Traitement du signal - Exercices

MAIN 4 - 2019-2020

H. Boutin

Chapitre 1: Introduction. Signaux : rappels et outils

Exercice 0

Calculer la transformée de Fourier des fonctions $\cos(2\pi f_0 t)$, $\sin(2\pi f_0 t)$, $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ et $\sin(2\pi f_0 t + \phi)$.

$$\begin{aligned}
TF[\cos(2\pi f_0 t)] &= \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi f_0 t) e^{-2i\pi f t} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{+2i\pi f_0 t} e^{-2i\pi f t} dt + \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi f_0 t} e^{-2i\pi f t} dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(TF[e^{+2i\pi f_0 t}] + TF[e^{-2i\pi f_0 t}]\right) \\
\text{Or, } TF[e^{+2i\pi f_0 t}] &= \delta(f - f_0) \text{ car } TF^{-1}[\delta(f-f_0)] = \int_{\mathbb{R}} \delta(f-f_0) e^{+2i\pi f t} df = e^{+2i\pi f_0 t} \\
\text{Donc : } TF[\cos(2\pi f_0 t)] &= \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)
\end{aligned}$$

Même méthode pour:

- $\sin(2\pi f_0 t)$: $TF[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2i}\left(\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right)$
- $\cos(2\pi f_0 t + \phi)$: $TF[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi}\delta(f-f_0) + e^{-i\phi}\delta(f+f_0)\right)$
- $\sin(2\pi f_0 t + \phi)$: $TF[\sin(2\pi f_0 t + \phi)] = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi}\delta(f-f_0) - e^{-i\phi}\delta(f+f_0)\right)$

Exercice 1

1. Considérons le signal exponentiel $v(t) = e^{-t}U(t)$, U étant la fonction échelon, valant 1 si $t > 0$, 0 sinon. Déterminez la proportion de l'énergie totale transférée durant la première seconde, considérant que la transmission du signal commence à $t = 0$ s.

$$\begin{aligned}
\text{Energie totale transférée: } E^v_{\text{tot}} &= \int_{\mathbb{R}} v^2(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt \\
&= \frac{1}{2} \\
\text{Energie transférée entre } t = 0 \text{ et } t = 1 \text{ s : } E^v_{[0,1]} &= \int_0^1 v^2(t) dt \\
&= \int_0^1 e^{-2t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = \frac{0.86}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 86% de l'énergie du signal est transférée entre 0 et 1 s.

2. Calculez l'énergie pour le signal $v(t) = e^{-t}U(t)$ dans le domaine spectral, et vérifiez qu'elle est bien égale à celle calculée précédemment, dans le domaine temporel. Déterminez la proportion de l'énergie totale comprise dans la bande $[0,1]$ Hz.

