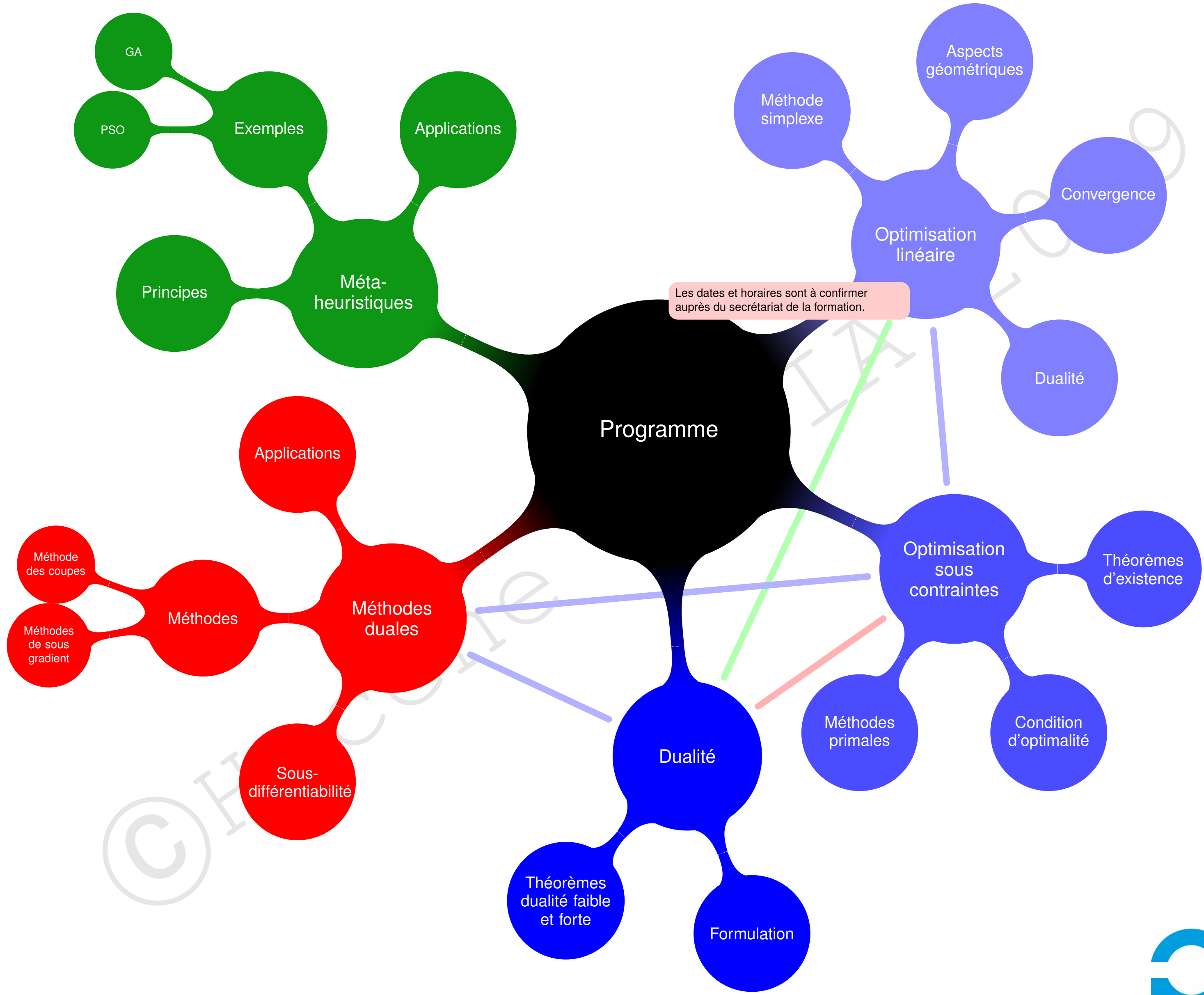
Optimisation continue :

