Teoria de perturbações lineares para cosmologia

March 16, 2024

Definindo um campo de flutuações de densidade de massa na forma

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \overline{\rho}(t)}{\overline{\rho}(t)} \tag{1}$$

de modo que

$$\rho(\vec{r}) = \overline{\rho} + \delta\overline{\rho} \tag{2}$$

Temos que a massa numa esfera de raio R se relaciona com a densidade

$$M = \frac{4}{3}\pi G \rho R^3 = \frac{4}{3}\pi G \rho (1+\delta) R^3 \tag{3}$$

onde a massa da esfera é efetivamente conservada para fluidos não relativístcos, ou seja, $\dot{M} = 0$. Junto a isso, a aceleração gravitacional fica a forma

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4}{3}\pi G \overline{\rho}(1+\delta) R \tag{4}$$

1 Equação de continuidade de flutuações

Tirando a derivada da equação (3), com $\frac{dM}{dt} = 0$, temos

$$0 = \frac{4}{3}\pi \left[\dot{\overline{\rho}}(1+\delta)R^3 + \dot{\delta}\overline{\rho}R^3 + 3\dot{R}R^2\overline{\rho}(1+\delta)\right] \tag{5}$$

Multiplicando a expressão por $\frac{3}{4\pi}\frac{1}{R^3\overline{\rho}}$

$$0 = \frac{\dot{\overline{\rho}}}{\overline{\rho}}(1+\delta) + \dot{\delta} + 3\frac{\dot{R}}{R}(1+\delta) \tag{6}$$

Os efeitos da expansão do universo podem ser considerados usando a Equação dos fluidos:

$$\dot{\epsilon} + 3H\epsilon(1+w) = 0 \tag{7}$$

Para um fluido não relativístico, $w = 0$, sem perda de generalidade do modelo cosmológico.

$$\dot{\epsilon} + 3H\epsilon = 0 \implies \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a} \tag{8}$$

Esta equação também vale para conservação de massa, de modo que é possível substituir na equação principal

$$\dot{\delta} - 3\frac{\dot{a}}{a}(1+\delta) + 3\frac{\dot{R}}{R}(1+\delta) = 0$$

$$\dot{\delta} + 3(1+\delta)\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a}\right) = 0 \tag{9}$$

que é a equação da continuidade para δ. Veja que é possível estimar o crescimento de uma amplitude de uma flutuação de densidade partindo da taxa de crescimento do raio em relação a taxa de expansão do universo $\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a}\right)$, para um universo estático, este termo dependeria apenas da velocidade do crescimento do raio da flutuação.

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{d\delta}{dt} + 3(1+\delta)\left(\frac{\frac{dR}{dt}}{R} - \frac{\frac{da}{dt}}{a}\right) = 0 \tag{10}$$

Multiplicando por dt

$$\begin{aligned}
d\delta + 3(1+\delta)\left(\frac{dR}{R} - \frac{da}{a}\right) &= 0 \\
\frac{d\delta}{1+\delta} &= -3\left(\frac{dR}{R} - \frac{da}{a}\right) \\
\int_{1+\delta_i}^{1+\delta} \frac{d\delta}{1+\delta} &= -3\left(\int_{R_i}^{R} \frac{dR}{R} - \int_{a_i}^{a} \frac{da}{a}\right) \\
\ln\frac{1+\delta}{1+\delta_i} &= -3\left(\ln\frac{R}{R_i} - \ln\frac{a}{a_i}\right) \\
\ln\frac{1+\delta}{1+\delta_i} &= 3\left(-\ln\frac{R}{R_i} + \ln\frac{a}{a_i}\right) \\
\ln\frac{1+\delta}{1+\delta_i} &= \ln\left(\frac{aR_i}{a_iR}\right)^3
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\boxed{1+\delta = (1+\delta_i)\frac{R_i^3}{a_i^3}\frac{a^3}{R^3}} \tag{12}$$

Ou seja: $1+\delta \propto \frac{a^3}{R^3}$.

