

# Analyse de Fourier, convolution, traitement du signal

Fabrice Bethuel

Année Universitaire 2018-2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Opérateurs de convolution</b>	<b>9</b>
2.1	Lissage par moyenne . . . . .	9
2.1.1	Définition . . . . .	9
2.1.2	Convergence de $M_h(f)$ vers $f$ . . . . .	11
2.1.3	Une autre façon d'écrire de $M_h(f)$ . . . . .	12
2.1.4	Lissage par moyenne pondérée . . . . .	13
2.2	Produit de convolution . . . . .	15
2.2.1	Définition . . . . .	15
2.2.2	Premières propriétés du produit de convolution . . . . .	17
2.2.3	Propriétés de différentiabilité . . . . .	18
2.2.4	Régularisation par convolution . . . . .	19
2.2.5	Propriétés d'intégrabilité . . . . .	20
2.3	Extension à des classes de fonctions plus générales . . . . .	21
2.3.1	Majorations intégrales . . . . .	21
2.3.2	Convolutions pour des fonctions dans $L^1$ et $L^2$ . . . . .	22
2.3.3	Régularisation des fonctions de $L^1$ et $L^2$ . . . . .	22
2.4	Convolution des fonctions périodiques . . . . .	24
2.4.1	Généralités sur les fonctions périodiques . . . . .	24
2.4.2	Périodisation d'une fonction . . . . .	25
2.4.3	Définition de la convolution pour les fonctions périodiques . . . . .	26
2.4.4	Propriétés . . . . .	26
2.4.5	Régularisation par convolution . . . . .	27
2.5	Opérateur de convolution, noyaux de convolution . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Approximation par des polynômes trigonométriques</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.1.1	Fonctions $2\pi$ périodiques . . . . .	30
3.1.2	Polynômes trigonométriques . . . . .	30
3.2	Convolution avec des polynômes trigonométriques . . . . .	32
3.3	Approximation par noyaux trigonométriques . . . . .	33
3.3.1	Approximations de l'identité trigonométriques . . . . .	33
3.3.2	Le noyau de Dirichlet . . . . .	34
3.3.3	Le noyau de Fejer . . . . .	37
3.4	Le théorème d'approximation de Fejer . . . . .	39
3.5	Convergence des séries de Fourier . . . . .	40

3.5.1	Convergence uniforme . . . . .	41
3.5.2	Convergence simple de la série de Fourier . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Etude des séries de Fourier</b>	<b>50</b>
4.1	Introduction . . . . .	50
4.2	L'espace $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ . . . . .	51
4.2.1	Propriétés de la famille $\{\exp ik\cdot\}_{k\in\mathbb{Z}}$ . . . . .	52
4.3	Propriétés générales des bases Hilbertiennes . . . . .	52
4.3.1	Projection orthogonale . . . . .	52
4.3.2	Le Théorème de Parseval . . . . .	54
4.3.3	Isomorphisme isométrique entre $H$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ . . . . .	55
4.4	Retour aux séries de Fourier . . . . .	57
4.5	Série de Fourier et convolution . . . . .	58
4.6	Majoration de l'erreur d'approximation en moyenne quadratique . . . . .	59
4.7	Séries de Fourier et équation différentielles . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier discrètes</b>	<b>65</b>
5.1	Introduction . . . . .	65
5.2	La Transformée de Fourier Discrète (TFD) . . . . .	65
5.2.1	Approximation des intégrales par la méthode des rectangles . . . . .	66
5.2.2	Coefficients de Fourier discrets . . . . .	66
5.2.3	Séries de Fourier discrètes et interpolation polynômiale . . . . .	68
5.2.4	Propriétés d'interpolation des séries de Fourier discrètes . . . . .	69
5.3	Comparaison des coefficients de Fourier discrets et continus . . . . .	71
5.4	Comparaison des séries de Fourier discrètes et continues . . . . .	73
5.5	Majoration de l'erreur numérique . . . . .	74
5.6	Une méthode de calcul pour la convolution . . . . .	75
5.7	Remarques sur l'implémentation numérique . . . . .	76
5.7.1	Forme matricielle du calcul des coefficients de Fourier discrets . . . . .	76
5.7.2	Nombre d'opérations élémentaires de calcul . . . . .	78
<b>6</b>	<b>La transformation de Fourier rapide</b>	<b>80</b>
6.1	Introduction . . . . .	80
6.2	Diviser pour régner . . . . .	81
6.2.1	Le principe de base . . . . .	81
6.2.2	Principe de l'algorithme de FFT : le cas $m = 2^\ell$ . . . . .	82
6.2.3	Majoration du nombre d'opérations . . . . .	84
6.3	Une présentation non récursive de l'algorithme de FFT . . . . .	85
6.3.1	L'arbre des opérations . . . . .	85
6.3.2	Ordre des indices sur la ligne inférieure . . . . .	85
6.3.3	Description de l'algorithme non récursif . . . . .	88
6.3.4	Mise en oeuvre informatique de l'algorithme FFT non récursif . . . . .	90
6.4	Vers la parallélisation . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Théorie de Fourier pour les fonctions <math>L</math>-périodiques, transformée de Fourier</b>	<b>92</b>
7.1	Introduction . . . . .	92
7.2	Décomposition des fonctions $L$ -périodiques . . . . .	92
7.3	Les relations de Parseval . . . . .	93

7.4	La transformée de Fourier des fonctions sur $\mathbb{R}$ . . . . .	94
7.4.1	Définition de la transformée de Fourier . . . . .	94
7.4.2	Propriétés de la Transformée de Fourier des fonctions à support compact . .	95
7.4.3	La formule d'inversion de Fourier . . . . .	98
7.4.4	Le théorème de Parseval . . . . .	100
7.5	Transformée de Fourier et convolution . . . . .	101
7.6	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	102
7.6.1	Définition abstraite . . . . .	102
7.6.2	Formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	103
7.6.3	Calculs pratiques . . . . .	104
7.7	Transformée de Fourier et régularité . . . . .	104
7.8	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz . . . . .	105

# Chapitre 1

## Introduction

Le but de ce cours est de fournir une introduction à l'étude d'objets et de concepts mathématiques, pour la plupart très classiques, qui s'avèrent être des outils puissants pour le traitement du signal. Les signaux étudiés proviennent de source diverses : on peut par exemple penser à des signaux sonores (téléphone, radio, etc...) visuels (télévision). A l'origine, ces signaux sont la plupart du temps de nature *analogique*, puis transformés dans une première étape en signaux électriques (par exemple un microphone transforme un signal sonore en signal électrique), puis traités par des circuit électroniques. L'introduction d'algorithmes numériques et la possibilité de traiter des quantités importantes d'informations a considérablement changé les perspective. Les outils mathématiques que nous présenterons permettent en particulier de **transformer** de manière pertinentes **les données analogiques en données numériques**.

Pour l'essentiel, les données analogiques que nous traiterons seront modélisées par des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$ , la variable  $t$  correspondant le plus souvent à une variable temporelle. Nous supposerons de plus assez souvent que ces fonctions sont continues, voir dérivables.

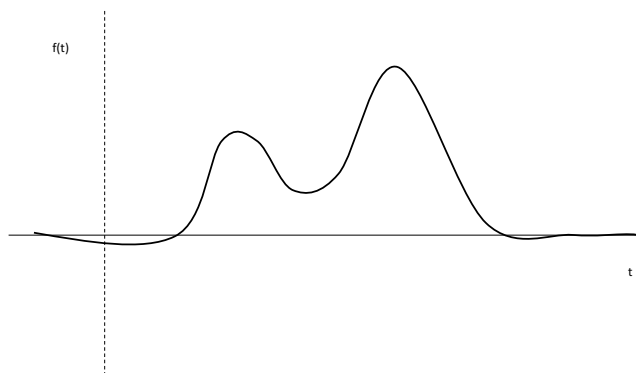


FIGURE 1.1 – *graphe d'une fonction*

Parmi les fonction que nous étudierons, celle qui sont périodiques jouent un rôle important :

nous dirons qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est périodique, de période  $T \geq 0$  si et seulement si

$$f(t + T) = f(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Il résulte de cette définition que si  $f$  est périodique de période  $T$ , alors elle est également périodique de période  $2T, 3T, \dots$ . Les exemples les plus classiques de fonctions périodiques sont les

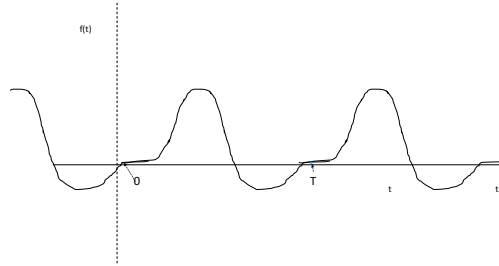


FIGURE 1.2 – graphe d'une fonction périodique

fonctions  $t \mapsto \sin t$ ,  $t \mapsto \cos t$  ou encore  $t \mapsto \exp it$ , qui sont périodiques de périodes  $2\pi$ . Il en est de même des fonctions  $t \mapsto \sin nt$ ,  $t \mapsto \cos nt$  et encore  $t \mapsto \exp int$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous verrons que l'ensemble de ces fonctions, lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}$ , joue un rôle considérable dans les pages qui suivent : nous montrerons qu'ils forment un ensemble assez riche pour décrire des fonctions périodiques les plus générales que nous serons amenées à considérer.

Dans cette perspective, il est souvent utile de se placer du point de vue de l'analyse fonctionnelle, c'est à dire de considérer des classes de fonctions qui forment un espace vectoriel. Par exemple, nous considérons les classes suivantes de fonctions :

$$\begin{cases} C_{\text{per}, T}^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue et } T\text{périodique}\} \\ C_c^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue et } f = 0 \text{ en dehors d'un intervalle borné}\} \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce sont des espaces vectoriels de fonctions, qui sont de dimension infinie : les algorithmes que nous verrons consisteront pour une large part à trouver des approximations de ces espaces par des espaces de dimension finie, que l'on pourra ensuite traduire sous forme numérique. Par ailleurs, les notions de l'algèbre linéaire sont appropriées pour modéliser un certain nombre d'opérations qui apparaissent dans le traitement du signal, en particulier la notion d'application linéaire. Rappelons qu'une application  $L : V \rightarrow W$ , d'un espace vectoriel  $V$  dans un espace vectoriel  $W$  est linéaire si et seulement si

$$\begin{cases} L(u + v) = L(u) + L(v) \text{ pour tous } u \in V, v \in V \\ L(\lambda u) = \lambda L(u) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \text{ pour tout } u \in V. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans de nombreux exemples, le traitement que l'on fait subir à un signal (ou une fonction) consiste à associer à un signal  $f$  donné, une autre fonction (ou, lorsque nous passerons aux algorithmes, une suite de nombres), que nous noterons  $T(f)$  qui possède la propriété de *superposition* : la fonction associée à la somme de deux fonctions est la somme des fonctions associée à chacune d'entre elles. Cette propriété n'est rien d'autre que la propriété de linéarité de l'application  $T$ ,

pour des espaces  $V$  et  $W$  convenablement définis. Nous pourrions alors utiliser le langage de l'algèbre linéaire pour décrire et comprendre les propriétés de  $T$  : en particulier, lorsque  $V = W$ , nous pourrions étudier la notion de **vecteur propre**, c'est à dire des éléments  $v$  de  $V$  tels qu'il existe un nombre  $\lambda$ , tel que

$$T(v) = \lambda v.$$

Il arrive que la famille des vecteurs propres est suffisamment riche pour décrire l'ensemble des fonctions de  $V$ . Ce phénomène correspond en dimension finie à la diagonalisation de  $T$ . Nous retrouverons des propriétés proches pour les espaces de fonctions qui nous intéressent.

**Exemple 1.** Un premier exemple simple d'application linéaire sur  $C^0(\mathbb{R})$  est fourni par les opérateur de translation : On se donne  $h \in \mathbb{R}$ , et on considère l'application  $\tau_h : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$  définie pour  $f \in C^0(\mathbb{R})$  par

$$\tau_h(f)(t) = f(t - h) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

On vérifie facilement la linéarité de cette application. On peut se poser la question de savoir quelles sont les fonctions propres de  $\tau_h$ . Nous répondrons plus loin de manière un peu plus complète à cette question. Nous pouvons néanmoins constater dès à présent que les fonctions exponentielle  $g_\lambda$ , pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  définies par

$$g_\lambda(t) = \exp(\lambda t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

sont des fonctions propres de  $\tau_h$ . En effet, on a

$$\tau_h(g_\lambda)(t) = \exp(\lambda(t - h)) = \exp(-\lambda h) \exp(\lambda t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

la valeur propre associée est donc  $\exp(-\lambda h)$ .

**Exemple 2.** Reprenons l'exemple précédent, mais on nous limitant cette fois-ci aux fonctions  $T$ -périodiques, c'est à dire à l'espace  $C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$ . parmi les fonctions  $g_\lambda$ , les seuls qui appartiennent à l'espace  $C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$ , nous devons imposer la condition  $g_\lambda(0) = g_\lambda(T)$ , c'est à dire

$$\exp(\lambda T) = 1.$$

Cette dernière condition est équivalente à

$$\lambda = \lambda_n \equiv \frac{2\pi i n}{T}, n \in \mathbb{Z},$$

condition qui est indépendante du paramètre de translation  $h$ . La famille de fonctions

$$\left\{ \exp(t \mapsto \frac{2\pi i n}{T} t), n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est donc une famille de vecteurs propres, la famille des valeurs propres associées étant

$$\left\{ \exp(\frac{-2\pi i n h}{T}), n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si cette famille n'est pas génératrice de  $V$ , nous verrons plus loin qu'elle possède des propriétés que s'en rapproche.

**Exemple 3.** Considérons l'espace  $V$  des fonctions périodique de classe  $C^\infty$

$$V = C_{\text{per}, T}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ de classe } C^\infty \text{ et } T\text{-périodique}\}$$

et l'application  $D : V \rightarrow V$  définie par

$$D(v) = \frac{dv}{dt} \text{ pour tout } v \in V, \text{ c'est à dire } D(v)(t) = \frac{dv}{dt}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

On peut se poser la question de savoir quels sont les vecteurs propres de  $D$ , c'est à dire les vecteurs  $u$  vérifiant l'équation

$$D(u) = \lambda u \text{ pour un nombre } \lambda \in \mathbb{C} \text{ donné,}$$

c'est à dire les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt}(t) = \lambda u(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

La théorie des équations différentielles nous enseigne que les solutions de (1.3) sont les fonctions de la forme

$$u(t) = K \exp(\lambda t) = K g_\lambda(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

où  $K$  désigne une constante non nulle. Comme nous désirons de plus que les fonctions  $u$  soient  $T$ -périodiques, nous retrouvons la condition

$$\lambda = \lambda_n \equiv \frac{2\pi i n}{T}, n \in \mathbb{Z}$$

De nouveau, la famille de fonctions  $\exp(t \mapsto \{\frac{2\pi i n}{T} t, n \in \mathbb{Z}\})$  est une famille de vecteurs propres, la famille des valeurs propres associées étant  $\{\frac{-2\pi i n h}{T}, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Remarque 1.** Le fait que nous trouvions les mêmes fonctions propres pour les deux exemples précédent n'est pas fortuit. En effet, on peut écrire, au moins formellement

$$Du = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\tau_h - Id}{h}.$$

Dans les chapitres qui vont suivre, nous allons développer deux points importants

- Les applications linéaires obtenues par convolution
- La théorie des séries de Fourier

cette dernière étant liée à la famille de vecteurs propres étudiés dans l'exemple 3.

## Exercices

### Exercice I



On considère l'espace  $V_0$  des fonctions de classes  $C^\infty$   $T$  périodiques de moyenne nulle, c'est à dire

$$V_0 = \left\{ u \in C_{\text{per}, T}^\infty(\mathbb{R}), \int_0^T u(t) dt = 0 \right\},$$

et l'application  $I$  définit sur  $V_0$  par

$$I(u)(t) = \int_0^t u(s) ds$$

- a) Montrer que  $I$  est une application linéaire de  $V_0$  dans  $C_{\text{per}, T}^\infty(\mathbb{R})$ .
- b) Montrer que  $I \circ D = \text{Id}_{C_{\text{per}, T}^\infty(\mathbb{R})}$  et que  $D \circ I = \text{Id}_{V_0}$ .

# Chapitre 2

## Opérateurs de convolution

Les opérateurs de convolution que nous allons définir fournissent une famille très importantes d'application linéaires sur les espaces de fonctions. Afin de donner une première idée de cette notion, nous allons commencer par un exemple simple, celui du lissage par moyenne.

### 2.1 Lissage par moyenne

#### 2.1.1 Définition

Considérons l'espace vectoriel de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$

$$C^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}.$$

Pour  $h > 0$  petit paramètre donnée, et pour toute fonction  $f$  on considère la moyenne 'mobile'<sup>1</sup> de la fonction  $f$  en un temps  $t$  donnée par

$$M_h(f)(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(s) ds. \quad (2.1)$$

En d'autres termes, on considère la moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[t-h, t+h]$  dont la longueur est  $2h$ . On définit ainsi une nouvelle fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $M_h(f)$ .

On vérifie tout d'abord que cette nouvelle fonction  $M_h(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et même dérivable de dérivée donnée<sup>2</sup> par

$$M_h(f)'(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}. \quad (2.2)$$

On obtient en particulier la majoration, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et lorsque  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$

$$|M_h(f)'(t)| \leq \frac{1}{h} \|f\|_\infty \quad \text{où } \|f\|_\infty \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.3)$$

On peut réécrire cette propriété sous forme d'une inégalité de norme

---

1. On fait effectivement une moyenne de la fonction  $f$  sur un intervalle qui se déplace avec  $t$

2. En effet, on peut écrire

$$M_h(f)(t) = \frac{1}{2h} \left( \int_0^{t+h} f(s) ds - \int_0^{t-h} f(s) ds \right).$$

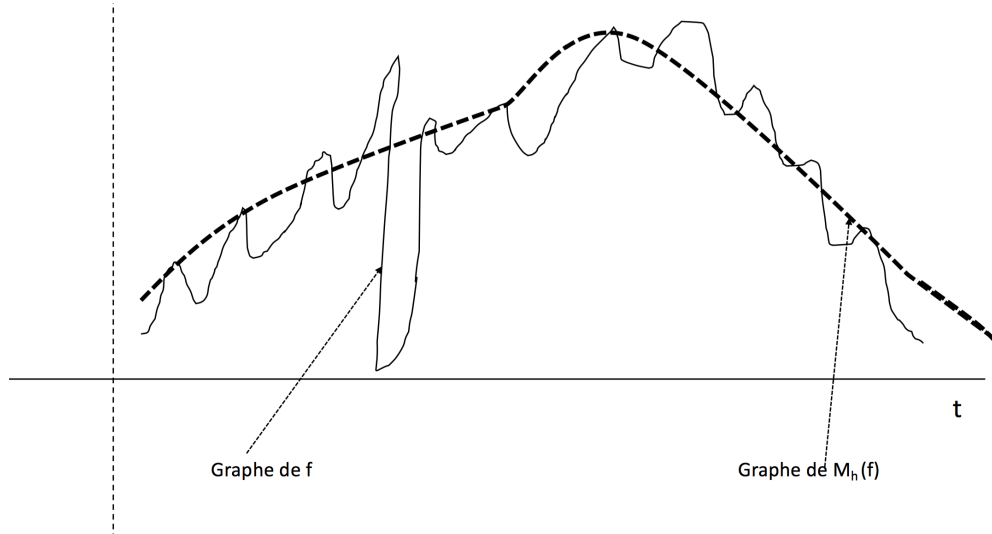


FIGURE 2.1 – *graphe des fonctions  $f$  et  $M_h(f)$*

$$\left\| [M_h(f)]' \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{h} \|f\|_{\infty}. \quad (2.4)$$

De manière général, si  $f$  est de classe  $C^k(\mathbb{R})$ , alors  $M_h(f)$  est de classe  $C^{k+1}(\mathbb{R})$ , c'est à dire que l'on gagne un ordre de régularité. Ceci correspond à l'idée intuitive que  $f$  est plus régulière que  $f$ , les différents "pics" étant lissés du graphe de  $f$  étant lissés. On vérifie (exercice)

**Lemme 2.1.** *Pour tout  $h > 0$  l'application  $f \mapsto M_h(f)$  est une application linéaire de  $C^0(\mathbb{R})$  vers  $C^1(\mathbb{R})$ .*

En guise d'exemple voyons comment l'image par  $M_h$  des fonction exponentiels  $t \mapsto g_{\lambda}(t) = \exp(\lambda t)$ . On a

$$\begin{aligned} M_h(g_{\lambda})(t) &= \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \exp(\lambda t) dt = \frac{1}{2h\lambda} (\exp(\lambda(t+h)) - \exp(\lambda(t-h))) \\ &= \left[ \frac{\exp \lambda h - \exp -\lambda h}{2\lambda h} \right] \exp(\lambda t) = \left[ \frac{\exp \lambda h - \exp -\lambda h}{2\lambda h} \right] g_{\lambda}(t), \end{aligned}$$

de sorte que les fonctions exponentielles  $g_{\lambda} = \exp(\lambda \cdot)$  sont fonctions propres de  $M_h$  de valeurs propres associées

$$\mu_{\lambda} = \frac{\exp \lambda h - \exp -\lambda h}{2\lambda h}.$$

En particulier, si  $\lambda$  est un nombre complexe imaginaire pur, c'est à dire s'il est de la forme  $\lambda = ik$ , alors on

$$\mu_{ik} = \frac{\exp ikh - \exp -ikh}{2ih} = \frac{\sin kh}{kh} \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow \pm\infty.$$

Il en résulte que  $M_h(g_{ik})$  tend uniformément vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $\pm\infty$ . En revanche, pour  $k$  petit, on a

$$\mu_{ik} \underset{k \rightarrow 0}{\sim} 1$$

De sorte que pour les basses valeurs de  $k$ , les valeurs propres sont proche de 1.

**Remarque 2.1.** Dans le langage de la théorie du signal, on dit que  $M_h$  est un filtre *passé-bas*, c'est à dire que  $M_h$  élimine les fortes oscillations, alors que les oscillations de faible amplitude sont quasiment inchangées par l'action de  $M_h$ .

D'un point de vue pratique, si  $f$  représente un signal d'origine, on peut être amené à lui préférer le signal  $M_h(f)$  si les fluctuations locales ne présentent que peu d'intérêt ou correspondent à des perturbations du signal initial.

**Remarque 2.2.** On pourra vérifier (exercice) que si  $f \in C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$ , alors on a aussi  $M_h(f) \in C_{\text{per},T}^1(\mathbb{R})$ , de sorte que  $M_h$  définit une application linéaire dans lui-même. Comme les fonctions  $g_{ik}$  appartiennent à  $C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$  si  $k$  est de la forme  $k = \frac{2\pi n}{T}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , il en résulte que l'ensemble

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i n}{T} \cdot\right), n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est inclus dans l'ensemble des fonctions propres de  $M_h$ , considérée comme une application linéaire de  $C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$  dans lui-même.

### 2.1.2 Convergence de $M_h(f)$ vers $f$

**Proposition 2.1.** La fonction  $M_h(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout intervalle de la forme  $[-R, R]$ .

*Démonstration.* on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$M_h(f)(t) - f(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} [f(s) - f(t)] ds \text{ car } f(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(t) ds. \quad (2.5)$$

On en déduit la majoration

$$|M_h(f)(t) - f(t)| \leq \sup_{s \in [t-h, t+h]} \{|f(t) - f(s)|\}. \quad (2.6)$$

Si  $t \in [-R, R]$ , alors les nombres  $s$  qui apparaissent dans le sup précédent appartiennent à l'intervalle  $[-R-h, R+h]$ . Pour conclure, on invoque l'*uniforme continuité* de  $f$  sur tout compact, en l'occurrence ici l'intervalle  $[-R-h, R+h]$ <sup>3</sup>. Cette propriété s'énonce comme suit : pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, il existe un nombre  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que si  $u$  et  $v$  sont deux nombres dans  $[-R-h, R+h]$  alors

$$|u - v| \leq \delta(\varepsilon) \text{ entraîne } |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

On applique cette inégalité à la majoration (2.6). On se donne  $\varepsilon > 0$ , soit alors  $\delta(\varepsilon)$  le nombre donné par la propriété d'uniforme continuité (2.7). Si  $h \leq \delta(\varepsilon)$ , alors pour tout  $s \in [t-h, t+h]$ , on a  $|s - t| \leq h \leq \delta(\varepsilon)$ , de sorte que

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\sup_{s \in [t-h, t+h]} \{|f(t) - f(s)|\} \leq \varepsilon.$$

En revenant à (2.6) on obtient ainsi : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $h \leq \delta(\varepsilon)$  alors, pour tout  $t \in [-R, R]$ , on a

$$|M_h(f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

ce qui correspond bien à la convergence uniforme de  $M_h(f)$  vers  $f$  sur l'intervalle  $[-R, R]$  □

3. rappelons qu'une fonction continue sur un intervalle borné est uniformément continue en vertu du théorème de Heine-Borel

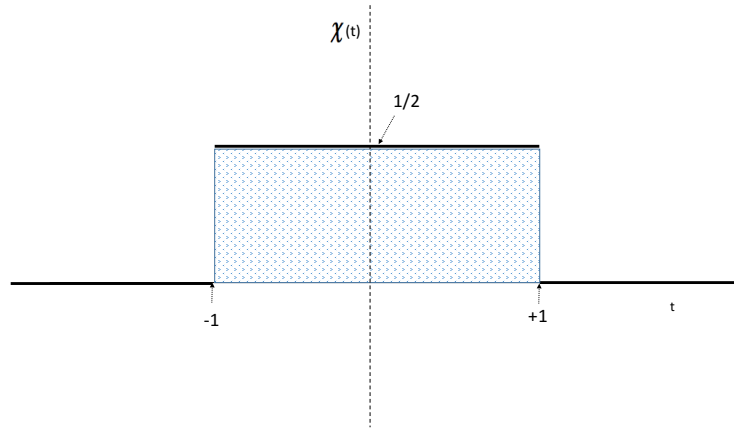


FIGURE 2.2 – graphe de la fonction  $\chi = \chi_1$

**Remarque 2.3.** Rappelons que la convergence uniforme sur un intervalle borné  $[a, b]$  correspond à la convergence pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et que l'espace  $C^0[a, b]$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  est complet pour cette norme.

### 2.1.3 Une autre façon d'écrire de $M_h(f)$

Revenons à la définition (2.1) de  $M_h(f)$ . Introduisons la fonction  $\chi_h$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier par

$$\begin{cases} \chi_h(s) = \frac{1}{2h} \text{ si } s \in [-h, h] \\ \chi_h(s) = 0 \text{ sinon, c'est à dire si } s \in ]-\infty, -h[ \cup ]h, +\infty[ \end{cases} \quad (2.8)$$

On a alors, pour  $t \in \mathbb{R}$  donné

$$\begin{cases} \chi_h(t-s) = \frac{1}{2h} \text{ si } s \in [t-h, t+h] \\ \chi_h(t-s) = 0 \text{ sinon, c'est à dire si } s \in ]-\infty, t-h[ \cup ]t+h, +\infty[ \end{cases} \quad (2.9)$$

On peut alors écrire

$$M_h(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \chi_h(t-s) ds. \quad (2.10)$$

Nous verrons plus loin que cette écriture correspond à la définition du produit de convolution de  $f$  et de  $\chi_h$ . Remarquons que

$$\chi_h(s) = \frac{1}{h} \chi\left(\frac{s}{h}\right) \text{ où on a posé } \chi = \chi_1$$

et que pour tout  $h > 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_h(s) ds = 1.$$

### 2.1.4 Lissage par moyenne pondérée

On peut bien entendu effectuer d'autres types de moyenne, en donnant des poids différents aux points proches de  $t$  sur l'axe réel. Pour ce faire, on remplace la fonction  $\chi$  par une fonction  $\varphi$ , que l'on peut dans un premier temps supposer à support compact (c'est à dire on va supposer que  $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ ). On définit ainsi, pour tout fonction  $f$  dans  $C^0(\mathbb{R})$  une moyenne "mobile" pondérée par  $\varphi$  de  $f$ , en posant

$$M_\varphi(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\varphi(s-t)ds \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

On vérifie alors que l'application  $t \mapsto M_\varphi(f)(t)$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  en utilisant le théorème de continuité sous le signe somme et que l'application  $f \mapsto M_\varphi(f)$  est une application linéaire de  $C^0(\mathbb{R})$  dans lui-même. Par ailleurs, si on revient aux fonction  $g_\lambda \equiv \exp(\lambda \cdot)$  définies plus haut, on remarque que

$$M_\varphi(g_\lambda) = \mu_\lambda g_\lambda \quad \text{où } \mu_\lambda = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda u)\varphi(u)du, \quad (2.12)$$

de sorte que les fonctions  $g_\lambda$  sont des fonctions propres de  $M_\varphi$ . En effet, on a, en introduisant le changement de variable  $u = s - t$

$$\begin{aligned} M_\varphi(g_\lambda)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda s)\varphi(s-t)ds = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda(t+u))\varphi(u)du \\ &= \exp(\lambda t) \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda u)\varphi(u)du. \end{aligned}$$

Notons que si  $f$  est continue périodique de période  $T$ , alors il en est de même de  $M_\varphi(f)$ . En effet, on a, en effectuant le changement de variable  $u = s - T$

$$\begin{aligned} M_\varphi(f)(t+T) &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\varphi(s-t-T)ds = \int_{\mathbb{R}} f(u+T)\varphi(u-t)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\varphi(u-t)du = M_\varphi(f)(t+T). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'application  $f \mapsto M_\varphi(f)$  est une application continue de  $C_{\text{per},T}^0(\mathbb{R})$  dans lui-même, et que les fonctions  $\exp(\frac{2in\pi}{T} \cdot)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  sont des fonctions propres de cette application de valeurs propres associées  $\int_{\mathbb{R}} \exp(\frac{2\pi i n u}{T}) \varphi(u)du$ .

Donnons maintenant un résultat de convergence. On considère une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'application de  $C_c^0(\mathbb{R})$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(u)du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(u)|du \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad (2.13)$$

et on suppose par ailleurs que pour tout nombre  $\delta > 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_n(t)|dt \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (2.14)$$

Une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant (2.21) est appelée une *approximation de l'identité*.

