Optimisation continue
MAIN, année 2015-16
Contrôle continu N° 1
Novembre 2016

Consignes

- Durée : 2 heures.
- Téléphones portables : interdits.
- Documents et **questions** non autorisés.
- A faire, au choix, l'exercice 3 ou 4.

Exercice 1 **[6 points]**

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{llllllll} Max & -3x_1 & +10x_2 & -2x_3 & +4x_4 & & \\ s.c. & & & & & & \\ & -x_1 & +4x_2 & +4x_3 & -6x_4 & \leq & 8 \\ & -x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & 0 \\ & & & -x_3 & & \leq & 1 \\ & x_1 & x_2 & & x_4 & \leq & 0 \end{array} \quad (1)$$

Notez que la variable x_3 n'est pas restreinte en signe.

1. **[2pts]** Ecrire le problème dual du problème (1)
2. **[3pts]** Résoudre le problème dual avec la méthode *simplexe dual*.
3. **[1pts]** En déduire la solution optimale du problème primal (1).

Exercice 2 **[8 points]**

Soit le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} x_j^3 \\ s.c. & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = n \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2)$$

1. **[1pt]** Démontrer que le problème (2) admet un minimum global et un maximum global.
2. **[2pts]** Ecrire le système *KKT*, noté S, associé au problème (2).

3. **[2pts]** Résoudre le système $\mathcal{S}$.
4. **[3pts]** Déterminer la nature des solutions du système $\mathcal{S}$.

Exercice 3 **[9 points]**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème *minimax* de Von Neumann à l'aide du théorème de dualité forte de l'optimisation linéaire. La preuve originelle utilise le théorème du point fixe de Brouwer.

Pour tout entier non nul p, l'ensemble Δ_p est définit comme suit

$$\Delta_p = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{p+1} : \sum_{j=1}^{p+1} x_j = 1 \right\}.$$

Soit A une matrice appartenant à l'algèbre $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Par la suite, les vecteurs $\{a^i : i = 1, \ldots, m\}$ et $\{a_j : j = 1, \ldots, n\}$ désigneront, respectivement, les lignes et les colonne de la matrice A. L'énoncé du théorème de Von Neumann affirme la validité de l'égalité suivante :

$$\min_{x\in\Delta_{n-1}} \max_{y\in\Delta_{m-1}} \langle Ax, y\rangle = \max_{y\in\Delta_{m-1}} \min_{x\in\Delta_{n-1}} \langle Ax, y\rangle \tag{3}$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ désigne le produit scalaire.

1. **[2pts]** Montrer que

$$\max_{y\in\Delta_{m-1}} \langle Ax, y\rangle = \max_{1\le i\le m} \langle a^i, x\rangle.$$

En déduire que

$$\min_{x\in\Delta_{n-1}} \max_{y\in\Delta_{m-1}} \langle Ax, y\rangle = \min_{x\in\Delta_{n-1}} \max_{1\le i\le m} \langle a^i, x\rangle.$$

2. **[2pts]** Traduire le problème (4) suivant

$$\min_{x\in\Delta_{n-1}} \max_{1\le i\le m} \langle a^i, x\rangle \tag{4}$$

en un problème d'optimisation linéaire. On appellera $(\mathcal{P})$ ce problème.

3. **[3pts]** Ecrire le dual du problème $(\mathcal{P})$. On appellera $(\mathcal{D})$ ce problème.
4. **[2pts]** Montrer que le problème $(\mathcal{D})$ est équivalent au problème suivant

$$\max_{y\in\Delta_{m-1}} \min_{x\in\Delta_{n-1}} \langle Ax, y\rangle. \tag{5}$$

Puis en déduire l'égalité (3).

Exercice 4 **[Méthode de Topkis-Veinott (9 points)]**

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & \\ & g_j(x) \le 0,\ j \in \{1, \ldots, m\}, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{6}$$

où, nous supposerons que les fonctions f et g_j, pour j appartenant à $\{1,\ldots,m\}$, sont de classe C^1. Et, notons par X l'ensemble des solutions réalisables du problème (6), c'est-à-dire :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0,\ j = 1,\ldots,m\}.$$

Enfin, nous supposerons que l'ensemble X est non vide, régulier et compacte.

