POLYTECH SORBONNE

Calculabilité - Décidabilité (ICC)

TD n° 1 - Automates finis

Exercice 1. Donner des automates finis acceptant les langages définis sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ci-dessous :

1. L'ensemble des chaînes de caractères se terminant par 00.
2. L'ensemble des chaînes de caractères contenant trois 0 consécutifs.
3. L'ensemble des chaînes de caractères contenant 011.
4. L'ensemble des chaînes de caractères dont le 10-ième symbole compté à partir de la fin est 1.
5. L'ensemble des chaînes de caractères qui commencent ou terminent par 01.
6. L'ensemble des chaînes de caractères dont le nombre de 0 est divisible par 3.

Exercice 2. Soit A un automate fini déterministe et q un état de A tel que $\delta(q, a) = q$ pour tout symbole a. Montrer par induction sur la longueur des mots d'entrée que $\widehat{\delta}(q, w) = q$.

Exercice 3. Soit A un automate fini déterministe et a un symbole accepté par a tel que pour tout état q de A, $\delta(q, a) = q$.

1. Montrer par induction sur n que pour tout $n \geq 0$, $\widehat{\delta}(q, a^n) = q$.
2. Montrer que $\{a\}^\star \subset L(A)$ ou $\{a\}^\star \cap L(A) = \emptyset$.

Exercice 4. Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ un automate fini déterministe et supposons que pour tout a dans Σ, $\delta(q_0, a) = \delta(q_f, a)$.

1. Montrer que pour tout $w \neq \varepsilon$, on a $\widehat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta}(q_f, w)$.
2. Montrer que si x est un mot non vide dans $L(A)$, alors pour tout $k > 0$, x^k est aussi dans $L(A)$.

Exercice 5. On considère un automate fini déterministe ayant la table de transition suivante :

	0	1
$\rightarrow A$	A	B
$\star B$	B	A

Décrire le langage accepté par cet automate en prouvant par induction sur la longueur des mots d'entrée que votre description est correcte.

Même question lorsque la table de transition est :

	0	1
$\rightarrow \star A$	B	A
$\star B$	C	A
C	C	C

Exercice 6. Convertir l'automate fini non-déterministe dont la table de transition est donnée ci-dessous en un automate fini déterministe :

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
$\star s$	$\{s\}$	$\{s\}$

Même question pour l'automate fini non-déterministe dont la table de transition est donnée ci-dessous :

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q,s\}$	$\{q\}$
$\star q$	$\{r\}$	$\{q,r\}$
r	$\{s\}$	$\{p\}$
$\star s$	$\varnothing$	$\{p\}$

Exercice 7. Donner des automates finis non-déterministes acceptant les langages définis ci-dessous (tirer profit au maximum du caractère non-déterministe) :

1. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ telles que leur dernier chiffre est apparu précédemment.
2. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ telles que leur dernier chiffre n'est pas apparu précédemment.
3. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0,1\}$ telles qu'elles contiennent deux zéros séparés par un nombre de lettres qui est multiple de 4.

Exercice 8. On considère un ε-automate fini non-déterministe donné par la table de transition suivante :

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\varnothing$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varnothing$
$\star r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\{p\}$

1. Calculer la ε-cloture de chaque état.
2. Donner toutes les chaînes de caractères de longueur inférieur ou égale à trois acceptées par cet automate.
3. Convertir cet automate en un automate fini déterministe.

Exercice 9. Écrire les automates finis reconnaissant les langages suivants (ainsi que les expressions régulières associées) :

1. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{a,b,c\}$ contenant au moins un a et au moins un b.
2. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ dont le dixième symbole compté à partir de la fin est 1.
3. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ qui contiennent au moins une paire de 1 consécutifs.
4. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ tels que toute paire de 1 adjacents est précédée d'une paire de 0 adjacents.
5. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ tels que le nombre de 0 contenus est divisible par cinq.
6. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ tels qu'ils ne contiennent pas 101.
7. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0,1\}$ tels que 0 et 1 apparaissent le même nombre de fois et qu'aucun préfixe a deux 0 de plus que de 1 ni deux 1 de plus que de 0.

Exercice 10. Convertir l'automate fini déterministe dont la table des transitions est donnée ci-dessous en une expression régulière. On utilisera la technique d'élimination d'état vue en cours.

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_3
q_2	q_1	q_3
$\star q_3$	q_2	q_1

Exercice 11. Convertir les expressions régulières ci-dessous en automates finis non-déterministes avec ε-transitions :

1. $01^\star$
2. $(0+1)01$
3. $00(0+1)^\star$

Exercice 12. Prouver ou exhiber un contre-exemple aux lois algébriques faisant intervenir des expressions régulières ci-dessous :
— $(R+S)^\star = R^\star + S^\star$
— $(RS+R)^\star R = R(SR+R)^\star$
— $(RS+R)^\star RS = (RR^\star S)^\star$
— $(R+S)^\star S = (R^\star S^\star)^\star$
— $S(RS+R)^\star R = RR^\star S(RR^\star S)^\star$

Exercice 13. Prouver que les langages suivants ne sont pas réguliers :

1. $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$
2. L'ensemble des chaînes de caractères bien parenthésées.
3. $\{0^n 1 0^n \mid n \geq 1\}$
4. $\{0^n 1^m 2^n \mid n$ et m sont des entiers arbitraires$\}$
5. $\{0^n 1^m \mid n \leq m\}$
6. $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 1\}$

Exercice 14. On considère un automate dont la table de transition figure ci-dessous.

	0	1
→ A	B	A
B	A	C
C	D	B
⋆ D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

Donner la table des états distinguables et minimiser l'automate.

Exercice 15. Même exercice que le précédent pour l'automate décrit par la table de transition ci-dessous :

	0	1
→ A	B	E
B	C	F
⋆ C	D	H
D	E	H
E	F	I
⋆F	G	B
G	H	B
H	I	C
⋆I	A	E