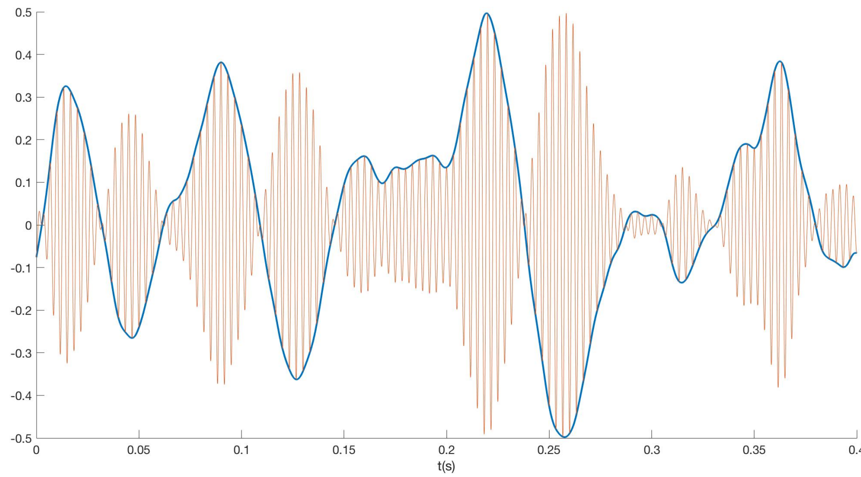
$$\begin{aligned}
E^V_{\text{tot}} &= \int_{\mathbb{R}} |V(f)|^2 df \\
V(f) &= \int_{\mathbb{R}} v(t)e^{-2i\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(1+2i\pi f)} dt \\
&= \frac{1}{1+2i\pi f} \\
\Rightarrow |V(f)|^2 &= \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} \\
\Rightarrow E^V_{\text{tot}} &= \frac{1}{2\pi}\left[\text{Arctan}(2\pi f)\right]^{+\infty}_{-\infty} = 0.5 \\
&= E^v_{\text{tot}} \text{ cf. Parseval} \\
\text{et } E^V_{[0,1\text{Hz}]} &= \int_{-1}^{0} |V(f)|^2 df + \int_0^1 |V(f)|^2 df \\
&= \int_{-1}^{1} |V(f)|^2 df \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\text{Arctan}(2\pi f)\right]^{+1}_{-1} \\
&= \frac{\text{Arctan}(2\pi)}{\pi} = 0.45
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 90% de l'énergie du signal se trouve entre 0 et 1 Hz.

Exercice 2

Au cours d'une conversation téléphonique, la voix du locuteur est captée par le microphone du téléphone portable puis filtrée. Le signal résultant, noté $x(t)$, a une bande limitée: $[-3,3]$ kHz. Pour la transmission, ce signal est multiplié par un signal haute fréquence $p(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ où la fréquence f_0, dite porteuse, vaut 1 GHz. Le produit $x(t)p(t)$ est appelé le signal modulé. On souhaite montrer que sa puissance moyenne est égal à la moitié de celle du signal de voix filtré $x(t)$.

1. Représenter le signal modulé: $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$.



2. Exprimer la densité temporelle d'énergie de $y(t)$ en fonction de celle de $x(t)$.

$$e^y(t) = |y(t)|^2 = |x(t)\cos(2\pi f_0 t)|^2 = 0.5e^x(t)(1+\cos(4\pi f_0 t))$$

3. Soit $z(t) = |x(t)|^2\cos(4\pi f_0 t)$, déterminer le support de sa transformée de Fourier $Z(f)$ et déduire $Z(0)$.

$$TF[|x|^2] = TF[x\bar{x}] = TF[x] * TF[\bar{x}]$$

$\Rightarrow TF[|x|^2]$ a pour support $2 \times [-3,3] = [-6,6]$ kHz.

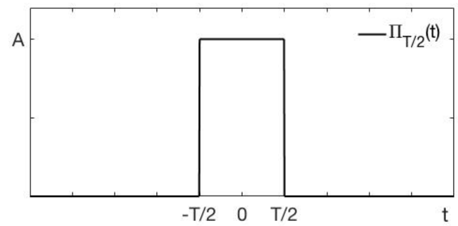
$$TF[z] = TF[|x|^2] * TF[\cos(4\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}(TF[|x|^2] * \delta(f-f_0) + TF[|x|^2] * \delta(f+f_0))$$

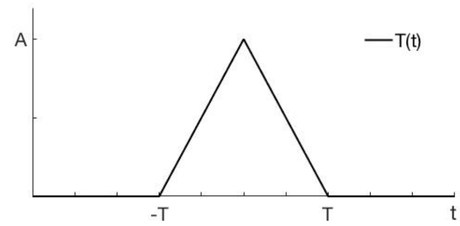
$\Rightarrow Z = TF[z]$ a pour support $[-1 \text{ GHz} - 6 \text{ kHz}, -1 \text{ GHz} + 6 \text{ kHz}] \cup [+1 \text{ GHz} - 6 \text{ kHz}, +1 \text{ GHz} + 6 \text{ kHz}]$.
$\Rightarrow Z(0) = 0$.