Problèmes linéaires

Hacène Ouzia

MAIN (4 ème année)
Sorbonne Université

2019


Programme
Les dates et horaires sont à confirmer auprès du secrétariat de la formation.
Méta-heuristiques
Exemples
GA
PSO
Applications
Principes
Optimisation linéaire
Méthode simplexe
Aspects géométriques
Convergence
Dualité
Optimisation sous contraintes
Théorèmes d'existence
Condition d'optimalité
Méthodes primales
Dualité
Théorèmes dualité faible et forte
Formulation
Méthodes duales
Applications
Méthodes
Méthode des coupes
Méthodes de sous gradient
Sous-différentiabilité

AGENDA

Exemple introductif

ENTREPRISE POLLUETOUT

L'entreprise *polluetout* fabrique 2 produits π_1, π_2 et utilise 3 types de matières premières μ_1, μ_2 et μ_3. Les bénéfices nets par chaque unité de matière première utilisée μ_1, μ_2 et μ_3 sont 4, 2 et 3 respectivement.
Pour chaque produit, les coûts écologiques par unité de matière première utilisée sont :

	μ_1	μ_2	μ_3
π_1	25	-9	15
π_2	-5	9	15

La politique écologique locale impose à l'entreprise le respect de la norme *eco-norme* fixée à 75 unités par chaque type de produit. Enfin, pour des raisons de sécurité, l'entreprise polluetout ne peut disposer de plus de 3 unités de μ_1 et 5 unités de μ_2.

QUESTION Quel est le plan de production écologique et optimal ?

Exemple introductif

■ **Entreprise Polluetout** Le modèle mathématique associé

$$\begin{array}{lrrrcr}
\text{Max} & 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
 & 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & x_2 & & \leq & 5 \\
 & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Exemple introductif

■ ENTREPRISE POLLUETOUT Un modèle équivalent

$$
\begin{array}{rrrrcr}
\text{-MIN} & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
 & 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & x_2 & & \leq & 5 \\
 & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{1}
$$

Exemple introductif

ENTREPRISE POLLUETOUT Un modèle équivalent

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{s.c.} & \\ & (x_1, x_2, x_3) \in P \end{array}$$

