Teorema do virial

March 16, 2024

Para objetos em escalas cuja expansão do universo pode ser desprezada e as velocidades internas são desprezíveis em comparação à velocidade da luz, é razoável fazer uma modelagem newtoniana das interações gravitacionais.

Nesta explicação usaremos como exemplo um aglomerado de galáxias isolado (i.e., sem perturbações externas), em que os movimentos dos objetos são mais complexos do que o que se pode modelar usando a mecânica gravitacional básica, mas este teorema também vale para estruturas mais simples.

Assim, a rigor, para a i-ésima galáxia no aglomerado, temos uma atração gravitacional na forma

$$\ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}. \tag{1}$$

Com isso, a energia potencial do sistema tem a forma

$$W = -\frac{G}{2} \sum_{i,j;j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}. \tag{2}$$

Isto é equivalente ao somatório do potencial gravitacional (ver arquivo relevante) tomado par a par (a divisão por 2 serve para garantir que só sejam tomados uma vez) entre todos os corpos do sistema. Trata-se da energia necessária para separar todos os corpos até uma distância infinita.

Este termo pode ser simplificado a

$$W = \alpha \frac{GM^2}{r_h}, \tag{3}$$

onde $M = \sum m_i$ é a massa total, α é um fator que depende do perfil de distribuição de densidade da distribuição e r_h é o raio de meia-massa da distribuição. Para aglomerados de galáxias $\alpha \approx 0,4$ é uma boa aproximação.

A energia cinética tem a forma

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \left|\dot{\vec{x}}_i\right|^2 = \frac{1}{2} M \left\langle v^2 \right\rangle, \tag{4}$$

onde

$$\left\langle v^2 \right\rangle \equiv \frac{\sum m_i \left|\dot{\vec{x}}_i\right|^2}{M} \tag{5}$$

é a velocidade média quadrada, onde a média é ponderada pela massa da galáxia.

Por fim, o momento de inércia do aglomerado é definido como

$$I = \sum m_i \left|\vec{x}_i\right|^2 . \tag{6}$$

O momento de inércia se relaciona às energias cinética e potencial se o calcularmos a derivada segunda

$$\begin{aligned} I =& \sum m_i \left|\vec{x}_i\right|^2 = \sum m_i \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i \\ \dot{I} =& 2 \sum m_i \vec{x}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i \\ \ddot{I} =& 2 \sum m_i \left(\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i \right) \\ \ddot{I} =& 2 \sum m_i \vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + 2 \sum \left|\dot{\vec{x}}_i\right|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Usando a eq. (4):

$$\ddot{I} = 2 \sum m_i \vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + 4K \tag{8}$$

O termo de aceleração pode ser substituído usando a eq. (1):

$$\sum_i \left(m_i \vec{x}_i\right) \cdot \ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot \left(\vec{x}_j - \vec{x}_i\right)}{\left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^3} \tag{9}$$

O termo direito da equação é simétrico em relação a i e j, de modo que

$$
\begin{aligned}
\sum m_i \vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i =& \frac{1}{2}\left[\sum m_i \vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \sum m_j \vec{x}_j \cdot \ddot{\vec{x}}_j\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[G \sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^{\,3}} + G \sum_{j,i;i\neq j} m_i m_j \frac{\vec{x}_j \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^{\,3}}\right] \\
=& \frac{G}{2}\left[\sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i) + \vec{x}_j \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^{\,3}}\right] \\
=& \frac{G}{2}\left[\sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j - \vec{x}_i \cdot \vec{x}_i + \vec{x}_j \cdot \vec{x}_i - \vec{x}_j \cdot \vec{x}_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^{\,3}}\right] \\
=& -\frac{G}{2}\left[\sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i - 2\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + \vec{x}_j \cdot \vec{x}_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^{\,3}}\right] \\
=& -\frac{G}{2}\left[\sum_{i,j;j\neq i} m_i m_j \frac{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^{\,3}}\right] \\
=& -\frac{G}{2}\sum_{i,j;j\neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} = W
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Substituindo na eq. (8) chegamos ao Teorema do Virial:

$$\boxed{\ddot{I} = 2W + 4K} \tag{11}$$

Um caso particularmente interessante do teorema do virial é o caso de um sistema com momento de inércia cosntante, de modo que $\ddot{I} = 0$. Neste caso temos o Teorema do Virial Estacionário:

$$\boxed{0 = W + 2K} \tag{12}$$

Corpos em que este teorema se aplica são ditos virializados, ou, em equilíbrio virial. Estruturas gravitacionais que colapsaram a muito tempo (i.e., não vão se compactar mais) são exemplos de estruturas virializadas. No contexto de algomerados de galáxias, se substituirmos as equações (3) e (4), temos

$$0 = \alpha \frac{GM^2}{r_h} + M\left\langle v^2 \right\rangle .$$

Com o perfil de distribuição de densidade, a velocidade média e o raio de meia-massa é possível estimar a massa total de um aglomerado de galáxias:

$$M = \frac{\left\langle v^2 \right\rangle r_h}{\alpha G}$$

Apesar de não trivial, é possível estimar a velocidade média a partir do redshift das galáxias. Os outros dois parâmetros podem ser estimados a partir da distribuição de luminosidade do aglomerado, em diferentes espectros (por exemplo, a estimativa da distribuição de pressão do gás intergaláctico ionizado).