4. Conclure.

$$\begin{aligned}
P^y_{moy} &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |y(t)|^2 dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(0.5\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt + 0.5\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\cos(4\pi f_0 t)dt\right) \\
&= 0.5\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\cos(4\pi f_0 t)dt\right) \\
\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\cos(4\pi f_0 t)dt &= Z(0) = 0 \\
\text{D'où } P^y_{moy} &= 0.5 \times \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = 0.5P^x_{moy}
\end{aligned}$$

Exercice 3





1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi_{T/2}(t)$ de largeur T et d'amplitude A.

$$\begin{aligned} TF[\Pi_{T/2}](f) &= \int_{\mathbb{R}} \Pi_{T/2}(t) e^{-2j\pi f t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2j\pi f t} dt \\ &= \frac{-A}{2j\pi f} \left[e^{-2j\pi f t}\right]_{T/2}^{-T/2} \\ &= A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \\ &= AT \mathrm{sinc}(\pi T f) \end{aligned}$$

2. Calculer le produit de convolution $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}$.

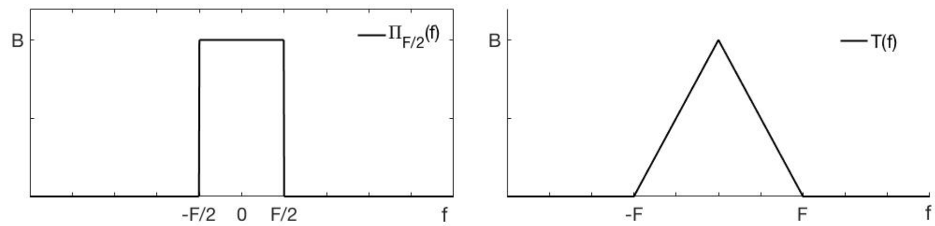
$$\begin{aligned} \Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \Pi_{T/2}(\tau) \Pi_{T/2}(t-\tau) d\tau \\ &= A \int_{-T/2}^{T/2} \Pi_{T/2}(t-\tau) d\tau \\ &= A \int_{t-T/2}^{t+T/2} \Pi_{T/2}(u) du \end{aligned}$$

- si $t + T/2 \leq -T/2$, i.e. $t \leq -T$, $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) = 0$
- si $-T/2 \leq t + T/2 \leq +T/2$, i.e. $-T \leq t \leq 0$, $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) = A^2 \int_{-T/2}^{t+T/2} du = A^2(t+T)$
- si $-T/2 \leq t - T/2 \leq +T/2$, i.e. $0 \leq t \leq T$, $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) = A^2 \int_{t-T/2}^{T/2} du = A^2(T-t)$
- si $t - T/2 \geq +T/2$, i.e. $t \geq +T$, $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) = 0$

Conclusion: $\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}(t) = AT \times T(t)$ (fonction "triangle").

3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction triangle $T(t)$ de largeur $2T$ et d'amplitude A.

$$\begin{aligned} TF[T](f) &= \frac{1}{AT} TF[\Pi_{T/2} * \Pi_{T/2}](f) \\ &= \frac{1}{AT} TF[\Pi_{T/2}](f) \times TF[\Pi_{T/2}](f) \\ &= \frac{1}{AT} (AT \mathrm{sinc}(\pi T f))^2 \\ &= AT \mathrm{sinc}^2(\pi T f) \end{aligned}$$



