Feuille de TP2

Du 15 Octobre 2019

Séries de Fourier discrètes et convolution

Préambule : Coefficients de Fourier discrets. Soit une fonction $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pour calculer des valeurs approchées des coefficients de Fourier

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\exp(-iks)\mathrm{d}s, \text{ pour } k \in \mathbb{Z},$$

on peut utiliser la *méthode des rectangles*. Soit $N \geq 1$ donné. On considère les $2N$ points $\{s_j\}_{j=0,\dots,2N-1}$ de l'intervalle $[0,2\pi]$ donnés par

$$s_j = \frac{j\pi}{N} \text{ pour } j = 0,\dots,2N-1,$$

de sorte que $s_0 = 0$, $s_{2N-1} = 2\pi - \frac{\pi}{N}$, et l'écart entre deux points consécutifs est constant égal à $h \equiv \frac{\pi}{N}$. Pour $k \in \{-N+1,\dots,N\}$, on pose

$$\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) \equiv \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(s_j)\exp(-iks_j) = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right)\exp\left(\frac{-ikj\pi}{N}\right). \tag{1}$$

Le nombre $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$ défini ci-dessus est appelé k-ième coefficient de Fourier *discret* à l'ordre N de f (Il dépend de k et de n).

On peut réecrire ces formules, en introduisant, pour $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre

$$\omega_m = \exp\left(-\frac{2i\pi}{m}\right) \text{ de sorte que } \omega^m = 1. \tag{2}$$

La formule (1) devient alors

$$\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right)\omega^{kj} \text{ avec } \omega = \omega_{2N} = \exp\left(-\frac{i\pi}{N}\right). \tag{3}$$

Introduisons maintenant, pour $m \in \mathbb{N}^*$ donné, la matrice carrée $m \times m$

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \dots & \omega_m^{m-1} \\ 1 & \omega_m^2 & \omega_m^4 & \dots & \omega^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_m^{m-1} & \omega_m^{2(m-1)} & \dots & \dots\omega_m^{(m-1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \left(\exp\left(-\frac{2i\pi(k-1)(p-1)}{m}\right)\right)_{1\leq k,p\leq m}.\end{aligned} \tag{4}$$

on peut écrire (3) sous la forme matricielle

$$\widehat{F}_N^{\mathbf{D}} = \frac{1}{2N}\Omega_{2N} \cdot \tilde{F}_N, \text{ où} \tag{5}$$

$$\widehat{F}_N^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \widehat{f}^{\mathbf{D}}(-N+1) \\ \widehat{f}^{\mathbf{D}}(-N+2) \\ \dots \\ \widehat{f}^{\mathbf{D}}(N) \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{F}_N = \begin{pmatrix} f(s_0) \\ f(s_1)\,\omega^{(N+1)} \\ f(s_2)\,\omega^{2(N+1)} \\ \dots \\ f(s_{2N-1})\,\omega^{(2N-1)(N+1)} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $s_j = \frac{\pi j}{N}$, $j = 0, \dots 2N-1$, c'est à dire que les j-ième composante $\tilde{F}_N[j]$ et $\widehat{F}_N^{\mathbf{D}}[j]$ de $\tilde{F}_N$ et de $\widehat{F}_N^{\mathbf{D}}$ respectivement sont données par

$$\begin{cases} \tilde{F}_N[j] = f\left(\dfrac{\pi}{N}(j-1)\right)\exp\left(-\left(\dfrac{i(N+1)\pi}{N}(j-1)\right)\right) \text{ pour } j = 1, \dots, 2N, \\ \widehat{F}_N^{\mathbf{D}}[j] = \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(j-N), \text{ pour } j = 1, \dots, 2N,. \end{cases} \tag{7}$$

On introduit par ailleurs la fonction 2π-périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_N^{\mathbf{D}}(f)(t) &= \sum_{k=-N+1}^{N} \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)\exp(ikt) \\ &= \sum_{j=1}^{2N} \widehat{F}_N^{\mathbf{D}}[j]\exp\big(i(j-N)t\big). \end{aligned} \tag{8}$$

La fonction 2π périodique $S_N^{\mathbf{D}}(f)$ ainsi définie s'appelle série de Fourier discrète de f à l'ordre N.