2 Equação do colapso

Derivando a equação 9 temos

$$\ddot{\delta} + 3\dot{\delta}\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{a}}{a}\right) + 3(1+\delta)\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 0 \tag{13}$$

As equações para o parâmetro de escala são facilmente determináveis usando algum modelo cosmológico, de modo que os termos apresentados podem ser facilmente substituídos. Por exemplo, quando o universo era dominado por matéria a equação de Friedmann assumia a forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\bar{\epsilon} \tag{14}$$

e a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\epsilon} \tag{15}$$

A aceleração do raio, $\ddot{R}$, tem a forma demonstrada na eq (4); por fim, $\frac{\dot{R}}{R}$ pode ser obtido resolvendo para este termo na eq (9). Substituindo primeiramente a eq (9) tem o efeito de

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta} + 3\dot{\delta}\left(-\frac{\dot{\delta}}{3(1+\delta)} + \frac{\dot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a}\right) + 3(1+\delta)\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \left(-\frac{\dot{\delta}}{3(1+\delta)} + \frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) &= 0\\
\ddot{\delta} - \frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 3(1+\delta)\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{\delta}}{3(1+\delta)}\right)^2 + \frac{2\dot{\delta}}{3(1+\delta)}\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) &= 0\\
\ddot{\delta} - \frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} - \frac{1}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2\dot{\delta}\frac{\dot{a}}{a} + 3(1+\delta)\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\ddot{a}}{a}\right) &= 0\\
\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2\dot{\delta}\frac{\dot{a}}{a} + 3(1+\delta)\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\ddot{a}}{a}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo a equação (4):

$$\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 3(1+\delta)\left(\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}(1+\delta) + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \tag{17}$$

Substituindo a equação da aceleração:

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2H\dot{\delta} &= 3(1+\delta)\left(\frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\epsilon}(1+\delta) - \frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\epsilon}\right)\\
\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2H\dot{\delta} &= 4\pi G\frac{\bar{\epsilon}}{c^2}(1+\delta)\left((1+\delta) - 1\right)\\
\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2H\dot{\delta} &= 4\pi G\frac{\bar{\epsilon}}{c^2}\delta(1+\delta)
\end{aligned} \tag{18}$$

Na maior parte da evolução das flutuações temos um universo com prevalência de matéria não relativística, de modo que é possível fazer a substituição pelo parâmetro de densidade de matéria.

$$\Omega_m = \frac{\bar{\epsilon}_m}{\epsilon_c} = \frac{8\pi G\bar{\epsilon}_m}{3c^2H^2} \implies \frac{\bar{\epsilon}_m}{c^2} = \frac{3}{8\pi G}H^2\Omega_m \tag{19}$$

$$\boxed{\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}H^2\Omega_m\delta(1+\delta) = 0} \tag{20}$$

Que é a equação não linear do colapso esférico. Para lineariza-la, assumimos que no limte $\delta \to 0$, $(1+\delta) \approx 1$ e $\dot{\delta}^2 \approx 0$.

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}\Omega_m H^2\delta = 0} \tag{21}$$

3 Substituição pelo fator de escala

Precisamos expressar a função em termos do fator de escala, ou seja, escrever a equação diferentcial em termos de $\delta(a)$, $\delta'(a) = \frac{d\delta}{da}$ e $\delta''(a) = \frac{d^2\delta}{da^2}$. Para isso, fazemos a substituição

$$\frac{d\delta(a)}{dt} = \frac{d\delta}{da}\frac{da}{dt} = \delta'\dot{a} \tag{22}$$

$$\frac{d^2\delta(a)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\delta'\dot{a}\right) = \frac{d}{dt}\left(\delta'\right)\dot{a} + \delta'\frac{d}{dt}\left(\dot{a}\right) = \delta''\dot{a}^2 + \delta'\ddot{a} \tag{23}$$

Com efeito:

$$\ddot{\delta} - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1+\delta} + 2\dot{\delta}H = \frac{3}{2}H^2\Omega_m\delta(1+\delta)$$

$$\delta''\dot{a}^2 + \delta'\ddot{a} - \frac{4}{3}\frac{(\delta'\dot{a})^2}{1+\delta} + 2(\dot{a}\delta')H - \frac{3}{2}H^2\Omega_m\delta(1+\delta) = 0$$

$$\boxed{\delta'' + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}\delta' - \frac{4}{3}\frac{\delta'^2}{1+\delta} + 2\frac{\delta'}{a} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^2}\delta(1+\delta) = 0} \tag{24}$$

Para pequenas flutuações:

$$\boxed{\delta'' + \left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} + \frac{2}{a}\right)\delta' - \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^2}\delta = 0} \tag{25}$$