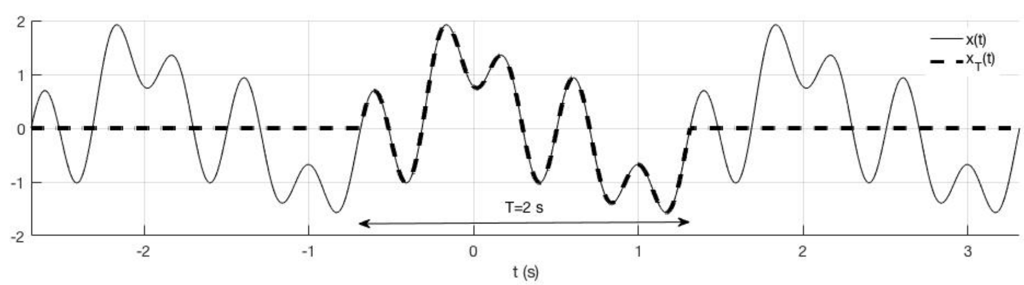
4. Calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction porte $\Pi_{F/2}(f)$ de largeur F et d'amplitude B, puis celle de la fonction triangle $T(f)$ de largeur $2F$ et d'amplitude B.

$$\begin{aligned} TF^{-1}[\Pi_{F/2}](t) &= \int_{\mathbb{R}} \Pi_{F/2}(f) e^{+2j\pi f t} df \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Pi_{F/2}(f) e^{-2j\pi f t} df \text{car } \Pi_{F/2} \text{ est paire} \\ &= BF\text{sinc}(\pi t F) \text{ d'après 3.1, en remplaçant } T \text{ par } F,\ A \text{ par } B \text{ et } f \text{ par } t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TF^{-1}[T](f) &= \int_{\mathbb{R}} T(f) e^{+2j\pi f t} df \\ &= \int_{\mathbb{R}} T(f) e^{-2j\pi f t} df \text{car } T \text{ est paire} \\ &= BF\text{sinc}^2(\pi t F) \text{ d'après 3.3, en remplaçant } T \text{ par } F,\ A \text{ par } B \text{ et } f \text{ par } t. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit $x(t)$ un signal périodique de fréquence $f_0 = 1/T$. Nous cherchons à calculer son spectre en fonction de celui de $x_T(t)$ à support fini, correspondant à 1 période de x.



1. Montrer que la transformée de Fourier de $e^{2j\pi f_0 t}$ est l'impulsion de Dirac centrée en f_0: $\delta(f - f_0)$.

$$\begin{aligned} TF^{-1}[\delta_{f_0}](t) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(f - f_0) e^{+2j\pi f t} df \\ &= e^{+2j\pi f_0 t} \text{ d'après la propriété fondamentale de } \delta. \end{aligned}$$

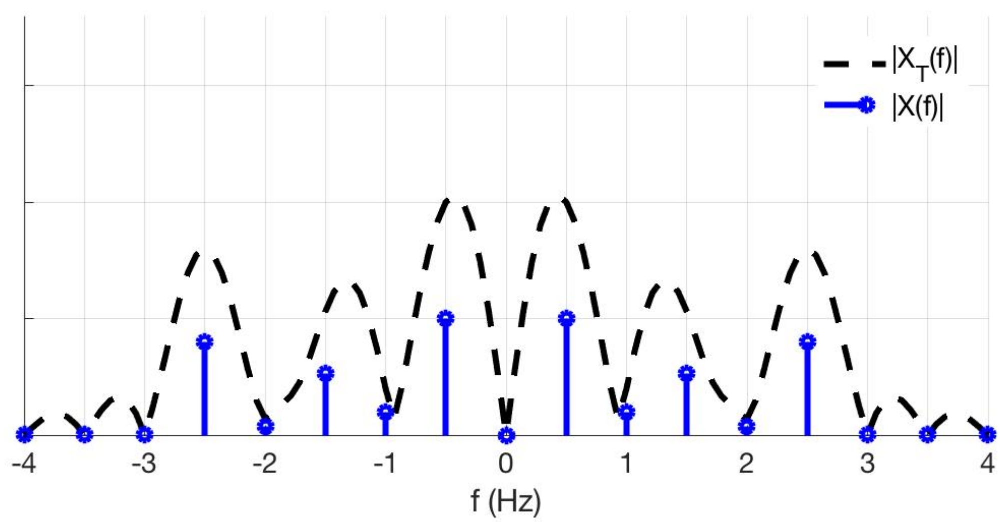
donc $TF[e^{+2j\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0)$