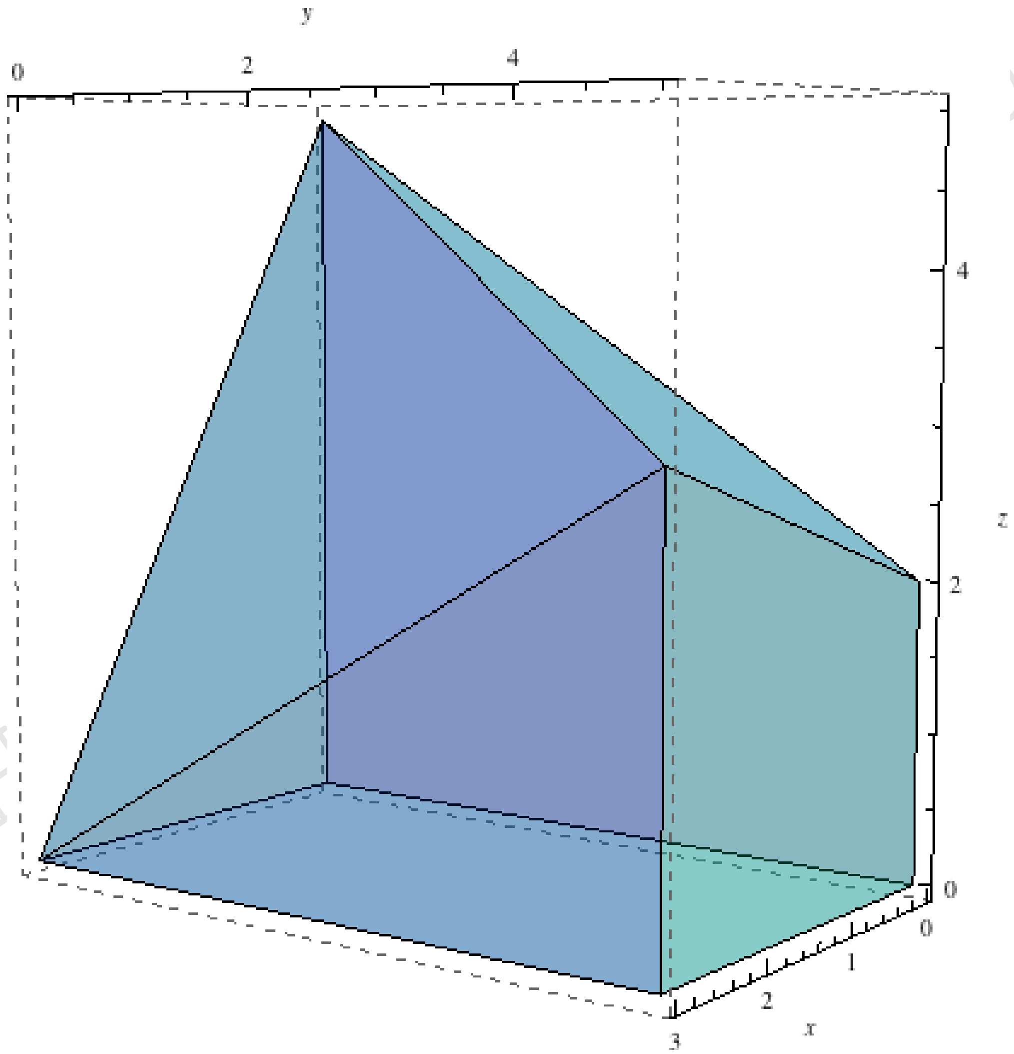
où

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3_+ : Ax \leq b \right\}$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 \\ -5 & 9 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

■ ENTREPRISE POLLUETOUT Ensemble des plans de production écologiques



Ensembles convexes

- **Combinaison convexe** Une combinaison convexe de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ est l'élément :

$$\lambda x + (1 - \lambda) y, \text{où } \lambda \in [0, 1]$$

- **Ensemble convexe** Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si C est stable par combinaison convexe, i.e., :

$$\forall x, y \in C : \lambda x + (1 - \lambda) y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

- **Polyèdre** Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre si : il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

- **Polytope** Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polytope si P est un polyèdre borné.

Ensembles convexes

■ **COMBINAISON CONVEXE** Une combinaison convexe de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ est l'élément :

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y, \text{où } \lambda \in [0, 1]$$

■ **ENSEMBLE CONVEXE** Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si C est stable par combinaison convexe, i.e., :

$$\forall x, y \in C : \lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

■ **POLYÈDRE** Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre si : il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

■ **POLYTOPE** Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polytope si P est un polyèdre borné.

Ensembles convexes

■ COMBINAISON CONVEXE Une combinaison convexe de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ est l'élément :

$$\lambda x + (1-\lambda)\, y, \text{où } \lambda \in [0,1]$$

■ ENSEMBLE CONVEXE Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si C est stable par combinaison convexe, i.e., :