**Proposition 2.2.** *Supposons que les hypothèses (2.13) et (2.14) soient satisfaites par la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors, pour tout  $R > 0$  et pour toute fonction  $f \in C^0(\mathbb{R})$  bornée donnée, la suite de fonctions  $(M_{\varphi_n}(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur l'intervalle  $[-R, R]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .*

*Démonstration.* La preuve est similaire à la preuve de la Proposition 2.1 et repose sur la continuité uniforme sur tout compact de  $f$ . Il s'agit de montrer que pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un nombre  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  tel que si  $n \geq n_0(\varepsilon)$ , alors, on a, pour tout  $t \in [-R, R]$

$$|M_{\varphi_n}(f)(t) - f(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s-t) f(s) ds - f(t) \right| \leq \varepsilon. \quad (2.15)$$

Comme, par hypothèse  $\varphi_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s) ds = 1$ , on a

$$f(t) = f(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s) ds = f(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s-t) ds$$

D'où il résulte que

$$|M_{\varphi_n}(f)(t) - f(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds \right|. \quad (2.16)$$

En utilisant la propriété d'uniforme continuité, comme dans la preuve de la Proposition 2.1, on voit qu'il existe un nombre  $\delta > 0$  tel que

$$\sup_{s \in [t-\delta, t+\delta]} \{|f(t-s) - f(t)|\} \leq \frac{\varepsilon}{2M_0 + 1}, \text{ où } M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(s)| ds \quad (2.17)$$

On décompose alors le membre de gauche de (2.16) comme

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds = \int_{t-\delta}^{t+\delta} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds + \int_{\mathbb{R} \setminus [t-\delta, t+\delta]} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds. \quad (2.18)$$

et on majore le premier terme de (2.18)

$$\begin{aligned} \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds \right| &\leq \left( \int_{t-\delta}^{t+\delta} |\varphi_n(s-t)| ds \right) \sup_{s \in [t-\delta, t+\delta]} \{|f(t-s) - f(t)|\} \\ &\leq \left( \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_n(u)| du \right) \cdot \frac{\varepsilon}{2M_0 + 1} \\ &\leq \frac{M_0 \varepsilon}{2M_0 + 1} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

où on a utilisé (2.17) pour la seconde inégalité. Pour le second terme de (2.18), on écrit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [t-\delta, t+\delta]} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds \right| &\leq 2\|f\|_{\infty} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus [t-\delta, t+\delta]} |\varphi_n(s-t)| ds \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_n(u)| du. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En utilisant l'hypothèse (2.14), on voit qu'il existe un nombre  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq n_0$  alors on a

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_n(u)| du \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\infty} + 2}.$$

En revenant à (2.20), on voit que, pour  $n \geq n_0$ , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus [t-\delta, t+\delta]} \varphi_n(s-t) [f(s) - f(t)] ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant cette inégalité avec (2.16), (2.18) et (2.19), on obtient, pour  $n \geq n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ , le résultat attendu (2.15).  $\square$

**Remarque 2.4.** Un exemple standard de suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les hypothèses (2.13) et (2.14) est donnée par

$$\varphi_n(t) = n\varphi(nt) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \quad (2.21)$$

où  $\varphi$  désigne une fonction donnée régulière de  $\mathbb{R}$  qui s'annule en dehors d'un intervalle  $[-A, A]$  et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(s) ds = 1.$$

On vérifie alors que  $\varphi_n$  s'annule en dehors de l'intervalle  $[-\frac{A}{n}, \frac{A}{n}]$ . En particulier, pour tout  $\delta > 0$ , si  $\delta \geq \frac{A}{n}$ , c'est à dire si  $n \geq \frac{A}{\delta}$ , alors on a

$$[-\frac{A}{n}, \frac{A}{n}] \subset [-\delta, \delta],$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_n(t)| dt = 0.$$

La condition (2.14) est donc vérifiée. En effectuant le changement de variable  $u = ns$ , on obtient par ailleurs

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s) ds = n \int_{\mathbb{R}} \varphi(ns) ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du = 1 \\ \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(s)| ds = n \int_{\mathbb{R}} |\varphi(ns)| ds = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)| du. \end{cases}$$

Ceci montre que les hypothèses (2.13) et (2.14) sont bien vérifiées pour la suite considérée. On a donc bien une *approximation de l'identité*.

## 2.2 Produit de convolution

### 2.2.1 Définition

Considérons  $f \in C^0(\mathbb{R})$  et  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ . On définit le produit de convolution de  $f$  et  $g$  et on note  $f \star g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s) ds \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Comme, par hypothèse  $g$  est à support compact, et s'annule donc en dehors d'un intervalle de la forme  $[-A, A]$ , l'intégrande dans l'intégrale du membre de droite de (2.22) s'annule en dehors de l'intervalle  $[-A+t, A+t]$  de sorte que l'on a

$$f \star g(t) = \int_{-A+t}^{A+t} f(s) g(t-s) ds \quad (2.23)$$

Comme  $f$  est continue, donc localement bornée, l'intégrale du membre de droite est parfaitement définie. Par ailleurs, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre montre que cette fonction est une fonction continue de  $t$ , c'est à dire que l'application  $f \mapsto f \star g$  est une application linéaire de  $C^0(\mathbb{R})$  dans lui-même pour  $g$  donnée.



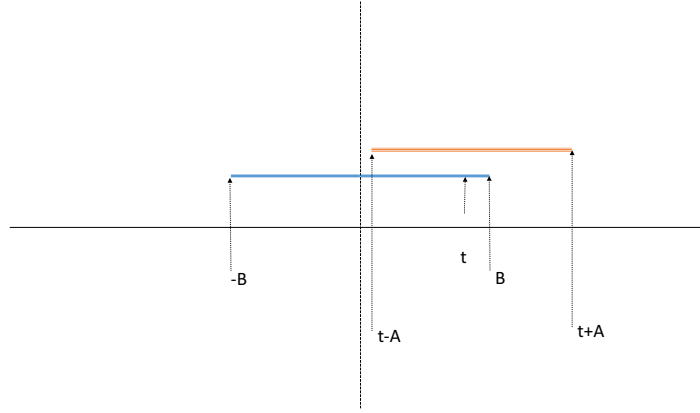


FIGURE 2.3 – *Domaine d'intégration*

**Remarque 2.5.** La définition (2.22) du produit de convolution est très proche de celle de la moyenne pondérée décrite par la formule 2.11. Notons cependant une différence importante : dans l'intégrande du membre de droite de (2.11)  $s - t$  est remplacé dans (2.22) par  $t - s$ . On a donc

$$M_g(f) = f \star \tilde{g} \text{ et } M_{\tilde{g}}(f) = f \star g \quad (2.24)$$

où  $\tilde{g}$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\tilde{g}(t) = g(-t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si la fonction  $g$  est paire on a  $\tilde{g} = g$  de sorte que, dans ce cas  $M_g(f)$  et  $f \star g$  coïncident.

**Remarque 2.6.** Si  $f$  et  $g$  sont toutes les deux des fonctions de  $C_c^0(\mathbb{R})$ , alors  $f \star g$  est aussi une fonction de  $C_c^0(\mathbb{R})$ . Plus précisément, si  $g$  s'annule en dehors de l'intervalle  $[-A, A]$  et  $f$  en dehors de l'intervalle  $[-B, B]$  alors on a

$$f \star g(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus [-(A+B), A+B]. \quad (2.25)$$

Cela résulte de l'identité (2.23). En effet, si  $t \geq A+B$ , alors  $-A+t \geq B$  de sorte que

$$f \star g(t) = \int_{-A+t}^{A+t} f(s)g(t-s)ds = f \star g(t) = \int_B^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = 0, \text{ car } f(s) = 0 \text{ pour } s \geq B.$$

On démontre de même que  $f \star g(t) = 0$  pour  $t \leq -(A+B)$ . Voir Figure 2.3

**Remarque 2.7.** Si  $f$  est une fonction  $T$ -périodique et si  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $f \star g$  est aussi  $T$ -périodique. En effet, on faisant le changement de variable  $u = s - T$ , on obtient

$$f \star g(t+T) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t+T-s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(u+T)g(t-u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du = f \star g(t)$$

## 2.2.2 Premières propriétés du produit de convolution

Commençons par quelques propriétés élémentaires.

**Commutativité.** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$ , et  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ . On a

$$f \star g = g \star f \quad (2.26)$$

En effet, on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en effectuant le changement de variable  $u = t - s$

$$g \star f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)f(u)du = f \star g(t).$$

**Remarque 2.8.** Au vu de la commutativité, on peut réécrire la formule (2.22) en utilisant les opérateurs de translation, à savoir

$$f \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\tau_s(f)(t)ds = \left[ \int_{\mathbb{R}} g(s)\tau_s(f)ds \right] (t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

c'est à dire, formellement toujours

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}} g(s)\tau_s(f)ds.$$

Le deuxième terme de l'égalité correspond donc à une moyenne pondérée par  $g$  des translatées  $\tau_s(f)$ .

**Distributivité.** Soit  $f$  et  $h$  deux fonctions de  $C^0(\mathbb{R})$ , et  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ . On a

$$(f + h) \star g = f \star g + h \star g$$

la preuve présente peu de difficultés et est laissée en exercice.

**Associativité.** Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions de  $C_c^0(\mathbb{R})$ . Alors on a

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h).$$

*Démonstration.* Notons tout d'abord que ces produits de convolutions sont bien définis car  $f \star g$  ainsi que  $g \star h$  sont des éléments de  $C_c^0(\mathbb{R})$ , de sorte que les deux membres de l'identité sont des fonction de  $C_c^0(\mathbb{R})$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(t) &= \int_{\mathbb{R}} [f \star g(s-t)] h(s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f((t-s)-u).g(u)du \right] h(s)ds \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f((t-s-u).g(u)h(s)dsdu \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable  $(s, u) \mapsto (s, w)$  avec  $w = s + u$ , dans l'intégrale double, on obtient, comme la valeur absolue du jacobien vaut 1,  $dsdu = dsdw$  ainsi que  $u = w - s$ , de sorte que

$$\begin{aligned} (f \star g) \star h(t) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(t-w)g(w-s)h(s)dsdw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} g(w-s)h(s)ds \right] f(t-w)dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} [g \star h(w)] f(t-w)dw \\ &= f \star (g \star h)(t), \end{aligned}$$

qui est le résultat attendu. □

**Remarque 2.9.** Nous avons supposé ici que toutes les fonctions s'annulent en dehors d'un intervalle borné pour garantir que les intégrales qui définissent les convolutions sont bien définies. La formule s'étend cependant à des classes bien plus larges de fonctions.

**Convolution et translations.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  dans  $C_c^0(\mathbb{R})$ . On a l'identité

$$\tau_h(f) \star g = \tau_h(f \star g).$$

*Démonstration.* On a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau_h(f) \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s-h)g(t-s)ds$$

En faisant le changement de variable  $u = s - h$  (et donc  $s = u + h$ ) il vient

$$\tau_h(f) \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-h-u)du = \tau_h(f) \star g(t-h) = \tau_h(f \star g)(t).$$

□

### 2.2.3 Propriétés de différentiabilité

Supposons que la fonction  $g$  soit dérivable. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  dans  $C_c^0(\mathbb{R})$ . Si  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $f \star g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\frac{d}{dt}(f \star g) = f \star \frac{dg}{dt}. \quad (2.27)$$

de même, si  $f$  est dérivable de dérivée continue, il en est de même de  $f \star g$  et on a

$$\frac{d}{dt}(f \star g) = \frac{df}{dt} \star g. \quad (2.28)$$

*Démonstration.* Donnons la preuve de (2.27), celle de (2.28) étant identique. par hypothèse, il existe  $A > 0$  tel que  $g$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[-A, A]$ . Soit  $R > 0$  donné arbitraire, on va montrer que  $f \star g$  est dérivable sur  $] -R, R[$ . On a, pour tout  $t \in ] -R, R[$

$$f \star g(t) = \int_{-A+t}^{A+t} f(s)g(t-s)ds = \int_{B_0}^{B_1} f(s)g(t-s)ds = \int_{B_0}^{B_1} h(t, s)ds$$

où  $B_0 = -A-R$  et  $B_1 = A+R$  et où on a posé  $h(t, s) = f(s)g(t-s)$ . La fonction  $h$  est différentiable par rapport à  $t$  puisque

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, s) = f(s)g'(t-s).$$

On peut alors appliquer le Théorème de dérivation (voir polycopié Intégration, topologie, et analyse hilbertienne) sous le signe somme pour conclure que pour tout  $t \in ] -R, R[$  on a

$$\frac{d}{dt}(f \star g)(t) = \int_{B_0}^{B_1} f(s)g'(t-s)ds = f \star \frac{dg}{dt}(t).$$

Comme  $R > 0$  est arbitraire, la conclusion en découle.

□

De manière général, en itérant le raisonnement précédent, on obtient :

**Proposition 2.3.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^0(\mathbb{R})$  et  $g \in C_c^0(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$ . Alors la fonction  $f \star g$  appartient à  $C^k(\mathbb{R})$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  on a

$$\frac{d^j}{dt^j} (f \star g) = f \star \frac{d^j g}{dt^j}.$$

De même si  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$  et  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$  alors  $f \star g$  appartient à  $C^k(\mathbb{R})$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  on a

$$\frac{d^j}{dt^j} (f \star g) = \frac{d^j f}{dt^j} \star g.$$

**Remarque 2.10.** Notons que si  $f$  est de classe  $C^k$  et  $g$  de classe  $C^m$ , alors  $f \star g$  est de classe  $C^{k+m}$ , c'est à dire que les régularités se cumulent. Ainsi

$$\frac{d^{k+m}}{dt^{k+m}} (f \star g) = \frac{d^k f}{dt^k} \star \frac{d^m g}{dt^m}.$$

## 2.2.4 Régularisation par convolution

Les résultats d'approximation par convolution obtenus dans les Proposition 2.4 peuvent être bien entendu traduits dans le contexte des convolutions.

**Proposition 2.4.** Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'identité, c'est à dire une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les hypothèses (2.13) et (2.14). Alors, pour tout  $R > 0$  et pour toute fonction  $f \in C^0(\mathbb{R})$  bornée donnée, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$f_n = f \star \varphi_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers  $f$  sur l'intervalle  $[-R, R]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Si, pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a de plus  $\varphi_n \in C^k(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et que  $\left(\frac{d^m \varphi_n}{dt^m}\right)$  est intégrable pour tout  $m \leq k$ , alors la fonction  $f_n$  appartient également à  $C^k(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Pour la première assertion, il suffit d'observer que

$$f_n = f \star \varphi_n = M_{\tilde{\varphi}_n}(f).$$

Comme la suite  $(\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les hypothèses (2.13) et (2.14) la conclusion découle directement de la Proposition (2.4).  $\square$

**Remarque 2.11.** D'un point de vue numérique, il est naturel d'évaluer la vitesse de convergence énoncée dans la Proposition 2.4. Comme nous le verrons sur d'autres exemples par la suite, les estimations des vitesses de convergence réclame souvent des propriétés de différentiabilité de la fonction  $f$  que l'on cherche à régulariser. Pour fixer les idées, supposons que la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit de la forme (2.21), c'est à dire  $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\varphi$  est une fonction régulière nulle en dehors d'un intervalle de la forme  $[-A, A]$ , positive et dont l'intégrale vaut 1. On a, pour une fonction  $f$  à support compact dans un interval  $[-B, B]$

$$\begin{aligned} |f \star \varphi_n(t) - f(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [f(t) - f(t-s)] \varphi_n(s) ds \right| \\ &\leq \sup_{h \in [-A/n, A/n]} |f(t+h) - f(t)| \\ &\leq \frac{A}{n} \|f'\|_{\infty}, \end{aligned}$$

la convergence est donc au moins en  $n^{-1}$  si  $f$  est  $C^1$ .

### 2.2.5 Propriétés d'intégrabilité

On suppose ici que  $f$  est intégrable, c'est à dire que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty. \quad (2.29)$$

On a alors

**Proposition 2.5.** *Si  $f \in C^0(\mathbb{R})$  vérifie (2.29) et si la fonction  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $f \star g$  est intégrable et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)| dt \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \right). \quad (2.30)$$

*Démonstration.* On a, en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)| dt &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s) ds \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(s)| |g(t-s)| ds \right) dt \\ &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(s)| |g(t-s)| ds dt. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant le changement de variable  $(s, t) \mapsto (s, u)$  où  $u = t - s$ . Le Jacobien valant 1, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)| dt &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(s)| |g(u)| ds du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(s)| ds \right) |g(u)| du, \end{aligned}$$

où on a utilisé de nouveau le théorème de Fubini pour la deuxième identité. Ceci nous mène directement au résultat (2.30)  $\square$

On obtient des résultats du même type pour d'autres conditions d'intégrabilité. Supposons par exemple que l'on a, au lieu de (2.30), la condition

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (2.31)$$

Il vient alors :

**Proposition 2.6.** *Si  $f \in C^0(\mathbb{R})$  vérifie (2.31) et si la fonction  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $f \star g$  est intégrable et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)|^2 dt \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \right)^2. \quad (2.32)$$

*Démonstration.* On a, en utilisant le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s) ds \right|^2 dt. \quad (2.33)$$

En décomposant l'intégrande comme suit

$$|f(s)| |g(t-s)| = |f(s)| |g(t-s)|^{1/2} \cdot |g(t-s)|^{1/2}$$

on obtient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds \right|^2 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2(s)|g(t-s)| \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|ds \right) \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2(s)|g(t-s)| \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)|du \right) \end{aligned}$$

En revenant à (2.33) il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f \star g(t)|^2 dt &= \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)|du \right) \cdot \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2(s)|g(t-s)|ds \right) dt \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)|du \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} [|f|^2 \star |g|](t) dt \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

En utilisant la Proposition 2.5 appliquées aux fonctions  $|f|^2$  et  $|g|$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} [|f|^2 \star |g|](t) dt \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} |g(u)|du \right) \quad (2.35)$$

En combinant (2.34) et (2.35) on obtient finalement (2.32).  $\square$

## 2.3 Extension à des classes de fonctions plus générales

### 2.3.1 Majorations intégrales

Les résultats précédents peuvent être réécrit en utilisant les normes des espaces  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  définis

$$\begin{cases} L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables avec } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < +\infty \right\} \\ L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables avec } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}. \end{cases}$$

Ces deux ensembles sont des espaces vectoriels normés complets (espaces de Banach) pour les normes respectives

$$\begin{cases} \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \text{ pour } f \in L^1(\mathbb{R}) \\ \|f\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } f \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Le résultat de la Proposition 2.5 s'écrit donc comme

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \text{ pour tous } f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) \text{ et } g \in C_c^0(\mathbb{R}) \quad (2.36)$$

alors que celui de la Proposition 2.6 s'écrit

$$\|f \star g\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_1 \text{ pour tous } f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) \text{ et } g \in C_c^0(\mathbb{R}) \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Convolutions pour des fonctions dans $L^1$ et $L^2$

Des arguments basés sur la théorie de la mesure et en particulier la théorème de Fubini permettent alors d'étendre la notion de convolution à ces espaces.

**Proposition 2.7.** Soit  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{R})$ ). L'application  $t \mapsto f \star g(t)$  définie par (2.22) est définie pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ . De plus  $f \star g$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{R})$ ). On a les majorations de normes

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \text{ pour tous } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}) \quad (2.38)$$

et

$$\|f \star g\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_1 \text{ pour tous } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}). \quad (2.39)$$

**Attention!** Lorsque la fonction  $f$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$  ou dans  $L^2(\mathbb{R})$  et si  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$  alors la formule (2.22) a encore un sens pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et  $f \star g$  ainsi définie est une fonction continue (exercice). En revanche, si  $g$  est seulement dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors la formule (2.22) ne donne pas forcément un résultat pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , mais uniquement pour *presque tout*  $t$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 2.12.** On peut également définir le produit de convolution pour deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f \star g(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction  $g \star f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\|f \star g\|_{\infty} \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

En fait, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut même montrer que  $f \star g$  est une fonction continue.

### 2.3.3 Régularisation des fonctions de $L^1$ et $L^2$

Considérons maintenant le cas où  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ . On a

**Proposition 2.8.** Soit  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  ou dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ . Alors la fonction  $f \star g$  est continue. Si de plus  $g \in C^k(\mathbb{R})$ , pour  $k \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $f \star g$  appartient également à  $C^k(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Comme  $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ , il existe  $A > 0$  tel que  $g$  s'annule sur  $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$ . Comme  $g$  est une fonction continue, elle est bornée sur  $[-A, A]$ , et donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier, puisqu'elle est nulle en dehors de cet intervalle. On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds = \int_{-A+t}^{A+t} f(s)g(t-s)ds$$

L'intégrale du membre de gauche est parfaitement définie et bornée. On a si  $f \in L^1$

$$|f \star g(t)| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_{\infty},$$

Alors que si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int |f(s)| ds \leq \sqrt{2A} \|f\|_2,$$

d'où l'on déduit

$$\|f \star g(t)\|_\infty \leq \sqrt{2A} \|f\|_2 \cdot \|g\|_\infty,$$

Montrons maintenant que la fonction  $f \star g$  est continue. Soit  $t_0$  donné, nous allons montrer que  $f \star g(t) \rightarrow f \star g(t_0)$  lorsque  $t \rightarrow t_0$ . Supposons que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  pour commencer. On a

$$f \star g(t) - f \star g(t_0) = \int_{\mathbb{R}} f(s) [g(t-s) - g(t_0-s)] ds$$

de sorte que

$$|f \star g(t) - f \star g(t_0)| \leq \|f\|_1 \cdot \|g(t-\cdot) - g(t_0-\cdot)\|_1. \quad (2.40)$$

Le théorème de convergence dominée permet de montrer que

$$\|g(t-\cdot) - g(t_0-\cdot)\|_1 \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow t_0,$$

de sorte qu'en combinant avec (2.40), on obtient

$$|f \star g(t) - f \star g(t_0)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow t_0,$$

ce qui établit la continuité de  $f \star g$  pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Le cas  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se traite de même. La régularité  $C^k$  est laissée en exercice.  $\square$

En utilisant les résultats précédents on obtient un résultat similaire à la Proposition 2.4 pour les fonctions dans  $L^1(\mathbb{R})$  ou  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.9.** Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les hypothèses (2.13) et (2.14). Alors pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{R})$ ) donnée, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$f_n = f \star \varphi_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est une suite de fonctions continues qui converge dans  $L^1(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2(\mathbb{R})$ ) vers la fonction  $f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Si, pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a de plus  $\varphi_n \in C^k(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors la fonction  $f_n$  appartient également à  $C^k(\mathbb{R})$ . On a pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\frac{d^j}{dt^j} (f \star g) = \frac{d^j f}{dt^j} \star g.$$

*Démonstration.* Donnons la preuve pour  $L^1$ . On a, pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , en en posant  $s - t = u$

$$\begin{aligned} \|f - f \star \varphi_n\|_1 &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(s) - f(t)| [\varphi_n(t-s)] ds dt \\ &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(u+t) - f(t)| [\varphi_n(u)] du dt \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de convergence dominée.  $\square$



## 2.4 Convolution des fonctions périodiques

Pour des fonctions périodiques, l'intégrale (2.22) n'est en général pas définie : c'est pourquoi nous devons adapter la définition de la notion de convolution au contexte des fonctions périodiques. Commençons par quelques remarques et définitions générales concernant les fonctions périodiques.

### 2.4.1 Généralités sur les fonctions périodiques

Rappelons qu'une fonction  $f$  est  $T$ -périodique si pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$f(t + T) = f(t).$$

En particulier, une fonction  $T$  périodique est entièrement déterminée lorsqu'elle est connue sur un intervalle de longueur  $T$ , par exemple, sur l'intervalle  $[0, T]$  ou sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ . En effet, pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $n = E(t/T)$  la partie entière de  $t/T$ , de sorte que

$$t = nT + \tilde{t} \text{ avec } \tilde{t} \in [0, T].$$

On a donc

$$f(t) = f(\tilde{t}),$$

de sorte que si on connaît  $f$  sur  $[0, T]$  on connaît  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Dans le même esprit, on a :

**Lemme 2.2.** Soit  $f$  une fonction  $T$  périodique intégrable. On a pour tout  $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T f(s)ds = \int_a^{a+T} f(s)ds,$$

C'est à dire que l'intégrale de  $h$  sur un intervalle de longueur  $T$  est indépendant de l'intervalle choisi.

*Démonstration.* Considérons la partie entière  $n$  de  $a/T$  de sorte que  $a = nT + \tilde{a}$ , où  $\tilde{a} \in [0, T[$ . On a par périodicité

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} h(s)ds &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{a}+T} f(s)ds = \int_{\tilde{a}}^T f(s)ds + \int_T^{\tilde{a}+T} f(s)ds \\ &= \int_{\tilde{a}}^T f(s)ds + \int_0^{\tilde{a}} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds. \end{aligned}$$

□

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit l'espace  $C_{\text{perp}, T}^k(\mathbb{R})$  par

$$C_{\text{perp}, T}^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C_{\text{perp}, T}(\mathbb{R}), f \text{ de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R} \right\},$$

de sorte que  $f \in C_{\text{perp}, T}^k(\mathbb{R})$ , alors  $f' \in C_{\text{perp}, T}^{k-1}$ . Remarquons en particulier que, si  $f \in C_{\text{perp}, T}^k(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , on a

$$\frac{d^j f}{dt^j}(t + T) = \frac{d^j f}{dt^j}(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On définit de même les espaces  $L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  et  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  par

$$\begin{cases} L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ } T\text{-périodique et } \int_0^T |f(s)| ds < +\infty\} \\ L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ } T\text{-périodique et } \int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty\}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Ce sont des espaces de Banach pour, respectivement, les normes

$$\begin{cases} \|f\|_{\text{per},1} = \int_0^T |f(s)| ds \\ \|f\|_{\text{per},2} = \left( \int_0^T |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Notons que  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(s) \cdot \overline{g(s)} ds. \quad (2.43)$$

**Remarque 2.13.** Remarquons que l'on a l'inclusion

$$L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R}). \quad (2.44)$$

En effet, pour toute fonction  $f$  de  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_0^T |f(s)| ds \leq \left( \int_0^T |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_0^T 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\text{per},2}$$

c'est à dire

$$\|f\|_{\text{per},1} \leq T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\text{per},2}.$$

On revanche on a  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$  (exercice).

## 2.4.2 Périodisation d'une fonction

Considérons une fonction  $u$  définie sur un intervalle de longueur  $T$ , par exemple  $[0, T[$ . On définit alors une fonction périodique  $u_{\text{per}}$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier en posant

$$u_{\text{per}}(t + nT) = u(t) \text{ pour tout } t \in [0, T[ \text{ et tout } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.45)$$

On a alors

**Proposition 2.10.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , et  $u$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $[0, T]$ . L'application  $u_{\text{per}}$  appartient à  $C^k_{\text{per},T}$  si et seulement si, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  on a

$$\frac{d^j u}{dt^j}(0) = \frac{d^j u}{dt^j}(T). \quad (2.46)$$

La preuve est laissée en exercice. De même, si  $u$  est une fonction de  $L^1([0, T])$  (resp.  $L^2([0, T])$ ) alors  $u_{\text{per}}$  appartient à  $L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ ) et

$$\|u_{\text{per}}\|_{\text{per},1} = \|u\|_{L^1[0,T]} \quad (\text{resp. } \|u_{\text{per}}\|_{\text{per},2} = \|u\|_{L^2[0,T]}).$$

### 2.4.3 Définition de la convolution pour les fonctions périodiques

Commençons par considérer deux fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $\mathbb{R}$ , périodiques de période  $T$ , c'est à dire appartenant à l'espace  $C_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$ . Dans ce contexte nous introduisons une définition de la notion de convolution adaptée.

**Définition 1.** Soit  $T > 0$  et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $C_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$ . On appelle produit de convolution périodique de  $f$  et  $g$  et on note  $f \star_{\text{per}} g$  la fonction périodique définie par

$$f \star_{\text{per}} g(t) = \int_0^T f(s)g(t-s)ds.$$

Notons que le choix de l'intervalle d'intégration  $[0, T]$  du membre de droite de la définition est arbitraire, tout autre intervalle de longueur  $T$  convient. On a en effet :

**Lemme 2.3.** Soit  $f, g$  et  $T$  vérifiant les conditions de la définition 1. On a pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$f \star_{\text{per}} g(t) = \int_a^{T+a} f(s)g(t-s)ds.$$

*Démonstration.* On remarque que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  la fonction  $s \mapsto f(s)g(t-s)$  est une fonction  $T$ -périodique. la conclusion découle alors directement du Lemme 2.2.  $\square$

Comme dans le cas de la convolution classique la convolution des fonctions périodiques d'étant à des classes beaucoup plus larges de fonctions. On a

**Proposition 2.11.** Soit  $g \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ , et  $f \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ ). L'application  $t \mapsto f \star g(t)$  définie par (2.22) est définie pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$  et est  $T$ -périodique. De plus  $f \star_{\text{per}} g$  appartient à  $L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ ). On a les majorations de normes

$$\|f \star_{\text{per}} g\|_{\text{per},1} \leq \|f\|_{\text{per},1} \cdot \|g\|_{\text{per},1} \text{ pour tous } f \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R}) \text{ et } g \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R}) \quad (2.47)$$

et

$$\|f \star_{\text{per}} g\|_{\text{per},2} \leq \|f\|_{\text{per},2} \cdot \|g\|_{\text{per},1} \text{ pour tous } f \in L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R}) \text{ et } g \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R}). \quad (2.48)$$

La preuve de la Proposition 2.11 est similaire à celle de la proposition 2.7 et est laissée en exercice.

### 2.4.4 Propriétés

**Proposition 2.12.** Soient  $f, g, h$  des fonctions de  $L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  quelconques. On a

$$f \star_{\text{per}} g = g \star_{\text{per}} f, f \star_{\text{per}} (g \star_{\text{per}} h) = (f \star_{\text{per}} g) \star_{\text{per}} h \text{ et } \tau_h(f \star_{\text{per}} g) = \tau_h(f) \star_{\text{per}} g \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

Si de plus  $g \in C^k_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$  alors  $f \star_{\text{per}} g \in C^k_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  on a

$$\frac{d^j}{dt^j} (f \star_{\text{per}} g) = \frac{d^j f}{dt^j} \star_{\text{per}} g.$$

## 2.4.5 Régularisation par convolution

Dans le contexte des fonctions périodiques, nous modifions la définitions des approximations de l'identité en remplaçant les hypothèses (2.13) et (2.14). Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$ . Si il existe un nombre  $M > 0$  tel que

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_n(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\varphi_n(s)| ds \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (2.49)$$

et si de plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, on a

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{T}{2}} |\varphi_n(s)| ds + \int_{-\frac{T}{2}}^{-\varepsilon} |\varphi_n(s)| r ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.50)$$

alors, on dira que la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *approximation de l'identité*. On a alors :

**Proposition 2.13.** Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$  vérifiant les hypothèses (2.49) et (2.50), Alors pour toute fonction  $f \in L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ , resp.  $C_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$ ) donnée, la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$f_n = f \star \varphi_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est une suite de fonctions continues qui converge dans  $L^1_{\text{per},T}(\mathbb{R})$  (resp.  $L^2_{\text{per},T}(\mathbb{R})$ , resp. uniformément sur tout intervalle borné) vers la fonction  $f$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Si, pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a de plus  $C^k_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors la fonction  $f_n$  appartient également à  $C^k_{\text{perp},T}(\mathbb{R})$ . On a pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\frac{d^j}{dt^j} (f \star g) = \frac{d^j f}{dt^j} \star g.$$

*Démonstration.* La preuve de la première assertion est très similaire à celle de la Proposition 2.4. On, pour tout  $t \in [0, T]$ , en faisant le changement de variable habituel  $u = t - s$  et en utilisant le Lemme 2.2

$$f \star \varphi_n(t) - f(t) = \int_0^T f(s) \varphi_n(t-s) ds - f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t-u) - f(u)] \varphi_n(u) du$$

et donc, pour  $\varepsilon > 0$  donné, on a

$$\begin{aligned} |f \star \varphi_n(t) - f(t)| &\leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t-u) - f(u)| |\varphi_n(u)| du \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(t-u) - f(u)| |\varphi_n(u)| du + \int_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |f(t-u) - f(u)| |\varphi_n(u)| du \\ &\leq \sup_{u \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |f(t) - f(t-u)| + 2\|f\|_{\infty} \int_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |\varphi_n(u)| du \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant l'uniforme continuité de  $f$  ainsi que l'hypothèse (2.50).  $\square$

## 2.5 Opérateur de convolution, noyaux de convolution

Pour terminer ce chapitre, revenons sur le fait que pour une application  $g$  fixée, l'application  $T_g$  définie par

$$f \mapsto f \star g$$

est une application linéaire. Lorsque les applications linéaires sont définies à l'aide du produit de convolution avec une telle fonction  $g$ , l'application  $g$  prend souvent le nom de *noyau de convolution associé à l'application linéaire*.

