto.
- (e) O fato de que: Maria é honesta se, e somente se, o que ela disse é verdade.
9. Você acha dois baús em uma caverna e sabe que em cada baú há um tesouro ou uma armadilha, mas não ambos. No baú A tem escrito: “Pelo menos um dos dois baús contém um tesouro”. No baú B está escrito: “O baú A tem uma armadilha”. Você sabe que ambas as frases são verdadeiras ou ambas são falsas. Represente cada informação abaixo na linguagem da lógica proposicional podendo usar apenas os conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\neg$ .
- (a) A frase no baú A.
- (b) A frase no baú B.
- (c) A informação de que ambas as frases dos baús são verdadeiras ou ambas são falsas.

10. Fulano, Beltrano e Sicrano encontram-se presos em um calabouço. Depois de uma rápida exploração, eles encontraram três portas, uma vermelha, uma azul e uma verde. Eles sabem que atrás de exatamente uma das portas tem a saída do calabouço. Atrás das outras duas portas, no entanto, têm uma armadilha que significa a morte certa. Em cada porta há uma frase. Na vermelha: “A liberdade está atrás desta porta”. Na azul: “A liberdade não está atrás desta porta”. Na verde: “A liberdade não está atrás da porta azul”. Além disso, eles sabem que pelo menos uma das três declarações nas três portas é verdade e pelo menos uma delas é falsa. Represente cada informação abaixo na linguagem da lógica proposicional podendo usar apenas os conectivos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  e  $\neg$ .
- (a) A frase na porta vermelha.
  - (b) a frase na porta azul.
  - (c) a frase na por verde.
  - (d) A informação de que atrás de **exatamente** uma das portas tem a sa??da do calabouço.
  - (e) A informação de que **pelo menos** uma das três declarações nas três portas é verdade e **pelo menos** uma delas é falsa.