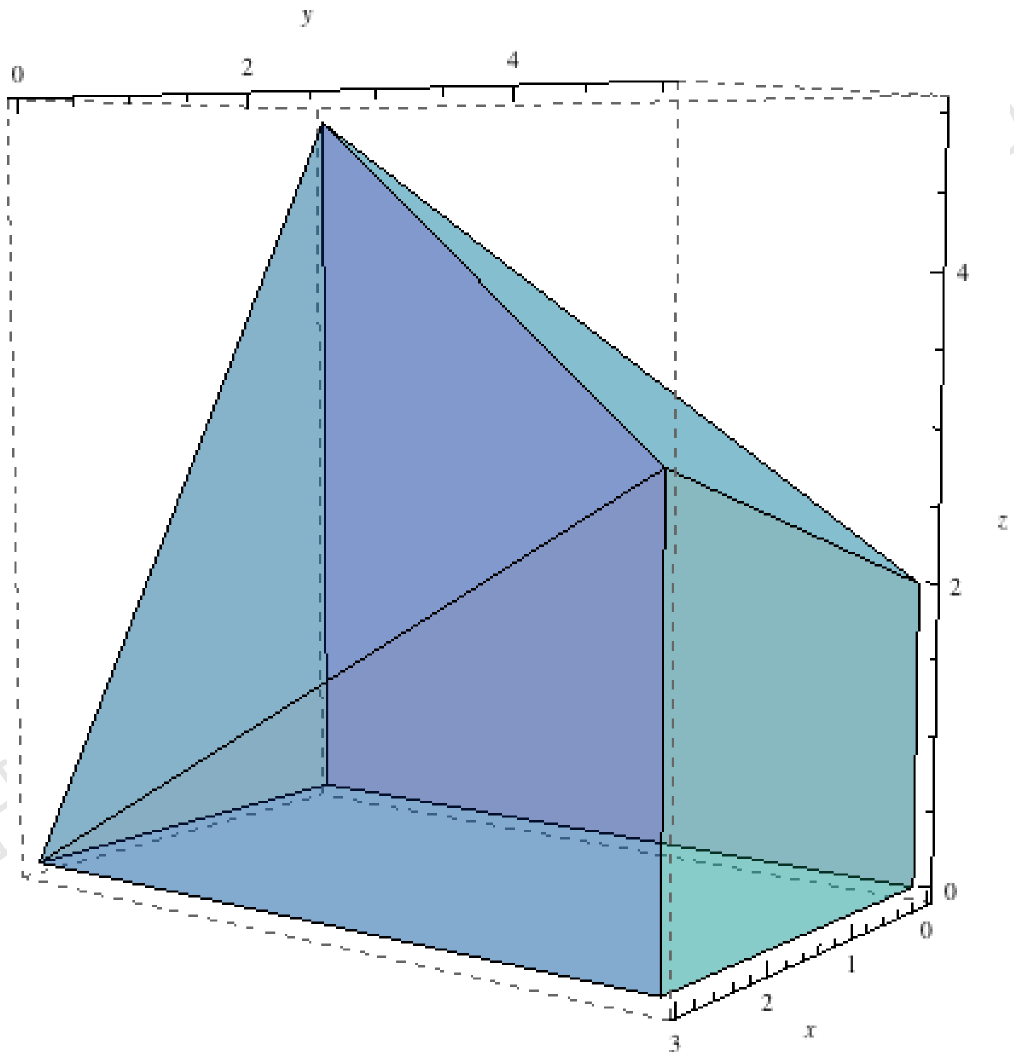
$$\forall x, y \in C : \lambda x + (1-\lambda)\, y \in C, \forall \lambda \in [0,1]$$

■ POLYÈDRE Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre si : il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

■ POLYTOPE Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est un polytope si P est un polyèdre borné.