Bien entendu, pour être complètement rigoureux, il convient de préciser les espaces de fonctions sur lesquels  $T_g$  agit. Nos différents résultats donnent alors des propriétés de continuité de l'application, et des majorations de normes.

### EXERCICES

#### Exercice I

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $C_c^0(\mathbb{R})$ .

- 1) On suppose que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions paires. Montrer que  $f \star g$  est une fonction paire.
- 2) Que peut-on dire de  $f \star g$  si  $f$  et  $g$  sont impaires?
- 3) Que peut-on dire de  $f \star g$  si  $f$  est paire et  $g$  est impaire?

#### Exercice II

Soit  $\chi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\chi(s) = 1/2 \text{ si } |s| \leq 1 \text{ et } \chi(s) = 0 \text{ si } |s| > 1.$$

- 1) Déterminer la fonction  $\chi \star \chi$ .
- 2) Déterminer la fonction  $\chi \star \chi \star \chi$ .
- 3) Calculer  $\int_{\mathbb{R}} [\chi \star \chi \star \chi \star \chi](s) ds$ .
- 4) Pour  $k \in \mathbb{R}$  déterminer la fonction  $\exp(ik \cdot) \star \chi$ .
- 5) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $\varphi_n$  définie par

$$\varphi_n(s) = n(1 - n|s|) \text{ si } |s| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \varphi_n(s) = 0 \text{ si } |s| > \frac{1}{n}.$$

Que peut-on dire de la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?

- 6) Déterminer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $\varphi_n \star \chi$  et étudier sa limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

#### Exercice III

Pour  $a > 0$ , on considère la fonction gaussienne  $G_a$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$G_a(s) = \exp(-as^2) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer  $\int_{\mathbb{R}} G_a(s) ds$  (on rappelle que  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}$ ).

1) Soit deux nombres  $a > 0$  et  $b > 0$  donnés. Montrer que  $G_a \star G_b$  est bien définie.

2) Déterminer explicitement  $G_a \star G_b$ .

#### Exercice IV

A) Soit  $P$  une fonction polynôme de degré  $k \in \mathbb{N}$ , c'est à dire de la forme

$$P(s) = \sum_{i=0}^k a_i s^i \text{ pour } s \in \mathbb{R}, \text{ avec } a_k \neq 0.$$

A 1) Soit  $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f \star P$  est une fonction polynôme sur  $\mathbb{R}$ . Quel est son degré ?

A 2) Déterminer explicitement la fonction  $f \star P$  dans les cas suivants :

a)  $P(s) = s$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

b)  $P(s) = s^2$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

c)  $P(s) = s^3$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

B) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_n = \int_{-1}^1 (1 - s^2)^n ds$$

et on considère la fonction polynôme  $P_n$  défini par

$$P_n(t) = \frac{1}{a_n} (1 - t^2)^n.$$

B1) Quel est le degré du polynôme  $P_n$  ?

Vérifier que  $P_n$  est une fonction positive et que  $\int_{-1}^1 P_n(s) ds = 1$ .

B2) Montrer que  $(2n+1)a_n = 2na_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  (on pourra utiliser des intégrations par partie). En déduire une expression explicite de  $a_n$ .

B3) Montrer que  $a_n \geq \frac{2}{2n+1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

B4) Montrer que pour tout nombre  $0 < \alpha < 1$ , la fonction  $P_n$  converge uniformément vers zéro sur l'ensemble  $[-1, 1] \setminus ]-\alpha, \alpha[$ . La suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle une approximation de l'unité ? Commenter.

C) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(t) = 0$  si  $|t| \geq \frac{1}{2}$ .

C1) Montrer que la restriction de  $f \star P_n$  à l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

D1) Soit  $I = [a, b]$  un intervalle, et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Montre que  $f$  est limite uniforme sur  $I$  de polynômes.

D2) Soient  $f$  une fonction définie sur  $I$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_I f(s) s^k ds = 0.$$

Montrer que  $f = 0$ .

# Chapitre 3

## Approximation par des polynômes trigonométriques

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Fonctions $2\pi$ périodiques

Nous considérons dans cette partie des fonctions périodiques sur  $\mathbb{R}$ , et nous supposons dans un premier temps que la période est  $2\pi$  : ceci soulagera un peu la présentation et les notations, puisque dans ce cas  $2\pi/T = 1$ . Par ailleurs, nous écrirons également de manière un peu plus condensée

$$C_{\text{perp}, T}(\mathbb{R}) = C_{2\pi}^k(\mathbb{R}) \text{ et plus généralement } C_{\text{perp}, T}^k(\mathbb{R}) = C_{2\pi}^k(\mathbb{R}) \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Nous verrons cependant dans un autre chapitre comment les résultats s'étendent simplement aux fonctions  $T$ -périodiques, pour des périodes  $T$  quelconques.

#### 3.1.2 Polynômes trigonométriques

Rappelons que la famille de fonctions  $\{\exp(ik\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est incluse dans  $C_{2\pi}^k(\mathbb{R})$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Nous avons vu que ces fonctions possèdent des propriétés remarquables, en particulier elles sont fonctions propres de la plupart des opérateurs linéaires que nous avons introduit précédemment. On a en effet, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_h(\exp(ik\cdot)) = \exp(ih) \exp(ik\cdot) \\ \frac{d}{dt}(\exp(ik\cdot)) = ik \exp(ik\cdot) \\ f \star_{\text{per}} \exp(ik\cdot) = 2\pi \hat{f}(k) \exp(ik\cdot), \text{ où on a posé.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où on a posé

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(s) \exp(-iks) ds. \quad (3.2)$$

Le nombre complexe  $\hat{f}(k)$  est appelé coefficient de Fourier d'ordre  $k$  de  $f$ . On considère maintenant l'ensemble  $\mathbb{P}_{\text{trigo}}$  des *combinaisons linéaires finies* de ces fonctions, à savoir

$$\mathbb{P}_{\text{trigo}} \equiv \text{Vect} \{ \exp(ik\cdot), k \in \mathbb{Z} \}.$$

Les éléments de  $P$  sont appelés *polynômes trigonométriques*. Une fonction  $2\pi$ -périodique  $P$  sur  $\mathbb{R}$  est donc un polynôme trigonométrique s'il existe un entier  $N \in \mathbb{Z}$  et une famille de nombres  $\{a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_0, a_1, a_2, \dots, a_N\}$  telle que

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp(ikt) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

le plus petit entier  $N$  tel qu'une telle décomposition soit possible est appelé degré de  $P$ .

**Remarque 3.1.** Remarquons que les coefficients  $a_k$ , pour  $k = -N, \dots, N$  d'un polynômes trigonométrique peuvent s'obtenir en intégrant sur un intervalle le produit de  $P$  avec la fonction  $\exp -ik(\cdot)$ . On a effet

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \exp iks \cdot \exp -ik's ds = 0 \text{ si } k \neq k' \\ \int_0^{2\pi} \exp iks \cdot \exp -iks ds = 2\pi. \end{cases} \quad (3.4)$$

Il en résulte que si  $P$  est un polynôme trigonométrique de la forme (3.3)

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(s) \cdot \exp -iks ds = \hat{P}(k). \quad (3.5)$$

On en déduit en particulier que la famille  $\{\exp(ik(\cdot)), k \in \mathbb{Z}\}$  est une famille libre de fonctions dans  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . En effet, si une combinaison linéaire  $P$  du type (3.3) est identiquement nulle, alors les intégrales du membre de gauche de (3.5) sont nulles, et donc tous les coefficients  $a_k$  sont nuls. Une conséquence de cette propriété est que, pour tout polynôme trigonométrique  $P$ , la décomposition (3.3) est unique. La famille  $\{\exp(ik(\cdot)), k \in \mathbb{Z}\}$  constitue alors une base de  $\mathbb{P}_{\text{trigo}}$ , puisqu'elle est libre, et par définition génératrice.

On peut réinterpréter cette propriété en introduisant sur  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \overline{g}(s) ds \text{ pour tous } f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}). \quad (3.6)$$

Il s'agit bien d'un produit hermitien, puisque

$$\begin{cases} \overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle, \quad \forall f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ (\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \cdot \langle f, h \rangle + \mu \cdot \langle g, h \rangle) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall f, g, h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int |f|^2 \geq 0, \quad \forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ \langle f, f \rangle = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

On vérifie alors :

**Proposition 3.1.** La famille  $\{\exp(ik(\cdot)), k \in \mathbb{Z}\}$  est une famille orthonormée pour le produit scalaire précédent, c'est à dire

$$\langle \exp(ik(\cdot)), \exp(ik'(\cdot)) \rangle = \delta_{k,k'}.$$

où  $\delta_{k,k'}$  désigne le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{k,k'} = 0 \text{ si } k \neq k' \text{ et } \delta_{k,k} = 1.$$



Il s'agit d'une conséquence immédiate de (3.4). La Proposition 3.1 permet de retrouver immédiatement le fait que la famille  $\{\exp(ik(\cdot)), k \in \mathbb{Z}\}$  est une famille libre, puisque toute famille orthonormée est libre.

**Remarque 3.2.** Si on écrit  $z = \exp it$  alors, alors on a

$$\bar{z} = \exp -it$$

et pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$z^k = \exp(ikt) \text{ et } \bar{z}^k = \exp(-ikt)$$

Si  $P$  est donné par (3.3), on peut écrire pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \sum_{k=0}^{k=N} a_k z^k + \sum_{k=1}^{k=N} a_{-k} \bar{z}^k,$$

$P(t)$  est donc la somme d'un polynôme de la variable  $z$  et d'un polynôme de la variable  $\bar{z}$ , d'où l'expression polynôme trigonométrique.

**Remarque 3.3.** Si  $P$  est un polynôme trigonométrique de la forme (3.3), alors on a par (3.5)

$$\hat{P}(k) = a_k \text{ si } k \in \{-N, \dots, N\} \text{ et } \hat{P}(k) = 0 \text{ sinon.} \quad (3.8)$$

Par ailleurs, en utilisant la Proposition 3.1, on voit que la décomposition (3.3) correspond à une décomposition sur une base orthonormée, on a donc

$$\|P\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |P(t)|^2 dt = \sum_{k=-N}^{k=N} |a_k|^2 = \sum_{k=-N}^{k=N} |\hat{P}(k)|^2. \quad (3.9)$$

## 3.2 Convolution avec des polynômes trigonométriques

La remarque qui est à l'origine des principaux théorèmes d'approximation de ce chapitre est la suivante :

**Proposition 3.2.** Soit  $P$  un polynôme trigonométrique. Alors pour tout fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ , la fonction  $f \star_{\text{per}} P$  est le polynôme trigonométrique défini par

$$f \star_{\text{per}} P = 2\pi \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \hat{f}(k) \exp(ik(\cdot)),$$

**Remarque 3.4.** Nous avons vu plus haut (voir (3.8) que )  $a_k = \hat{P}(k)$ . On peut donc réécrire la formule (3.12) sous la forme

$$f \star_{\text{per}} P = 2\pi \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{P}(k) \hat{f}(k) \exp(ik(\cdot)), \quad (3.10)$$

Il en résulte, toujours grâce à (3.8) que

$$\widehat{(f \star_{\text{per}} P)}(k) = 2\pi \hat{P}(k) \hat{f}(k). \quad (3.11)$$

le coefficient de Fourier du produit de convolution est donc égal à  $2\pi$  fois le produit des coefficients de Fourier. Nous verrons que cette règle s'étend à de large classes de fonctions.

*Démonstration de la Proposition 3.2.* Comme  $P$  est un polynôme trigonométrique, on peut l'écrire sous la forme (3.3). on a donc

$$\begin{aligned} f \star_{\text{per}} P &= f \star_{\text{per}} \left( \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp(ik(\cdot)) \right) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \left( f \star_{\text{per}} \exp(ik(\cdot)) \right) \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \hat{f}(k) \exp(ik(\cdot)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

où on a utilisé la troisième propriété énoncée dans (3.1) pour la troisième égalité. La fonction  $f \star_{\text{per}} P$  est donc le polynôme trigonométrique dont les coefficients dans la base  $\{\exp(ik(\cdot)), k \in \mathbb{Z}\}$  sont donnés par  $\{2\pi a_k \hat{f}(k)\}_{k \in \{-N, N\}}$ .  $\square$

### 3.3 Approximation par noyaux trigonométriques

#### 3.3.1 Approximations de l'identité trigonométriques

Pour approcher les fonctions de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  par des polynômes trigonométriques, l'idée que nous allons développer consiste à chercher une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes trigonométriques qui constituent une approximation de l'unité au sens du chapitre précédent, c'est à dire tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(s) ds = 1, \int_{-\pi}^{\pi} |P_n(s)| ds \text{ est bornée indépendamment de } n \text{ et pour tout } \varepsilon > 0, \\ \text{et telle que l'on ait } \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |P_n(s)| ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Nous avons vu en effet au chapitre précédent (voir Proposition 2.13) que si la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les conditions (3.13), alors on a, pour toute fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ,

$$f \star_{\text{per}} P_n \rightarrow f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ uniformément sur } \mathbb{R} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.14)$$

de sorte que  $f$  est alors bien la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Comment construire de tels suites de polynômes trigonométriques? Cette question est l'objet des prochains paragraphes. Avant de donner des formes explicites, voyons comment obtenir des conditions nécessaires qui nous guiderons dans cette construction. Ecrivons tout d'abord pour fixer les idées le polynôme trigonométrique  $P_n$  sous la forme

$$P_n(t) = \sum_{k=-N_n}^{k=N_n} a_k^n \exp(ikt) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Comme  $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(iks) ds = 0$  pour tout  $k \neq 0$ , nous voyons immédiatement que la première condition se résume à

$$a_0^n = \frac{1}{2\pi} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour les autres termes, nous allons utiliser les fonction  $\exp(ik(\cdot))$  comme fonctions tests dans la convergence (3.14). Ceci nous donne, pour tout indice  $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\exp(ik_0(\cdot)) \star_{\text{per}} P_n \rightarrow \exp(ik_0(\cdot)) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.16)$$

Le terme de gauche dans cette convergence peut s'obtenir de manière explicite grâce à la troisième identité de (3.1). On obtient

$$\exp(ik(\cdot)) \star_{\text{per}} P_n = 2\pi \sum_{k=-N_n}^{k=N_n} a_k^n \widehat{\exp ik_0(\cdot)}(k) \exp(ik(\cdot)) \quad (3.17)$$

On vérifie que

$$\widehat{\exp ik_0(\cdot)}(k) = 0 \text{ si } k \neq k_0 \text{ et } \widehat{\exp ik_0(\cdot)}(k_0) = 1, \quad (3.18)$$

de sorte que (3.17) devient

$$\exp(ik_0(\cdot)) \star_{\text{per}} P_n = a_{k_0}^n \exp ik_0(\cdot). \quad (3.19)$$

En combinant (3.19) et la convergence (3.16), pour tout  $k_0 \in \mathbb{N}$ , on obtient donc la convergence

$$a_{k_0}^n \rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.20)$$

qui est une condition nécessaire que doit vérifier que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'identité : 'e. Elle va nous aider à construire cette dernière.

### 3.3.2 Le noyau de Dirichlet

La convergence (3.20) suggère de commencer par le cas le plus simple, et à vrai dire le plus naturel, c'est à dire

$$a_k^n = \frac{1}{2\pi}.$$

On peut alors choisir  $N = n$ . Ceci nous donne la fonction, que nous noterons la fonction  $D_n$ , qui est appelée *noyau de Dirichlet*

$$D_n(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} \exp(ik\cdot), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.21)$$

Le noyau  $D_n$  est donc un polynôme trigonométrique de degré  $n$  exactement. Notons par ailleurs, que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $D_n(t)$  apparaît alors comme la somme d'une série géométrique que l'on peut écrire sous la forme

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} (\exp it)^k.$$

Il peut alors se calculer comme

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-int) \cdot \frac{1 - \exp i(2n+1)t}{1 - \exp it} = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(-i(n+\frac{1}{2})t) - \exp(i(n+\frac{1}{2})t)}{\exp -i\frac{t}{2} - \exp i\frac{t}{2}} \quad (3.22)$$

ce qui nous donne la formule simple suivante :

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}. \quad (3.23)$$

Remarquons que la formule (3.12) nous donne :

**Proposition 3.3.** On a pour toute fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}$

$$f \star_{\text{per}} D_n = \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{f}(k) \exp(ik(\cdot)). \quad (3.24)$$

Le membre de droite de (3.24) s'appelle *série de Fourier d'ordre  $n$*  associée à la fonction  $f$ . L'étude des séries de Fourier constitue une question importante en analyse mathématiques, en partie la question de leur convergence.

**Remarque 3.5.** Soit  $\mathbb{P}_{\text{trigo}}^n$  l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$  on a

$$P \star D_n = P \text{ pour tout } P \in \mathbb{P}_{\text{trigo}}^n. \quad (3.25)$$

Si on note  $S_n$  l'application de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  dans lui-même définie par

$$S_n(f) = f \star D_n$$

alors on constate que  $S_n$  est une application linéaire qui vérifie

$$S_n \circ S_n = S_n \text{ avec } \text{Im}(S_n) = \mathbb{P}_{\text{trigo}}^n.$$

$S_n$  est donc une projection sur  $\mathbb{P}_{\text{trigo}}^n$ . Nous verrons plus loin qu'il s'agit d'une projection orthogonale pour le produit scalaire  $\langle, \rangle$ .

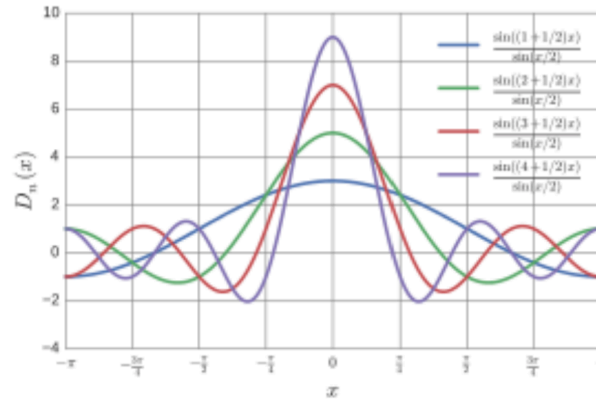


FIGURE 3.1 – *graphe du noyau de Dirichlet pour différentes valeurs de  $N$*

La question qui se pose alors est de savoir si la série de Fourier de la fonction  $f$ , c'est à dire la fonction  $S_n(f)$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Malheureusement, notre prochain résultat montre que le noyau  $D_n$  ne vérifie pas l'hypothèse (2.49), elle ne constitue donc pas une approximation de l'identité.

**Lemme 3.1.** On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la borne inférieure

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)| ds \geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* On a par parité

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)| ds = 2 \int_0^{\pi} |D_n(s)| ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})s|}{|\sin \frac{s}{2}|} ds$$

Pour  $s \in [0, \pi]$ , on a  $s/2 \in [0, \pi/2]$ . Sur cet intervalle, on a l'inégalité

$$\sin u \leq u \text{ pour tout } u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et donc

$$\frac{1}{|\sin \frac{s}{2}|} \geq \frac{2}{s} \text{ pour tout } s \in [0, \pi].$$

On obtient ainsi

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})s|}{|\sin \frac{s}{2}|} ds \geq 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})s|}{s} ds.$$

Faisons le changement de variable  $v = (n + \frac{1}{2})s$  de sorte que  $\frac{dv}{v} = \frac{ds}{s}$  et ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})s|}{|\sin \frac{s}{2}|} ds &\geq 2 \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \\ &\geq 2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left( \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| du \right) \right) \geq 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

□

Comme  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne constitue pas une approximation de l'identité, les résultats du Chapitre 2 ne permettent pas de conclure directement à la convergence uniforme de la série de Fourier  $S_n(f) = f \star_{\text{per}} D_n$  vers  $f$ . En fait, on peut même construire des fonctions continues  $f$  telles que  $f \star_{\text{per}} P$  ne converge pas uniformément vers  $f$ !

**Remarque 3.6.** Nous étudierons cependant au chapitre suivant et dans les exercices des résultats de convergence de la série de Fourier de  $f$  vers  $f$ . Pour ce faire on peut

- Imposer plus de régularité à  $f$ , par exemple supposer que  $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$
- utiliser des notions de convergences plus faibles.

Pour établir un résultat d'approximation uniforme par des polynômes trigonométriques, il nous faut donc trouver d'autres noyaux plus adaptés. Le défaut d'intégrabilité du noyau de Dirichlet est lié aux grandes oscillations (pour  $n$  grand) de ce dernier près de  $t = 0$ . Pour remédier à ce problème, nous allons opérer à une *sommation de Cesaro*, qui nous menera directement au noyau de Fejer.

**Rappel : Moyennes de Cesaro.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre. La sommation de Cesaro consiste à regarder la suite  $\sigma_{n \in \mathbb{N}}$  des moyennes de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est à dire

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors il en est de même de  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mais la réciproque n'est pas vraie. pour donner une idée intuitive, la suite des moyennes Cesaro atténue les oscillations de la suite  $\sigma_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 3.3.3 Le noyau de Fejer

On considère dans cette partie la suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  déduite de la suite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$F_n \equiv \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

Tout comme  $D_n$ ,  $F_n$  est un polynôme trigonométrique de degré  $n$ . Comme pour  $D_n$ , on peut obtenir d'autres expressions de  $F_n$ .

**Proposition 3.4.** *On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$*

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

ainsi que

$$F_n(\cdot) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) \exp(ik(\cdot)). \quad (3.29)$$

*Démonstration.* Pour démontrer (3.28), on revient à la formule (3.22), à savoir

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(-i(n+\frac{1}{2})t) - \exp(i(n+\frac{1}{2})t)}{\exp-i\frac{t}{2} - \exp i\frac{t}{2}}$$

On a donc de nouveau des sommes de progressions géométriques à calculer. On observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \exp(i(k+\frac{1}{2})t) &= \exp\left(\frac{it}{2}\right) \left( \frac{1 - \exp i(n+1)t}{1 - \exp it} \right) = \frac{1 - \exp i(n+1)t}{\exp -i\frac{t}{2} - \exp i\frac{t}{2}} \\ &= \exp(i\frac{n+1}{2}t) \frac{\exp \frac{-i(n+1)t}{2} - \exp \frac{i(n+1)t}{2}}{\exp -i\frac{t}{2} - \exp i\frac{t}{2}} \\ &= \exp(i\frac{n+1}{2}t) \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \exp(-i(k+\frac{1}{2})t) &= \exp\left(-\frac{it}{2}\right) \left( \frac{1 - \exp -i(n+1)t}{1 - \exp -it} \right) = \frac{1 - \exp -i(n+1)t}{\exp i\frac{t}{2} - \exp -i\frac{t}{2}} \\ &= \exp(-i\frac{n+1}{2}t) \frac{\exp \frac{i(n+1)t}{2} - \exp \frac{-i(n+1)t}{2}}{\exp i\frac{t}{2} - \exp -i\frac{t}{2}} \\ &= \exp(-i\frac{n+1}{2}t) \frac{\exp \frac{-i(n+1)t}{2} - \exp \frac{i(n+1)t}{2}}{\exp -i\frac{t}{2} - \exp i\frac{t}{2}} \\ &= \exp(-i\frac{n+1}{2}t) \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

En faisons la différence il vient

$$\sum_{k=0}^n \left[ \exp(-i(k+\frac{1}{2})t) - \exp(i(k+\frac{1}{2})t) \right] = \exp(-i(n+\frac{1}{2})t) - \exp(i(n+\frac{1}{2})t) \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

et (3.28) en découle. La preuve de (3.29) est laissée en exercice.  $\square$

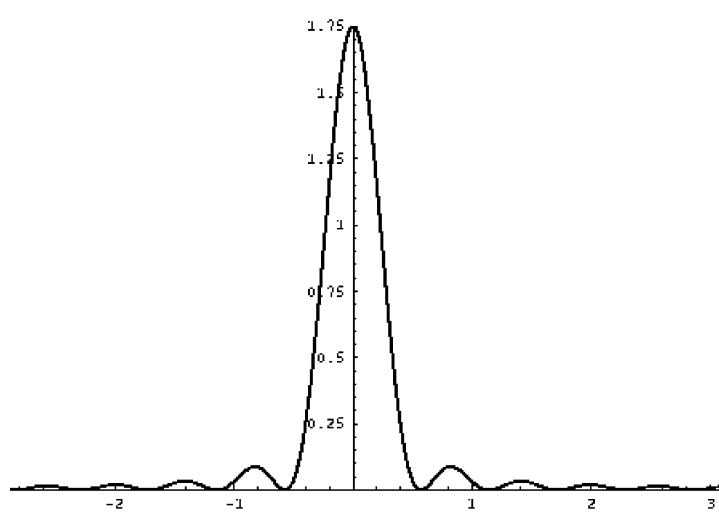


FIGURE 3.2 – graphe du noyau de Fejer

La Proposition 3.4 a pour conséquence immédiate :

**Corollaire 3.1.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  est un polynôme trigonométrique paire de degré  $n$  tel que*

$$F_n(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

On a

$$\int_0^{2\pi} F_n(s) ds = \int_0^{2\pi} |F_n(s)| ds = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (3.31)$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$  donné

$$\int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |F_n(s)| ds \leq \frac{\pi}{(n+1)\varepsilon} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

*Démonstration.* La relation (3.30) est une conséquence du fait que  $F_n$  est le carré d'une quantité réelle. Pour (3.31), on utilise le fait que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s) ds = 1$$

et donc, comme par ailleurs  $|F_n| = F_n$  (car  $F$  est positive)

$$\int_0^{2\pi} |F_n(s)| ds = \int_0^{2\pi} F_n(s) ds = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(s) ds = 1.$$

Pour (3.32) on utilise l'inégalité classique suivante : pour tout  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a

$$\sin u \geq \frac{2}{\pi} u. \quad (3.33)$$

Cette inégalité s'obtient en remarquant que la fonction sinus est concave (car sa dérivée seconde vaut  $-\cos$ , donc est négative sur l'intervalle considéré). Elle exprime ainsi le fait que le graphe est au dessus de la corde. On déduit de (3.34) que

$$\frac{1}{\sin \frac{s}{2}} \leq \frac{\pi}{s} \text{ pour tout } s \in [0, \pi]. \quad (3.34)$$

En utilisant cette inégalité, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |F_n(s)| ds &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} s}{\sin^2 \frac{s}{2}} ds \\ &\leq \frac{\pi}{n+1} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{s^2} ds \leq \frac{\pi}{n+1} \varepsilon^{-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

□

Il résulte du Corollaire 3.1 que la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes trigonométriques satisfait les conditions (2.49) et (2.50) qui définissent les approximations de l'identité dans le cas périodiques. La suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une approximation de l'unité.

### 3.4 Le théorème d'approximation de Fejer

On déduit du paragraphe précédent le théorème fondamental suivant :

**Théorème 3.1** ((Fejer, 1900)). *Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  alors la suite de polynômes trigonométriques  $f_n = f \star_{\text{per}} F_n$  converge uniformément vers  $f$ .*

*Toute fonction continue est donc limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

*Démonstration.* Nous avons vu que la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes trigonométriques satisfait les conditions (2.49) et (2.50) qui définissent les approximations de l'identité dans le cas périodiques. Le résultat est alors une conséquence immédiate de la Proposition 2.13 du chapitre précédent. □

Il résulte de (3.29) ainsi que de (3.11) que

$$\begin{cases} \widehat{f_n}(k) = (1 - \frac{|k|}{n+1}) \widehat{f}(k), \text{ pour } k \in \{-n, \dots, n\} \\ \widehat{f_n}(k) = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.36)$$

En particulier la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est entièrement déterminée par la donnée des coefficients de Fourier  $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Il résulte alors du Théorème de Fejer :

**Corollaire 3.2.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On suppose que*

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.37)$$

*On a alors  $f = g$ . La suite des coefficients de Fourier d'une fonction de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  la détermine donc entièrement la fonction.*



*Démonstration.* Il résulte de (3.37), (3.11) et (3.36) que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$f \star_{\text{per}} F_n = g \star_{\text{per}} F_n.$$

Les suites  $(f \star_{\text{per}} F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g \star_{\text{per}} F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant respectivement vers  $f$  et  $g$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la conclusion en découle.  $\square$

Le théorème de Fejer peut être utilisé pour démontrer des résultats d'approximations pour d'autres espaces de fonctions et d'autres normes :

**Théorème 3.2.** Soit  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  (resp.  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ ). Il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge dans  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  vers  $f$  (resp. dans  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ ).

*Démonstration.* Faisons la preuve pour  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Il s'agit de montrer que pour nombre  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un polynôme trigonométrique  $P_\varepsilon$  tel que

$$\|f - P_\varepsilon\|_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon. \quad (3.38)$$

D'après la Proposition 2.13, il existe une fonction  $f_\varepsilon \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.39)$$

On approche ensuite la fonction  $f_\varepsilon$  par des polynômes trigonométriques grâce au théorème 3.1 : il existe donc un polynôme trigonométrique  $P_\varepsilon$  tel que

$$\|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_\infty \leq \sup_{t \in [-\pi, \pi]} \{ |f_\varepsilon(t) - P_\varepsilon(t)| \} \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

de sorte que par intégration on obtient

$$\|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.40)$$

En combinant (3.39) et (3.40) on obtient (3.38).  $\square$

### 3.5 Convergence des séries de Fourier

Rappelons que la série  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  de Fourier associé à une fonction  $f$  donnée s'écrit

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \exp(ik(\cdot)) = f \star_{\text{per}} D_n,$$

Donnons maintenant quelques résultats de convergence de ces séries.

### 3.5.1 Convergence uniforme

Nous avons vu plus haut que les séries de Fourier de fonctions continues ne convergent pas forcément uniformément. Certaines conditions supplémentaires de régularité sur  $f$  permettent cependant d'aboutir à cette conclusion.

