Polytech'Paris - Main 4 2018-2019

- Contrôle - 9/10/2018 - 1h

Le barême est donné à titre indicatif. Bon courage !

Exercice 1 (sur 6 points)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x e^{-\frac{x^2}{2}\theta} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.
On donne $\mathbb{E}_\theta(X^2) = \frac{2}{\theta}$ et $\mathbb{E}_\theta(X^4) = \frac{8}{\theta^2}$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
2. Cet estimateur est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?
3. Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ.

Exercice 2 (sur 8 points)
Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\theta x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\theta \in]-1, 1[$ paramètre inconnu. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d de densité f_θ. On cherche à estimer θ à partir de l'échantillon.

1. Donner un estimateur de θ par la méthode des moments en utilisant le moment d'ordre 1 (i.e. l'espérance).
2. Cet estimateur est-il sans biais ? Calculer son risque quadratique.
3. Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ.

Exercice 3 (sur 6 points)
On mesure le taux de mercure chez des sardines a l'aide d'un échantillon de $n = 20$ sardines. On note x_i la i-ème mesure. On a obtenu les résultats suivants (en mg/kg) :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.23; \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.0064$$

On suppose que le taux de mercure chez les sartines peut être modélisé par une loi gaussienne.

1. Donner un intervalle de confiance contenant le taux moyen de mercure avec probabilité 95%.
2. Que vaut ici la marge d'erreur pour un niveau de confiance de 95%. L'interpréter.
3. On cherche à déterminer le nombre n de sardines sur lesquelles faire des mesures, pour que la marge d'erreur soit inférieure à 1% avec une probabilité de 95%. Expliquer comment on peut déterminer ce nombre n (et les problèmes rencontrés le cas échéant).
4. Dans le cas où le taux de mercure ne peut pas être modélisé par une loi gaussienne, on propose de construire un intervalle de confiance par bootstrap. Proposez un code sous R permettant d'obtenir un tel intervalle de confiance. Vous n'utiliserez pas les fonctions pré-définies de la library(boot) et expliquerez un minimum ce que vous faites, notamment ce que renvoie votre code.