Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Cours n°2

Stef Graillat

Sorbonne Université

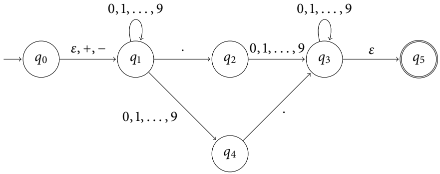
Résumé du cours précédent

- *Automate fini déterministe* : un AFD a un ensemble fini d'états et un ensemble fini de symboles d'entrées. Un état est désigné comme l'état initial et zéro ou plusieurs états sont désignés comme états finaux. Une fonction de transition détermine comment on passe d'un état à un autre lorsqu'on lit un symbole.
- *Diagramme de transition* : permet de représenter un automate par un graphe
- *Langage associé à un automate* : un mot est accepté si en partant de l'état initial, on arrive à un état final en lisant un par un les symboles du mot
- *Automate fini non-déterministe* : un AFN diffère d'un AFD en ce qu'un AFN peut avoir un nombre quelconque de transition en partant d'un état donné et en lisant un même symbole donné
- ε-transitions : elles permettent d'étendre un AFN en autorisant un changement d'état en lisant une entrée vide (c'est-à-dire en ne lisant aucun symbole).

Notations pour un ε-AFN

Un ε-AFN est un quintuplet $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

Exemple : $E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{\cdot, +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$



	ε	$+, -$	$.$	$0, 1, \ldots, 9$
$\to q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
$\star\ q_5$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Fermeture

Définir des fonctions de transition étendues pour définir le langage reconnu.

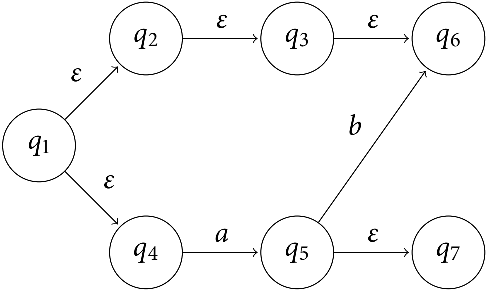
Nécessité d'une notion de fermeture d'un état par ε.

Idée : Suivre l'évolution de l'automate (d'un état) par les ε-transitions. On « ferme » un état en lui ajoutant tous les états atteignables par les mots $\varepsilon\varepsilon\cdots\varepsilon$.

Définition récursive de la ε-**fermeture** ECLOSE(q) pour $q \in Q$

- q est dans ECLOSE(q)
- Si p est dans ECLOSE(q) et qu'il existe une transition de p à r par ε ($r \in \delta(p, \varepsilon)$) alors r est dans ECLOSE(q).

Exemple



$$\mathrm{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$$

Transitions étendues et langages

Soit $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un ε-AFN, $q \in Q$ et $w \in \Sigma^\star$.

On étend la fonction de transition en suivant les chemins dont la concaténation donne w. Importance de la fermeture !

Transition étendue définie par récurrence :

- $\widehat{\delta}(q, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q)$
- Si $w = xa$ avec $a \in \Sigma$ et $\widehat{\delta}(q, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Soit

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$$

Alors $\widehat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_i)$

Le langage associé à E est

$$L(E) = \{w \in \Sigma^\star \mid \widehat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$$

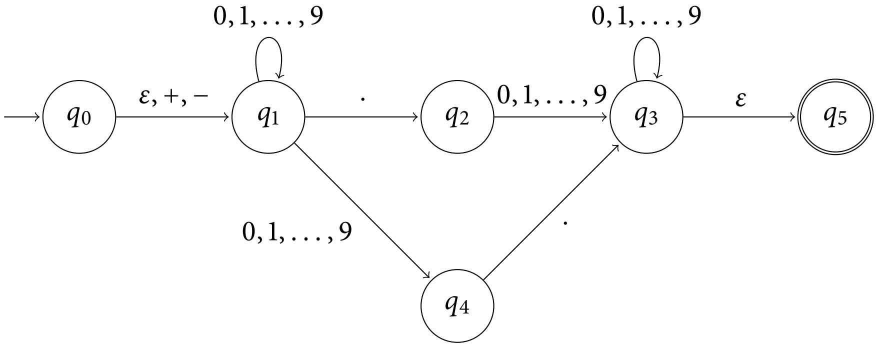
Éliminer les ε-transitions

Étant donné un ε-AFN E on peut définir un AFD D reconnaissant $L(E)$

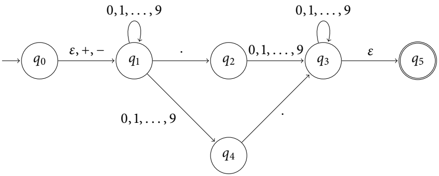
Soit $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ un ε-AFN, on définit l'AFD $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ par :

