Matrizes

Classroom: https://classroom.google.com/u/4/c/NjQ4NzQ0MDU5NTAy
Esboço de matriz no LibreOffice Math:

Copiar

```
left[ matrix{a # b ## c # g} right ]
```

Exemplo de matriz para Markdown

Copiar

```
$$X = \begin{bmatrix}
1 & x_{1}1 & x_{2} \\
1 & x_{3} 1 & x_{4}
\end{bmatrix}$$
```

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1}1 & x_{2} \\ 1 & x_{3} 1 & x_{4} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Uma matriz é uma estrutura de tabela composta por *m* linhas e *n* colunas, com uma ordem *m* x *n*. Onde *m* e *n* devem ser maior ou diferentes de zero.

- Letra **i** a representação para a posição do valor linha.
- Letra **j** a representação para a posição do valor coluna.

Matriz quadrada

Uma matriz é considerada quadrada quando a quantidade linhas é igual a quantidade de colunas. Ou seja, ela é de ordem *n*.

$$m_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{3x3}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sempre que uma matriz for quadrada então ela irá possuir duas diagonais, a principal e a secundária.

Diagonal principal

Sempre vai ser representando da esquerda para a direita.

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária

Sempre vai ser representada da direita para a esquerda.

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

Uma matriz pode ser assumida como identidade quando todos os elementos da sua *digonal principal* são iguais ao *valor 1* e os *outro elementos são iguais a 0*.

$$m_{3x3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Adição

Para ser possível somar matrizes é importante que elas *sejam de mesma ordem*.

Para somar os elementos de uma matriz, devemos somar os elementos correspondentes em cada linha e em cada coluna.

Então por exemplos temos:

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

$$B_{2x2}=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 8 & 4\end{bmatrix}$$

O que resulta em uma operação assim:

$$A+B_{2x2}=\begin{bmatrix}1+5 & 2+7\\3+8 & -4+4\end{bmatrix}$$

Sendo assim construída uma nova matriz de ordem 2:

$$A+B_{2x2}=\begin{bmatrix}6 & 9\\11 & 0\end{bmatrix}$$

Subtração

A subtração de matrizes segue a mesma lógica da adição, ou seja, eu realizo a minha operação sobre os indicies correspondentes.

Pegando as matrizes A e B como exemplo, temos:

$$A-B_{2x2}=\begin{bmatrix}1-5 & 2-7\\3-8 & -4-4\end{bmatrix}$$

O que gera a matriz:

$$A - B_{2x2} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação

Para que seja possível efetuar uma multiplicar uma matriz, o número de colunas de A devem ser iguais ao número de linhas de B.

Exemplo:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Para efetuar a multiplicação entre os elemento de uma matriz devemos multiplicar o valor da coluna A, pelos elementos da linha em B. E em seguida somar o resultado de cada multiplicação para que seja gerado o elemento da matriz AxB.

Exemplo:

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} x\, B_{2x3}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} x\, B_{2x3}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} x\, B_{2x3}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Primeira linha da matriz

Copiar

```
i1xj1 : A.B = (1 x 1) + (2 x 2) = 5
i1xj2 : A.B = (1 x -2) + (2 x 4) = 6
i1xj3 : A.B = (1 x 3) + (2 x 0) = 3
```

Segunda linha da matriz

Copiar

```
i2xj1 : (3 x 1) + (-1 x 2) =  1
i2xj2 : (3 x -2) + (-1 x 4) = -10
```

```
i2xj3 : (3 x 3) + (-1 x 0) = 9
```

O resultado da matriz então é:

$$AxB_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

Divisão

Não existe.

Determinantes

O determinante de uma matriz é importante para várias aplicações, como verificar se três pontos estão alinhados no plano cartesiano, calcular áreas de triângulos, resolver sistemas lineares, entre outras aplicações na matemática.

O determinante é uma função matemática que associa a cada matriz quadrada um número real. Este número é **calculado a partir dos elementos da matriz** e possui propriedades específicas que o tornam uma ferramenta poderosa na resolução de problemas matemáticos.

Determinante de ordem 1

- Para matrizes de ordem 1, o determinante é igual ao seu único elemento.

Determinante de ordem 2

- Para matrizes de ordem 2, o determinante é calculado pela diferença (subtração) entre o produto dos termos da diagonal principal e os termos da diagonal secundária. Ou seja **diagonal principal - diagonal secundária**.