2. En déduire le spectre X de x en fonction des coefficients complexes de sa série de Fourier : $c_n, n \in \mathbb{Z}$.
x est $T-$périodique donc développable en série de Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2j\pi nt/T} \\ \text{donc } X(f) &= TF[x](f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n TF[e^{2j\pi nt/T}](f) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \text{ d'après 4.1} \end{aligned}$$

3. Etablir la relation entre X et le spectre X_T de x_T. X_T est représenté sur la figure suivante; tracer $|X|$.

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{\mathbb{R}} x_T(t) e^{-2j\pi ft} dt \\ &= \int_{[T]} x(t) e^{-2j\pi ft} dt \\ \text{donc } \forall n \in \mathbb{Z}, X_T(n/T) &= \int_{[T]} x(t) e^{-2j\pi nt/T} dt = Tc_n \\ \text{donc, par 4.2, } X(f) &= \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_T(n/T) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_T(f) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \text{ car } \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = 0 \text{ si } f \neq \frac{n}{T} \\ &= \frac{1}{T} X_T(f) \times Ш_{1/T}(f) \end{aligned}$$



avec $T = 2$. x(t) = sum (xT(t-nT)) = sum xT*delta(t-nT)=> X(f) = sum XT TF(delta(t-nT)) = XT(f) TF(sum delta(t-nT)) XT(f) F sum (delta(f-nF)) = F sum XT(nF) delta(f-nF) ...

Chapitre 2: Conversions Analogique-Numérique et Numérique-Analogique

Exercice 1: peigne de Dirac

Le train d'impulsions de Dirac, noté $Ш_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, est appelée peigne de Dirac, et est très utilisé en traitement du signal, notamment pour l'échantillonnage. En effet, si $x(t)$ est un signal analogique, le signal échantillonné à la période T_e, $\hat{x}[n] = x(nT_e), \forall n \in \mathbb{Z}$ s'écrit:

$$\hat{x}[n] = x(t) \times Ш_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

1. Le peigne $Ш_T(t)$ étant T-périodique, montrer, à l'aide de sa série de Fourier, que $Ш_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\frac{nt}{T}}$.

$Ш_T(t)$ est développable en série de Fourier:

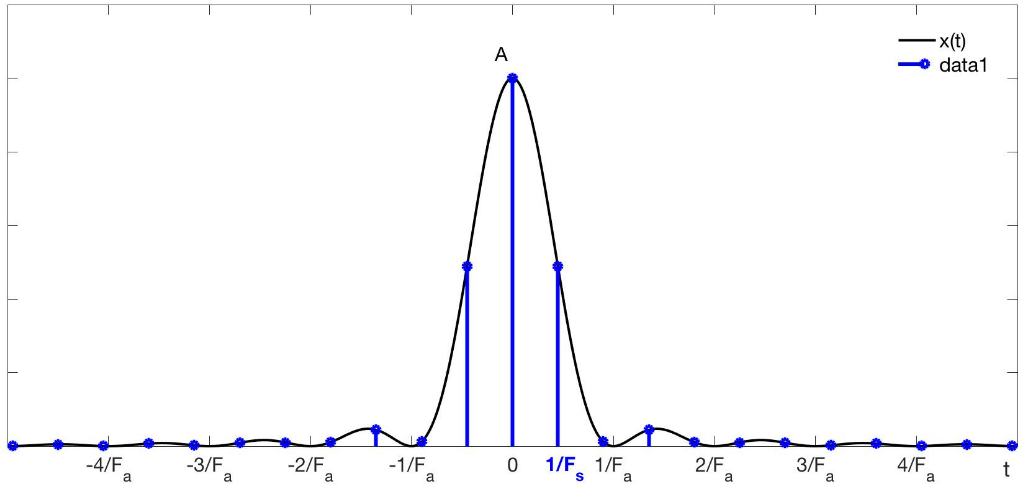
$$\begin{aligned}
Ш_T(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nt/T} \\
\text{où, } \forall n\mathbb{Z}, c_n &= \frac{1}{T}\int_{[T]} Ш_T(t) e^{+2i\pi nt/T} dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{+2i\pi nt/T} dt \\
&= \frac{1}{T} \\
\text{D'où, } Ш_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nt/T}
\end{aligned}$$