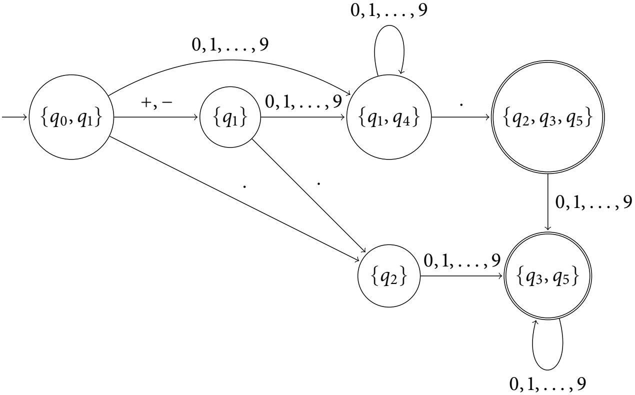
- Q_D est l'ensemble des sous-ensembles S de Q_E (vérifiant $S = \text{ECLOSE}(S)$)
- $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$
- $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- $\delta(S, a)$ est calculé comme suit :
  - Soit $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$
  - Calculer $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$
  - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \text{ECLOSE}(r_j)$

Exemple



Exemple (suite)





Équivalence ε-AFN et AFD

Théorème 1

Un langage L est accepté par un ε-AFN si et seulement s'il est accepté par un AFD.

Preuve. On utilise la construction de D et on montre par induction sur la longueur des mots que $\widehat{\delta}_E(q_0, w) = \widehat{\delta}_D(q_D, w)$

Base : $\widehat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \mathrm{ECLOSE}(q_0) = q_D = \widehat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$

Induction :

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}_E(q_0, xa) &= \bigcup_{p \in \delta_E(\widehat{\delta}_E(q_0, x), a)} \mathrm{ECLOSE}(p) \\
&= \bigcup_{p \in \delta_D(\widehat{\delta}_D(q_D, x), a)} \mathrm{ECLOSE}(p) \\
&= \bigcup_{p \in \widehat{\delta}_D(q_D, xa)} \mathrm{ECLOSE}(p) = \widehat{\delta}_D(q_D, xa)
\end{aligned}$$

Langages réguliers – Expressions régulières

- AFD, AFN et ε-AFN permettent de définir des langages réguliers (langages acceptés).
  $\rightarrow$ description via le comportement d'une machine
- Expressions régulières : définies indépendamment d'une machine (nouveau type de définition d'un langage).
- Relation entre expressions régulières et AFD : les expressions régulières définissent les langages réguliers et ceux-ci seulement !
- Application : étant donnée une ER, construire un AFD reconnaissant le langage qu'il définit.
- Description déclarative du langage utilisée dans tout système gérant des chaînes de caractères (`grep, Lex, Flex`).

Opérations sur les langages

Opérateurs sur les langages :

- union de deux langages :

$$L \cup M = \{w : w \in L \text{ ou } w \in M\}$$

- concaténation de deux langages :

$$L.M = \{w : w = xy, x \in L, y \in M\}$$

- puissance :

$$L^0 = \{\varepsilon\}, \qquad L^1 = L, \qquad L^{k+1} = L.L^k$$

- clôture d'un langage :

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Construction des expressions régulières

Une ER définit un langage à partir de constantes et d'opérateurs

Base :

- Les constantes ε et $\varnothing$ représentent les langages $\{\varepsilon\}$ et $\varnothing$
- Si $a \in \Sigma$, $\mathbf{a}$ représente $\{a\}$
- Une variable en lettres majuscules représente un langage.

