Sistemas lineares

O trabalho com equações existe devido à necessidade de encontrarmos valores desconhecidos de incógnitas.

Podemos escrever um sistema de equação de forma matricial. O que chamamos de matriz aumentada.

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Método da eliminação de Gauss.

O método de eliminação de Gauss, também conhecido como método de escalonamento, é um algoritmo eficiente para resolver sistemas de equações lineares. Ele consiste em transformar o sistema original em um sistema equivalente de forma triangular superior, mais fácil de resolver.

Resolução

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 8 \\ x + 4y - 2z = 12 \end{cases}$$

1. Criar uma matriz aumentada com os elementos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 8 \\ 1 & 4 & -2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

---

2. Selecionar a diagonal principal.

```
![[Pasted image 20240326194240.png]]
```

Copiar

---

3. Aplicando o método de escalonamento.

Vídeo aula de referência: https://www.youtube.com/watch?v=E5AqlJutoVo&t=573s

Também chamado de eliminação de Gauss. O método de eliminação deve ser aplicada até que **todos os elementos abaixo da diagonal principal estejam zerados**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 2 & 1 & 1 & | & 8 \\ 1 & 4 & -2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

Para aplicar escalonamento devemos seguir os seguintes passos:

3.1. Verifique se o elemento na primeira coluna é diferente de zero.

Se sim, troque a primeira linha com a linha que contém o primeiro elemento diferente de zero. Isso garante que você tenha um coeficiente principal diferente de zero na primeira linha.

3.3. Definir o elemento multiplicador geral da linha.

O multiplicador da linha M_L deve ser usado nos outros elementos da linha em que ele multiplica. O multiplicador pode ser qualquer número que possibilite zera o primeiro elemento da linha 2 em diante.

No nosso caso um número que serve como multiplicador é o 2 na linha 1.

$$M_L = 2$$

3.4. Definir a operação para anular a linha.

A estrutura básica nessa parte é:

$$M_L * L_1 - L_2$$

A primeira condição é analisar se o multiplicador da linha é positivo ou negativo. Caso ele seja negativo, então deve ser aplicado uma operação de adição entre as linhas. Caso seja positivo, uma operação de subtração.

Como nosso M_L é positivo, vamos utilizar uma operação de subtração entre L_1 e L_2.

Outro ponto é que (caso seja necessário para fazer a anulação da linha acontecer), a linha 2 também pode receber um multiplicador.

3.5. Atualizando a linha 2.

Seguindo operação: $2 * L_1 - L_2$.

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= 2 * 1 - 2 \\ a_{2,2} &= 2 * 2 - 1 \\ a_{2,3} &= 2 * (-3) - 1 \\ a_{2,4} &= 2 * 5 - 8 \end{aligned}$$

Obtemos:

$$a_{2,j} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

3.5. Atualizando a linha 3.

Na linha 3 conseguimos visualizar que não é necessário um multiplicador para que seja possível zerar $L_{3,1}$. Pois os elementos de $L_{1,1}$ e $L_{3,1}$ são iguais.

Seguindo a operação: $L_1 - L_3$.

$$\begin{aligned} a_{3,1} &= 1 - 1 \\ a_{3,2} &= 2 - 4 \\ a_{3,1} &= (-3) + 2 \\ a_{3,1} &= 5 - 12 \end{aligned}$$

Obtemos:

$$a_{3,j} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

3.5. Montar a nova matriz.

A matriz resultante foi a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & 3 & -7 & | & 2 \\ 0 & -2 & -1 & | & -7 \end{bmatrix}$$

Infelizmente ela ainda não foi finalizada, observe que ainda temos um elemento abaixo da diagonal principal que não foi zerado.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & 3 & -7 & | & 2 \\ 0 & -2 & -1 & | & -7 \end{bmatrix}$$

Isso significa que o nosso objetivo **ainda não foi concluído, então devemos continuar aplicando o método de escalonamento**.

3.6. Reaplicando o método.

Como não é mais necessário zerar elementos na L_2 então só vamos observar os elementos da L_3.

Primeira coisa a ser feita é escolher um novo multiplicador para zerar o elemento abaixo da diagonal principal. Nessa nova matriz será necessário inserir um multiplicador para em L_3.