Pour résoudre le problème (6) par une méthode primale il faut, essentiellement, deux procédures. La seconde, est celle calculant le pas de déplacement. Quant à la première, elle calculera en chaque solution réalisable une direction de descente réalisable ou bien attestera que le point courant est stationnaire (en général, satisfaisant les conditions **KKT**).

Dans cet exercice nous considérons, seulement, le calcul des directions de descente réalisables (en un point x donné) en résolvant le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{s.c.} & \\ & \nabla f(x)^T d - z \leq 0, \\ & \nabla g_j(x)^T d - z \leq -g_j(x),\ j = 1,\ldots,m, \\ & \|d\|_\infty \leq 1. \end{array} \tag{7}$$

Soit x une solution réalisable pour le problème (6). Soit $(\hat{d},\hat{z})$ une solution optimale du problème (7) au point x.

1. **[3pts]** Démontrer que si $\hat{z}$ est strictement inférieur à 0 alors $\hat{d}$ est une direction de descente réalisable.
2. **[6pts]** Démontrer que $\hat{z}$ est nulle si et seulement si la solution x est un point **KKT**.

Exercice 5 **[3 points]**

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrrrcl} Min & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & \\ s.c. & & & & & \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ & -x_1 & +x_2 & -2x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0 \end{array} \tag{8}$$

1. **[3pt]** Calculer la solution optimale du problème (8) en utilisant la méthode *simplexe*.

GC1 (2) 2016/2017

Exo5:

$$\text{Min } 2x_1 + x_2 - x_3$$

s.c

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \geq 0$$

1) Calculons la solution optimale du problème (8) en utilisant la méthode de simplexe:

$$\begin{cases} Z = 2x_1 + x_2 - x_3 & \Rightarrow Z - 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 & = 4 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$$

x_3 → var entrée

var sortie ← x_4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
	-2	-1	1	0	0	0
x_4	1	2	$\boxed{1}$	1	0	8
x_5	-1	1	-2	0	1	4

Ce tableau n'est pas optimal

Itération 1

$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$

Z diminue quand x_3 augmente

pour améliorer Z, on choisit une variable hors base de coût réduit positif.

Donc x_3 variable d'entrée

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_3 \geq 0$$

$0 - x_3 \geq 0 \Rightarrow \cancel{x_3 \leq 0}$ Impossible

$8 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8$

$4 + 2x_3 \geq 0 \Rightarrow 2x_3 \geq -4 \Rightarrow x_3 \geq -2$

Donc x_4 sort de la base

c'est la variable de base bloquante

$\Rightarrow B = \{3,5\} \quad N = \{1,2,4\}$

$(x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8) \mid 1$

$\Rightarrow \boxed{x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8}$ Nouvelle ligne

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
	-3	-3	0	-1	0	-8	$(L_0) - (L_1)$
x_3	1	2	1	1	0	8	
x_5	1	5	0	2	1	20	$(L_2) + 2(L_1)$

$$z - 3x_1 - 3x_2 - x_4 = -8$$

$$\Rightarrow z = -8 + 3x_1 + 3x_2 + x_4$$

$\Rightarrow$ solution optimale $= (0, 0, 8, 0, 20)$

$z = -8$

Exo 1:

$$\text{Max } 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

s.c

$w_1 \rightarrow \quad -x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 8$ (1)

$w_2 \rightarrow \quad -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 0$

$w_3 \rightarrow \quad -x_3 \leq 1$

$x_1 \quad x_2 \quad x_4 \leq 0$

Notez que x_3 n'est pas restreinte au signe.

1) Écrivez le problème dual du problème (1):

(2)

Min $8w_1 + 3w_3$

s.c

$-w_1 - w_2 \leq 3$ → $x_1 \leq 0$

$4w_1 + 3w_2 \leq 10$ → $x_2 \leq 0$

$4w_1 + w_2 - w_3 = -2$ → $x_3 \in \mathbb{R}$

$-6w_1 - w_2 \leq 4$ → $x_4 \leq 0$

$w_1 \; w_2 \; w_3 \geq 0$

(2)

Dualisation :

Primal		Dual
Max Min	⟷	Min Max
variable $x_i \geq 0$	⟷	i^e contrainte de type $\geq$
$x_i \in \mathbb{R}$	⟷	$=$
$x_i \leq 0$	⟷	$\leq$
i^e contrainte de type $\leq$	⟷	variable $y_i \geq 0$
$=$	⟷	$y_i \in \mathbb{R}$
$\geq$	⟷	$y_i \leq 0$