Le chapitre 5 du polycopié développe l'étude des coefficients de Fourier discrets.

Travail 1

Pour $k \in \mathbb{Z}$, rappelons que les fonctions 2π périodiques $\mathbf{e}_k$ sont définies par

$$\mathbf{e}_k(t) = \exp(ikx) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

On prend $f = \mathbf{e}_7$.
A) Calculer $\widehat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

B1) Calculer, en utilisant les formule (6), (7) les vecteurs $\tilde{F}_N$ pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.

B2) Calculer les matrices Ω_m pour les valeurs correspondantes, à savoir $m = 8, 16, 32, 64$.
B3) Calculer, en utilisant la formule (5), les vecteurs $\widehat{F_N}$, c'est à dire les coefficients $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$ pour tout $k \in \{-N+1, N\}$ pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
B4) Reprendre les calculs avec d'autres fonctions $\mathbf{e} - k$, par exemple $f = \mathbf{e}_5, f = \mathbf{e}_9$.

C) Comparer ces résultats avec la question A et commenter (voir en particulier le Lemme 5.1 du polycopié).

Travail 2

A) On considère la fonction 2π périodique f définie par

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } t \in]-\pi, \pi] \setminus [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}].$$

A1) Calculer, en utilisant les formule (6), (7) les vecteurs $\tilde{F}_N$ pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
A2) Calculer les matrices Ω_m pour les valeurs correspondantes, à savoir $m = 8, 16, 32, 64$.
A3) Calculer, en utilisant la formule (5), les vecteurs $\widehat{F_N}$, c'est à dire les coefficients $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$ pour tout $k \in \{-N+1, N\}$ pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
A4) Calculer $I_N = \sum_{k=-N+1}^{N} |\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)|^2$ pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$ (on pourra utiliser directement la commande "norm"). Que remarque t-on ? Comparer avec le théorème de Parseval pour f, et commenter.

B1) Représenter graphiquement la série de $S_N^{\mathbf{D}}(f)$ associée à f pour ces valeurs de N (on représentera f sur le même graphique). Interpréter.
B2) Il y at-il un phénomène similaire au phénomène de Gibbs ? Si oui, comment pourrait-on le corriger ?

C1) Représenter graphiquement la fonction w_N pour les valeurs $N = 4, 8, 16, 32$ définie par

$$w_N(t) = 2\pi \sum_{k=-N+1}^{k=N} \left(\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)\right)^2 \exp(ikt) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

C2) Quel est le lien avec $f \underset{\text{per}}{\star} f$? Commenter.

Travail 3

A) On considère les fonctions 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ définies par
a) $f_1(t) = |t|$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.
b) $f_2(t) = t^2$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.

A2) En reprenant les étapes de calcul de la partie B de l'exercice précédent, calculer les coefficients $\widehat{(f_1)}_N^{\mathbf{D}}(k)$, pour $k \in \{-N+1, N\}$, pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
A3) Calculer les coefficients $\widehat{(f_2)}_N^{\mathbf{D}}(k)$, pour $k \in \{-N+1, N\}$, pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.

B) Comparer avec les calculs faits en TD.

Travail 4

A) On considère les fonctions 2π périodiques sur $\mathbb{R}$ définies par
a) $f_1(t) = \sin^3 t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
b) $f_2(t) = |\sin^3 t|$ pour $t \in \mathbb{R}$.

A2) En reprenant les étapes de calcul de la partie B de l'exercice précédent, calculer les coefficients $\widehat{(f_1)}_N^{\mathbf{D}}(k)$, pour $k \in \{-N+1, N\}$, pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
A3) Calculer les coefficients $\widehat{(f_2)}_N^{\mathbf{D}}(k)$, pour $k \in \{-N+1, N\}$, pour diverses valeurs de N, par exemple $N = 4, 8, 16, 32$.
A4) Proposer des valeurs numériques approchées des nombres suivants :
-$J_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin^3(s)| \mathrm{d}s$
-$J_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin^6(s)| \mathrm{d}s$

B) Comment peut-on comparer les résultats de la questions A3), avec les résultats du TD.
C) Proposer des des approximations de la fonction $h = f_3 \underset{\text{per}}{\star} f_3$.