2. En déduire que la transformée de Fourier de $Ш_T(t)$ est $FШ_F(f)$ où $F = 1/T$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
TF[Ш_T](f) &= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} TF[e^{2i\pi nt/T}] \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\
&= FШ_F(f) \text{ avec } F = \frac{1}{T}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère le signal temporel $x(t) = A\mathrm{sinc}^2(\pi F_a t)$.



1. Tracer le signal $\hat{x}$ obtenu après échantillonnage parfait de x à la fréquence $F_s > 2F_a$.

2. Calculer et tracer le spectre X de x puis le spectre $\hat{X}$ de $\hat{x}$.

$$\begin{aligned}
X(f) &= A\mathrm{TF}[\mathrm{sinc}(\pi F_a t)] * \mathrm{TF}[\mathrm{sinc}(\pi F_a t)] \\
&= A\left(\frac{1}{F_a}\Pi_{Fa/2}(f)\right) * \left(\frac{1}{F_a}\Pi_{Fa/2}(f)\right) \text{ où } \Pi_{Fa/2} = 1 \text{ sur } \left[-\frac{F_a}{2}, \frac{F_a}{2}\right] \text{ et 0 ailleurs} \\
&= \frac{A}{F_a^2}\left(\Pi_{Fa/2}(f) * \Pi_{Fa/2}(f)\right) \\
&= \frac{A}{F_a^2}T(f) \text{ où } T(f) \text{ est le triangle de largeur } 2F_a \text{ et d'amplitude } F_a
\end{aligned}$$

Spectre du signal échantillonné $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= x(t) \times Ш_{1/F_s}(t) \\
\text{Donc } \hat{X}(f) &= F_s X(f) * F_s Ш_{F_s}(f) \\
&= F_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f) * \delta(f - nF_s) \\
&= F_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - nF_s)
\end{aligned}$$

Conclusion: le spectre $\hat{X}(f)$ est une concaténation de fonctions "triangles" de largeur $2F_a$ centrés en nF_s, sans recouvrement car $F_s > 2F_a$, et d'amplitude AF_s/F_a.

3. Proposer un filtre permettant de reconstruire sans perte le signal x à partir de $\hat{x}$. Tracer sa réponse dans le domaine fréquentiel, puis sa réponse impulsionnelle (transformée de Fourier inverse de sa réponse fréquentielle). Détailler les étapes de reconstruction.

"Filtre cardinal" dont le spectre est $\frac{1}{F_s}\Pi_{F_s/2}$ qui vaut $\frac{1}{Fs}$ sur $[-F_s/2, F_s/2]$ et 0 ailleurs, de sorte que sa multiplication avec $\hat{X}(f)$ (dans le domaine fréquentiel) soit égal $X(f)$.

Réponse impulsionnelle: $\text{sinc}(\pi F_s t)$ (cf TD1 ex.3).

4. Pourquoi ce filtre n'est-il pas réalisable en pratique?

En temps réel, la sortie d'un tel filtre est le produit de convolution du signal échantillonné $\hat{x}(t)$ par sa réponse impulsionnelle :

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\tau)\text{sinc}(\pi F_s(t-\tau))d\tau$$

$y(t)$ dépend donc de tous les $\hat{x}(\tau)$. Il faut donc connaître tout ses échantillons (notamment ceux à venir) avant de pouvoir calculer $y(t)$. Ce filtre n'est donc pas réalisable en temps réel.