Substituindo as equações de fundo

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_c = \frac{8\pi G}{3c^2}\left[\bar{\epsilon}_m + \bar{\epsilon}_{de} + \bar{\epsilon}_r\right] \tag{26}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left[\bar{\epsilon}_m + \bar{\epsilon}_{de}(1+3w_{de}) + 2\bar{\epsilon}_r\right] \tag{27}$$

de modo que o termo $\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}$ pode ser subsituído por

$$
\begin{aligned}
\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} &= \frac{-\frac{4\pi G}{3c^2}\left[\bar{\epsilon}_m + \bar{\epsilon}_{de}(1+3w_{de}) + 2\bar{\epsilon}_r\right] a}{\frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_c a^2} \\
\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} &= -\frac{\left[\bar{\epsilon}_m + \bar{\epsilon}_{de}(1+3w_{de}) + 2\bar{\epsilon}_r\right]}{2\epsilon_c a} \\
\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} &= -\frac{\Omega_m + \Omega_{de}(1+3w_{de}) + 2\Omega_r}{2a}
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\boxed{\delta'' + \left(2 - \frac{\Omega_m + \Omega_{de}(1+3w_{de}) + 2\Omega_r}{2}\right)\frac{\delta'}{a} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^2}\delta = 0} \tag{29}
$$

A equação pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais na forma

$$
\boxed{\begin{cases} \delta_0' = & \delta_1 \\ \delta_1' = & -\left(2 - \frac{\Omega_m + \Omega_{de}(1+3w_{de}) + 2\Omega_r}{2}\right)\frac{\delta_1}{a} + \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^2}\delta_0 \end{cases}} \tag{30}
$$

Os parâemtros de densidade podem ser substituidos pelas suas respectivas equações de fluidos. Partindo da definição

$$
\Omega_m = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_c} = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m + \epsilon_{de}} \tag{31}
$$

Aplicando as equações dos fluidos para a matéria, $\epsilon_w = \epsilon_{w0} a^{-3(1+w)}$,0 e dividindo a fração por $\epsilon_{c0}/\epsilon_{c0}$

$$
\Omega_m = \frac{\frac{\epsilon_{m0} a^{-3}}{\epsilon_{c0}}}{\frac{\epsilon_{m0} a^{-3}}{\epsilon_{c0}} + \frac{\epsilon_{de0} a^{-3(1+w_{de})}}{\epsilon_{c0}}} \tag{32}
$$

Sabendo que $\sum \Omega_i = 1$:

$$
\Omega_{de0} = 1 - \Omega_{m0} \tag{33}
$$

assim,

$$
\Omega_m = \frac{\Omega_{m0} a^{-3}}{\Omega_{m0} a^{-3} + (1-\Omega_{m0}) a^{-3(1+w_{de})}} \tag{34}
$$

4 Parametrização de CPL

Uma das modificações ao modelo de colapso esférico é a parametrização de Chevallier-Polarski-Linder, que consiste em definir o parâmetro da equação de estado como

$$
w_{de}(a) = w_0 + w_1(1-a) \tag{35}
$$

Isto permite alterar a equação de fluidos da energia escura

$$
\dot{\epsilon}_{de} + 3H\epsilon_{de}(1 + w(a)) = 0 \tag{36}
$$

para a forma

$$
\begin{aligned}
\epsilon' \dot{a} + 3H\epsilon(1 + w_0 + w_1(1-a)) &= 0 \\
\epsilon' + \frac{3}{a}\epsilon(1 + w_0 + w_1(1-a)) &= 0 \\
\int_{\epsilon_{de0}}^{\epsilon_{de}} \frac{d\epsilon}{\epsilon} &= -3 \int_1^a \left[\frac{1}{a} + \frac{w_0}{a} + \frac{w_1}{a} - w_1\right] da \\
\ln \epsilon_{de} - \ln \epsilon_{de0} &= -3\left[\ln a + w_0 \ln a + w_1 \ln a - w_1 a + w_1\right] \\
\ln \frac{\epsilon}{\epsilon_{de0}} &= -3\left[(1 + w_0 + w_1)\ln a + w_1(1-a)\right] \\
\epsilon_{de} &= \epsilon_{de0}\left[a^{-3(1+w_0+w_1)} + e^{-3w_1(1-a)}\right]
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Aplicando-o na equação (31), temos

$$
\Omega_m = \frac{\frac{\epsilon_{m0}a^{-3}}{\epsilon_{c0}}}{\frac{\epsilon_{m0}a^{-3}}{\epsilon_{c0}} + \frac{\epsilon_{de0}}{\epsilon_{c0}}\left[a^{-3(1+w_0+w_1)} + e^{-3w_1(1-a)}\right]} \tag{38}
$$

$$
\Omega_m = \frac{\Omega_{m0}a^{-3}}{\Omega_{m0}a^{-3} + (1 - \Omega_{m0})\left[a^{-3(1+w_0+w_1)} + e^{-3w_1(1-a)}\right]} \tag{39}
$$