Ensemble convexe

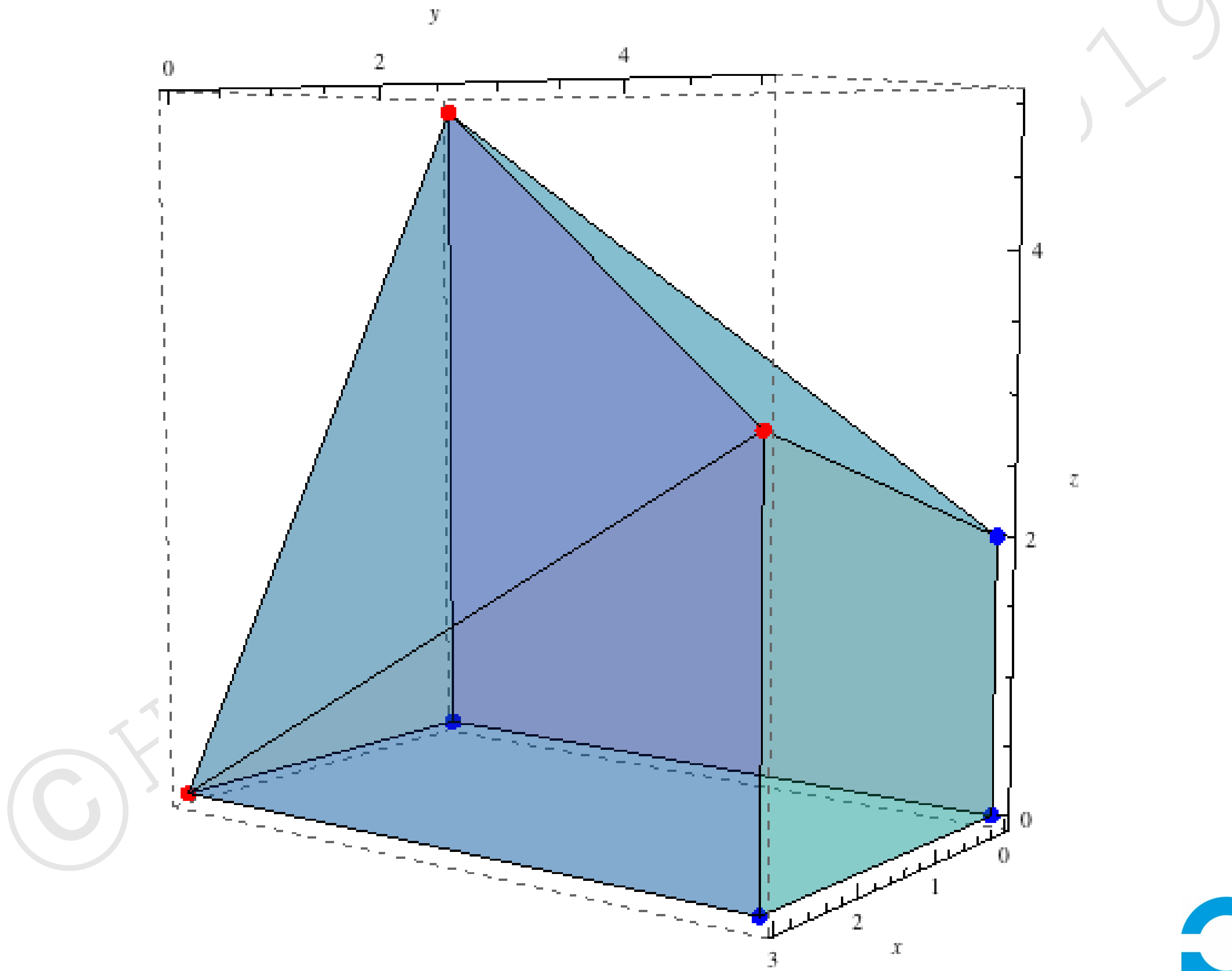


Points extrêmes

■ POINT EXTRÊME Un point $\hat{x}$ d'un ensemble convexe C est *extrême* s'il n'est pas combinaison convexe de deux autres points appartenant à C, i.e. :

$$\forall x, y \in C, \exists \lambda \in [0,1] : \hat{x} = \lambda x + (1-\lambda)\, y \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Points extrêmes



Terminologie : base

■ DONNÉES :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$

■ OBJECTIF :

- Résoudre le système

$$Ax = b$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

■ HYPOTHÈSES :

- La matrice A est de plain rang, i.e., $rang(A) = m$
- On a l'inégalité suivante : $m \leq n$

Terminologie : base

- DONNÉES :
  - Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$
  - Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$
- OBJECTIF :
  - Résoudre le système

$$Ax = b$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

- HYPOTHÈSES :
  - La matrice A est de plain rang, i.e., $rang(A) = m$
  - On a l'inégalité suivante : $m \leq n$

Terminologie : base

EXEMPLE Soit le système suivant :

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & +x_4 & & & & = & 75 \\
-5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & & +x_5 & & & = & 75 \\
+x_1 & & & & & +x_6 & & = & 3 \\
 & +x_2 & & & & & +x_7 & = & 5
\end{array}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BASE Une base d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ est toute sous-matrice carrée B inversible, i.e. $B \in GL_m(\mathbb{R})$.

Terminologie : base

EXEMPLE Soit le système suivant :

$$\begin{array}{cccccccccc}
25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & +x_4 & & & & = & 75 \\
-5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & & +x_5 & & & = & 75 \\
+x_1 & & & & & +x_6 & & = & 3 \\
 & +x_2 & & & & & +x_7 & = & 5
\end{array}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BASE Une base d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ est toute sous-matrice carrée B inversible, i.e. $B \in GL_m(\mathbb{R})$.