**Théorème 3.3.** *Si la fonction  $f \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ , alors la série de Fourier  $S_n(f)$  converge uniformément vers la fonction  $f$ . De plus, si  $f \in C_{2\pi}^j(\mathbb{R})$  pour  $j \geq 2$ , on a la majoration de l'erreur*

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{j}{n^{j-1}} \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_\infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.41)$$

Ce résultat repose sur plusieurs résultats intermédiaires, qui ont d'ailleurs un intérêt propre.

**Proposition 3.5.** *Si la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , alors sa limite est nécessairement la fonction  $f$  elle-même.*

*Démonstration.* Soit  $g$  la limite uniforme de  $S_n(f)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on a

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) \exp(-iks) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(f) \exp(-iks) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{S_n(f)}(k).$$

Or on a

$$\widehat{S_n(f)}(k) = \widehat{f}(k) \text{ pour } |k| \leq n,$$

de sorte que

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Il résulte alors de la Corollaire 3.2 que  $f = g$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Proposition 3.6.** *Soit  $f$  une fonction continue. Si la série de Fourier converge normalement, c'est à dire si*

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty, \quad (3.42)$$

*alors la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ . On a comme majoration d'erreur*

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \sum_{n+1 \leq |k|} |\widehat{f}(k)|. \quad (3.43)$$

*Démonstration.* Si la condition (3.42) est vérifiée, alors la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  : en effet, on a pour  $m \geq n$ , comme  $\|\exp(ik(\cdot))\|_\infty = 1$

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_\infty \leq \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{n+1 \geq |k|} |\widehat{f}(k)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Comme l'espace  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  est complet, il en résulte que la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément. La Proposition 3.5 montre alors que la limite uniforme est bien  $f$  elle-même.  $\square$

**Lemme 3.2.** *Si  $f$  est une fonction de  $C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  alors on a*

$$\widehat{f'}(k) = ik \widehat{f}(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (3.44)$$

*De manière plus générale, si  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ , alors on a, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$*

$$\widehat{\frac{d^j f}{dt^j}}(k) = (ik)^j \widehat{f}(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (3.45)$$

*Démonstration.* On a, en utilisant une intégration par partie,

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(k) &= \int_0^{2\pi} f'(s) \exp(-iks) ds = [f(s) \exp(-iks)]_0^{2\pi} - (-ik) \int_0^{2\pi} f(s) \exp(-iks) ds \\ &= (ik) \int_0^{2\pi} f(s) \exp(-iks) ds = ik \widehat{f}(k),\end{aligned}$$

le terme  $[f(s) \exp(-iks)]_0^{2\pi}$  étant nulle car la fonction est  $2\pi$ -périodique. Ceci donne (3.44). La formule (3.45) s'obtient en itérant (3.44).  $\square$

Voyons immédiatement une conséquence du lemme précédent :

**Lemme 3.3.** Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{C}_{2\pi}^m(\mathbb{R})$

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{k^m} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_{\infty} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

*Démonstration.* Si  $m = 0$ , on a, comme  $|\exp(ik(\cdot))| = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s)| ds \leq \|f\|_{\infty} \quad (3.46)$$

Si  $f$  est de classe  $C^m$ , avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , alors on a, par le Lemme 3.2

$$\widehat{\frac{d^m f}{dt^m}}(k) = (ik)^{-m} \widehat{\frac{d^m f}{dt^m}}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^* \quad (3.47)$$

Or (3.46) appliquée à la fonction  $\frac{d^m f}{dt^m}$  donne  $|\widehat{\frac{d^m f}{dt^m}}(k)| \leq \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_{\infty}$ , ce qui entraîne la conclusion.  $\square$

*Preuve du Théorème 3.3.* Si  $f$  est de classe  $C^2$ , alors on a, par le Lemme 3.3

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{k^2} \|f''\|_{\infty}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*,$$

de sorte que

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\widehat{f}(k)| \leq \left( 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) \|f''\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} < +\infty.$$

La première assertion découle alors de la Proposition 3.6. Pour la majoration (3.41), Le Lemme 3.3 fournit la majoration, pour  $j \geq 2$

$$\sum_{n+1 \geq |k|} |\widehat{f}(k)| \leq \left( \sum_{n+1 \leq |k|} \frac{1}{k^j} \right) \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_{\infty}.$$

Comme

$$\sum_{n+1 \leq |k|} \frac{1}{k^j} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^j} dt = \frac{j}{n^{j-1}},$$

La majoration (3.41) s'en déduit.  $\square$

Le Lemme 3.3 montre que plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Il y a également une sorte de réciproque : la décroissance rapide des coefficients de Fourier entraîne la dérivabilité de la fonction.

**Proposition 3.7.** Soit  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe des constantes  $r > 1$  et  $C > 0$  telles que

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^r} \text{ pour tout } k \neq 0. \quad (3.48)$$

Alors la fonction  $f$  est une fonction de classe  $C^{[r]-1}$ .

*Démonstration.* Il résulte de l'hypothèse (3.48) et du fait que  $r > 1$  que (3.42) est vérifiée. La série  $S_N(f)_{N \in \mathbb{N}}$  converge donc normalement et sa limite est  $f$  d'après la Proposition 3.6. Si  $r \geq m + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , on applique le même raisonnement à la série  $S_N^j(f)$  pour  $j = 1, \dots, m$  définie par

$$S_N^j(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} (ik)^j \widehat{f}(k) = \frac{d^j}{dt^j} S_N(f)$$

de sorte que toutes ces fonctions convergent uniformément vers des limites que l'on identifie avec les dérivées d'ordre  $j$  de  $f$ .  $\square$

### 3.5.2 Convergence simple de la série de Fourier

Rappelons qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions sur un intervalle  $I$  converge *simplement* vers une fonction  $f$  si et seulement pour tout on a

$$f_n(t) \rightarrow f(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

On parle aussi parfois de convergence ponctuelle. Il s'agit bien entendu d'une notion plus faible de convergence, la convergence uniforme entraînant bien sûr la convergence ponctuelle. Nous allons voir que les propriétés du noyau  $D_n$  permettent d'obtenir, moyennant des hypothèses convenables sur  $f$  de tels résultats.

*Les hypothèses sur  $f$ .* Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle bornée  $[a, b]$ .

**Définition 2.** On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si

- La fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  sauf éventuellement en un nombre fini de points  $t_1, \dots, t_m$ .
- La fonction  $f$  possède des limites à gauche et à droite en chacun des points  $t_j$  pour  $j = 1, \dots, m$ .

**Définition 3.** On dit qu'une fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux sur  $[a, b]$  si  $f$  ainsi que  $f'$  sont des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ . On dit qu'une fonction  $2\pi$  périodique  $f$  est  $C^1$  par morceaux si sa restriction à  $[0, 2\pi]$  est  $C^1$  par morceaux.

*Le théorème de Dirichlet.* On a le résultat de convergence simple suivant

**Théorème 3.4.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$  périodique de classe  $C^1$  par morceaux. Alors on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2} (f(t_-) + f(t_+)) \text{ où } f(t_{\pm}) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(t \pm h).$$

En particulier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = f(t)$  en tout point où  $f$  est continue.

La preuve du théorème repose sur le résultat suivant, appelé *Lemme de Riemann-Lebesgue*.

**Lemme 3.4.** Soit  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(s) \exp -ins ds = 0.$$

**Remarque 3.7.** Le lemme de Riemann-Lebesgue montre en particulier que

$$\widehat{f}(k) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |k| \rightarrow \infty, \quad (3.49)$$

pour toute fonction  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Si  $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ , la conclusion découle directement de la majoration du Lemme 3.3. Dans le cas général, on raisonne par densité. Il s'agit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq n(\varepsilon)$  alors

$$\left| \int_0^{2\pi} f(s) \exp -ins ds \right| \leq \varepsilon. \quad (3.50)$$

Par densité des fonctions de classe  $C^1$ , on peut trouver une fonction  $f_\varepsilon \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

de sorte que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait

$$\left| \int_0^{2\pi} f(s) \exp -ins ds - \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(s) \exp -ins ds \right| \leq \|f - f_\varepsilon\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.51)$$

Comme  $f_\varepsilon$  est  $C^1$

$$\left| \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(s) \exp -ins ds \right| \leq \frac{2\pi}{n} \|f'_\varepsilon\|_\infty.$$

Choisissons  $n_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^{-1} \|f'_\varepsilon\|_\infty^{-1}$ . On obtient, pour  $n \geq n(\varepsilon)$ ,

$$\left| \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(s) \exp -ins ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.52)$$

En combinant (3.51) et (3.52) on obtient (3.50), ce qui termine la preuve.  $\square$

*Démonstration du Théorème 3.4.* On a, par parité de la fonction  $D_n$ )

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) - \frac{1}{2} (f(t_-) + f(t_+)) &= \int_0^\pi (f(t+s) - f(t_+)) D_n(s) ds \\ &\quad + \int_{-\pi}^0 (f(t+s) - f(t_-)) D_n(s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction  $f$ , on voit qu'il existe une fonction bornée  $g_-$  définie sur  $] -\pi, 0[$  et une fonction bornée  $g_+$  définie sur  $] t, t + \pi[$  telle que

$$\begin{cases} f(t+s) - f(t_+) = sg_+(s), \forall s \in ]0, \pi[ \\ f(t+s) - f(t_-) = sg_-(s), \forall s \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$

On a alors

$$S_n(f)(t) - \frac{1}{2}(f(t_-) + f(t_+)) = \int_0^\pi \frac{s}{2\pi \sin \frac{s}{2}} g_+(s) \sin(n + \frac{1}{2})s ds + \int_{-\pi}^0 \frac{s}{2\pi \sin \frac{s}{2}} g_-(s) \sin(n + \frac{1}{2})s ds. \quad (3.53)$$

Les fonctions  $\frac{s}{2\pi \sin \frac{s}{2}} g_+(s)$  et  $\frac{s}{2\pi \sin \frac{s}{2}} g_-(s)$  étant bornées, on voit grâce au Lemme de Lebesgue (Lemme 3.4) que les deux intégrales du membre de droite de (3.53) tendent vers 0, ce qui fournit la conclusion. □

## EXERCICES

### Exercice I

- 1) Que peut-on dire des coefficients de Fourier d'une fonction  $2\pi$  périodique paire.
- 2) Y a-t-il des fonctions  $2\pi$  périodiques impaires ?
- 3) Que peut-on dire des coefficients de Fourier d'une fonction  $2\pi$  périodique dont la restriction à  $] -\pi, \pi[$  est impaire ?
- 4) Que peut-on dire des coefficients de Fourier d'une fonction réelle ?

### Exercice II

Calculer la suite  $\widehat{f}(k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans les cas suivants :

- $f(t) = \pi^2 - t^2$  pour  $t \in [-\pi, \pi]$
- $f(t) = \cos^2 t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- $f(t) = \cos^3 t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- $f(t) = |\sin^3 t|$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

### Exercice III

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  alors  $f(t) = g(t)$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ .

### Exercice IV

1) Pour  $a \in \mathbb{R}$ , et pour toute fonction  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  montrer que

$$\widehat{\tau_a(f)}(k) = \exp -iak \hat{f}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $0 < \alpha \leq 1$ . On dit qu'une fonction  $f$  de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  est Hölderienne d'ordre  $\alpha$  si et seulement si

$$|f|_{0,\alpha} \equiv \sup_{u,v \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^\alpha} \right\} < +\infty \quad (3.54)$$

2) Montrer que si  $f'$  est Hölderienne d'ordre  $\alpha$  avec  $0 < \alpha \leq 1$ , alors

$$|(\tau_h(\widehat{f}) - \widehat{f})(k)| \leq |h|^\alpha |f|_{0,\alpha} \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

3) Montrer que l'on a, pour une constante  $C > 0$

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^\alpha} |f|_{0,\alpha} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que si  $f'$  est Hölderienne d'ordre  $\alpha$  avec  $0 < \alpha \leq 1$ , alors la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

### Exercice V

1) Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  une fonction telle que  $f(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométrique  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $f$  et telle que  $f_n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

1) Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que

$$f(t) \leq P(t) \leq f(t) + \varepsilon.$$

### Exercice VI

*Phénomène de Gibbs.* Pour une fonction  $2\pi$  périodique  $f$ , on pose  $S_n(f) = f \star_{\text{per}} D_n = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \exp ik$ .

On considère la fonction  $2\pi$  périodique définie par

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ pour } t \in ]0, \pi] \\ f(t) = -1 \text{ pour } t \in ]-\pi, 0] \end{cases}$$

1) Justifier le fait que la suite  $(S_n(f)(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(t)$  pour tout  $t \in ]0, \pi[ \cup ]-\pi, 0[$ . Que se passe-t-il en 0 ? en  $\pi$  ? En  $-\pi$  ?

2) Calculer  $\hat{f}(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $S_{2n-1}(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$ .

4) Montrer que pour tout  $t \in ]0, \pi[$ , on a  $S_{2n-1}(f)'(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2nt)}{\sin t}$ .

5) En déduire que  $\|S_{2n-1}(f)\|_\infty \geq f(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}} du$ .

6) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\frac{1}{\sin w} - \frac{1}{w}| \leq C \text{ pour tout } w \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

6) Déduire de ce qui précède que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2n-1}(f)\|_\infty \geq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv > 1 = \|f\|_\infty.$$

### Exercice VII

On rappelle la formule du binôme de Newton, pour deux nombres complexes  $a$  et  $b$ , et  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \text{ où } \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \quad (3.55)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la fonction  $Q_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $Q_n(t) = \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2n}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

A1) Vérifier que  $Q_n$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, paire, positive de classe  $C^\infty$ . Représenter l'allure du graphe de  $Q_n$ .

A2) Montrer que  $Q_n$  peut s'écrire sous la forme

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=-n}^n a_{k,n} \exp ikt, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où l'on précisera les nombres  $a_{k,n}$ . En déduire que  $Q_n$  est un polynôme trigonométrique de degré  $n$ .

A3) On pose  $I_n = \int_{-\pi}^\pi Q_n(t) dt$ . Montrer que  $I_n = \frac{1}{2^{2n}} a_{0,n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ .

A4\*) Montrer que  $\frac{1}{2^{2n}} a_{0,n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j-2}$ .

A5\*) En déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $I_n \geq \frac{C}{n}$ .

A6) On pose  $P_n = I_n^{-1} Q_n$ . Montrer que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité (périodique).

A7) en déduire une nouvelle démonstration du résultat suivant du cours : toute fonction périodique continue est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

### Exercice VIII

*Noyau de Jackson.*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $J_n$  la fonction définie par

$$J_n(t) = \gamma_n [F_n(t)]^2 = \frac{\gamma_n}{[2\pi(n+1)]^2} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 \quad (3.56)$$



où  $\gamma_n$  est choisie de sorte que  $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1$ .

1) Vérifier que  $J_n$  est un polynôme trigonométrique positif, pair de degré  $2n$ .

2) Montrer que pour une constante  $C > 0$ , on a  $\gamma_n \leq \frac{C}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

3) Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une approximation de l'unité.

4) Pour  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $L_n(f) = f \star_{\text{per}} J_n$ . Montrer que l'on a pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} L_n(f)(t) - f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-s) - f(t)] J_n(s) ds \\ &= \int_0^{\pi} [f(t-s) - 2f(t) + f(t+s)] J_n(s) ds. \end{aligned} \quad (3.57)$$

5) Montrer que la suite  $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

6) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt < C \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} t^2 J_n(t) dt < C.$$

7) Montrer que si  $f$  est de classe  $C^1$ , alors on a, pour une constante  $C > 0$  et pour tout  $n$ ,  $\|L_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{C}{n}$ .

8) Montrer que si  $f$  est de classe  $C^2$ , alors on a, pour une constante  $C > 0$  et pour tout  $n$ ,  $\|L_n(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{C}{n^2}$ .

## Exercices d'approfondissement

### Exercice IX

#### Moyenne de Cesaro et convergence des séries

A) On considère une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On considère les suites  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} s_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

A1) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sigma_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} (1 - \frac{k}{n}) a_k$ .

A2) Montrer que l'on a  $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} k a_k$ .

A3) On suppose que la suite  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  possède une limite notée  $L$  et que  $na_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Montrer qu'alors on a  $s_n \rightarrow L$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

B (*Application aux séries de Fourier*) Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $S_N(f)$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

### Exercice X

*Une amélioration du résultat précédent*

A) On reprend les notations de l'exercice précédent et on suppose qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$|a_n| \leq \frac{K}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.58)$$

On suppose par ailleurs que  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  possède une limite notée  $L$ . A 1) Montrer que pour  $m > n$  on a

$$\frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{k=m-1} s_k - s_n = \sum_{k=n+1}^{k=m-1} \frac{m-k}{m-n} a_k.$$

A 2) En déduire que

$$\left| \frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{k=m-1} s_k - s_n \right| \leq K \sum_{k=n+1}^{k=m-1} \frac{1}{k} \leq K \log\left(\frac{m-n}{n}\right).$$

A3) Montrer que

$$\frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{k=m-1} s_k = \frac{1}{1-\frac{n}{m}} \left( \sigma_m - \frac{n}{m} \sigma_n \right).$$

A4) Montrer que pour tout nombre  $\Lambda > 1$ , et tout  $n \geq 1$ , on

$$|s_n - L| \leq \frac{\Lambda}{\Lambda - 1} (|\sigma_n - L| + |\sigma_{[\Lambda n] + 1} - L|) + L \log \Lambda.$$

A5) Conclure.

B (*Application aux séries de Fourier*) Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $|n \hat{f}(n)| \leq K$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $S_N(f)$  converge uniformément vers  $f$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

# Chapitre 4

## Etude des séries de Fourier

### 4.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons associé à toute fonction  $f$  de  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  la suite  $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de ses coefficients de Fourier définis par la formule

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \exp -iks \, ds, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

de sorte que les coefficients de Fourier  $\widehat{f}(k)$  sont uniformément bornés

$$\widehat{f}(k) \leq \|f\|_1 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Ceci définit une application linéaire  $\mathcal{F}_{2\pi}$  de l'espace vectoriel de fonctions  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  vers l'ensemble  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  des suites bornées indexées par  $\mathbb{Z}$ , c'est à dire

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ \mathbf{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty \right\}.$$

Cet espace vectoriel est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|, \text{ où } c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Un point important qui a été dégagé dans le chapitre précédent est que la donnée de la suite  $\mathcal{F}_{2\pi}(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  caractérise entièrement  $f$ , ou en d'autres termes, l'application

$$f \longmapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

est *injective*.

Une des questions centrale de ce chapitre est de savoir si l'application est *bijective*, c'est à dire de savoir si à toute suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  correspond bien une fonction  $f$  telle que  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \mathcal{F}_{2\pi}(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ? Dans le cadre des espaces que nous avons choisis, à savoir  $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$  et  $c \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  la réponse est négative. En revanche, nous verrons que nous pouvons atteindre cet objectif en changeant les espaces de départ et d'arrivée.

## 4.2 L'espace $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

Rappelons que  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions  $2\pi$ -périodiques de carré de module intégrable sur  $[0, 2\pi]$

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ } 2\pi\text{-périodique et } \int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}.$$

Remarquons pour commencer que l'on a

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \subsetneq L^1_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

Cela résulte en effet de l'inégalité  $|a| \leq |a|^2 + 1$ , pour tout  $a \in \mathbb{C}$ . En l'appliquant à  $f(s)$ , pour  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ , et on intégrant sur  $[0, 2\pi]$ , on obtient

$$\|f\|_1 \leq \int_0^{2\pi} (|f(s)|^2 + 1) ds = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds + 2\pi,$$

de sorte que  $f$  est bien dans  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Pour voir que l'inclusion est stricte, il suffit par exemple de considérer la fonction  $f_0$  définie par  $f_0(t) = \sqrt{|t|^{-1}}$ , pour  $t \in [-\pi, \pi]$ , qui est bien dans  $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ , mais pas dans  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Nous considérons donc une classe plus restreinte de fonctions que dans la section précédente.

Nous avons déjà introduit le produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \overline{g(s)} ds \text{ pour tous } f \text{ et } g, . \quad (4.2)$$

Il est bien défini sur  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>. Les propriétés énoncées en (3.7) pour les fonctions de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$  s'étendent aux fonctions de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \quad \forall f, g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ (\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \cdot \langle f, h \rangle + \mu \cdot \langle g, h \rangle) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall f, g, h \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 \geq 0, \quad \forall f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ et} \\ \langle f, f \rangle = 0 \text{ si et seulement si } f = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|f\|_2 = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire nous donne

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (4.4)$$

c'est à dire, pour toutes fonctions  $f, g$  dans  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ , on a

$$\left| \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \overline{g(s)} ds \right| \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds} \cdot \sqrt{\int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds}.$$

Rappelons pour finir cette présentation de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  le résultat fondamental :

**Théorème 4.1.** *L'espace vectoriel  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  muni du produit hermitien (4.2) est un espace de Hilbert, c'est à dire qu'il est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

1. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On peut aussi le voir en invoquant l'inégalité élémentaire  $|a\bar{b}| \leq 1/2(|a|^2 + |b|^2)$

### 4.2.1 Propriétés de la famille $\{\exp ik\cdot\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Considérons de nouveau la famille de fonctions  $2\pi$ -périodiques  $\mathbf{e}_k = \exp ik\cdot$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , c'est à dire définies par

$$\mathbf{e}_k(t) = \exp ikt \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons déjà vu que la famille  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  était orthonormée, c'est à dire que

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ pour } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Rappelons par ailleurs que les polynômes trigonométriques correspondent aux combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , c'est à dire

$$\mathbb{P}_{\text{trigo}} = \text{Vect}\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

Nous avons démontré dans le chapitre précédent, en utilisant le noyau de Fejer, le résultat suivant (voir Théorème 3.2) :

**Proposition 4.1.** *La famille  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est totale dans  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ , c'est à dire que toute fonction de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  est limite pour la norme de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  d'une suite d'éléments de  $\mathbb{P}_{\text{trigo}} = \text{Vect}\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , ou encore*

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) = \overline{\mathbb{P}_{\text{trigo}}}.$$

Une famille qui est orthonormée et totale est appelée une base Hilbertienne. On a donc

**Théorème 4.2.** *La famille  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base Hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

## 4.3 Propriétés générales des bases Hilbertiennes

### 4.3.1 Projection orthogonale

Considérons de manière plus générale un espace de Hilbert  $H$  sur  $\mathbb{C}$ , muni d'un produit scalaire hermitien  $\langle, \rangle$ , de norme associée  $\|\cdot\|$ . On suppose que  $H$  possède une base Hilbertienne  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , c'est à dire une famille orthonormée telle que

$$H = \overline{\text{Vect}\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}}. \quad (4.5)$$

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on considère le espace vectoriel  $F_N$  de  $H$  engendré par la famille de  $2N + 1$  vecteurs orthonormée  $\{f_{-N}, f_{-N+1}, \dots, f_0, \dots, f_N\}$ , c'est à dire

$$F_N = \text{Vect}\{f_{-N}, f_{-N+1}, \dots, f_0, \dots, f_N\},$$

de sorte que  $F_N$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $2N + 1$ . et que

$$F_N \subset F_{N+1} \text{ pour tout } N \in \mathbb{N} \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \text{Vect}\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (4.6)$$

Si  $v$  est un élément de  $F_N$ , alors on peut écrire, de manière unique

$$v = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k f_k.$$

En prenant le produit scalaire de cette expression avec  $v$ , et en utilisant les relations d'orthonormalité de la famille  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , à savoir

$$\langle f_i, f_k \rangle = \delta_{i,j} \text{ pour tous } i, j \in \mathbb{Z},$$

on trouve l'expression des coordonnées de  $v$  dans la base orthonormée  $\{f_{-N}, f_{-N+1}, \dots, f_0, \dots, f_N\}$  de  $F_N$

$$a_k = \langle v, f_k \rangle. \quad (4.7)$$

Pour  $u \in H$ , considérons le vecteur  $P_N(u)$  de  $F_N$  défini par

$$P_N(u) = \sum_{k=-N}^{k=N} \langle u, f_k \rangle f_k \in F_N. \quad (4.8)$$

L'application  $P_N : H \rightarrow H$ , définie par  $u \mapsto P_N(u)$  est clairement linéaire, son image est  $F_N$  tout entier, et, par (4.7), on voit que

$$P_N(v) = v, \text{ pour tout } v \in F_N, \text{ ce qui entraîne } P_N \circ P_N = P_N.$$

La relation (4.7) appliquée à  $v = P_N(u)$  donne

$$\langle u - P_N(u), f_k \rangle = 0 \text{ pour } k = -N, \dots, N \text{ c'est à dire que } u - P_N(u) \in F_N^\perp. \quad (4.9)$$

Ces relations permettent d'établir le résultat suivant :

**Proposition 4.2.** *L'application  $P_N$  est la projection orthogonale sur  $F_N$ . On a en effet*

$$u = P_N(u) + (u - P_N(u)), \text{ où } u - P_N(u) \in F_N^\perp.$$

On a les identités

$$\begin{cases} \|u\|^2 = \|P_N(u)\|^2 + \|u - P_N(u)\|^2 \text{ et} \\ \|P_N(u)\|^2 = \sum_{k=-N}^{k=N} |\langle u, f_k \rangle|^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour  $v \in F_N$ , on a

$$\|u - v\|^2 = \|u - P_N(u)\|^2 + \|P_N(u) - v\|^2. \quad (4.11)$$

Ainsi,  $P_N(u)$  est l'unique point de  $F_N$  qui minimise la distance à  $u$

$$\|u - P_N(u)\| = \inf_{v \in F_N} \|u - v\| \quad (4.12)$$

**Remarque 4.1.** Rappelons que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ , on définit l'espace  $F^\perp$  par

$$F^\perp = \{w \in H \text{ tels que } \langle w, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F\}. \quad (4.13)$$

On vérifie alors que  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ , et que

$$F \cap F^\perp = \{0\}. \quad (4.14)$$

En effet, si  $w \in F \cap F^\perp$ , alors la définition (4.13) entraîne en prenant  $v = w$ ,  $\langle v, w \rangle = |v|^2 = 0$ .

*Démonstration de la Proposition 4.2.* Nous avons déjà vu que  $u - P_N(u) \in F^\perp$ . En utilisant le développement, pour  $v, w$  dans  $H$

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re(\langle v, w \rangle)\end{aligned}\tag{4.15}$$

appliqué aux vecteurs  $v = P_N(u)$  et  $w = u - P_N(u)$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \|P_N(u)\|^2 + \|u - P_N(u)\|^2 + 2\Re(\langle P_N(u), u - P_N(u) \rangle) \\ &= \|P_N(u)\|^2 + \|u - P_N(u)\|^2,\end{aligned}$$

ce qui donne la première identité de (4.10). La seconde correspond à l'expression de la norme dans une base orthonormée. Pour (4.11), on a pour tout  $v \in F_N$

$$u - v = (u - P_N(u)) + (P_N(u) - v)$$

Comme  $u - P_N(u) \in F^\perp$  et  $P_N(u) - v \in F$ , on a  $\langle u - P_N(u), P_N(u) - v \rangle = 0$  et ainsi, en utilisant (4.15), on obtient (4.11). La relation (4.9) s'en déduit immédiatement.  $\square$

### 4.3.2 Le Théorème de Parseval

Au vu des identités (4.10), on voit que la suite  $(\|P_N(u)\|)_{N \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée : elle admet donc une limite. Cette limite ainsi que celle de la suite  $(P_N(u))_{N \in \mathbb{N}}$  font l'objet du prochain l'objet du prochain résultat.

**Théorème 4.3.** *La suite  $(P_N(u))_{N \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  dans  $H$ . On a l'égalité, dite de Parseval*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\langle u, f_k \rangle|^2.\tag{4.16}$$

*Démonstration.* Pour la première assertion, il s'agit de montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N_0(\varepsilon)$  tel que si  $N \geq N_0(\varepsilon)$  alors on a

$$\|u - P_N(u)\| \leq \varepsilon.\tag{4.17}$$

Cela résulte directement du fait que la famille  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est totale : en effet, au vu de (4.5), tout élément de  $H$  est limite d'éléments de  $\text{Vect}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . En utilisant (4.6), on voit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre  $N_0(\varepsilon)$  et un élément  $v_\varepsilon \in F_{N_0(\varepsilon)}$  tel que

$$\|u - v_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Il résulte de (4.12) que

$$\|u - P_{N_0(\varepsilon)}(u)\| \leq \|u - v_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Les relations (4.10) montrent que la suite  $\|P_N(u)\|_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que la suite  $\|u - P_N(u)\|_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. On a donc pour tout  $N \geq N_0(\varepsilon)$ ,

$$\|u - P_N(u)\| \leq \|u - P_{N_0(\varepsilon)}(u)\| \leq \varepsilon$$

ce qui donne bien (4.17). On a alors

$$\|u\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|P_N(u)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\langle u, f_k \rangle|^2.$$

$\square$

**Commentaire.** La formule (4.3) permet donc de généraliser aux bases Hilbertiennes la formule habituelles du calcul de normes de vecteurs dans des bases orthonormées. Elle montre par ailleurs que la série  $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\langle u, f_k \rangle|^2$  converge. Nous verrons un peu plus loin la réciproque de ce résultat.

### 4.3.3 Isomorphisme isométrique entre $H$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$

#### Isométries d'espaces de Hilbert

Soit  $H_0$  et  $H_1$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$ , munis de produits scalaires hermitiens  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}$  respectivement.

**Définition 4.** On dit qu'une application linéaire  $A$  de  $H_0$  dans  $H_1$  est une isométrie si et seulement si elle conserve les normes, c'est à dire si et seulement si

$$\|A(u)\|_{H_1} = \|u\|_{H_0} \text{ pour tout } u \in H.$$

Si de plus elle est bijective, on dit alors qu'il s'agit d'une isométrie bijective ou d'un isomorphisme isométrique.

Notons au passage, que si une application linéaire préserve la norme, alors elle préserve aussi le produit scalaire.

**Proposition 4.3.** Soit  $A$  une application linéaire de  $H_0$  vers  $H_1$ . Si  $A$  est une isométrie, alors on a

$$\langle A(u), A(v) \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_{H_0} \text{ pour tous vecteurs } u, v \text{ dans } H$$

La preuve de la Proposition 4.3 repose sur les identités de polarisation énoncées dans le Lemme suivant :

**Lemme 4.1.** Soit  $H$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On a, pour tous  $u, v$  dans  $H$ , les identités suivantes

$$\begin{cases} \Re \langle u, v \rangle = \frac{(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)}{4} \\ \Im \langle u, v \rangle = \frac{(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)}{4} \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour démontrer ces identités, il suffit de développer les membres de droites de ces identités en utilisant (4.15). Les identités (4.18) montre que le produit scalaire est entièrement déterminé lorsqu'on connaît les normes des vecteurs.