- **Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &d_1 = 4 * 1 \\ &d_2 = 2 * 1 \\ &D = (4 - 2) => 2 \end{aligned}$$

Determinante de ordem 3 (regra de Sarrus)

- Para matrizes de **ordem 3**, utiliza-se a **regra de Sarrus**. A Regra de **Sarrus** é um método prático usado para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem.
- **Exemplo:**
  Aqui estão os passos para **aplicar a Regra de Sarrus**:

1. Repita as duas primeiras colunas ao lado da matriz;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

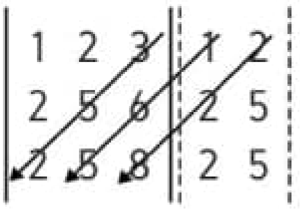
$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

2. Multiplique os valores de todas as **diagonais da principais**;

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &1.5.8 = 40 \\ &2.6.2 = 24 \\ &3.2.5 = 30 \end{aligned}$$

3. Multiplique os valores de todas as **diagonais secundárias**;



$$\begin{aligned} 2.2.8 &= 32 \\ 1.6.5 &= 30 \\ 3.5.2 &= 30 \end{aligned}$$

4. Some os resultados das multiplicações das diagonais do mesmo sentido;

$$\begin{aligned} d_1 &= 40 + 24 + 30 => 94 \\ d_2 &= 32 + 30 + 30 => 92 \end{aligned}$$

5. Subtraia os dois valores finais para obter a determinante.

$$\begin{aligned} Det &= d_1 - d_2 \\ Det &= 2 \end{aligned}$$

Determinante de ordem ≥ 4 (Teorema de Laplace)

O **Teorema de Laplace** é um método para **calcular o determinante de matrizes** quadradas de ordem *n*. Normalmente, é utilizado quando as matrizes são **de ordem igual ou maior que 4**.

Para usar o Teorema de Laplace é necessário obter o cofator de cada índice da matriz.

Como funciona o teorema de Laplace.

No teorema de Laplace a **determinante** da matriz será o produto da soma entre os elemento multiplicados pelos seus cofatores.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Selecione uma fila (linha ou coluna), da matriz (Quanto mais zeros houver na fila, melhor para facilitar o cálculo);

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar cada elemento pelo **cofator** do valor no índice;
   Matrizes > **Como descobri o cofator.**

$$a_{4,4} = Fila * ci, j$$
$$a_{4,4} = 0 * c_{1,3} => 0$$
$$a_{4,4} = 3 * c_{2,3} => ?$$
$$a_{4,4} = 0 * c_{3,3} => 0$$
$$a_{4,4} = 1 * c_{4,3} => ?$$

$$c_{2,3} = 0 * 7 => 21$$
$$c_{4,3} = 1 * 13 => 13$$

3. Somar o resultado da multiplicação entre cada elemento.

$$c_{2,3} + c_{4,3} = 21 + 13$$
$$D = 34$$

Como descobri o cofator.

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j}.\, M_{i,j}$$

> Cofator é um número associado a um elemento qualquer de uma matriz quadrada.
> O cofator deve ser obtido de cada elemento da matriz.

1. Somar os índices de i + j;
   $c_{2,3} = (-1)^{2+3} => 5$
   $c_{4,3} = (-1)^{4+3} => 7$
2. Calcular os determinantes;
   Exemplo:

- Exclua a linha e coluna do seu cofator da matriz principal.

  $c_{2,3} = ?$

  $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 1 & 1 & \cancel{0} & 2 \\ 0 & 1 & \cancel{1} & -1 \end{bmatrix}$$

- Gere uma nova matriz com os outros valores.

> $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
>
> Como essa se trata de uma matriz 3x3 então a regra de **Sarraus** será usada.

- Determinante.

> $c_{2,3} = -7$
> Repita o mesmo processo para os outros índices.

3. Aplicar a formula;

$$c_{2,3} = (-1)^5 * (-7)$$
$$c_{2,3} = 7$$

$$c_{4,3} = (-1)^7 * (-13)$$
$$c4, 3 = 13$$

4. Voltar para o teorema de **Laplace**.

Obs:

- Se $(-1)^{i+j}$ sendo for impar, o resultado é = -1;
- Se $(-1)^{i+j}$ sendo for par, o resultado é = 1;
- M representa a determinante do cofator.

Matriz inversa

Uma matriz inversa é uma matriz quadrada (A) que quando multiplicada por sua matriz inversa (A^{-1}), resulta em uma matriz identidade. Tal que $A * A^{-1} = I_{n,j}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Encontrar o determinante da matriz (Determinantes);
  $D = 2$

- Dividir os valores pelo determinante;

$$A=\begin{bmatrix} 4\div 2 & 2\div 2 \\ 1\div 2 & 1\div 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Inverter os elementos da diagonal principal (permutar).

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

- Inverte os **sinais** da diagonal secundária.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

E o resultado final da matriz inversa é:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$