SORBONNE UNIVERSITÉ
ANNÉE 2018-2019

POLYTECH MAIN 4
EDP ET DISTRIBUTIONS

Feuille de TD1
Du 30 janvier 2019

Exercice 1. Trouver les solutions $t \to y(t)$ des équations différentielles suivantes :
a) $y'(t) = \exp -y(t)$, avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = y(t) + t^2$, avec pour donnée intiale $y(0) = 1$.
c) $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^3$, avec pour donnée initiale $y(1) = 2$. d) $y' = (1+y^2)e^t$, avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.
e) $y' = -\frac{y}{2} + t$ avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.
f) $y' = \frac{2t+1}{2y-1}$ avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2. Trouver les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes, en précisant l'intervalle de définition I :
a) $y'(t) = y(t)^2 \exp\left(-\dfrac{1}{y(t)}\right) t^2$ avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.
b) $y'(t) = \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}} + t$ avec pour donnée initiale $y(1) = 2$.

Exercice 3. On considère l'équation avec donnée initiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \left(t^2 - \dfrac{2x}{t+1}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[. \\ u(x,0) = (1-x)^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une équation de transport linéaire.
2) Préciser les caractérististiques, en particulier celle qui passe par un point $(x_\star, t_\star)$ donné.
3) Donner la solution du problème (1).

Exercice 4. On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[. \tag{2}$$

1) Montrer qu'il s'agit bien d'une équation de transport linéaire.
2) Préciser les courbes caract éristiques, en particulier celle qui passe par un point $(x_\star, t_\star)$ donné . Résoudre l'équation.
3) Mêmes questions pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + (x+t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[. \tag{3}$$

Exercice 5. A) Soit F une fonction sur $\mathbb{R}^2$ ayant des dérivées secondes continues. On suppose que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions f_1 et f_2 une variable réelle telles que

$$F(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

B) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = 0. \tag{4}$$

On considère le changement de variable *linéaire* de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$(u_1, u_2) \mapsto (x_1, x_2) = \left(\frac{u_1 - u_2}{2}, \frac{u_1 + u_2}{2} \right),$$

et on pose $G(u_1, u_2) = g(x_1, x_2)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial u_2} = 0.$$

C) En déduire qu'il existe des fonctions g_1 et g_2 telles

$$f(x_1, x_2) = g_1(x_1 - x_2) + g_2(x_1 + x_2).$$

D) Quelle est la forme des solutions de (4).
E) Déterminer les solutions de (4) telles que

$$f(0, x_2) = 0 \text{ pour tout } x_2 \in \mathbb{R}.$$

F) Déterminer les solutions de (4) telles que

$$f(0, x_2) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = 0 \text{ pour tout } x_2 \in \mathbb{R}.$$