Derivação de equações de campo gravitacional

November 5, 2023

Assumindo um espaço vazio preenchido apenas por um objeto massivo de raio R de modo que

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \tag{1}$$

A equação de Poisson diz que $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$, o que na forma polar é

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \Phi \right) = 4\pi G \rho \tag{2}$$

que é o que queremos resolver. Algumas propriedades do sistema, sabendo que $\frac{d}{dr}\Phi = \vec{F}_g$, são:

1. A força gravitacional no centro do objeto é nula: $\frac{d\Phi(0)}{dr} = 0$;
2. A força gravitacional na superfície é contínua no limite $\lim_{r \to R} \Phi$, ou seja: $\frac{d\Phi_{in}(R)}{dr} = \frac{d\Phi_{ex}(R)}{dr}$
3. O potencial gravitacional é contínuo no limite $\lim_{r \to R} \Phi$: $\Phi_{in}(R) = \Phi_{ex}(R)$
4. O potencial gravitacional é definido como nulo apenas no infinito: $\lim_{r \to \infty} \Phi(r) = 0$

Além disso, sabemos que a massa total do objeto é $M = \frac{4}{3}\pi G \rho R^3$. Por fim, temos as construções auxiliares

$$A = r^2 \frac{d}{dr} \Phi \tag{3}$$

e $k = 4\pi G \rho_0 = \frac{3GM}{R^3}$. A partir destas propriedades, podemos resolver a (2) para Φ_{in} e Φ_{ex}.

Forma geral de Φ_{in}

Para o caso de Φ_{in}, $\rho = \rho_0$, deste modo, substituindo (3) em (2):

$$\frac{1}{r^2}\frac{dA}{dr} = 4\pi G\rho_0$$
$$\int_{A_0}^{A} dA = k\int_{o}^{r} \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$
$$A - A_0 = \frac{k}{3}r^3$$

Usando a propriedade 1., temos que $A_0 = 0$, assim:

$$A = \frac{k}{3}r^3$$
$$r^2\frac{d}{dr}\Phi_{in} = \frac{k}{3}r^3$$
$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_{in}} d\Phi = \int_{0}^{r} \tilde{r}d\tilde{r}$$

O que resulta em:

$$\Phi_{in}(r) = \frac{k}{6}r^2 + \Phi_0 \tag{4}$$

onde $\Phi_0 = \Phi(0)$é uma constante de integração.

Forma geral de Φ_{ex}

Partindo dos mesmos princípios, mas com $\rho = 0$, temos:

$$dA = 0$$
$$\int_{A_R}^{A} dA = 0$$
$$A = A_R$$
$$r^2\frac{d}{dr}\Phi = A_R$$
$$\int_{\Phi_R}^{\Phi_{ex}} d\Phi = A_R\int_{R}^{r} \tilde{r}^{-2}d\tilde{r}$$
$$\Phi_{ex} - \Phi_R = A_R\left[-\tilde{r}^{-1}\right]_R^r$$

Dessa forma:

$$\Phi_{ex}(r) = A_R(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}) + \Phi_R \tag{5}$$

onde $\Phi_R = \Phi(R)$ e A_R são constantes de integração.

Resolvendo as constantes de integração

Se derivarmos (4) e (5), podemos usar a propriedade 2.:

$$\frac{d\Phi_{in}(R)}{dr} = \frac{d\Phi_{ex}(R)}{dr}$$
$$\frac{k}{3}R = \frac{A_R}{R^2}$$
$$\frac{k}{3}R^3 = A_R$$

Substituindo o valor de k, temos:

$$A_R = GM \tag{6}$$

Usando a propriedade 4., podemos determinar Φ_R:

$$\lim_{r\to\infty} \Phi_{ex}(r) = 0$$
$$\lim_{r\to\infty} \left(A_R(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}) + \Phi_R \right) = 0$$
$$\frac{A_R}{R} = -\Phi_R$$

Reorganizando e usando o resultado de (6):

$$\Phi_R = -\frac{GM}{R} \tag{7}$$

Isso já é o suficiente para Φ_{ex}. Por fim, para descobrirmos o valor de Φ_0, usamos a propriedade 3. Como já sabemos as constantes do potencial externo, basta substituir o valor de Φ_R.

$$\Phi_{in}(R) = \Phi_{ex}(R)$$
$$\frac{k}{6}R^2 + \Phi_0 = -\frac{GM}{R}$$
$$\Phi_0 = -\frac{GM}{R} - \frac{k}{6}R^2$$

Substituindo k, temos:

$$\Phi_0 = -\frac{3GM}{2R} \tag{8}$$

Portanto, temos como resultado:

$$\boxed{\Phi(r) = \begin{cases} \frac{GM}{2R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right) & r \leq R \\ -\frac{GM}{r}, & r > R \end{cases}} \tag{9}$$