Induction :

- Si E et F sont deux ER, $E + F$ est une ER telle que $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$.
- Si E et F sont deux ER, EF est une ER telle que $L(EF) = L(E)L(F)$
- Si E est une ER, $E^\star$ est une ER telle que $L(E^\star) = L(E)^\star$.
- Si E est une ER, (E) est une ER telle que $L((E)) = L(E)$.

Exemple

Une ER pour $L = \{w \in \{0,1\}^* : \quad 0 \text{ et } 1 \text{ alternent dans } w\}$ est

$$(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^*$$

ou encore

$$(\varepsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\varepsilon + \mathbf{0})$$

Priorité des opérateurs

- L'opérateur de clôture (*) a la plus grande priorité : il s'applique à la plus petite suite de symboles sur sa gauche formant une expression régulière.
- L'opérateur de concaténation est prioritaire sur l'union.
- Finalement, on groupe avec l'union.

Exemples : $\mathbf{01}^* + \mathbf{1}$ correspond à $\left(\mathbf{0}(\mathbf{1})^*\right) + \mathbf{1}$

AF et expressions régulières : Des AFD aux expressions régulières et réciproquement

On a déjà montré les équivalences suivantes :

$$\text{AFD} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{AFN} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon\text{-AFN}$$

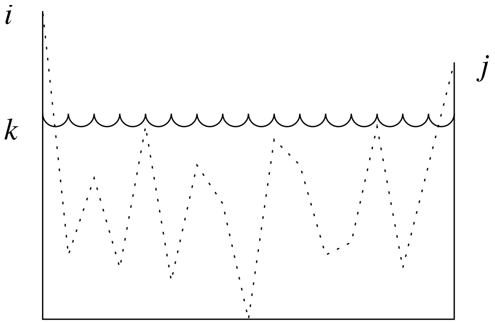
On veut montrer que les langages définis par les ER sont exactement ceux reconnus par les AFD.

- Passage d'un AFD à une ER
- Passage d'une ER à un ε-AFN.

Des AFD aux expressions régulières

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD avec $Q = \{1, \ldots, n\}$, $q_0 = 1$.

$R_{ij}^{(k)}$: l'expression régulière reconnaissant les mots w permettant de passer de l'état i à l'état j sans passer par un état intermédiaire de numéro strictement supérieur à k.



Des AFD aux expressions régulières (suite)

Calcul par induction

Base : $k = 0$ donc pas d'état intermédiaire.

- Cas 1 : $i \neq j$
  Si $a_1, \dots, a_p$ sont les symboles permettant de passer de i à j, alors :

$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_p$$

- Cas 2 : $i = j$
  Si $a_1, \dots, a_p$ sont les symboles permettant de passer de i à j, alors :

$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_p + \varepsilon$$

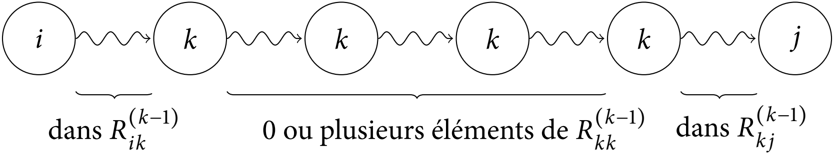
Remarque : S'il n'y a pas de symbole permettant de passer de i à j alors

- Cas 1 : si $i \neq j$ alors $R_{ij}^{(0)} = \emptyset$
- Cas 2 : si $i = j$ alors $R_{ij}^{(0)} = \varepsilon$

Des AFD aux expressions régulières (suite)

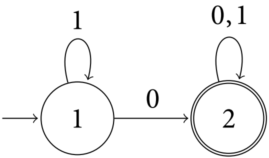
Induction : on montre que

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^{\star} R_{kj}^{(k-1)}$$



ER définissant le langage reconnu par A : union des $R_{1j}^{(n)}$ pour $j \in F$.