*Démonstration de la Proposition 4.3.* En utilisant la première identité de polarisation de (4.18) pour  $H_1$  avec  $A(u)$  et  $A(v)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \Re \langle A(u), A(v) \rangle_{H_1} &= \frac{(\|A(u) + A(v)\|_{H_1}^2 - \|A(u) - A(v)\|_{H_1}^2)}{4} \text{ par polarisation sur } H_1 \\ &= \frac{(\|A(u+v)\|_{H_1}^2 - \|A(u-v)\|_{H_1}^2)}{4} \text{ par linéarité de } A \\ &= \frac{(\|u+v\|_{H_0}^2 - \|u-v\|_{H_0}^2)}{4} \text{ car } A \text{ est une isométrie} \\ &= \Re \langle u, v \rangle \text{ par polarisation sur } H_0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

On montre de même que  $\Im \langle A(u), A(v) \rangle = \Im \langle u, v \rangle$ , ce qui entraîne le résultat.  $\square$



Supposons maintenant que  $H_0$  est un espace de Hilbert. On a

**Lemme 4.2.** *On suppose qu'il existe une isométrie bijective de  $H_0$  vers  $H_1$ . Si  $H_0$  est un espace de Hilbert, lors il en est de même de  $H_1$ .*

### L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$

On considère ici l'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$  des suites à valeurs complexes dont le carré du module est sommable, c'est à dire

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \mathbf{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty \right\}.$$

On munit l'espace vectoriel  $\ell^2(\mathbb{Z})$  du produit scalaire hermitien

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \overline{b_k}, \quad (4.20)$$

dont on vérifie qu'il à toutes les propriétés requises. la norme associée au produit scalaire est donnée par

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2}$$

**Remarque 4.2.** L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit, dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \overline{b_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2}$$

**Remarque 4.3.** Notons que toute suite de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  tend vers 0, et est donc bornée, avec l'inégalité

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_2 \text{ pour tout } \mathbf{a} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Par ailleurs, on a, de même pour  $\mathbf{a} \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| = \|\mathbf{a}\|_1,$$

et aussi

$$\|\mathbf{a}\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \right) \cdot \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{|a_k|\} = \|\mathbf{a}\|_1 \cdot \|\mathbf{a}\|_\infty.$$

On a donc les inclusions

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

### Construction de l'isométrie

Revenons à un espace  $H$  possédant une base Hilbertienne  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . A chaque élément  $u$  de  $H$ , on peut associer la suite de ses produits scalaires avec les éléments de la base Hilbertienne :

$$H \ni u \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}(u) \equiv \{\langle u, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Cette application est linéaire, et on l'identité de Parseval montre que  $\mathcal{A}(u) \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et que

$$\|u\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle u, f_k \rangle|^2 = \|\mathcal{A}(u)\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

**Proposition 4.4.** *L'application  $\mathcal{A}$  est une isométrie bijective de  $H$  vers  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Le seul point qu'il reste à établir est que  $\mathcal{A}$  est *bijective*. Soit  $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  un élément de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Il faut construire  $u \in H$  tel que  $\mathcal{A}(u) = \mathbf{a}$ . Pour ce faire, on pose pour  $N \in \mathbb{N}^*$

$$u_N = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k f_k \text{ de sorte que } \langle u_N, f_k \rangle = a_k \text{ pour } |k| \leq N.$$

On vérifie ensuite que la suite  $\{u_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $H$ . On a en effet, pour  $M \geq N$ , par Parseval

$$\|u_N - u_M\| = \sum_{N < |k| \leq M} |a_k|^2 \leq \sum_{N < |k|} |a_k|^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

La suite converge donc vers un élément  $u \in H$ . On a

$$\langle u, f_k \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, f_k \rangle = a_k,$$

de sorte que l'on a bien  $\mathcal{A}(u) = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \mathbf{a}$ , comme souhaité. □

## 4.4 Retour aux séries de Fourier

Nous appliquons maintenant les propriétés générales dégagées dans la Section 4.3 à l'espace de Hilbert  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  et à la base Hilbertienne  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . On obtient, en vertu de la Proposition 4.4 et de la Proposition 4.3 :

**Théorème 4.4.** *L'application  $\mathcal{F}_{2\pi}$  définie par*

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) \ni f \xrightarrow{\mathcal{F}_{2\pi}} \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ avec } \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \exp(-iks) ds \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

*est une isométrie bijective de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  vers  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . En particulier, on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \text{ pour toute fonction } f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}), \quad (4.21)$$

*et de manière générale*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \overline{g(s)} ds = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \cdot \overline{\hat{g}(k)}, \forall f, g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R}). \quad (4.22)$$

Les résultats de la Proposition 4.2 donnent également un éclairage nouveau sur les séries de Fourier. Rappelons par ailleurs que nous avons introduit l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus  $N$ , que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbb{P}_{\text{trigo}}^N = \text{Vect}\{\mathbf{e}_{-N}, \mathbf{e}_{-N+1}, \dots, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_N\} \text{ pour } N \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 4.5.** *Soit  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  et  $N \in \mathbb{N}$  donnés. Le  $N$ -ième terme de la série de Fourier de  $f$ , à savoir la fonction*

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{f}(k) \mathbf{e}_k,$$

correspond à la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $\mathbb{P}_{\text{trigo}}^N$ . On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s) - S_N(s)|^2 ds = \|f - S_N(f)\|_2^2 = \sum_{|k| \geq N+1} |\hat{f}(k)|^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

La fonction  $S_N(f)$  est la meilleure approximation de  $f$  par des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$ , car

$$\|f - S_N(f)\|_2 = \inf_{v \in \mathbb{P}_{\text{trigo}}^N} \|u - v\|_2. \quad (4.24)$$

**Commentaire ;** Alors que les séries de Fourier ne fournissent pas la meilleure approximation dans le cadre de la norme  $\infty$  (parfois, elle ne converge pas dans cette norme !), elle sont la meilleures approximation si on estime l'erreur en moyenne quadratique.

Le cadre  $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  offre donc un cadre naturel pour l'étude de ces séries.

**Notation.** On écrit parfois

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \mathbf{e}_k$$

notation qu'il faut cependant manipuler avec prudence, car elle ne signifie rien d'autre que la convergence en moyenne quadratique exprimé dans (4.23).

## 4.5 Série de Fourier et convolution

Considérons une fonction  $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  et une fonction  $g \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ . Nous avons déjà vu au chapitre précédent que le produit de convolution  $f \star_{\text{per}} g$  est alors une fonction de  $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  avec

$$\|f \star_{\text{per}} g\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_1.$$

On a alors

**Proposition 4.6.** les coefficients de Fourier de  $f \star_{\text{per}} g$  sont donnés par la formule

$$\widehat{f \star_{\text{per}} g}(k) = 2\pi \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k). \quad (4.25)$$

*Démonstration.* On a tout d'abord pour  $k \in \mathbb{Z}$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k \star_{\text{per}} g(t) &= \int_0^{2\pi} \exp i(k(t-s)) g(s) ds = \exp ikt \int_0^{2\pi} \exp -iks \cdot g(s) ds \\ &= 2\pi \hat{g}(k) \mathbf{e}_k(t). \end{aligned}$$

Par linéarité, il en résulte que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$S_N(f) \star_{\text{per}} g = 2\pi \sum_{k=-N}^{k=N} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \mathbf{e}_k.$$

et donc

$$\begin{cases} \widehat{S_N(f) \star_{\text{per}} g}(k) = 2\pi \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \text{ pour } |k| \leq N \\ \widehat{S_N(f) \star_{\text{per}} g}(k) = 0 \text{ pour } |k| \geq N+1. \end{cases}$$

On conclut en faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$ .

□

**Commentaire.** Comme chacune des suites  $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\widehat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  tend vers zéro, on voit que les coefficients de Fourier de  $f \star_{\text{per}} g$  convergent plus vite vers zéro que chacune d'entre elle. On peut y voir de nouveau le reflet de l'effet régularisant du produit de convolution.

## 4.6 Majoration de l'erreur d'approximation en moyenne quadratique

Nous avons vu jusqu'à présent, que pour une fonction donnée  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ , la série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  convergeait vers  $f$  pour la norme  $L^2$ , c'est à dire que  $\|f - S_n(f)\|_2$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Au chapitre précédent, nous avons vu que l'on pouvait majorer de façons plus précise, en norme  $\infty$  et en fonction de  $n$ , l'erreur que l'on fait si on remplace  $f$  par  $S_n(f)$ , à condition de faire des hypothèses sur les dérivées de la fonctions. Voyons dans ce chapitre ce que cela donne si on mesure l'erreur d'approximation, non pas en norme  $\infty$ , mais en moyenne quadratique, c'est à dire en norme  $L^2$ . On a

**Proposition 4.7.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $f \in C^m_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On a

$$\|f - S_n(f)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s) - S_n(f)(s)|^2 ds} \leq \frac{1}{n^m} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2. \quad (4.26)$$

*Démonstration.* Par le théorème de Parseval, on a

$$\begin{cases} \|f - S_n(f)\|_2^2 = \sum_{|k| > n} |\widehat{f}(k)|^2 \text{ et} \\ \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\frac{d^m f}{dt^m}}(k) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2m} |\widehat{f}(k)|^2 \end{cases}$$

□

Il résulte de la seconde identité que

$$\begin{aligned} \sum_{|k| > n} |\widehat{f}(k)|^2 &\leq \frac{1}{n^{2m}} \sum_{|k| > n} |k|^{2m} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq \frac{1}{n^{2m}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2m} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{n^{2m}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2^2, \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement la conclusion désirée.

**Remarque 4.4.** On peut montrer que l'inégalité est optimale. La Proposition fournit donc la meilleure majoration de l'erreur d'approximation pour la norme  $L^2$ .

**Remarque 4.5.** La Proposition 4.7 permet d'avoir une appréciation des valeurs de  $n$  qu'il faut choisir pour que  $S_N(f)$  soit bien une approximation de  $f$  pour une marge d'erreur fixée à priori. Ainsi, pour  $m = 1$  l'inégalité suggère que l'on doit prendre

$$n \gg \left\| \frac{df}{dt} \right\|_2 \text{ voire } n \gg \left\| \frac{df}{dt} \right\|_\infty$$

pour que  $S_N(f)$  soit une approximation de  $f$

**Remarque 4.6.** On peut obtenir des résultats de convergence uniforme en combinant l'identité de Parseval avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a en effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \sum_{|k|>n} |\widehat{f}(k)|. \quad (4.27)$$

On peut majorer le membre de droite en écrivant  $|\widehat{f}(k)| = \frac{1}{k} \cdot (|k| |\widehat{f}(k)|)$ , puis utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>n} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{|k|>n} \frac{1}{k} \cdot (|k| |\widehat{f}(k)|) \\ &\leq \sqrt{\sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2}} \sqrt{\sum_{|k|>n} |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2} \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \|f'\|_2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

où on a utilisé le fait que

$$\sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{n}.$$

En combinant (4.27) et (4.28) on trouve donc

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \|f'\|_2. \quad (4.29)$$

De manière plus générale, on démontre en utilisant le même type d'argument que, si  $f$  est de classe  $C^m$ , alors on a la majoration

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2m}}{n^{m-\frac{1}{2}}} \cdot \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2. \quad (4.30)$$

## 4.7 Séries de Fourier et équation différentielles

Considérons une équation différentielle ordinaire à coefficients constants avec second membre non nécessairement nul, d'ordre  $m \geq 1$  donnée par

$$a_m \frac{d^m}{dt^m} v(t) + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} v(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} v(t) + a_0 v(t) = f(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad (4.31)$$

où  $f$  désigne une fonction  $2\pi$  périodique sur  $\mathbb{R}$ , supposée suffisamment régulière, souvent appelée terme "source" dans diverses applications. Les coefficients  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  désignent ici des nombres complexes donnés, avec  $a_m \neq 0$ . La théorie des équations différentielles nous enseigne que l'espace des solutions est un espace affine de dimension  $m$  : toute solution est somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (4.31), c'est à dire lorsque le second membre est nul. Dans cette partie, nous allons chercher *une solution particulière* de l'équation (4.31)  $v$  supposée  $2\pi$  périodique. Pour ce faire, il suffit, en vertu de ce qui précède de déterminer les coefficients de Fourier de cette solution. En prenant les coefficients de Fourier de chacun des termes de (4.31), on trouve

$$\left( \sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j}{dt^j} v \right)(k) = \widehat{f}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant le fait que le coefficient de Fourier de la dérivée est égale au coefficient de Fourier multiplié par  $ik$ , on obtient ainsi

$$P(ik)\hat{v}(k) = \left( \sum_{j=0}^m a_j (ik)^j \right) \hat{v}(k) = \hat{f}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.32)$$

où  $P$  désigne le polynôme caractéristique associé à l'équation (4.31), c'est à dire le polynôme de degré  $m$  donné par

$$P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j \text{ pour } z \in \mathbb{C}. \quad (4.33)$$

On a alors

**Proposition 4.8.** *Soit  $f$  une fonction de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On suppose que*

$$P(ik) \neq 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.34)$$

*Alors l'équation (4.31) possède une unique solution particulière  $v$   $2\pi$  périodique, entièrement déterminée par ses coefficients de Fourier donnés par*

$$\hat{v}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{P(ik)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.35)$$

*Démonstration.* Grâce à l'hypothèse (4.34), la suite  $(\hat{f}(k)/P(ik))_{k \in \mathbb{Z}}$  est parfaitement définie, car on ne divise pas par zero De plus, on a

$$|P(ik)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |a_m| |k|^m. \quad (4.36)$$

Comme la suite  $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est bornée, il en résulte que la suite  $(\hat{f}(k)/P(ik))_{k \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Il existe donc une unique fonction  $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$  vérifiant (4.35). Il reste à vérifier que la fonction est en fait une fonction de classe  $C^m$ , ce que nous admettrons ici.  $\square$

On peut aussi interpréter le résultat précédent à l'aide du produit de convolution :

**Lemme 4.3.** *On suppose la condition (4.34) satisfaite. Soit  $v$  la solution particulière  $2\pi$  périodique donnée par (4.35). On a*

$$v = G \star_{\text{per}} f$$

*ou la fonction  $G$  appelée solution fondamentale de l'équation différentielle, est entièrement déterminée par ses coefficients de Fourier*

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{2\pi P(ik)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (4.37)$$

*Démonstration.* On vérifie en utilisant (4.36) comme dans la preuve de la proposition 4.8 que la suite  $1/P(ik)_{k \in \mathbb{Z}}$  appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$  de sorte que (4.37) définit bien une fonction de  $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ . On a de plus, en revenant à (4.35)

$$\hat{v}(k) = 2\pi \hat{f}(k) \hat{G}(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

La conclusion découle alors immédiatement de la Proposition 4.6.  $\square$

Bien entendu, en pratique, on aimerait souvent avoir une écriture plus explicite de  $G$ . Voyons comment on peut y arriver sur un exemple.

**Exemple 4.** considérons l'équation différentielle du second ordre

$$-\frac{d^2 v}{dt^2} + v = f \text{ sur } \mathbb{R} \quad (4.38)$$

où  $f$  désigne une fonction de  $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Le polynôme caractéristique associé à l'équation est

$$P(z) = -z^2 + 1,$$

ces racines étant les nombres  $-1$  et  $+1$  la condition (4.34) est satisfaite. On a de plus

$$P(ik) = k^2 + 1 \text{ for all } k \in \mathbb{Z}.$$

La solution  $2\pi$ -périodique  $v$  de (4.38) est alors caractérisée par ses coefficients de Fourier

$$\hat{v}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{k^2 + 1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

ou encore

$$v = G \star_{\text{per}} f,$$

où la solution fondamentale  $G$  a pour coefficients de Fourier

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{2\pi(k^2 + 1)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Cherchons maintenant à deviner de quelle fonction  $2\pi$  périodique il s'agit. Notons tout d'abord que la fonction  $G$  est paire, car ses coefficients de Fourier le sont (voir exercice). De plus, elle est continue car la série de Fourier associée est normalement convergente. La fonction  $G$  est limite de sa série de Fourier  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$G_n(t) = S_n(G)(t) = \sum_{k=-n}^n \frac{\exp(ikt)}{2\pi(k^2 + 1)} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$-\frac{d^2 G_n}{dt^2} + G_n = D_n,$$

où  $D_n$  désigne le noyau de Dirichlet. Comme  $D_n$  converge uniformément vers 0 sur tout ensemble de la forme  $[-\pi, \pi] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on en déduit que l'on doit avoir

$$-\frac{d^2 G}{dt^2}(t) + G(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}.$$

Comme toutes les solutions de cette équation sont de la forme  $A \exp t + B \exp -t$  on peut écrire

$$\begin{cases} v(t) = A^+ \exp t + B^+ \exp -t \text{ pour } t \in ]0, \pi] \\ v(t) = A^- \exp t + B^- \exp -t \text{ pour } t \in ]-\pi, 0[. \end{cases} \quad (4.39)$$

où  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^+$  et  $B^-$  sont quatre paramètres qu'il reste à déterminer. Comme la fonction  $v$  est paire ; on doit avoir

$$A^+ = B^- \text{ et } A^- = B^+$$

Comme elle est par ailleurs périodique et régulière près de  $\pi$  et de  $-\pi$ , on doit avoir

$$v'(\pi) = 0 \text{ ce qui entraîne } A^+ \exp \pi = B^+ \exp -\pi.$$

Posons  $A = A^+$ . On obtient

$$\begin{cases} v(t) = A(\exp t + \exp 2\pi \cdot \exp -t) \text{ pour } t \in ]0, \pi] \\ v(t) = A(\exp 2\pi \cdot \exp t + \exp -t) \text{ pour } t \in ]-\pi, 0[. \end{cases} \quad (4.40)$$

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de  $A$ . Comme on a

$$\widehat{G}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(s) ds = \frac{1}{2\pi},$$

il vient

$$A \int_0^{\pi} (\exp s + \exp 2\pi \cdot \exp -s) ds = \frac{1}{2}.$$

On trouve donc

$$A([\exp s]_0^{\pi} + [-\exp s]_0^{\pi}) = \frac{1}{2} \text{ soit } A = \frac{1}{2(\exp(2\pi) - 1)},$$

ce qui nous donne l'expression de  $G$  sur  $[-\pi, \pi]$

$$G(t) = \frac{1}{2(\exp(2\pi) - 1)} (\exp |t| + \exp 2\pi \cdot \exp -|t|) \quad (4.41)$$

## EXERCICES

### Exercice I

Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ .

- 1) Montrer que si  $f$  est paire, alors  $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Montrer que si  $f$  est réelle alors  $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Que peut-on dire d'une fonction réelle et paire?

### Exercice II

On considère la famille  $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(k \cdot) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k \cdot) \right\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ .

- 1) Montrer que la famille  $A$  est orthonormée.
- 2) Montrer qu'elle est totale.
- 3) Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$S_N(f) = \sum_{k=0}^{k=N} [a_k(f) \cos k \cdot + a_k(f) \sin k \cdot],$$

où

$$a_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(s) \cos ks ds \text{ et } b_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(s) \sin ks ds$$



4) Que donne l'identité de Parseval pour la famille  $A$ ?

3) Quelle relation y a-t-il entre les nombres  $a_k(f)$ ,  $b_k(f)$  et  $\hat{f}(k)$ .

### Exercice III

1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction en escalier  $f$  définie par

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in ]0, \pi[ \text{ et } f(t) = -1 \text{ pour } t \in ]-\pi, 0[.$$

2) En déduire la somme suivante :  $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  [indication : on pourra considérer le point  $\frac{\pi}{2}$ ].

3) Calculer la somme suivante :  $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  [on pourra utiliser le Théorème de Parseval].

### Exercice IV

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction

$$f(t) = t(\pi - t)(\pi + t) \text{ pour } t \in ]-\pi, \pi[$$

En déduire les sommes

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

# Chapitre 5

## Séries de Fourier discrètes

### 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment une fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  donnée pouvait être approchée par sa série de Fourier  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ , où

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) \mathbf{e}_k, \text{ avec } \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cdot \overline{\mathbf{e}_k(s)} ds, \quad (5.1)$$

les fonction  $\mathbf{e}_k$  désignant les signaux sinusoidaux  $\mathbf{e}_k = \exp(ik\cdot)$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Ces signaux sont périodiques de période  $\frac{2\pi}{|k|}$ , pour  $k \neq 0$ , période qui devient bien entendu de plus en plus petite lorsque la valeur absolue de  $k$  croît. On parle aussi souvent de fréquence : cette dernière correspond au nombre de période par unité, c'est à dire ici à  $\frac{|k|}{2\pi}$ .

La théorie de Fourier nous enseigne donc que tout signal  $2\pi$  périodique est une superposition de signaux sinusoidaux de fréquences qui sont des multiples entiers de  $1/2\pi$ . De plus, lorsque  $f$  est suffisamment régulière, alors un nombre limité de telles fréquences, les plus basses, suffisent pour reconstituer un signal proche du signal initial. Cette constatation a de nombreuses applications pratiques, par exemple, pour n'en donner qu'un, la conception des logiciel de lecteurs MP3. Bien entendu, pour mettre en oeuvre de telles applications, ils faut être capable de fournir une valeur approchée des coefficients de Fourier, qui sont définis par des intégrales : ce sont eux, qui au final, contiennent toute l'information pertinente portée par le signal.

Il existe de nombreuses méthodes de calculs approchés d'intégrales (rectangles, trapèze, méthode de Simpson, etc...). Nous verrons cependant que c'est la méthode a priori la plus naïve et la plus simple qui donne les meilleurs résultats. Elle fait l'objet du présent chapitre.

### 5.2 La Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Les coefficients de Fourier  $\hat{f}(k)$  définies en (5.1) sont défini à l'aide d'intégrales. Commençons par rappeler des méthodes classiques d'approximation des intégrales.

### 5.2.1 Approximation des intégrales par la méthode des rectangles

Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $[a, b]$ . Considérons le nombre

$$I(g) \equiv \int_a^b f(x) dx.$$

Introduisons alors, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , donné, le nombre

$$R_n(f) \equiv \frac{b-a}{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) \right) \quad \text{où } x_i = a + i \frac{b-a}{n}. \quad (5.2)$$

Le nombre  $R_n(g)$  correspond à une somme de Riemann pour la fonction  $f$ . Il constitue une approximation de l'intégrale  $I(g)$ . En effet, on vérifie que si  $f \in C^0[a, b]$ , alors

$$R_n(g) \rightarrow I(g) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \quad (5.3)$$

Si on suppose de plus que  $f \in C^1[a, b]$ , alors on a la majoration

$$\|R_n(g) - I(g)\| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \|g'\|_{L^\infty[a,b]} = \frac{(b-a)^2}{n} \sup\{|f'(x)|, x \in [a, b]\}. \quad (5.4)$$

### 5.2.2 Coefficients de Fourier discrets

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$  périodique donnée. Utilisons la méthode des rectangles pour approcher les nombres  $\hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  donné par l'intégrale

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \exp(-iks) ds.$$

Introduisons un paramètre d'approximation  $N \geq 1$ , et choisissons  $n = 2N$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$  dans la méthode des triangles. Ceci nous conduit à considérer les  $2N$  points de subdivision  $\{t_j\}_{j=0, \dots, 2N-1}$  de l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , donnés par

$$t_j = \frac{j\pi}{N} \text{ pour } j = 0, \dots, 2N-1,$$

On a donc  $t_0 = 0$ , et l'écart entre deux points consécutifs est constant égal à  $h \equiv \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{N}$ . la définition du coefficient de Fourier  $\hat{f}(k)$  correspond à l'intégration de la fonction  $g_k$  définie par  $g_k(s) = f(s) \exp(-iks)$ , pour  $s \in [0, 2\pi]$ . Pour  $k \in \{-N+1, \dots, N\}$ , on pose

$$\begin{aligned} \hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) &\equiv R_n(g_k) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f(t_j) \exp(-ikt_j), \end{aligned} \quad (5.5)$$

c'est à dire

$$\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) \exp\left(\frac{-ikj\pi}{N}\right). \quad (5.6)$$

Le nombre  $\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$  représente le  $k$ -ième coefficient de Fourier *discret* (à l'ordre  $N$ ) de  $f$ . Nous utiliserons parfois aussi la notation

$$\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \mathcal{F}_N^{\mathbf{D}}(f)(k), \text{ pour } k \in \mathbb{Z},$$

et nous écrirons, quand cela ne prête pas à confusion  $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \widehat{f}^{\mathbf{D}}(k)$ . Pour soulager l'écriture de certaines formules, il peut être utile d'introduire le nombre

$$\omega = \omega_{2N} = \exp\left(-\frac{i\pi}{N}\right) \text{ de sorte que } \omega^{2N} = 1. \quad (5.7)$$

La formule (5.6) s'écrit alors

$$\widehat{f}^{\mathbf{D}}(k) = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) \omega^{kj}. \quad (5.8)$$

**Remarque 5.1.** Il convient d'insister de nouveau sur le fait que la valeur des coefficients discrets  $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$  dépend uniquement des  $2N$ -points  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{2N-1}$ , espacés régulièrement par des intervalles de longueurs  $\frac{\pi}{N}$  : En théorie du signal on parle *d'échantillonnage et de points d'échantillonnage*. Si deux fonctions  $f$  et  $g$  sont telles que  $f(t_j) = g(t_j)$ , pour  $j = 0, \dots, 2N-1$ , alors on a

$$\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \widehat{g}_N^{\mathbf{D}}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (5.9)$$

**Remarque 5.2.** Introduisons l'application linéaire  $A_N : \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}^{2N}$  définie pour  $X_N = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  par  $AX_N = Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_{2N})$  avec

$$y_k = \sum_{j=0}^{2N-1} x_j \exp\left(\frac{-ikj\pi}{N}\right).$$

Remarquons tout d'abord les propriétés de périodicité des coefficients de Fourier discrets. On a en effet

**Proposition 5.1.** *On a, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , la propriété de périodicité*

$$\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k+2N) = \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k). \quad (5.10)$$

*Démonstration.* On a  $\omega^{2N} = 1$ , de sorte que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega^{2Nj} = 1$ . Il en résulte donc que

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{\mathbf{D}}(k+2N) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) \omega^{(k+2N)j} = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) \omega^{kj} \omega^{2Nj} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) \omega^{kj} = \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k). \end{aligned} \quad (5.11)$$

□

Il résulte de la propriété de périodicité énoncée dans la Proposition 5.1 qu'il ya (au plus)  $2N$  coefficients  $\widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$  ayant des valeurs distinctes. Présentons maintenant une autre propriété importante des coefficients  $\widehat{f}^{\mathbf{D}}$ .

**Lemme 5.1.** *On a pour tout nombres  $\ell \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \{-N+1, \dots, N\}$ , on a*

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{e}}_{\ell}^{\mathbf{D}}(k) = 0 & \text{si } \ell \neq k \pmod{2N} \\ \widehat{\mathbf{e}}_{\ell}^{\mathbf{D}}(k) = 1 & \text{si } \ell = k \pmod{2N}. \end{cases}$$

*Démonstration.* On a, par définition

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_\ell^{\mathbf{D}}(k) &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \exp\left(\frac{i\ell j\pi}{N}\right) \omega^{kj} = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \omega^{-j\ell} \omega^{kj} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \omega^{(k-\ell)j}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Si  $k - \ell = 0 \pmod{2N}$ , alors  $\omega^{(k-\ell)} = 1$ , et donc pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a  $\omega^{(k-\ell)j} = 1$ . En faisant la somme de  $j = 0$  à  $j = 2N - 1$  on obtient la deuxième relation du Lemme. Si  $k - \ell \neq 0 \pmod{2N}$ , alors  $\omega^{(k-\ell)} \neq 1$ . Comme le membre de droite de (5.12) est la somme d'une suite géométrique, on obtient

$$\widehat{\mathbf{e}}_\ell^{\mathbf{D}}(k) = \frac{1}{2N} \left( \frac{1 - \omega^{2N(k-\ell)}}{1 - \omega^{(k-\ell)}} \right) = 0 \quad \text{car} \quad \omega^{2N} = 1,$$

ce qui termine la preuve. □

Considérons maintenant l'espace  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  défini pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , par

$$\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N = \text{Vect}\{\mathbf{e}_{-N+1}, \mathbf{e}_{-N+2}, \dots, \mathbf{e}_N\} \quad \text{de sorte que} \quad \mathbb{P}_{\text{trigo}}^N = \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N + \mathbb{C}\mathbf{e}_{-N}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}_{\text{trigo}}^{N-1} \subsetneq \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N \subsetneq \mathbb{P}_{\text{trigo}}^N.$$

Voici une conséquence une conséquence du Lemme 5.1 :

**Proposition 5.2.** *On a, pour tout polynôme trigonométrique  $P \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$*

$$\widehat{P}_N^{\mathbf{D}}(k) = \widehat{P}(k) \quad \text{pour tout } k \in \{-N+1, \dots, N\},$$

*c'est à dire que sur  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ , les coefficients de Fourier discrets coïncident avec les coefficients de Fourier.*

*Démonstration.* Pour  $\ell, k \in \{-N+1, \dots, N\}$  on a  $|k - \ell| < 2N$ , de sorte qu'on a  $\ell - k = 0 \pmod{2N}$  si et seulement si  $\ell - k = 0$ . Le Lemme 5.1 montre alors que

$$\widehat{\mathbf{e}}_\ell^{\mathbf{D}}(k) = \delta_{\ell,k} = \widehat{\mathbf{e}}_\ell(k) \quad \text{pour } \ell, k \in \{-N+1, \dots, N\}.$$

Par ailleurs, pour tout  $k \in \{-N+1, \dots, N\}$  donné, les applications  $P \mapsto \widehat{P}^{\mathbf{D}}(k)$  et  $P \mapsto \widehat{P}(k)$  sont des formes linéaires sur  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ . Comme elles coïncident sur la base  $\{\mathbf{e}_{-N+1}, \mathbf{e}_{-N+2}, \dots, \mathbf{e}_N\}$  de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  elles coïncident sur tout l'espace  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ . □

Passons maintenant à l'équivalent discret des séries de Fourier.

### 5.2.3 Séries de Fourier discrètes et interpolation polynomiale

#### Séries de Fourier discrètes

En remplaçant les coefficients de Fourier par les coefficients de Fourier discrets, on obtient des séries de Fourier discrètes. Plus précisément, on pose pour  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  donné, on introduit la série de Fourier discrète à l'ordre  $N$ , définie par

$$S_N^{\mathbf{D}}(f) = \sum_{k=-N+1}^{k=N} \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) \mathbf{e}_k.\tag{5.13}$$

**Remarque 5.3.** Notons une différence avec la série de Fourier de  $f$ . Au lieu sommer de  $-N$  à  $N$ , on ne somme ici que de  $-N+1$  à  $N$ , il ya donc, d'une certaine manière, un terme en moins. Cette convention est motivée par la propriété de périodicité de la Proposition 5.1 ( on a en effet  $\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(-N) = \hat{f}_N^{\mathbf{D}}(N)$ ).

**Remarque 5.4.** Tout comme les coefficients de Fourier discrets, la série de Fourier discrètes  $S_N^{\mathbf{D}}(f)$  ne dépends que des points d'échantillonnage  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{2N-1}$ . En particulier, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que  $f(t_j) = g(t_j)$  pour tout  $j = 0, 2N-1$ , alors on a

$$S_N^{\mathbf{D}}(f) = S_N^{\mathbf{D}}(g). \quad (5.14)$$

On a la propriété importante suivante :

**Proposition 5.3.** On a pour tout polynôme trigonométrique  $P \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$

$$S_N^{\mathbf{D}}(P) = P,$$

c'est à dire que la série trigonométrique discrète d'ordre  $N$  de  $P$  coïncide avec la fonction  $P$  sur  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ .

*Démonstration.* Pour un polynôme trigonométrique  $P \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ , on a en effet, en vertu de la Proposition 5.2 l'identité  $\hat{P}^{\mathbf{D}}(k) = \hat{P}(k)$ , pour tout  $k \in \{-N+1, N-1\}$ , de sorte que

$$S_N^{\mathbf{D}}(P) \equiv \sum_{k=-N+1}^{k=N} \hat{P}^{\mathbf{D}}(k) \mathbf{e}_k = \sum_{k=-N+1}^{k=N} \hat{P}(k) \mathbf{e}_k = P. \quad (5.15)$$

□

## 5.2.4 Propriétés d'interpolation des séries de Fourier discrètes

Nous allons démontrer dans cette partie le résultat suivant :

**Théorème 5.1.** La série de Fourier discrète  $S_N^{\mathbf{D}}(f)$  d'ordre  $N$  est l'unique polynôme trigonométrique de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  tel que

$$S_N^{\mathbf{D}}(f)(t_j) = f(t_j) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Avant de donner la preuve de ce résultat faisant quelques rappels.

### Rappels sur l'interpolation

Considérons de manière générale  $m$  points  $z_0, \dots, z_{m-1}$  distincts du plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $m$  nombres complexes  $c_0, \dots, c_{m-1}$  donnés. On a alors

**Proposition 5.4.** Il existe un unique polynôme  $Q$  de degré  $m-1$  au plus et tel que

$$Q(z_\ell) = c_\ell \text{ pour tout } \ell \in \{0, \dots, m-1\}.$$

le polynôme  $Q$  s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $z_0, \dots, z_{m-1}$  et aux nombres  $c_0, \dots, c_{m-1}$ .

*Démonstration.* Démontrons tout d'abord l'unicité d'un tel polynôme. A cet effet, on peut raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe deux polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  distincts de degré au plus  $m-1$  tels que

$$Q_1(z_\ell) - Q_2(z_\ell) = c_\ell \text{ pour tout } \ell \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Considérons alors le polynôme  $T$  défini par  $T = Q_2 - Q_1$ , de sorte que

$$T(z_\ell) = 0 \text{ pour tout } \ell \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Le polynôme  $T$  a donc  $m$  racines complexes distincts, alors qu'il est de degré  $m-1$  au plus : ceci entraîne immédiatement qu'il est nul, de sorte que l'on obtient une contradiction.

Montrons maintenant comment on peut construire un tel polynôme  $Q$ . Pour  $\ell \in \{0, \dots, m-1\}$ , considérons le polynôme  $R_\ell$  de degré  $m-1$  défini par

$$R_\ell(z) = \prod_{j \in \{0, \dots, m-1\} \setminus \{\ell\}} \left( \frac{z - z_j}{z_\ell - z_j} \right)$$

de sorte que

$$R_\ell(z_j) = 0 \text{ si } j \neq \ell \text{ et } R_\ell(z_\ell) = 1. \quad (5.16)$$

On construit  $P$  sous la forme

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j R_j(z), \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad (5.17)$$

puis on vérifie que  $Q$  convient. □

Revenons maintenant aux polynômes trigonométriques, et aux points  $t_j = \frac{\pi j}{N}$ . On a

**Proposition 5.5.** *Soit  $2N$  nombres complexes donnés  $a_0, \dots, a_{2N-1}$ . Il existe un unique polynôme trigonométrique  $P \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  tel que*

$$P(t_j) = a_j \text{ tout } j = 0, \dots, 2N-1. \quad (5.18)$$

*Démonstration.* Posons, pour  $\ell = 0, \dots, 2N-1$

$$\begin{cases} z_\ell = \exp(it_\ell) = \exp\left(\frac{i\pi\ell}{N}\right) \text{ et} \\ c_\ell = a_\ell z_\ell^{N-1}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Considérons le polynôme  $Q$  fourni par la Proposition 5.4, pour  $m = 2N$ , les points  $\{z_\ell\}_{j=0}^{2N-1}$  et les nombres  $\{c_\ell\}_{j=0}^{2N-1}$  définis ci-dessus en (5.19). Le polynôme  $Q$  est donc de degré  $2N-1$ , c'est à dire a ma forme

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k z^k, \text{ où } b_k \in \mathbb{C},$$

et vérifie donc les identités

$$Q(z_\ell) = c_\ell = a_\ell z_\ell^{N-1} \text{ pour tout } \ell = 0, \dots, 2N-1. \quad (5.20)$$

Définissons maintenant la fonction  $P$  sur  $[0, 2\pi]$  par

$$\begin{aligned} P(t) &= (\exp -it(N-1))Q(\exp it) = (\exp -it(N-1))Q(\exp it) \sum_{k=0}^{2N-1} b_k \exp(ikt) \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} b_k \exp(i(k-N+1)t) = \sum_{k'=-N+1}^N d_{k'} \exp(ik't) \text{ où } d_{k'} \equiv b_{k'+N-1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Il résulte de cette définition que  $P \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  alors que (5.20) entraîne (5.18).  $\square$

On obtient alors comme corollaire immédiat :

**Corollaire 5.1.** *Pour toute fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ , il existe un unique polynôme trigonométrique  $\mathcal{J}_N(f) \in \tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$  tel que*

$$\mathcal{J}_N(f)(t_j) = f(t_j) \text{ pour tout } j = 0, \dots, 2N-1.$$

Le polynôme trigonométrique  $\mathcal{J}_N(f)$  s'appelle le *polynôme trigonométrique d'interpolation* aux points de collocation  $\{t_j\}_{j=0}^{2N-1}$ .

### Démonstration du Théorème 5.1

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 5.1. Soit  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Comme  $\mathcal{J}_N(f)(t_j) = f(t_j)$  pour tout  $j = 0, \dots, 2N-1$ , on a, apr l'identité (5.14) de la Remarque 5.4

$$S_N^{\mathbf{D}}(\mathcal{J}_N(f)) = S_N^{\mathbf{D}}(f). \quad (5.22)$$

Par ailleurs,  $\mathcal{J}_N(f)$  est un polynôme trigonométrique de  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ , on a donc, par la Proposition 5.3

$$S_N^{\mathbf{D}}(\mathcal{J}_N(f)) = \mathcal{J}_N(f). \quad (5.23)$$

En combinant (5.22) et (5.23) on obtient donc

$$\mathcal{J}_N(f) = S_N^{\mathbf{D}}(f), \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*, \quad (5.24)$$

ce qui termine ma preuve.

**Remarque 5.5.** Il résulte directement de (5.24) que

$$\begin{cases} \widehat{(\mathcal{J}_N(f))}(k) = \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) \text{ pour } k = -N+1, \dots, N \\ \widehat{(\mathcal{J}_N(f))}(k) = 0 \text{ pour } k \geq N+1 \text{ et } k \leq -N. \end{cases} \quad (5.25)$$

## 5.3 Comparaison des coefficients de Fourier discrets et continus

Par coefficients de Fourier continus, nous entendons ici les coefficients de Fourier habituels, exprimés par la formule (5.1). Si on compare les deux types de coefficients de Fourier, il convient tout d'abord d'insister sur le fait qu'il suffit de connaître les coefficients de Fourier discrets à l'ordre  $N$  pour des valeurs de  $k$  comprises entre  $-N+1$  et  $N$ , puisqu'il ont la propriété de périodicité décrite dans la Proposition 5.1. Par ailleurs, ils dépendent de  $N$ , alors que les coefficients de Fourier continus sont définis pour toute valeur entière de  $k$ . Nous avons déjà vu que les coefficients de Fourier discrets et continus coïncident sur l'espace  $\tilde{\mathbb{P}}_{\text{trigo}}^N$ . Nous connaissons par ailleurs, grâce aux Lemme 5.1 les coefficients de Fourier des éléments de la base Hilbertienne  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Ces considérations nous mènent directement au résultat suivant, qui donne un lien direct entre coefficients discrets et continus :



**Proposition 5.6.** Soit une fonction  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  telle que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(j)| < +\infty$ , c'est à dire telle que sa série de Fourier converge normalement. On a

$$\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \hat{f}(k) + \alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k), \text{ pour tout } k \in \{-N+1, \dots, N\} \quad (5.26)$$

où l'erreur de discrétisation  $\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)$  est donnée par

$$\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k) \equiv \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{f}(k + 2mN) \text{ pour tout } k \in \{-N+1, \dots, N\} \quad (5.27)$$

*Démonstration.* On décompose  $f$  sous la forme  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(j) \mathbf{e}_j$ . Par linéarité de la transformée de Fourier discrète, on a donc, pour tout  $k \in \{-N+1, \dots, N\}$ ,

$$\hat{f}^{\mathbf{D}}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(j) \hat{\mathbf{e}}_j^{\mathbf{D}}(k).$$

Par le Lemme 5.1, les seuls coefficients non nuls dans la somme du membre de droite sont obtenus pour les indices  $j$  de la forme  $j = k + 2mN$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , pour lesquels on a

$$\hat{\mathbf{e}}_j^{\mathbf{D}}(k) = \hat{\mathbf{e}}_{k+2mN}^{\mathbf{D}}(k) = 1.$$

Il vient donc

$$\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k + 2mN),$$

ce qui mène au résultat. □

**Remarque 5.6.** Nous avons vu au chapitre précédent (voir Remarque 4.6) que si la fonction était dans  $C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ , alors la série de Fourier converge normalement.

Lorsque la fonction  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ , on peut majorer l'erreur de discrétisation  $\alpha_N^{\mathbf{D}}(k)$  de la façon suivante :

**Lemme 5.2.** On a la majoration, pour  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ ,

$$|\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 \leq \frac{K_m}{N^{2m}} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k + 2mN|^{2m} |\hat{f}(k + 2mN)|^2 \right) \quad (5.28)$$

où  $K_m > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ .

*Démonstration.* On écrit, comme dans la Remarque 4.6,

$$\hat{f}(k + 2mN) = (|k + 2mN|^m \hat{f}|k + 2mN|) \cdot |k + 2mN|^{-m}$$

, puis on fait appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient

$$\begin{aligned} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 &\leq \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (|k + 2mN|^m |\hat{f}|k + 2mN|) \cdot |k + 2mN|^{-m} \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k + 2mN|^{2m} |\hat{f}(k + 2mN)|^2 \right) \cdot \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k + 2mN|^{-2m} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

On peut réécrire le second terme du produit du membre de gauche, qui ne dépend pas de  $f$ , comme

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k + 2mN|^{-2m} = \frac{1}{N^{2m}} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2m + \frac{k}{N}|^{-2m} \right) \quad (5.30)$$

Comme  $-N + 1 \leq k \leq N$ , on a

$$-1 < \frac{k}{N} \leq 1 \text{ et donc } 2m - 1 < 2m + \frac{k}{N} \leq 2m + 1,$$

sorte qu'on obtient, en distinguant les nombres  $m$  positifs et les nombres  $m$  négatifs la majoration

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2m + \frac{k}{N}|^{-2m} \leq K_m \equiv 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2m}} < +\infty. \quad (5.31)$$

En combinant les inégalités (5.29), (5.30), et (5.31) on obtient l'inégalité (5.28).  $\square$

## 5.4 Comparaison des séries de Fourier discrètes et continues

Nous comparons, dans cette partie la série de Fourier continue, et la série de Fourier discrète. On a, pour  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$  et  $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} S_N(f)^{\mathbf{D}} - S_N^{\mathbf{D}}(f) &= \sum_{k=-N+1}^{k=N} \widehat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) \mathbf{e}_k - \sum_{k=-N}^{k=N} \widehat{f}(k) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=-N+1}^{k=N} \alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k) \mathbf{e}_k - \widehat{f}(-N) \mathbf{e}_{-N}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

En utilisant le Lemme 5.2, on obtient :

**Théorème 5.2.** Soit  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ . On a la majoration

$$\|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_2 \leq \frac{C_m}{N^m} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2 \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*, \quad (5.33)$$

où  $C_m > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ .

*Démonstration.* Il résulte de (5.32) que

$$\|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 + |\widehat{f}(-N)|^2. \quad (5.34)$$

En utilisant le Lemme 5.2, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 &\leq \frac{K_m}{N^{2m}} \sum_{k=-N+1}^{k=N} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k + 2mN|^{2m} |\widehat{f}(k + 2mN)|^2 \right) \\ &\leq \frac{K_m}{N^{2m}} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |j|^{2m} |\widehat{f}(j)|^2 = \frac{K_m}{N^{2m}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Par ailleurs, on a

$$|\widehat{f}(-N)|^2 = \frac{1}{N^{2m}} \left| \widehat{\frac{d^m f}{dt^m}}(-N) \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi N^{2m}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2^2 \quad (5.36)$$

En combinant les majorations (5.34), (5.35) et (5.36), on obtient (5.33) pour

$$C_m = \sqrt{K_m + \frac{1}{2\pi}} = \sqrt{2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2m}} + \frac{1}{2\pi}},$$

où la constante  $K_m$  a été définie dans (5.31). □

On peut adapter les calculs précédents pour obtenir des majorations en norme  $\infty$ . On a :

**Théorème 5.3.** Soit  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ . On a la majoration

$$\|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_{\infty} \leq \frac{C_m^{\infty}}{N^{m-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2 \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*, \quad (5.37)$$

où  $C_m^{\infty} > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ .

*Démonstration.* Il résulte de nouveau de (5.32) que l'on a la majoration

$$\|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_{\infty} = \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)| + |\hat{f}(-N)|. \quad (5.38)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)| &\leq \left( \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k=-N+1}^{k=N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2N} \left( \sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (5.35), il vient donc

$$\sum_{k=-N+1}^{k=N} |\alpha_N^{\mathbf{D}}(f, k)| \leq \frac{\sqrt{2K_m}}{N^{m-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2. \quad (5.39)$$

En combinant (5.36), (5.38) et (5.39), on obtient (5.37) pour

$$C_m^{\infty} = \sqrt{2K_m} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad \square$$

## 5.5 Majoration de l'erreur numérique

Nous comparons maintenant directement  $S_N^{\mathbf{D}}(f)$  avec la fonction  $f$  elle-même. On a

**Théorème 5.4.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $f \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ . On a les majorations suivantes, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - f\|_2 \leq \frac{\mathcal{C}_m}{N^m} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2, \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*, \\ \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - f\|_{\infty} \leq \frac{\mathcal{C}_m^{\infty}}{N^{m-\frac{1}{2}}} \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2. \end{cases} \quad (5.40)$$

où  $\mathcal{C}_m > 0$  et  $\mathcal{C}_m^{\infty} > 0$  sont des constante qui ne dépend que de  $m$ .

*Démonstration.* On écrit

$$S_N^{\mathbf{D}}(f) - f = (S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)) + (S_N(f) - f)$$

et ensuite, on utilise l'inégalité triangulaire pour les normes, ce qui donne

$$\begin{cases} \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - f\|_2 \leq \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_2 + \|S_N(f) - f\|_2, \\ \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - f\|_\infty \leq \|S_N^{\mathbf{D}}(f) - S_N(f)\|_\infty + \|S_N(f) - f\|_\infty. \end{cases} \quad (5.41)$$

□

On conclut alors, en utilisant pour la première inégalité de (5.40) les majorations (5.33) et (4.26), et pour la seconde, les majorations (5.37) et (4.30), avec, pour choix de constantes

$$\mathcal{C}_m = C_m + 1 \text{ et } \mathcal{C}_m^\infty = C_m^\infty + \sqrt{2m}. \quad (5.42)$$

**Commentaire.** Les majorations trouvées des erreurs  $\|S_N^{\mathbf{D}}(f) - f\|$  pour les deux normes en question sont donc du même ordre de grandeur (par rapport à  $N$ ) que celles trouvées pour l'erreur  $\|S_N(f) - f\|$ . On peut montrer d'ailleurs que ces ordres de grandeur sont optimaux. En approchant une fonction donnée  $f$  par  $S_N^{\mathbf{D}}(f)$  au lieu de  $S_N(f)$  on ne change donc pas l'ordre de grandeur de l'erreur effectuée.

**Remarque 5.7.** Le Théorème 5.4 permet d'avoir une appréciation des valeurs de  $N$  qu'il faut choisir pour que  $S_N(f)$  soit bien une approximation de  $f$  pour une marge d'erreur fixée à priori. Ainsi, pour  $m = 1$  l'inégalité suggère que l'on doit prendre

$$N \gg \left\| \frac{df}{dt} \right\|_2 \text{ voire } n \gg \left\| \frac{df}{dt} \right\|_\infty$$

pour que  $S_N^{\mathbf{D}}(f)$  soit une approximation de  $f$ .

## 5.6 Une méthode de calcul pour la convolution

Rappelons que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ , alors

$$\widehat{f \star_{\text{per}} g}(k) = 2\pi \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Le calcul des coefficients de Fourier de la convolée est donc aisé, lorsque l'on connaît les coefficients de Fourier des deux fonctions. Par inversion de Fourier, on peut alors reconstruire de manière simple la fonction  $f \star_{\text{per}} g$  grâce à la formule

$$f \star_{\text{per}} g = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \mathbf{e}_k,$$

cette identité devant être comprise au sens de la convergence en moyenne quadratique en ce qui concerne le membre de droite. La situation est un peu moins claire pour les coefficients de Fourier discrets, car on n'a pas de manière générale  $\widehat{(f \star_{\text{per}} g)}_N^{\mathbf{D}}(k) = 2\pi \hat{f}^{\mathbf{D}}(k) \cdot \hat{g}_N^{\mathbf{D}}(k)$ . Considérons néanmoins, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $w_N$  définie par

$$w_N(t) = 2\pi \sum_{k=-N+1}^{k=N} \hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k) \cdot \hat{g}_N^{\mathbf{D}}(k) \exp(ikt) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que l'on a l'identité

$$w_N = S_N^{\mathbf{D}}(f) \star_{\text{per}} S_N^{\mathbf{D}}(g) \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}^*. \quad (5.43)$$

En effet, en vertu de (5.25), on

$$\begin{aligned} w_N &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{J}_n(f)}(k) \cdot \widehat{\mathcal{J}_n(g)}(k) \mathbf{e}_k \\ &= \mathcal{J}_n(f) \star_{\text{per}} \mathcal{J}_n(g). \end{aligned}$$

La conclusion découle alors de la Proposition ???. Considérons maintenant l'erreur d'approximation

$$r_N \equiv f \star_{\text{per}} g - w_N = f \star_{\text{per}} g - S_N^{\mathbf{D}}(f) \star_{\text{per}} S_N^{\mathbf{D}}(g)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$r_N = (f - S_N^{\mathbf{D}}(f)) \star_{\text{per}} g + S_N^{\mathbf{D}}(f) \star_{\text{per}} (g - S_N^{\mathbf{D}}(g)) \quad (5.44)$$

**Proposition 5.7.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soient  $f$  et  $g$  des fonctions de  $C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$ . On a la majoration, pour  $N$  assez grand,

$$\|r_N\|_{\infty} = \|f \star_{\text{per}} g - w_N\|_{\infty} \leq \frac{2\pi \mathcal{C}_m}{N^m} \left[ \left( \left\| \frac{d^m f}{dt^m} \right\|_2 + \|f\|_2 \right) \cdot \left( \left\| \frac{d^m g}{dt^m} \right\|_2 + \|g\|_2 \right) \right] \quad (5.45)$$

*Démonstration.* Il résulte de la décomposition (5.44) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \|r_N\|_{\infty} &\leq \|(f - S_N^{\mathbf{D}}(f)) \star_{\text{per}} g\|_{\infty} + \|S_N^{\mathbf{D}}(f) \star_{\text{per}} (g - S_N^{\mathbf{D}}(g))\|_{\infty} \\ &\leq 2\pi [\|f - S_N^{\mathbf{D}}(f)\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|S_N^{\mathbf{D}}(f)\|_2 \cdot \|g - S_N^{\mathbf{D}}(g)\|_2] \\ &\leq 2\pi [\|f - S_N^{\mathbf{D}}(f)\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|S_N^{\mathbf{D}}(f)\|_2 \cdot \|g - S_N^{\mathbf{D}}(g)\|_2 + \|f - S_N^{\mathbf{D}}(f)\|_2 \cdot \|g - S_N^{\mathbf{D}}(g)\|_2] \end{aligned} \quad (5.46)$$

La conclusion résulte alors directement du Théorème (5.4). □

## 5.7 Remarques sur l'implémentation numérique

### 5.7.1 Forme matricielle du calcul des coefficients de Fourier discrets

On peut calculer les séries de Fourier discrètes et les implémenter numériquement sur ordinateur dès que l'on connaît la fonction  $f$  soit à l'aide d'une formule, soit si on connaît directement sa valeur aux  $2N$  points d'échantillonnage  $\{t_j\}_{j=0, \dots, 2N-1}$  de l'intervalle  $[0, 2\pi]$  donnés par

$$t_j = \frac{j\pi}{N} \text{ pour } j = 0, \dots, 2N-1,$$

De telles valeurs peuvent par exemple être fournies par des mesures à l'aide d'un instrument adapté. Une fois connues les  $2N$  valeurs  $\{f(t_j)\}_{j=0, \dots, 2N-1}$  la valeur des  $2N$  coefficients de Fourier

$\hat{f}_N^{\mathbf{D}}(k)$ , pour  $k = -N+1, \dots, N$  s'en déduit directement à l'aide de la formule (5.8). On peut réécrire cette formule sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \hat{f}^{\mathbf{D}}(-N+1) \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(-N+2) \\ \dots \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(0) \\ \dots \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(N-1) \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(N) \end{pmatrix} = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} 1 & \omega^{N+1} & \omega^{2(N+1)} & \omega^{3N} & \dots & \omega^{(2N-1)(N+1)} \\ 1 & \omega^{N+2} & \omega^{2(N+2)} & \omega^{3(N+2)} & \dots & \omega^{(2N-1)(N+2)} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \dots & \omega^{(2N-1)(N-1)} \\ 1 & \omega^N & \omega^{2N} & \omega^{3N} & \dots & \omega^{(2N-1)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ \dots \\ f(t_{2N-2}) \\ f(t_{2N-1}) \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

où on a utilisé, pour les premières lignes, le fait que  $\omega^{-N} = \omega^N$ . La matrice  $2N \times 2N$  carrée  $A_N$  définie par

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{N+1} & \omega^{2(N+1)} & \omega^{3(N+1)} & \dots & \omega^{(2N-1)(N+1)} \\ 1 & \omega^{N+2} & \omega^{2(N+2)} & \omega^{3(N+2)} & \dots & \omega^{(2N-1)(N+2)} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \dots & \omega^{(2N-1)(N-1)} \\ 1 & \omega^N & \omega^{2N} & \omega^{3N} & \dots & \omega^{(2N-1)N} \end{pmatrix}$$

ne dépend que du nombre  $\omega = \omega_{2N} = \exp(-\frac{i\pi}{N})$  et donc uniquement du paramètre  $N$ . Le vecteur colonne (de taille  $2N$ )  $F_N$  défini par

$$F_N = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ \dots \\ f(t_{2N-2}) \\ f(t_{2N-1}) \end{pmatrix}.$$

contient pour sa part toute les données de la fonctions  $f$  nécessaires au calcul des coefficients de Fourier discrets. La relation (5.47) s'écrit alors sous forme matricielle condensée

$$\hat{F}_N^{\mathbf{D}} = A_N \cdot F_N, \quad (5.48)$$

où on a posé

$$\hat{F}_N^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \hat{f}^{\mathbf{D}}(-N+1) \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(-N+2) \\ \dots \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(0) \\ \dots \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(N-1) \\ \hat{f}^{\mathbf{D}}(N) \end{pmatrix}$$

On peut simplifier quelque peu l'expression de la matrice  $A_N$  en introduisant le vecteur colonne  $\tilde{F}_N$  défini par

$$\tilde{F}_N = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \omega^{(N+1)} \\ f(t_2) \omega^{2(N+1)} \\ f(t_3) \omega^{3(N+1)} \\ \dots \\ f(t_{2N-2}) \omega^{(2N-2)(N+1)} \\ f(t_{2N-1}) \omega^{(2N-1)(N+1)} \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

On obtient alors la relation suivante entre  $\hat{F}_N^{\mathbf{D}}$  et  $\tilde{F}_N$ .

**Proposition 5.8.** *On a l'identité*

$$\hat{F}_N^{\mathbf{D}} = \frac{1}{2N} \Omega_{2N} \cdot \tilde{F}_N, \quad (5.50)$$

où  $\Omega_m$ , désigne, pour  $m \in \mathbb{N}$ , la matrice carrée  $m \times m$  définie par

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \dots & \omega_m^{m-1} \\ 1 & \omega_m^2 & \omega_m^4 & \dots & \omega_m^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_m^{m-1} & \omega_m^{2(m-1)} & \dots & \omega_m^{(m-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

où on a posé

$$\omega_m = \exp\left(-\frac{2i\pi}{m}\right).$$

**Remarque 5.8.** On peut aussi écrire, de manière plus concise,

$$\begin{aligned} \Omega_m &= (\Omega_{m,i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \text{ avec} \\ \Omega_{m,i,j} &= \omega_m^{(i-1)(j-1)} = \exp\left(-\frac{2i\pi}{m}(i-1)(j-1)\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Les coefficients  $\Omega_{m,i,j}$  de la matrice  $\Omega$  sont donc des racines  $m$ -ièmes de l'unité, et à ce titre des nombres complexes de module 1. Il en résulte que la matrice  $\Omega_m$  compte au plus  $m$  coefficients différents.

### 5.7.2 Nombre d'opérations élémentaires de calcul

La formule (5.50) peut bien entendu s'implémenter directement sur ordinateur dès lors que l'on dispose des données  $\tilde{F}_N$ . Pour obtenir une idée du temps de que l'ordinateur va mettre pour arriver à bout de ce calcul, il est utile d'avoir un ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires mises en jeu. Par opération élémentaires, on entend :

- calculs élémentaires : additions, soustractions, multiplications, divisions, voire appel à des fonctions préprogrammées élémentaires (sinus, cos, exponentielle...)
- appel ou stockage mémoire élémentaires

La taille mémoire nécessaire pour stocker les données et les résultats de calculs intermédiaires et aussi un élément important à prendre en compte.

Dans le cas qui nous intéresse, à savoir l'implémentaion de la formule (5.50), la série d'opérations mise ne jeu est :

- Calcul des nombres  $\omega_N^{jk}$ ,  $k = -N+1, N$ ,  $j = 0, \dots, 2N-1$  : il n'y a en fait que  $2N$  tels nombres différents
- stockage machine de ces nombres
- multiplication avec des nombres  $\omega_N^{jk}$  avec les nombres  $f(t_j)$ . Appel de ces nombres dans les memoire correspondantes.
- somme sur  $j = 0, \dots, 2N-1$ .

Un rapide calcul montre alors que le nombres d'opérations élémentaires en jeu est de l'ordre de  $N^2$ . Au chapitre suivant, nous verrons un algorithme beaucoup plus efficace.

## EXERCICES

### Exercice I

Montrer, sans faire de calcul, que l'on a

$$\Omega_{2N}^{-1} =$$



# Chapitre 6

## La transformation de Fourier rapide

### 6.1 Introduction

Nous revenons dans cette partie sur le calcul de produits matriciels du type de (5.50), à savoir, pour un entier  $m$  donné, le calcul effectif du vecteur colonne  $Y_m$  de dimension  $m$  donné par

$$Y_m = \Omega_m \cdot X_m, \quad (6.1)$$

où  $X_m$  est un vecteur colonne de taille  $m$  donnée, et où  $\Omega_m$  désigne la matrice carrée de taille  $m$  donnée par (voir (5.51))

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \dots & \omega_m^{m-1} \\ 1 & \omega_m^2 & \omega_m^4 & \dots & \omega_m^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_m^{m-1} & \omega_m^{2(m-1)} & \dots & \omega_m^{(m-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

avec

$$\omega_m = \exp\left(-\frac{2i\pi}{m}\right) \text{ de sorte que } \omega_m^m = 1.$$

On peut aussi écrire, de manière plus concise,

$$\begin{aligned} \Omega_m &= (\Omega_{m,i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \text{ avec} \\ \Omega_{m,i,j} &= \omega_m^{(i-1)(j-1)} = \exp\left(-\frac{2i\pi}{m}(i-1)(j-1)\right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nous avons vu que le calcul direct de  $Y_m$  nécessite de l'ordre de  $m^2$  opérations élémentaires. Dans cette partie, nous allons décrire un algorithme différent que ne nécessite que de l'ordre de  $m \log m$  opérations. Cet algorithme exploite de manière astucieuse les propriétés de symétrie de la matrice  $\Omega_m$ , et est connu sous le nom de Transformation de Fourier rapide ("Fast Fourier Transform" en anglais, ou FFT).

## 6.2 Diviser pour régner

### 6.2.1 Le principe de base

Notons  $\{y_{m,k}\}_{k=0,\dots,m-1}$  les composantes du vecteur  $Y_m$ , et  $\{x_{m,p}\}_{p=0,\dots,m-1}$  les composantes du vecteur  $X_m$  de sorte que l'on a

$$Y_m = (y_{m,0}, \dots, y_{m,m})^T \text{ et } X_m = (x_{m,0}, \dots, x_{m,m})^T.$$

Nous écrirons aussi parfois

$$Y_m = \mathcal{F}_m(X_m) \text{ et } y_{m,k} = \mathcal{F}_m^k(X_m)$$

La formule (6.1) correspond alors à la somme

$$\mathcal{F}_m^k(X_m) \equiv y_{m,k} = \sum_{p=0}^{m-1} x_{m,p} \omega_m^{pk} \text{ pour tout } k = 0, \dots, m-1, \quad (6.4)$$

formule que nous pouvons étendre à des entiers  $k$  quelconques. Notons au passage que l'on a alors la relation de périodicité

$$\mathcal{F}_m^{k+m}(X_m) = \mathcal{F}_m^k(X_m), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, \quad (6.5)$$

une conséquence immédiate du fait que  $\omega_m^m = 1$ .