$M_{L2} = 2.$
$M_{L3} = 3.$

A operação escolhida será uma soma, pois conseguimos zerar o elemento -2.

Seguindo a operação: $M_{L2} * L_2 + M_{l3} * L_3$

$$\begin{aligned} a_{3,1} &= 0 \\ a_{3,2} &= 2 * 3 + 3 * (-2) \\ a_{3,3} &= 2 * (-7) + 3 * (-1) \\ a_{3,4} &= 2 * 2 + 3 * (-7) \end{aligned}$$

Obtemos:

$$a_{3,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -17 & -17 \end{bmatrix}$$

3.7. Finalizando a matriz.

Agora que conseguimos zerar todos os elementos abaixo da diagonal principal então podemos de fato construir a matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & 3 & -7 & | & 2 \\ 0 & 0 & -17 & | & -17 \end{bmatrix}$$

---

4. Montando o novo sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 3y - 7z = 2 \\ -17z = -17 \end{cases}$$

A primeira coisa que podemos observar é que temos menos variareis para resolver. E para facilitar ainda mais o trabalho de resolução, podemos começar a resolver o sistema de baixo para cima.

---

5. Resolver o sistema.

5.1. Obtendo o valor de Z.

Além de Z não temos mais nenhuma variável significa que já podemos isolá-lo e resolver o sistema.

$$-17z = -17$$
$$Z = \frac{-17}{-17}$$
$$Z = 1$$

5.2. Obtendo o valor de Y.

Como já conseguimos obter o valor de Z então podemos começar a substitui-lo no nosso sistema.

$$3y - 7 * 1 = 2$$
$$3y - 7 = 2$$

Agora vamos isolar tudo que está depois de Y, invertendo o sinal.

$$3y = 2 + 7$$
$$3y = 9$$

Agora isolamos Y para obter o seu valor.

$$3y = 2 + 7$$
$$y = \frac{9}{3}$$
$$y = 3$$

5.3. Obtendo o valor de X.

Já conseguimos obter os valores de Y e Z, o que nos possibilita resolver o sistema para obter o valor de X.

$$x + 2 * 3 - 3 * 1 = 5$$
$$x + 6 - 3 = 5$$
$$x = 5 - 6 + 3$$
$$x = 2$$

Classificação de Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados em três tipos, de acordo com o número de soluções que possuem:

1. **Sistema Possível Determinado (SPD):** possui **uma única solução**. Isso ocorre quando o número de equações é igual ao número de variáveis e o determinante do sistema é diferente de zero (D ≠ 0).
2. **Sistema Possível Indeterminado (SPI):** possui **infinitas soluções**. Isso ocorre quando o número de equações é menor que o número de variáveis e o determinante do sistema é igual a zero (D = 0). Nesse caso, o sistema possui uma variável livre, que pode assumir qualquer valor real.
3. **Sistema Impossível (SI): não possui soluções**. Isso ocorre quando o número de equações é maior que o número de variáveis e o determinante do sistema é diferente de zero (D ≠ 0). Nesse caso, as equações do sistema são incompatíveis entre si.

O que determina a classificação de um sistema linear

- **Número de equações:** O número de equações determina o número de relações entre as variáveis.
- **Número de variáveis:** O número de variáveis determina o número de incógnitas no sistema.
- **Determinante do sistema:** O determinante do sistema é um número que indica se o sistema possui solução única, infinitas soluções ou nenhuma solução.

Como determinar a classificação de um sistema linear.

1. **Verifique o número de equações e variáveis.**
2. **Calcule o determinante do sistema.**
3. **Compare o determinante com zero e o número de equações com o número de variáveis.**

Exemplo

Considere o sistema linear:

```
x + y = 2
2x + 2y = 4
```

Copiar

- **Número de equações:** 2
- **Número de variáveis:** 2
- **Determinante do sistema:** D = 0

Classificação: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Explicação:

- O sistema possui duas equações e duas variáveis, ou seja, o número de equações é igual ao número de variáveis.
- O determinante do sistema é igual a zero.
- Como o número de equações é igual ao número de variáveis e o determinante é igual a zero, o sistema possui infinitas soluções.