Des AFD aux expressions régulières : un exemple



$R_{11}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(0)}$	$(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$

$$R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{1j}^{(0)}$$

	par substitution	forme simplifiée
$R_{11}^{(1)}$	$\varepsilon + \mathbf{1} + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0} + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\varnothing + \varnothing(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$	$\varnothing$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \varnothing(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

On utilise les règles de simplification suivantes :

$$(\varepsilon + R)^* = R^*, \quad R + RS^* = RS^*, \quad \varnothing R = R\varnothing = \varnothing, \quad \varnothing + R = R + \varnothing = R$$

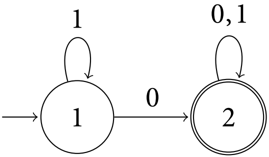
Des AFD aux expressions régulières : un exemple

	forme simplifiée
$R_{11}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$$R_{ij}^{(2)} = R_{ij}^{(1)} + R_{i2}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{2j}^{(1)}$$

	par substitution	forme simplifiée
$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\varnothing$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\varnothing + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\varnothing$	$\varnothing$
$R_{22}^{(2)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$

Des AFD aux expressions régulières : un exemple



	forme simplifiée
$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\varnothing$
$R_{22}^{(2)}$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$

Le langage reconnu est

$$R_{12}^{(2)} = \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$$

Élimination d'état

L'algorithme précédent coûte cher !

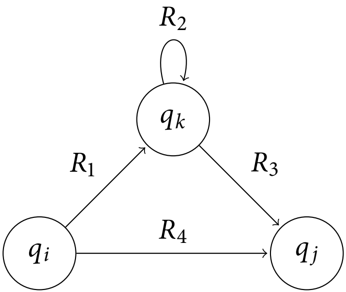
- n^3 ER à construire pour un AFD à n états et la longueur de chaque ER croit d'un facteur 4 à chaque étape.
- dans le pire cas : 4^n symboles !

Éliminer des états en autorisant les ER dans les transitions entre états.

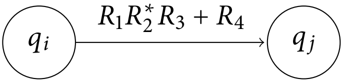
- Choisir un état final $q \in F$ et éliminer tous les autres états excepté l'état initial q_0 et q
- Appliquer le procédé de réduction pour tous les états finaux

Élimination d'état

Avant

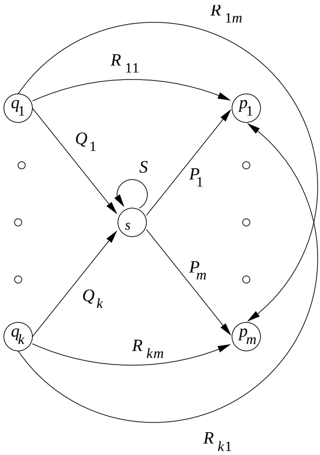


Après

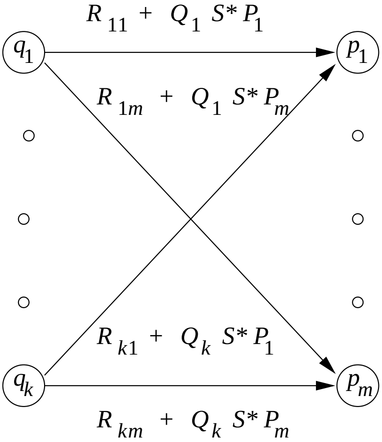


Élimination d’état (suite)

Élimination de l’état s

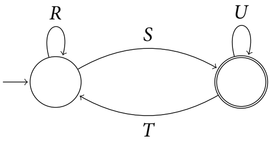


$\Rightarrow$



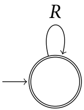
Élimination d'état : algorithme

Pour chaque état final $q \in F$, en appliquant la procédure d'élimination, on va obtenir un automate A_q de la forme



correspondant à l'ER $E_q = (R + SU^* T)^* SU^*$

ou bien un automate A_q de la forme



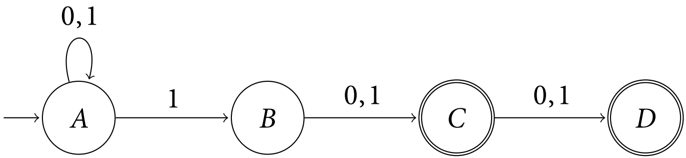
correspondant à l'ER $E_q = R^*$

L'ER finale est

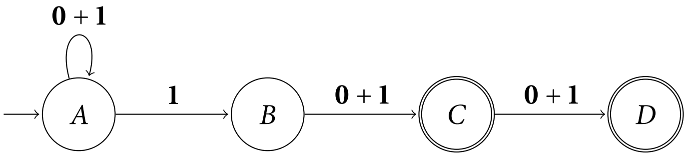
$$\bigoplus_{q \in F} E_q$$

Élimination d'état : exemple

Un exemple : A tel que
$L(A) = \{w : w = x1b \text{ ou } w = x1bc \text{ avec } x \in \{0,1\}^*, b, c \in \{0,1\}\}$