Considérons maintenant le cas où  $m$  est paire, c'est à dire de la forme  $m = 2n$ , et distinguons, dans la donnée  $X_m$  les coordonnées paires des coordonnées impaires. Ceci nous amène à introduire des vecteurs colonnes de taille  $n = m/2$

$$\begin{cases} X_n^0 = (x_{m,0}, x_{m,2}, \dots, x_{m,2n-2})^T \\ X_n^1 = (x_{m,1}, x_{m,3}, \dots, x_{m,2n-1})^T \end{cases}, \quad (6.6)$$

et à réécrire les identités (6.4) sous la forme, pour  $k = 0, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} y_{m,k} &= \sum_{j=0}^{n-1} x_{m,2j} \omega_m^{2jk} + \sum_{j=0}^{n-1} x_{m,2j+1} \omega_m^{(2j+1)k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_{m,2j} \omega_n^{jk} + \omega_m^k \sum_{j=0}^{n-1} x_{m,2j+1} \omega_n^{jk}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\omega_m^2 = \omega_{2n}^2 = \exp\left(-\frac{4i\pi}{2n}\right) = \exp\left(-\frac{2i\pi}{n}\right) = \omega_n$$

dans la deuxième ligne. On reconnaît dans chacun des deux termes du membre de droite de cette identité des transformées à l'ordre  $n = m/2$ . De manière plus condensée, on peut réécrire ce qui précède sous la forme :

**Proposition 6.1.** *Supposons que  $m$  est paire,  $m = 2n$ . On a alors, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , l'identité*

$$\mathcal{F}_m^k(X_m) = \mathcal{F}_n^k(X_n^0) + \omega_m^k \mathcal{F}_n^k(X_n^1). \quad (6.8)$$

**Commentaire.** L'identité (6.8) est à la base de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide. De manière pratique, il signifie que, si  $m$  est paire pour calculer la transformée  $\mathcal{F}_m(X_m)$ , il suffit de :

1. Déterminer les vecteurs  $X_n^0$  et  $X_n^1$ , de taille  $n = \frac{m}{2}$
2. Calculer deux transformée de vecteur de taille  $n = \frac{m}{2}$  pour  $k = 0, n-1$ , à savoir  $\mathcal{F}_n^k(X_n^0)$  et  $\mathcal{F}_n^k(X_n^1)$ .
3. Calculer  $\mathcal{F}_m^k(X_m)$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  grâce à la formule (6.8), c'est à dire

$$\mathcal{F}_m^k(X_m) = \mathcal{F}_n^k(X_n^0) + \omega_m^k \mathcal{F}_n^k(X_n^1), \text{ pour } k = 0, \dots, n-1.$$

4. En déduire  $\mathcal{F}_m^k(X_m)$  pour  $k = n, \dots, m-1 = 2n-1$  et utilisant la périodicité (6.5), c'est à dire en écrivant

$$\mathcal{F}_m^k(X_m) = \mathcal{F}_n^{k-n}(X_n^0) + \omega_m^k \mathcal{F}_n^{k-n}(X_n^1) \text{ pour } k = n, \dots, 2n-1 = m-1. \quad (6.9)$$

Notons que les étapes 1, 3, 4 impliquent un nombre total d'opérations majorées par  $Cm$ , où  $C > 0$  désigne une constante universelle.

## 6.2.2 Principe de l'algorithme de FFT : le cas $m = 2^\ell$

### Itérations de (6.8)

Le cas le plus favorable est celui où

$$m = 2^\ell, \ell \in \mathbb{N}^*.$$

En effet dans ce cas,  $m$  est paire,  $n$  aussi,  $n/2$  également, etc... On peut ainsi itérer la formule (6.8)  $\ell$  fois, jusqu'à ce qu'on obtienne 1 comme résultat des divisions successives. Notons à cet effet que dans le cas  $m = 1$ , on a

$$\omega_1 = \exp\left(-\frac{2i\pi}{1}\right) = \exp(-2i\pi) = 1.$$

On obtient alors dans le cas  $m = 1$ , en prenant  $X_1 = (x_{1,0})$ , et en utilisant la formule (6.1) ou (6.4)

$$\mathcal{F}_1^0(X_1) = Y_1 \text{ avec } Y_1 = (x_{1,0}). \quad (6.10)$$

qui permet de terminer les itérations.

### La fonction $FFT(m, X_m)$

La mise en oeuvre informatique des idées précédentes nous conduit à créer dans le langage informatique choisi, par exemple Matlab, une fonction  $FFT(m, X_m)$  dont les arguments  $m$  et  $X_m$  sont :

1. Un **entier**  $m$ , représentant la longueur du vecteur  $X_m$ , de la forme  $2^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}^*$ . Il faut bien entendu "tester cette condition" : si on préfère, on peut prendre  $\ell$  comme argument, puisque  $m = 2^\ell$ .
2. Un **vecteur**  $X_m$  de taille  $m = 2^\ell$ .

La sortie de  $FFT(m, X_m)$  est un **vecteur de taille  $m$**  qui décrit le vecteur  $Y_m$  déduit du vecteur  $X_m$  de taille  $m$  par les relations (6.1) ou (6.4).

**Remarque 6.1.** Dans les formes (6.1) ou (6.4), les coordonnées des vecteurs  $X_m$  et  $Y_m$  sont indicées de 0 à  $m - 1$ . Comme il est plus courant d'indicer les coordonnées de 1 à  $m$ , en particulier en programmation, ceci nous induit quelques décalages d'une unité dans certaines formules.

### Description de l'algorithme récursif

On supposera dans toute cette partie que  $m$  est de la forme  $m = 2^\ell$ , avec  $\ell \in \mathbb{N}$ . Pour programmer la fonction  $FFT(m, X_m)$ , on peut procéder comme suit :

-Si  $m = 1$ , alors  $FFT(1, x)$ , où  $x$  désigne un vecteur de taille 1 (donc, en fait, un scalaire) retourne un vecteur de taille 1, donc un scalaire. On utilise la formule (6.10), qui nous donne simplement :

$$FFT(1, x) = (x). \quad (6.11)$$

-Si  $m > 1$ , on calcule  $FFT(m, X_m)$  grâce aux formules explicites (6.8) et (6.9). Ces dernières font appel aux fonctions  $\mathcal{F}_n^k(X_n^0)$  et  $\mathcal{F}_n^k(X_n^1)$ . La première étape, au niveau informatique, consiste à créer des fonctions  $X^0$  et  $X^1$  dont les arguments sont  $m$  et  $X_m$  et qui retournent comme valeur les vecteurs de longueur  $m/2$ , dont les composantes respectives correspondent aux vecteurs  $X_m^0$  et  $X_m^1$  (en tenant compte du décalage des indices signalé dans la Remarque 6.1). On peut les définir comme suit :

$$\begin{cases} (X^0(m, X_m))_k = (X_m)_{2k-1}, \text{ pour } k = 1, \dots, n = \frac{m}{2}. \\ (X^1(m, X_m))_k = (X_m)_{2k}, \text{ pour } k = 1, \dots, n = \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Les formules (6.8) et (6.9) permettent alors de définir la fonction  $FFT$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} (FFT(m, X_m))_k = \left(FFT\left(\frac{m}{2}, X^0(m, X_m)\right)\right)_k + \exp\left(-\frac{2i\pi(k-1)}{m}\right) \left(FFT\left(\frac{m}{2}, X^1(m, X_m)\right)\right)_k \\ \text{pour } k = 1, \dots, m/2, \text{ et} \\ (FFT(m, X_m))_k = \left(FFT\left(\frac{m}{2}, X^0(m, X_m)\right)\right)_{k-n} + \exp\left(-\frac{2i\pi(k-1)}{m}\right) \left(FFT\left(\frac{m}{2}, X^1(m, X_m)\right)\right)_{k-n} \\ \text{pour } k = \frac{m}{2} + 1, \dots, m. \end{cases} \quad (6.13)$$

### Récursivité de l'algorithme

On peut bien entendu être un peu perturbé par le fait que le calcul de la sortie de la fonction  $FFT$  fasse appel à la fonction  $FFT$  elle-même, dont les arguments sont des vecteurs dont la longueur est la moitié de celle du vecteur initial, et ceci tant que la longueur de l'argument est supérieur ou égale à 2. Ceci ne pose pas de problème d'un point de vue purement conceptuel, mais qu'en est-il de l'informatique ?

En réalité, la plupart des compilateurs modernes autorisent ce genre d'appel récursifs, en créant des "piles" correspondantes. Ce sont ces piles qui génèrent les itérations successives, sans qu'il soit en fait nécessaire de les écrire explicitement dans le programme, dont finalement la partie la plus compliquée consiste à séparer les coordonnées paires et impaires...

L'algorithme génère donc une pile "appel" successifs jusqu'à la  $\ell$ -ième étape. Pour cette dernière, on a alors  $m = 1$ , et la fonction  $FFT$  est alors donné par (6.11). L'algorithme remplit alors successivement les cases des lignes supérieures pour finalement donner le résultat.

**Remarque 6.2.** Notons également qu'à chaque étape, les coordonnées de la données  $X_m$  sont divisées en deux paquets comme indiqué sur la figure 6.1 ci-dessous. A la fin de l'algorithme, chaque coordonnée n'est utilisée qu'une seule fois.

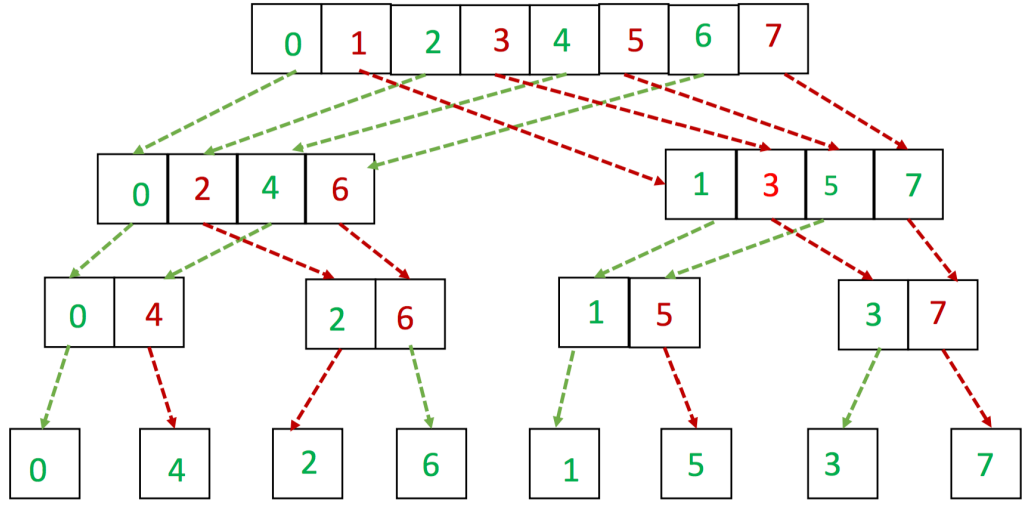


FIGURE 6.1 – Le cas  $m = 8 = 2^3$ . Repartition des indices de coordonnées dans piles. Ces indices sont compris entre 0 et  $2^\ell - 1 = 7$  sur notre exemple

### 6.2.3 Majoration du nombre d'opérations

Désignons par  $T(m)$  le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour calculer  $\mathcal{F}_m(X_m)$  (avec  $m$  de la forme  $m = 2^\ell$ ). Il résulte de la discussion faisant suite à la Proposition 6.1 plus haut que l'on a la majoration

$$T(m) \leq 2T\left(\frac{m}{2}\right) + Cm. \quad (6.14)$$

On en déduit le résultat important suivant :

**Proposition 6.2.** On a la majoration, pour  $m$  de la forme  $m = 2^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}^*$

$$T(m) \leq Cm \log m,$$

où  $C > 0$  désigne une constante universelle.

*Démonstration.* Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , posons  $a_j = T(2^j)$  de sorte que (6.14) donne

$$a_j \leq 2a_{j-1} + C2^j \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*.$$

La méthode de variation de la constante pour les suites suggère alors de poser  $b_j = 2^{-\ell} a_j$ , de sorte que

$$b_j \leq b_{j-1} + C \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*.$$

En sommant pour  $j = 1, \dots, \ell$  on obtient

$$b_\ell \leq b_0 + C\ell \text{ soit } a_\ell \leq 2^\ell a_0 + C\ell 2^\ell = 2^\ell (a_0 + C\ell).$$

Comme  $2^\ell = m$ , on a  $\ell = \log_2(m)$  et  $a_0 = T(1)$  on obtient donc

$$T(m) \leq m(T(1) + C \log_2 m),$$

ce qui entraîne le résultat. □

**Commentaire.** Nous avons vu au chapitre précédent que la programmation directe des séries de Fourier discrètes réclame de l'ordre de  $m^2$  opérations élémentaires. En appliquant l'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT), le nombre d'opérations élémentaires utilisées n'est plus que le l'ordre de  $m \log m$  opérations. Ceci représente un gain considérable pour des grandes valeurs de  $m$ .

Bien entendu, pour apprécier le gain réel pour des valeurs quelconques de  $m$  (en particulier des valeurs assez petites ou intermédiaires), il convient d'avoir une idée plus précise des constantes qui apparaissent dans nos majorations, et aussi distinguer des diverses opérations élémentaires mises en jeu.

## 6.3 Une présentation non récursive de l'algorithme de FFT

### 6.3.1 L'arbre des opérations

On peut éviter l'usage de la récursivité dans la programmation de l'algorithme de FFT en décrivant précisément l'ordre dans lequel se répartissent les  $2^\ell$  indices de coordonnées dans la dernière de l'arbre présenté dans la Figure 6.1. Une fois cette opération effectuée, on remonte alors dans l'arbre, en partant de la ligne du bas où tous les vecteurs sont de taille 1, pour aboutir, en  $\ell$  étapes au calcul du vecteur de taille  $2^\ell$  représentant la transformée de Fourier rapide. A chaque étape  $j$ , pour  $j = 1, \dots, \ell$  on part de  $2^{\ell-j+1}$  vecteurs de taille  $2^{j-1}$  situés à la  $j-1$ -ième ligne en partant du bas, que l'on regroupe en paires de vecteurs consécutifs, pour aboutir à  $2^{\ell-j}$  vecteurs de taille  $2 \times 2^{j-1} = 2^j$  en utilisant la formule de base (6.8) et (6.5). La partie la plus importante du travail consiste donc à décrire l'arbre et la manière de répartir les indices.

### 6.3.2 Ordre des indices sur la ligne inférieure

Pour déterminer l'ordre des indices sur la ligne du bas, on commence par exprimer chacun des nombres  $p \in \{0, \dots, 2^\ell - 1\}$  qui représentent les indices des coordonnées des vecteurs en base 2. Plus précisément, à tout nombre entier  $p \in \{0, 2^\ell - 1\}$ , on associe son écriture en base deux, complétée si nécessaire à gauche par des zéros, ce qui donne un ensemble ordonné de  $\ell$  nombres  $p_0, p_2, \dots, p_{\ell-1}$  appartenant à  $\{0, 1\}$  tels que

$$p = 2^{\ell-1} p_{\ell-1} + p_{\ell-2} 2^{\ell-2} + \dots + 2 p_1 + p_0.$$

On note alors

$$p = (p_{\ell-1} p_{\ell-2} \dots p_1 p_0)_{\text{deux}}$$

Par exemple, pour  $\ell = 3$ , on a

$$\begin{cases} 0 = (000)_{\text{deux}}, 1 = (001)_{\text{deux}}, 2 = (010)_{\text{deux}}, 3 = (011)_{\text{deux}} \\ 4 = (100)_{\text{deux}}, 5 = (101)_{\text{deux}}, 6 = (110)_{\text{deux}} \text{ et } 7 = (111)_{\text{deux}}. \end{cases}$$

On remarque ainsi que les nombres pairs sont les nombres qui se terminent par 0 en écriture binaire, les nombres impairs ceux qui se terminent par 1 en écriture binaire.

Pour  $p = (p_{\ell-1}p_{\ell-2}\dots p_1p_0)_{\text{deux}}$  un nombre entier quelconque compris entre 0 et  $2^\ell - 1$ , on définit le nombre entier  $I_{\text{nv}}(p)$  défini par

$$I_{\text{nv}}(p) = (p_0p_1p_{\ell-2}p_{\ell-1}\dots)_{\text{deux}}$$

c'est à dire que l'on a inversé l'ordre des chiffres en écriture binaire. On a en particulier

$$I_{\text{nv}}(p) \in \{0, 2^\ell - 1\} \text{ et } I_{\text{nv}} \circ I_{\text{nv}}(p) = p.$$

L'application  $I_{\text{nv}}$  est donc une bijection de l'ensemble  $\{0, 2^\ell - 1\}$  dans lui-même. Elle permet de caractériser entièrement la ligne la plus basse de l'arbre des opérations effectuées dans la FFT (voir Figures 6.1 et 6.2), c'est à dire la  $\ell + 1$ -ième ligne et dernière ligne en partant du haut. On a en effet :

**Proposition 6.3.** *Les indices de coordonnées apparaissant dans la  $\ell + 1$ -ième ligne, c'est à dire la ligne la plus basse de l'arbre des opérations de la FFT sont donnés, de la gauche vers la droite par*

$$I_{\text{nv}}(0) = 0, I_{\text{nv}}(1), \dots, I_{\text{nv}}(2^\ell - 2), I_{\text{nv}}(2^\ell - 1) = 2^\ell - 1. \quad (6.15)$$

*c'est à dire correspondent à l'image par  $I_{\text{nv}}$  des nombres  $0, \dots, 2^\ell - 1$  rangés par ordre croissant.*

La figure 6.2 montre comment cet ordonnancement se présente dans le cas  $\ell = 3$ .

Afin de décrire la preuve de ce résultat, notons  $\text{rg}_0(p)$  le rang, en partant de la gauche, de l'indice  $p$  sur la ligne du bas. La preuve découle des observations suivantes :

**Lemme 6.1.** *Soient  $p = (p_{\ell-1}p_{\ell-2}\dots p_1p_0)_{\text{deux}}$  et  $q = (q_{\ell-1}q_{\ell-2}\dots q_1q_0)_{\text{deux}}$  deux nombres entiers distincts de  $\{0, \dots, 2^\ell - 1\}$ . Posons*

$$i_0 = \inf\{i \in \{0, \ell - 1\}, p_i = q_i\}. \quad (6.16)$$

*Alors,  $0 \leq i_0 \leq \ell - 2$ , et  $p_{i_0+1} \neq q_{i_0+1}$ . On a l'équivalence suivante :*

$$\text{rg}_0(p) > \text{rg}_0(q) \text{ si et seulement si } p_{i_0+1} = 1. \quad (6.17)$$

**Démonstration du Lemme 6.1.** Si l'on considère l'arbre de l'algorithme, on peut constater qu'à la  $i - 1$  'eme ligne (en partant du haut), que, si

- $p_{i-1} = 0$ , alors, on se déplace dans la partie suivante de l'arbre vers la partie à gauche
- $p_{i-1} = 1$ , alors, on se déplace dans la partie suivante de l'arbre vers la partie à droite.

Soit alors le nombre  $i_0$  défini dans (6.16). Comme  $p$  et  $q$  sont distincts, on a nécessairement  $i_0 \leq 2^\ell - 2$ , car sinon les deux nombres seraient identiques, et par définition de  $i_0$  on a  $p_{i_0+1} \neq q_{i_0+1}$ . On vu de la première remarque, on observe que, jusqu'à l'étape  $i_0$ , les cases correspondant aux nombres  $p$  et  $q$ , ont suivi le même parcours, et se retrouvent donc dans la même zone à l'étape  $i_0$ . En revanche, les deux parcours vont se séparer à l'étape  $i_0+1$ , car  $p_{i_0+1} \neq q_{i_0+1}$ . Si on suppose que  $p_{i_0+1} = 1$ , alors on a  $q_{i_0+1} = 0$ , et le parcours correspondant à  $p$  va aller vers la droite, et celui de  $q$  vers la gauche. Comme les parcours ne peuvent plus se croiser ultérieurement,  $p$  se situe, pour la dernière étape à droite de  $q$ , ce qui entraîne la conclusion (6.17).  $\square$





La Proposition 6.3 est maintenant une conséquence des résultats précédents.

*Preuve de la Proposition 6.3.* On voit, grâce au Corollaire 6.1 que les nombres sur la ligne inférieure de l'arbre sont rangés dans le même ordre que les nombres  $I_{\text{nv}}(0), \dots, I_{\text{nv}}(2^\ell - 1)$ . Comme les deux familles de nombres comportent le même nombre d'éléments, la conclusion en découle.  $\square$

### 6.3.3 Description de l'algorithme non récursif

Rappelons que notre but est de calculer le vecteur

$$Y_m = \mathcal{F}_m(X_m) \text{ pour } m = 2^\ell, \ell \in \mathbb{N},$$

où  $X_m = (x_{m,0}, x_{m,2}, \dots, x_{m,2^\ell-1})$  est un vecteur donné, de taille  $m = 2^\ell$ . Les résultats précédents nous permettent de décrire une version non récursive de l'algorithme. cet algorithme consiste à "remonter" l'arbre de distributions des coordonnées décrit dans les figures 6.1 et 6.2, en partant de la ligne inférieure, qui ne comporte que des cases à un seul élément. L'algorithme comporte plusieurs étapes.

**Etape préliminaire.** On commence par calculer la famille des  $2^\ell$  indices de la dernière ligne, rangés de gauche à droite, à savoir le vecteur

$$S = (s_0, s_1, \dots, s_{2^\ell-1}) \equiv (I_{\text{nv}}(0), I_{\text{nv}}(1), I_{\text{nv}}(2), \dots, I_{\text{nv}}(2^\ell - 1)).$$

La formation de ce vecteurs d'indices correspondant donc à une permutation des indices initiaux, les deux indices extrémaux restant à leur place car  $s_0 = 0$  et  $s_{2^\ell-1} = 2^\ell - 1$ . On forme ensuite le vecteur  $Z^m$  déduit de  $X_m$  par le changement d'indices correspondant à  $S$  à savoir

$$Z_m = (z_0, \dots, z_{2^\ell-1}) \equiv (x_{m,s_0}, x_{m,s_1}, \dots, x_{m,s_{2^\ell-1}}), \quad (6.20)$$

c'est à dire c'est à dire

$$z_i = x_{m,s_i} \text{ pour tout } i = 0, \dots, 2^\ell - 1. \quad (6.21)$$

L'algorithme se déroule ensuite en  $\ell$  étapes. A départ de chaque étape, on part d'une famille de vecteurs, l'algorithme consiste à regrouper deux vecteurs consécutifs de la famille, pour former une famille de vecteurs de taille double, mais en réduisant le cardinal de cette famille de taille moitié. On part, à l'étape 1, d'une famille de  $2^\ell$  vecteurs de taille 1, la famille  $\{F^{0,i}\}_{i=0,\dots,2^\ell-1}$ . Chaque vecteur  $F^{0,i} = (f^{0,i})$  est donné par

$$f^{0,i} = z_i, \text{ c'est à dire } F^{0,i} = (z_i) \text{ pour } i = 0, \dots, 2^\ell - 1. \quad (6.22)$$

En d'autre termes, on transforme le vecteur  $Z_m$  de taille  $m$  en  $m$  vecteurs de taille 1. la somme du nombre de composantes de tous les vecteurs reste constante, égale à  $m$  à chaque étape. A l'étape  $\ell$ , on obtient finalement un seul vecteur de taille  $2^\ell = m$ , qui nous donnera la FFT désirée. Voyons maintenant le détail de ces étapes.

**Etape 1.** Notre point de départ est la famille de  $m$  vecteurs  $\{F^{0,i}\}_{i=0,\dots,2^\ell-1}$ , tous de longueur 1, donnée en (6.22), déduite de manière immédiate du vecteur  $Z_m$  donné en (6.20). On regroupe les vecteurs  $F^{0,i}$  par paires consécutives, pour former la première itération de l'algorithme. Cette dernière conduit à construire une famille de  $m/2 = 2^{\ell-1}$  vecteurs  $\{F^{1,i}\}_{i=0,\dots,m/2-1}$ , tous de longueur 2 cette fois-ci. Plus précisément, on calcule les  $m/2 = 2^{\ell-1}$  vecteurs

$$F^{1,i} = (f^{i,2}(0), f^{i,2}(1)) \in \mathbb{C}^2, \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-1} - 1 = m/2 - 1,$$

à deux composantes, par les formules simples suivantes

$$\begin{cases} f^{1,i}(0) = z_{2i} + z_{2i+1} \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-1} - 1, \\ f^{1,i}(1) = z_{2i} + \omega_2 z_{2i+1} \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-1} - 1, \end{cases} \quad (6.23)$$

**Etape 2.** On part maintenant de la famille de  $m/2$  vecteurs  $\{F^{1,i}\}_{i=0,\dots,2^{\ell-1}-1}$ , tous de longueur 2, construits en (6.23). La deuxième itération consiste, comme pour l'étape 1 à former, à partir d'une paire de deux vecteurs consécutifs  $\{F^{1,2i}, F^{1,2i+1}\}$ ,  $i = 0, \dots, m/4 - 1$ , un nouveau vecteur à quatre composantes. Ceci conduit à une nouvelle famille de  $m/4 = 2^{\ell-2}$  de vecteurs  $\{F^{2,i}\}_{i=0,\dots,m/4-1}$  à 4 composantes. Plus précisément, pour  $i = 0, 2^{\ell-1} - 1$ , on calcule les  $2^{\ell-2}$  vecteurs

$$F^{2,i} = (f^{2,i}(0), f^{2,i}(1), f^{2,i}(2), f^{2,i}(3)) \in \mathbb{C}^4, \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-2} - 1 = m/4 - 1,$$

à quatre composantes, en utilisant les relations (6.8) et (6.9) par les formules

$$\begin{cases} f^{2,i}(0) = f^{1,2i}(0) + f^{1,2i+1}(0) \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-2} - 1, \\ f^{2,i}(1) = f^{1,2i}(1) + \omega_4 f^{1,2i+1}(1) \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-2} - 1, \\ f^{2,i}(2) = f^{1,2i}(0) + \omega_4^2 f^{1,2i+1}(0) \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-2} - 1, \\ f^{2,i}(3) = f^{1,2i}(1) + \omega_4^3 f^{1,2i+1}(1) \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-2} - 1, \end{cases}$$

On procède ainsi par itération, en regroupant les vecteurs deux à deux et obtenant par des formules similaires des vecteurs de taille double. A l'issu de la  $j - 1$ -ème étape, on a obtenu  $m/2^{j-1} = 2^{\ell-j+1}$  vecteurs de taille  $2^{j-1}$ , notés  $F^{j-1,i}$ ,

$$F^{j-1,i} = (f^{j-1,i}(0), f^{j-1,i}(1), f^{j-1,i}(2), \dots, f^{j-1,i}(2^{j-1} - 1)) \in \mathbb{C}^{2^{j-1}}, \text{ pour } i = 0, \dots, 2^{\ell-j+1} - 1.$$

Décrivons maintenant ce qui se passe à l'étape  $j$ .

**Etape  $j$ .** On regroupe les  $2^{\ell-j+1}$  vecteurs  $F^{j-1,i}$  par paires consécutives  $\{F^{j-1,2i}, F^{j-1,2i+1}\}$ , pour former de nouveaux vecteurs de tailles double  $F^{j,i}$ , pour  $i = 0, \dots, m/2^{j-1} - 1$ . Pour  $i = 0, 2^{\ell-j} - 1$ , on calcule les  $2^{\ell-j}$  vecteurs

$$F^{j,i} = (f^{j,i}(0), f^{j,i}(1), f^{j,i}(2), \dots, f^{j,i}(2^j - 1)) \in \mathbb{C}^{2^j}$$

à  $2^j$  composantes définis, en utilisant les formules (6.8) et (6.9). Ceci conduit aux relations, pour  $i = 0, \dots, 2^{\ell-j} - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{j,i}(0) = f^{j-1,2i}(0) + f^{j-1,2i+1}(0) \\ f^{j,i}(1) = f^{j-1,2i}(1) + \omega_{2^j} f^{j-1,2i+1}(1) \\ \dots\dots\dots \\ f^{j,i}(k) = f^{j-1,2i}(k) + \omega_{2^j}^k f^{j-1,2i+1}(k) \text{ pour } k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1 \\ \dots\dots\dots \\ f^{j,i}(2^{j-1} - 1) = f^{j-1,2i}(2^{j-1} - 1) + \omega_{2^j}^{2^{j-1}-1} f^{j-1,2i+1}(2^{j-1} - 1), \end{array} \right. \quad (6.24)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{j,i}(2^{j-1}) = f^{j-1,2i}(0) + \omega_{2^j}^{2^{j-1}} f^{j-1,2i+1}(0) \\ f^{j,i}(2^{j-1} + 1) = f^{j-1,2i}(1) + \omega_{2^j}^{2^{j-1}+1} f^{j-1,2i+1}(1), \\ \dots\dots\dots \\ f^{j,i}(k + 2^{j-1}) = f^{j-1,i}(k) + \omega_{2^j}^{(k)} f^{j-1,2i+1}(k) \text{ pour } k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1 \\ \dots\dots\dots \\ f^{j,i}(2^j - 1) = f^{j-1,2i}(2^{j-1} - 1) + \omega_{2^j}^{(2^j-1)} f^{j-1,2i+1}(2^{j-1} - 1). \end{array} \right. \quad (6.25)$$

**Fin de l'algorithme.** L'algorithme s'arrête à la fin de l'étape  $j = \ell$ . le résultat final est donné par

$$Y_m = W_0^{2^\ell - 1}.$$

### 6.3.4 Mise en oeuvre informatique de l'algorithme FFT non récursif

La programmation informatique de l'algorithme précédent suit les étapes décrite plus haut. Nous présentons ci-dessous une manière de procéder (il y a bien sûr beaucoup d'autres, qui tiennent compte, entre autres, des caractéristiques du langage et du compilateur...).

**Format des données et des calculs intermédiaires.** Rappelons qu'on se donne  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , et un vecteur  $X_m$  de taille  $m = 2^\ell$ , et qu'on cherche à calculer  $Y_m$ , un vecteur de de taille  $m = 2^\ell$  également, donné par (6.1). L'argument et la sortie sont donc des vecteurs de taille  $m$ . En revanche, les calculs intermédiaires utilisent des vecteurs de taille variable, dépendant en particulier de l'indice  $j$  de la boucle : Il s'agit en particulier de la collection de vecteurs  $2^{\ell-j}$  vecteurs  $F^{j,i}$  de taille  $2^{\ell-j}$ . Une manière de contourner cette difficulté est d'introduire le vecteur  $\mathbb{F}^j$  de taille  $m = 2^\ell$  qui regroupe toutes les composantes des vecteurs  $F^{j,i}$ ,  $i = 0, \dots, 2^j - 1$  :

$$\mathbb{F}^j = \left( \underbrace{f^{j,0}(0), \dots, f^{j,0}(2^j - 1))}_{F^{j,0}}, \dots, \underbrace{f^{j,2^j-1}(0), \dots, f^{j,2^j-1}(2^j - 1))}_{F^{j,2^j-1}} \right) \in \mathbb{C}^m. \quad (6.26)$$

**Etape préliminaire.** Elle comporte deux sous-étapes :

- On crée une fonction **Inv** ( $n, k$ ) dont l'arguments sont deux entiers positifs ou nuls,  $n$  et  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$ . Cette fonction retourne l'entier  $q \in \{0, \dots, n\}$  dont l'écriture en base deux correspond à l'inverse de l'écriture en base 2 de  $k$ .
- On crée une fonction **Z**( $n, X$ ) dont l'argument est un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un vecteur  $X$  de taille  $n$ . La sortie est également un vecteur de taille  $n$ . Elle est donnée par

$$(\mathbf{Z}(n, X))_k = X_{\text{Inv}(n, k-1)} \text{ pour } k = 1, \dots, n.$$

**La fonction F.** On introduit une fonction **F**( $\ell, j, X_{\text{in}}$ ) qui effectue le calcul décrit en (6.24) et (6.25). Les arguments  $\ell, j, X_{\text{in}}$  sont tels que

- $\ell$  désigne entier supérieur ou égal à 1.
- $j$  désigne un entier compris entre 1 et  $\ell$ .
- $X_{\text{in}}$  désigne un vecteur de composantes complexes de longueur  $2^\ell$ . Les calculs (6.24) et (6.25), correspondent au cas  $X_{\text{in}} = \mathbb{F}^{j-1}$ , où  $\mathbb{F}^{j-1}$  est donné par (6.26).