2) Résolvons le problème dual avec la méthode simplexe dual

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	z
	-8	0	-1	0	0	0	0
w_4	-1	-1	0	1	0	0	-3
w_5	4	3	0	0	1	0	10
w_3	-4	-1	1	0	0	0	2
w_6	-6	-1	0	0	0	1	4

← on a multiplié par (-1) pour avoir coeff > 0 devant w_3

La variable à choisir en entrée est x_3 mais x_3 est une variable de base et son coût réduit n'est pas nul alors une opération pivot est nécessaire.

→ var entrée

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Z	
	-12	-1	0	0	0	0	2	$(L_0)+(L_3)$
var sortie w_4	-1	-1	0	1	0	0	-3	
w_5	4	3	0	0	1	0	10	
w_3	-4	-1	1	0	0	0	2	
w_6	-6	-1	0	0	0	1	4	

$$\boxed{(-4w_1 - w_2 + w_3 = 2) \mid 1}$$

Algo simplexe dual

pour que la solution primale soit réalisable il faut les coefficients du 2nd membre soient tous ≥ 0.

donc x_4 var sortie

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Z	
	-11	0	0	-1	0	0	5	$(L_0)+(L_1)$
w_2	1	1	0	-1	0	0	3	
w_5	1	0	0	3	1	0	1	$(L_2)-3(L_1)$
w_3	-3	0	1	-1	1	0	5	$(L_3)+(L_1)$
w_6	-5	0	0	-1	0	1	7	$(L_4)+(L_1)$

$$(-w_1 - w_2 + w_4 = -3) \,/\, -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{w_1 + w_2 - w_4 = 3}$$

D'où la solution optimale du dual est:

$$(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3) = (0,3,5)$$

$(6,3,5)\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(-3, 10, -2, 6)$ (3)

3°) Déduisons en la solution optimale du problème primal (1)

En utilisant la solution optimale du dual et le thm des écarts complémentaires :

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (-1, 0, -1, 0) \quad \text{car :}$$

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) w_i^* = 0 & i = \{1, \dots, m\} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i^*\right) x_j^* = 0 & j = \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

$(8 + x_1^* + 4) \times 0 = 0$

x_1

$$\Rightarrow \begin{cases} [8 - (x_1^* + 4\overset{0}{x_2^*} + 4\overset{-1}{x_3^*} - 6\overset{0}{x_4^*})] w_1^* = 0 \\ [0 - (-x_1^* + 3x_2^* + \underset{-1}{x_3^*} - \underset{0}{x_4^*})] \underset{0}{w_2^*} = 0 \Rightarrow \boxed{x_1^* = -1} \\ [1 - (-x_3^*)] w_3^* = 0 \Rightarrow (1 + x_3^*) \underbrace{w_3^*}_{5} = 0 \Rightarrow \boxed{x_3^* = -1} \\ [-3 - (-\overset{0}{w_1^*} - \overset{3}{w_2^*})] x_1^* = 0 \Rightarrow \\ [10 - (4\underset{0}{w_1^*} + 3\underset{3}{w_2^*})] x_2^* = 0 \Rightarrow \boxed{x_2^* = 0} \\ [-2 - (4w_1^* + w_2^* - w_3^*)] x_3^* = 0 \\ [4 - (-6\underbrace{w_1^*}_{0} - \underbrace{w_2^*}_{3})] x_4^* = 0 \Rightarrow (4+3) x_4^* = 0 \Rightarrow \boxed{x_4^* = 0} \end{cases}$$

$(x_1^* + 1) 3 = 0$

$x_1^* = -1$

$$\Rightarrow \boxed{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (-1, 0, -1, 0)}$$

Exo 2 :

Soit le Problème d'optimisation non linéaire

$$(2) \quad \begin{cases} \min \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \text{s.c.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1·) Mq : le problème (2) admet un minimum global et un maximum global.

L'ensemble des solutions réalisables du problème 3 est compact (car intersection de 2 ensembles fermés dont 1 est borné) et la fonction objectif est continue.

Par conséquent, d'après le thm de Weierstrass le problème (3) admet un minimum global et un maximum global

2·) Ecrivons le système KKT, noté S, associé au problème (2)