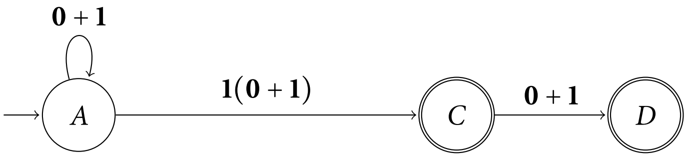


On étiquette les transitions par des ER :

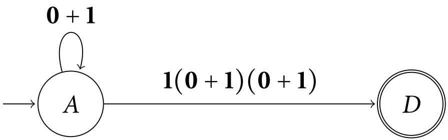


Des expressions régulières aux ε-AFN

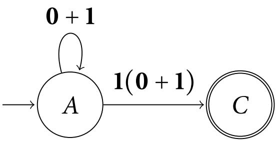
On élimine l'état B :



On supprime l'état C



On supprime l'état D



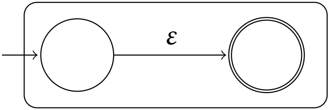
L'ER est donc $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{0}+\mathbf{1}) + (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$

Des expressions régulières aux ε-AFN

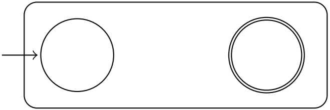
Preuve par récurrence structurelle sur R : on suit la définition récursive des ER.

Base : variables et constantes

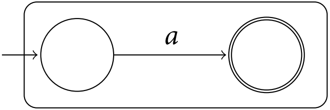
- Un ε-AFN N tel que $L(N) = \{\varepsilon\}$



- Un ε-AFN N tel que $L(N) = \emptyset$



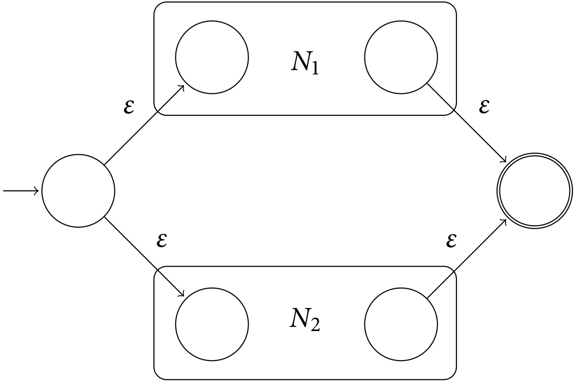
- Un ε-AFN N tel que $L(N) = \{a\}$ pour $a \in \Sigma$



Des expressions régulières aux ε-AFN

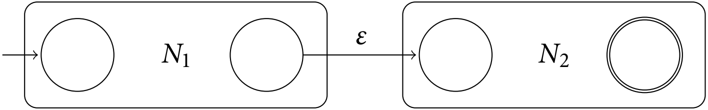
Induction :

- Étant donné N_1 et N_2 deux ε-AFN, définir un ε-AFN N reconnaissant $L(N_1) + L(N_2)$

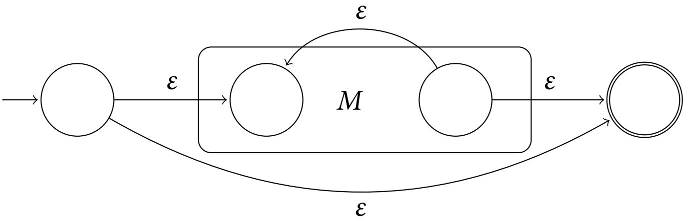


Des expressions régulières aux ε-AFN

- Étant donné N_1 et N_2 deux ε-AFN, définir un ε-AFN N reconnaissant $L(N_1).L(N_2)$



- Étant donné M un ε-AFN, définir un ε-AFN N reconnaissant $L(M)^\star$



Exemple

Conversion de $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$

$$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$$