La fonction  $\mathbf{F}$  retourne un vecteur de taille  $2^\ell$ . Dans le cas  $X_{\text{in}} = \mathbb{F}^{j-1}$ , elle retourne le vecteur  $\mathbb{F}^j$ .

En reprenant les calculs (6.24) et (6.25), ainsi que la forme (6.26) du vecteur argument et de la sortie, on voit que la sortie est donnée par le calcul suivant :

Pour  $i = 0, \dots, 2^{\ell-j} - 1$ , faire

$$\begin{cases} (\mathbf{F}(\ell, j, X_{\text{in}}))_{(k+2^j i)} = (X_{\text{in}})_{(k+2^j i)} + \omega_{2^j}^{k-1} (X_{\text{in}})_{k+2^j i+2^{j-1}} & \text{pour } k = 1, \dots, 2^{j-1} \\ (\mathbf{F}(\ell, j, X_{\text{in}}))_{k+2^j i+2^{j-1}} = (X_{\text{in}})_{(k+2^j i)} + \omega_{2^j}^{k-1+2^{j-1}} (X_{\text{in}})_{k+2^j i+2^{j-1}} & \text{pour } k = 1, \dots, 2^{j-1}. \end{cases} \quad (6.27)$$

**Initialisation.** On initialise la fonction  $F$  en choisissant

$$X_{\text{in}} = (\mathbf{Z}(n, X)).$$

**Itération.** L'algorithme peut se mettre sous forme de la boucle suivante, où  $X_{\text{out}}$  désigne un vecteur de taille  $2^\ell$ . Faire, pour  $j = 2, \dots, \ell$

$$\begin{cases} X_{\text{out}} = F(\ell, j, X_{\text{in}}) \\ X_{\text{in}} = X_{\text{out}}. \end{cases} \quad (6.28)$$

**Résultat.** Le résultat est donné en appelant  $X_{\text{out}}$ , c'est à dire

$$FFT(2^\ell, X_m) = X_{\text{out}}.$$

## 6.4 Vers la parallélisation

Les ordinateurs modernes sont souvent structurés autour de processeurs qui contiennent des cœurs multiples, parfois en très grand nombre. Ceci offre la possibilité de faire fonctionner les cœurs "en parallèles", c'est à dire de manière indépendante. Il faut néanmoins pour mettre en oeuvre une telle démarche diviser le travail en de multiples tâches indépendantes : Si on y arrive, on ne diminue pas le nombre d'opérations, mais on peut réaliser un gain significatif de temps, puisque plusieurs processeurs travaillent en même temps. La parallélisation de vient souvent une nécessité pour les programmes que l'on veut exécuter en temps réel.

Bien entendu, certains algorithmes se prêtent beaucoup mieux que d'autres à la "parallélisation". La transformation de Fourier rapide que nous venons de présenter fait justement partie des algorithmes qui sont particulièrement adaptés à un tel traitement. On peut le voir sur les opérations décrite pour la  $j$ -ième étape en (6.24). Pour chaque  $j = 1, \dots, \ell = \log_2(m)$ , on voit qu'il s'agit de  $2^j \times 2^{\ell-j} = 2^\ell = m$  opérations correspondant chacune à la combinaison d'une multiplication, une addition, et une sauvegarde. Ces  $m$  opérations sont toutes *indépendantes* les unes des autres. Si on dispose donc de  $m$  processeurs, on peut espérer réduire le temps de calcul de manière significative, en théorie de l'ordre de  $\log_2 m$  !

# Chapitre 7

## Théorie de Fourier pour les fonctions $L$ -périodiques, transformée de Fourier

### 7.1 Introduction

La théorie de Fourier, telle que nous l'avons développée dans les paragraphes précédents, est limitée aux données qui sont  $2\pi$ -périodique. Comment doit-on faire pour adapter la méthode à des données de périodes générales ? Comme nous allons le voir, quelques manipulations simples, reposant sur des changements de variables élémentaires, permettent facilement de traiter ces cas.

### 7.2 Décomposition des fonctions $L$ -périodiques

Soit  $L > 0$  considérons une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de période  $L$ , c'est à dire telle que

$$f(x + L) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Considérons maintenant la fonction  $F_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  déduite de  $f$  en posant

$$F_L(x) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

il résulte de cette définition que

$$F_L(x + 2\pi) = f\left(L\frac{x + 2\pi}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi} + L\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) = F_L(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de sorte que la fonction  $F$  est  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Si on suppose de plus que  $f$  est assez régulière (par exemple de carré intégrale sur une période), car on peut écrire la décomposition de Fourier

$$F_L(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{F}_L(k) \exp(ikx), \quad (7.2)$$

où pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{F}_L(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \exp(-ikx) dx. \quad (7.3)$$

Récrivons ces expressions en revenant à la fonction  $f$ . On a, en inversant (7.1)

$$f(x) = F_L\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de sorte que (7.2) donne la décomposition

$$f(x) = \frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c^L(k) \exp \left( i \frac{2\pi k}{L} x \right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

où on a posé

$$c^L(k) = L \widehat{F}_L(k) = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \exp(-ikx) dx = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) \exp(-ikx) dx.$$

Dans la dernière intégrale, faisons le changement de variable  $s = \frac{Lx}{2\pi}$ . Il vient

$$\begin{aligned} c^L(k) &= \int_0^L f(s) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{L} s\right) ds \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} L f(s) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{L} s\right) ds, \end{aligned} \quad (7.5)$$

la deuxième identité provenant du fait que l'intégrande est  $L$ -périodique. Pour interpréter ces coefficients, il est utile d'introduire la fonction  $\widehat{f}^L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\widehat{f}^L(\xi) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \exp(-i\xi s) ds \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.6)$$

de sorte que

$$c^L(k) = \widehat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.7)$$

On a donc

**Proposition 7.1.** *Soit  $f$  une fonction  $L$  périodique régulière. On a l'identité*

$$f(x) = \frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (7.8)$$

où la fonction  $\widehat{f}^L$  est donnée par (7.6).

**Remarque 7.1.** La définition (7.6) de la fonction  $\widehat{f}^L$  ne coïncide pas tout à fait avec celle introduite pour les coefficients de Fourier des fonctions  $2\pi$ -périodiques. On a, en effet, pour une fonction  $2\pi$ -périodique  $f$

$$\widehat{f}^L(\xi) = 2\pi \widehat{f}(k) \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \quad (7.9)$$

En revanche, cette convention est bien adaptée à la notion d'Intégrale de Fourier que nous verrons plus loin.

### 7.3 Les relations de Parseval

Commençons par écrire l'égalité de Parseval pour la fonction  $2\pi$ -périodique  $F_L$  : on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{F}_L(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_L(x)|^2 dx.$$

Exprimons cette relation à l'aide des coefficients  $c_L(k)$  et de la fonction  $f$ . On obtient, en utilisant l'égalité (7.7)

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_L(k)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\frac{2\pi x}{L})|^2 dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds\end{aligned}$$

Ainsi, on a la relation

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_L(k)|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds. \quad (7.10)$$

On obtient ainsi :

**Lemme 7.1.** *Soit  $f$  une fonction  $L$ -périodique. On a*

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \right|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds, \quad (7.11)$$

où la fonction  $\hat{f}^L$  est définie en (7.6).

## 7.4 La transformée de Fourier des fonctions sur $\mathbb{R}$

### 7.4.1 Définition de la transformée de Fourier

Donnons tout d'abord la définition de la Transformée de Fourier d'une fonction sur  $\mathbb{R}$  sous des hypothèses assez générales. La définition (7.6) suggère la définition suivante :

**Définition 5.** *Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  intégrable, c'est à dire telle que*

$$\|f\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

*On appelle transformée de Fourier de  $f$ , et on note  $\hat{f}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par*

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.12)$$

On note aussi souvent

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f), \text{ pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}). \quad (7.13)$$

On vérifie aisément que l'application  $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$  est linéaire, car

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g) \text{ pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ et } f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

On a comme première propriété :

**Proposition 7.2.** *Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ . la fonction  $\hat{f}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . On a la majoration*

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1. \quad (7.14)$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\hat{f}$  est bornée. On a par définition, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1, \end{aligned}$$

ce qui donne (7.14).

Pour voir que  $\hat{f}$  est continue, on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit  $\xi_0$  donnée dans  $\mathbb{R}$ . Il faut montrer que  $\hat{f}(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi_0)$  lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$ . Considérons à cet effet la famille de fonction  $h_\xi(\cdot)_{\xi \in \mathbb{R}}$  définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  par

$$h_\xi(x) = f(x) \exp(-i\xi x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

La famille  $h_\xi(\cdot)_{\xi \in \mathbb{R}}$  vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, à savoir

$$\begin{cases} |h_\xi(x)| \leq |f(x)| \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \text{ et pour } \xi \in \mathbb{R} \text{ (domination)} \\ h_\xi(x) \rightarrow h_{\xi_0}(x) \text{ lorsque } \xi \rightarrow \xi_0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ (convergence simple pour tout } x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

On a donc, par le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}} h_\xi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_{\xi_0}(x) dx \text{ lorsque } \xi \rightarrow \xi_0,$$

ce qui est la propriété demandée. □

Rappelons que l'on note  $C_b^0(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonction continues bornées sur  $\mathbb{R}$ . On peut ré-interpréter les résultats précédents en disant que l'application  $\mathcal{F}$  est *linéaire et continue* de  $L^1(\mathbb{R})$  vers  $C_b^0(\mathbb{R})$ .

## 7.4.2 Propriétés de la Transformée de Fourier des fonctions à support compact

Nous considérons de nouveau dans cette partie une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  régulière à support compact, c'est à dire telle qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$f(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]. \quad (7.15)$$

Rappelons que l'on note  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions régulières à support compact. On a

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

car, si  $f$  est à support dans  $[-A, A]$ , alors on a

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-A}^A |f(x)| dx \leq 2A \|f\|_\infty.$$

Il résulte alors de la Proposition 7.2 que la fonction  $\hat{f}$  est continue et bornée.

Le résultat suivant donne un premier lien entre la fonction  $f$  et la fonction  $\hat{f}$  :



**Théorème 7.1.** Soit  $L > 2A$ . Alors on a les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in [-A, A]. \quad (7.16)$$

et

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \right|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds. \quad (7.17)$$

*Démonstration.* On commence par périodiser la restriction de la fonction  $f$  restreinte à l'intervalle  $[-A, A]$ . On définit ainsi la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $L$  périodique en posant

$$g(x + kL) = f(x) \text{ pour tout } x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \text{ et } k \in \mathbb{Z}, \quad (7.18)$$

de sorte que  $g$  coïncide avec  $f$  sur l'intervalle  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , qui contient l'intervalle  $[-A, A]$  en dehors duquel la fonction  $f$  prend pour valeur 0. On a donc, en vertu de la Proposition 7.6

$$g(x) = \frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (7.19)$$

où, par définition

$$\begin{aligned} \widehat{g}^L(\xi) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \exp(-i\xi s) ds \text{ pour } \xi \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp(-i\xi s) ds \\ &= \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (7.20)$$

En combinant (7.20), (7.19) et (7.18) on obtient (7.16). L'identité (7.17) se démontre en partant de l'identité de Parseval pour la fonction  $L$ -périodique  $g$ , puis en utilisant de nouveau (7.20).  $\square$

En ce qui concerne la dérivation, on a les propriétés suivantes de la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  :

**Proposition 7.3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact. Alors la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\ &= \widehat{(-ix)^k f(\cdot)}(\xi). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Par ailleurs, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.22)$$

*Démonstration.* La relation (7.21) découle directement du théorème de dérivation sous le signe somme des intégrales dépendant d'un paramètre, en l'occurrence la variable  $\xi$  ici.

La démonstration de l'identité (7.22) résulte d'une intégration par parties. Considérons tout d'abord le cas  $k = 1$ , le cas général pouvant s'en déduire par récurrence. On a, par définition de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned}
 \widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\
 &= \int_{-A}^A \frac{df}{dx}(x) \exp(-i\xi x) dx \\
 &= \int_{-A}^A i\xi f(x) \exp(-i\xi x) dx + [f(x) \exp(-i\xi x)]_{-A}^A \\
 &= i\xi \int_{-A}^A f(x) \exp(-i\xi x) dx \\
 &= i\xi \widehat{f}(\xi),
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé. Au cours de ce calcul, on a utilisé, à la quatrième ligne, le fait que  $f(A) = f(-A) = 0$ .  $\square$

**Commentaire.** Nous avons utilisé la même notation, à savoir  $\widehat{f}$  pour désigner deux objets mathématiques différents, à savoir :

- Les séries de Fourier, c'est à dire la suite des coefficients  $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Cette notion n'a de sens que pour des fonctions périodiques de période  $2\pi$ .
- la transformée de Fourier  $\widehat{f}$ , qui est *une fonction* de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , et qui a un sens, pour l'instant, pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à support compact.

Nous étendrons un peu plus loin le domaine de définition de la transformée de Fourier. Nous voyons cependant dès à présent que les deux définitions portent sur des fonctions de nature différentes, ce qui évite pour l'instant les risques de confusion. Notons cependant les similitudes, en particulier au niveau des formules associées aux dérivées.

Une conséquence importante de la formule (7.22) est la suivante :

**Corollaire 7.1.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_m > 0$  dépendant uniquement de  $m$  et de  $f$  telle que l'on ait la majoration suivante de la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier  $\widehat{f}$*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_m}{|\xi|^m}, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \tag{7.24}$$

*De manière plus générale, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C(k, m) > 0$  dépendant uniquement de  $m$  et de  $f$  telle que l'on ait la majoration des dérivées*

$$\left| \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) \right| \leq \frac{C(m, k)}{|\xi|^m}, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \tag{7.25}$$

Cette majoration montre que la transformée de Fourier converge très rapidement vers zéro lorsque  $|\xi|$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.* On déduit de la formule (7.22) que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , on a

$$|(i\xi)^m \widehat{f}(\xi)| = \left| \widehat{\frac{d^m f}{dx^m}} \right| \leq 2A \left\| \frac{d^m f}{dx^m} \right\|_\infty.$$

Il en résulte que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{2A}{|\xi|^m} \left\| \frac{d^m f}{dx^m} \right\|_\infty,$$

ce qui donne (7.24). Pour (7.25), on utilise la relation  $\frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \widehat{(-ix)^k f(\cdot)}$ , et on observe que la fonction  $x \mapsto (-ix)^k f(x)$  est une fonction régulière à support compact dans  $[-A, A]$   $\square$

**Corollaire 7.2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact. Alors pour tout on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , et tout  $p \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}} (|\xi| + 1)^\ell \left| \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) \right|^p d\xi < +\infty.$$

Le résultat est une conséquence directe du Corollaire 7.1 et est laissé en exercice.

### 7.4.3 La formule d'inversion de Fourier

Le résultat qui suit est le résultat fondamental de la théorie.

**Théorème 7.2.** Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . On a l'identité, appelé formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (7.26)$$

On parle aussi souvent de formule de *recomposition spectrale* pour désigner la formule d'inversion de Fourier (7.26), les facteurs de Fourier  $\hat{f}(\xi)$  désignant les coefficients spectraux. L'idée générale est que l'on a décomposé le *signal*  $f$  sous forme de superposition de signaux sinusoïdaux  $x \mapsto \exp ix\xi$ , où  $\xi$  parcourt  $\mathbb{R}$  tout entier, pondéré par un coefficient  $\hat{f}(\xi)$ .

**Remarque 7.2.** Le membre de droite de (7.26) est bien défini grâce au Corollaire 7.2 (pour  $\ell = 0, k = 0$  et  $p = 1$ ), qui montre que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Commentaire.** Si l'on compare les formule (7.12) et (7.26) on voit que les variables  $x$  et  $\xi$ , jouent, au signe près des rôles symétriques. En particulier, la formule (7.26) permet de reconstituer intégralement la fonction  $f$  connaissant sa transformée de Fourier  $\hat{f}$ .

Par ailleurs, alors que les signaux  $2\pi$ -périodiques se décomposaient sous forme d'une série de multiples de signaux sinusoïdaux  $\exp(-ik\cdot)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on retrouve un phénomène assez similaire pour les fonctions à support compact : elle apparaissent comme superposition de fonction sinusoïdales  $\exp(-ik\xi x)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  avec deux différences importantes :

- Les valeurs de  $\xi$  parcourt  $\mathbb{R}$  tout entier, au lieu de  $\mathbb{Z}$
- la série est remplacée par une intégrale.

*Démonstration du Théorème 7.3.* On part de la formule (7.16) et on fait tendre la période  $L$  vers  $+\infty$ . Nous allons en effet montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donné

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\xi) d\xi, \quad (7.27)$$

ce qui donne bien le résultat, en vertu de l'identité (7.16), pour tout  $L > 2A$ .

Pour démontrer (7.27), on observe que le membre de gauche de la formule correspond à une somme de Riemann pour la fonction  $\varphi_x$  définie par  $\varphi_x(\xi) = \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi)$ , pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . Posons à cet effet  $h = \frac{2\pi}{L}$ , de sorte que  $h \rightarrow 0$  lorsque  $L \rightarrow +\infty$  et

$$\xi_k^h = kh, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors pour tout  $L > 0$

$$\frac{1}{L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f} \left( \frac{2\pi k}{L} \right) \exp \left( i \frac{2\pi k}{L} x \right) \right) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_x(\xi_k^h),$$

et on reconnaît bien une somme de Riemann pour la fonction régulière  $\varphi_x$  au second membre. On peut alors utiliser la preuve classique de convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de la fonction, qu'il faut néanmoins adapter car ici on travaille sur tout  $\mathbb{R}$ . Pour contrôler les "termes à l'infini", on utilise les résultats de la Proposition 7.3, qui nous donnent, pour une constante  $C > 0$  dépendant de  $f$

$$\begin{cases} |\varphi'_x(\xi)| \leq C(|x| + 1) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\ |\varphi_x(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^2}, \end{cases} \quad (7.28)$$

majorations qui vont nous permettre de démontrer (7.27). Pour ce faire, on se donne  $\varepsilon > 0$ , et on montre qu'il existe  $L_\varepsilon$  tel que si  $L \geq L_\varepsilon$  alors on a

$$\left| h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\mathbb{R}} \varphi_x(\xi) d\xi \right| \leq \varepsilon. \quad (7.29)$$

*Preuve de (7.29).* Il résulte de la deuxième majoration de (7.28) qu'il existe une constante  $B > 0$ , indépendante de  $h$  telle que

$$\begin{cases} \int_{|\xi| \geq B} |\varphi_x(\xi)| d\xi \leq C \int_{|\xi| \geq B} \frac{1}{\xi^2} d\xi \leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ h \sum_{|\xi_k^h| \geq B} |\varphi_x(\xi_k^h)| \leq Ch \sum_{|kh| \geq B} \frac{1}{|k|^2 h^2} = \frac{C}{h} \sum_{|kh| \geq B} \frac{1}{|k|^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \end{cases} \quad (7.30)$$

de sorte que

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| \geq 2B} \varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\mathbb{R} \setminus [B_1^h, B_2^h]} \varphi_x(\xi) d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.31)$$

où

$$\begin{cases} B_1^h = \sup\{kh, kh \geq -2B, k \in \mathbb{Z}\} < 0, \\ B_2^h = \inf\{(k+1)h, kh \leq 2B, k \in \mathbb{Z}\} > 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Par ailleurs, on a, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \left| h \varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} \varphi_x(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} (\varphi_x(\xi) - \varphi_x(\xi_k^h)) d\xi \right| \\ &\leq \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} |\varphi_x(\xi) - \varphi_x(\xi_k^h)| d\xi \\ &\leq Ch^2(|x| + 1), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que, par le théorème des accroissements finis, on a pour  $\xi \in [\xi_k^h, \xi_{k+1}^h]$

$$\left| \varphi_x(\xi) - \varphi(\xi_k^h) \right| \leq \|\varphi'_x\|_\infty |\xi - \xi_k^h| \leq Ch(|x| + 1).$$

En additionnant, il vient

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq Ch^2(|x| + 1) \cdot N_h, \quad (7.33)$$

où  $N_h$  désigne le nombre d'entiers  $k \in \mathbb{Z}$ , tels que  $-2B < kh < 2B + h$ . On vérifie facilement que

$$N_h \leq \frac{4B}{h} + 1$$

de sorte que (7.33) donne

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq Ch^2(|x| + 1) \cdot \left(\frac{4B}{h} + 1\right) \leq C'h = \frac{2\pi C'}{L}, \quad (7.34)$$

Où  $C' > 0$  est une constante dépendant de  $x$ . On choisit  $L_\varepsilon > 0$  assez grand pour que

$$\frac{2\pi C'}{L_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de sorte que si  $L \geq L_\varepsilon$ , on a

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.35)$$

En combinant (7.35) et (7.31), on obtient (7.29), ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 7.3.** Le théorème 7.3 montre en particulier que si  $\hat{f} = \mathcal{F}(f) = 0$ , alors nécessairement  $f = 0$ . En d'autres termes, le noyau de  $\mathcal{F}$  est réduit au singleton nul, ou encore  $\mathcal{F}$  est injective.

**Remarque 7.4.** Il résulte de la formule d'inversion de Fourier que l'on a, et toute fonction  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x), \end{aligned} \quad (7.36)$$

soit

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f(-\cdot).$$

#### 7.4.4 Le théorème de Parseval

**Théorème 7.3.** Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . On a l'identité, appelé formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (7.37)$$

*Idée de la démonstration.* La preuve est parallèle à la preuve du théorème 7.3 : On part de l'identité (7.17) pour  $L \geq 2A$  et on s'aperçoit que le membre de gauche correspond à une somme de Riemann pour le membre de droite de (7.37). On fait ensuite tendre  $L$  vers  $+\infty$  pour obtenir le résultat. Les détails sont laissés en exercice.  $\square$

On peut interpréter ce résultat à l'aide de la norme  $L^2(\mathbb{R})$ . Rappelons que, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  de module au carré intégrable, alors

$$\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.38)$$

On peut donc écrire l'identité (7.37) sous la forme

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|_2, \text{ pour tout } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

ou encore

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \right\|_2 = \|f\|_2, \text{ pour tout } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \quad (7.39)$$

Ceci montre que l'application linéaire  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}$  considérée comme application entre l'espace  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  à valeurs dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ , muni de sa norme habituelle  $\|\cdot\|_2$  est une *isométrie*.

## 7.5 Transformée de Fourier et convolution

Nous considérons dans cette partie deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrables sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire telles que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < +\infty.$$

Nous avons vu, dans le cours "Convolution, séries de Fourier" que la convolée  $f \star g$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Rappelons au passage que la convolée  $f \star g$  est définie par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy, \quad (7.40)$$

et que cette expression est définie pour presque tout  $x$  grâce au Théorème de Fubini. On a

**Théorème 7.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On a

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

*Démonstration.* On a pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) \exp(-i\xi x) dx \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(y) g(x-y) \exp(-i\xi x) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [f(y) \exp(-i\xi y)] [g(x-y) \exp(-i\xi(x-y))] dy dx \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable  $(x, y) \mapsto (y, u)$  où  $u = x - y$ , dont la valeur absolue du jacobien vaut 1. On obtient

$$\begin{aligned}\widehat{f \star g}(\xi) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [f(y) \exp(-i\xi y)] [g(u) \exp(-i\xi u)] dx du \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-i\xi y) dy \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} g(u) \exp(-i\xi u) du \right) \\ &= \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

## 7.6 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

### 7.6.1 Définition abstraite

Jusqu'à présent nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Nous allons voir comment la définition s'étend aux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ , où

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

en utilisant un argument abstrait.

**Théorème 7.5.** *Il existe une unique application linéaire continue  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  telle que pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$  on ait*

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}.$$

On a de plus l'identité de Parseval

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (7.41)$$

*Démonstration.* La preuve repose sur un argument classique de *prolongement d'application linéaires définies sur un sous-espace dense*. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Pour définir  $\mathcal{F}(f)$ , on part d'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , c'est à dire

$$\|f - f_n\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |f - f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Rappelons qu'un résultat classique d'analyse des fonctions affirme qu'une telle suite existe toujours. Considérons maintenant la suite  $(\mathcal{F}(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Cette suite est de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R})$  car, pour tous entiers  $m \geq n$  on a

$$\|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_m - f_n)\|_2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Comme  $L^2(\mathbb{R})$  est complet, la suite  $(\mathcal{F}(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  possède une limite  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Montrons maintenant que cette limite  $g$  est indépendante du choix de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . A cet effet, considérons une autre suite  $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Soit alors  $\tilde{g}$  la limite de la suite  $(\mathcal{F}(\tilde{f}_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On a tout d'abord

$$\|\tilde{f}_n - f_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\|\tilde{g} - g\|_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(\tilde{f}_n) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{f}_n - f_n\|_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

c'est à dire que  $\tilde{g} = g$ . Comme  $g$  ne dépend pas du choix de la suite, on peut alors écrire

$$g = \mathcal{F}(f).$$

On vérifie aisément que l'application  $f \rightarrow \mathcal{F}(f)$  est linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même. Pour conclure, il reste à établir (7.41) : ceci est une conséquence immédiate du fait que

$$\|\mathcal{F}(f_n)\|_2 = 2\pi \|f_n\|_2 \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$

puis d'un passage à la limite  $n \rightarrow +\infty$ . □

**Remarque 7.5.** Nous utiliserons souvent, comme auparavant, la notation

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} \text{ pour } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En revanche, la formule (7.12) n'a plus de sens pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , car le membre de droite n'est plus forcément intégrable.

Par polarisation de l'identité (7.41), on obtient

**Proposition 7.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \quad (7.42)$$

## 7.6.2 Formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

L'application  $\mathcal{F}$  étant linéaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même, on peut considérer l'application  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ . On a alors

**Théorème 7.6.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On a la formule

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f(-\cdot). \quad (7.43)$$

*Démonstration.* Nous avons déjà établi cette formule pour des fonctions  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans la Remarque . Il suffit ensuite de raisonner par densité  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , comme nous l'avons fait plus haut.

Le résultat précédent montre que l'application  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est bijective.

**Corollaire 7.3.** L'application  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est bijective et on a

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f(-\cdot)) \text{ pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (7.44)$$



*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\mathcal{F}$  est injective. Comme  $\mathcal{F}$  est linéaire, il suffit de vérifier que  $\text{Ker } \mathcal{F} = \{0\}$ . Soit  $f \in \text{Ker } \mathcal{F}$ , c'est à dire tel que  $\mathcal{F}(f) = 0$ . Comme

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2,$$

on en déduit que  $\|f\|_2 = 0$ , c'est à dire que  $f = 0$ . Ceci établit l'injectivité.

Passons maintenant à la surjectivité. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Appliquons la formule (7.43) à la fonction  $\check{f}$  définie par  $\check{f}(x) = f(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\check{f}) = 2\pi \check{f}(-\cdot) = 2\pi f,$$

c'est à dire

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\check{f})\right) = f.$$

Ainsi  $g \equiv \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\check{f})$  est un antécédent de  $f$  par  $\mathcal{F}$  : l'application est donc surjective. Comme elle est injective, elle est bijective, et  $g = \mathcal{F}^{-1}(f)$ , ce qui donne bien la formule (7.44).  $\square$

$\square$

### 7.6.3 Calculs pratiques

Pour définir  $\mathcal{F}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , nous avons utilisé un argument abstrait de densité. Dans ces conditions, comment calculer la transformée de Fourier d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ? Une solution est d'utiliser une approximation. On peut par exemple utiliser le Lemme suivant :

**Lemme 7.2.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions dans  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  telle que  $f_n \rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors, on a

$$\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

avec

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \exp(-ix\xi) dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}.$$

la preuve est laissée en exercice.

On peut utiliser le Lemme avec la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$ , c'est à dire

$$f_n(x) = f(x) \text{ pour } x \in [-n, n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } |x| > n.$$

On a alors

$$\widehat{f_n}(\xi) = \int_{-n}^n f(x) \exp ix\xi dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R},$$

et

$$\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

## 7.7 Transformée de Fourier et régularité

Nous avons déjà vu, dans le cas des fonctions à support compact, que, plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Nous allons voir dans cette partie une forme de réciproque.

**Proposition 7.5.** Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que pour un entier  $k \in \mathbb{N}$ , on ait

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^k |\widehat{f}(\xi)| d\xi < +\infty. \quad (7.45)$$

alors  $f$  est de classe  $C^k$ , et on a, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq k$

$$\frac{d^m f}{dx^m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi. \quad (7.46)$$

*Démonstration.* La preuve repose sur la formule d'inversion de Fourier combinée avec un argument d'approximation. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n,n]} \widehat{f})(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on vérifie que la fonction  $g_n$  est de classe  $C^\infty$ , et que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\frac{d^m f_n}{dx^m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Par les résultats du Chapitre 7.6, on voit que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (7.47)$$

Par ailleurs, il résulte de l'hypothèse (7.45) que, pour  $k = 0, \dots, m$ , les fonctions  $g_0, g_1, \dots, g_k$  définies par

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi \quad (7.48)$$

sont continues sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a pour tout entier  $0 \leq m \leq k$ , on a

$$\frac{d^m f_n}{dx^m} \rightarrow g_m \text{ uniformément sur } \mathbb{R} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (7.49)$$

En intégrant la relation (7.49), on vérifie que pour  $1 \leq m \leq k$ , on a

$$g_m = g'_{m-1}. \quad (7.50)$$

En combinant (7.47) et (7.49) pour  $m = 0$ , on obtient  $f = g_0$ . L'identité (7.50) montre alors que  $f$  est bien de classe  $C^k$ , la formule (7.46) découle alors de (7.48).  $\square$

## 7.8 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz

Nous avons vu que l'espace  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}$  n'était pas stable par transformée de Fourier, c'est à dire que la transformée de Fourier d'une fonction régulière à support compact est certes régulière, mais en général n'est pas à support compact. Pour avoir une classe de fonction régulière stable par transformée de Fourier, et donc dans laquelle elle est inversible, on doit élargir quelque peu la définition. Commençons par :

**Définition 6.** On dit d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  qu'elle est à décroissance rapide, si et seulement si, pour tout  $k, m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^k \left| \frac{d^m f}{dx^m}(x) \right| \right\} < +\infty.$$

On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions à décroissance rapide. Il est appelé espace de Schwartz.

Il découle immédiatement de cette définition que  $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Par ailleurs, les résultats du Corollaire 7.1 montrent que

$$\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On vérifie par ailleurs aisément, que si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . De sorte que l'on peut définir  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ .

**Proposition 7.6.** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

L'application  $\mathcal{F}$  définit donc une application linéaire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans lui-même. Cette application est inversible, d'inverse donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f}), \text{ où } \check{f}(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$