Terminologie : base

■ EXEMPLE Soit le système suivant :

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & +x_4 & & & & = & 75 \\ -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & & +x_5 & & & = & 75 \\ +x_1 & & & & & +x_6 & & = & 3 \\ & +x_2 & & & & & +x_7 & = & 5 \end{array}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ BASE Une base d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ est toute sous-matrice carrée B inversible, i.e. $B \in GL_m(\mathbb{R})$.

Terminologie : base

■ EXEMPLE 1 Bases (certaines) de la matrice A :

$$A = \left[N^1, B^1\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

- B^1 est formée des colonnes $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 7\}$
- N^1 est formée des colonnes $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$

✍ Le nombre de base d'une matrice A est au plus égal à $\binom{n}{m}$.

Terminologie : base

■ EXEMPLE 1 Bases (certaines) de la matrice A :

$$A = \left[N^1, B^1\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

- B^1 est formée des colonnes $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 7\}$
- N^1 est formée des colonnes $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$

✍ Le nombre de base d'une matrice A est au plus égal à $\binom{n}{m}$.

Terminologie : base

$$\left[N^2, B^2\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[N^5, B^5\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[N^3, B^3\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[N^6, B^6\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[N^4, B^4\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[N^7, B^7\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terminologie : solution de base

SOLUTION DE BASE Une solution de base du système $Ax = b$ est un vecteur $x = (x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ tel que :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{N}} &= 0 \\ x_{\mathcal{B}} &= B^{-1}b \end{aligned}$$

où B est une base de la matrice A.

- A une base B correspond une seule solution de base $(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$.
- A une solution de base $(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ peut correspondre à plusieurs bases.

Terminologie : solution de base

SOLUTION DE BASE Une solution de base du système $Ax = b$ est un vecteur $x = (x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ tel que :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{N}} &= 0 \\ x_{\mathcal{B}} &= B^{-1}b \end{aligned}$$

où B est une base de la matrice A.

- A une base B correspond une seule solution de base $(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$.
- A une solution de base $(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ peut correspondre à plusieurs bases.

Solution de base

EXEMPLE 2 Soit le système $Ax = b$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspondant à la base :

$$\left[N^1, B^1\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est

$$x_{\mathcal{B}^1} = (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5)$$
$$x_{\mathcal{N}^1} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

Solution de base

Exemple 2 Soit le système $Ax = b$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspondant à la base :

$$\left[N^1, {\color{red}B^1}\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ -5 & 9 & 15 & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ 1 & 0 & 0 & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & {\color{red}0} \\ 0 & 1 & 0 & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} \end{bmatrix}$$

est

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^1} &= (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5) \\ x_{\mathcal{N}^1} &= (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Terminologie : solution de base

$$[N^2, B^2] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$

$$[N^3, B^3] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$

$$[N^4, B^4] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$

$$[N^5, B^5] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$

$$[N^6, B^6] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$

$$[N^7, B^7] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$

Terminologie : solution de base

SOLUTION DE BASE DÉGÉNÉRÉE Une solution de base $x = (x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ du système $Ax = b$ est dégénérée si au moins une composante du vecteur $x_{\mathcal{B}}$ est nulle.

EXEMPLE 3

- La base B^1 n'est pas dégénérée :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^1} &= (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5) \\ x_{\mathcal{N}^1} &= (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

- La base B^2 est dégénérée :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^2} &= (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5) \\ x_{\mathcal{N}^2} &= (x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Terminologie : solution de base

SOLUTION DE BASE DÉGÉNÉRÉE Une solution de base $x = (x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ du système $Ax = b$ est dégénérée si au moins une composante du vecteur $x_{\mathcal{B}}$ est nulle.

EXEMPLE 3

- La base B^1 n'est pas dégénérée :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^1} &= (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5) \\ x_{\mathcal{N}^1} &= (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

- La base B^2 est dégénérée :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^2} &= (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5) \\ x_{\mathcal{N}^2} &= (x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

POLYTECH SORBONNE

Terminologie : solution de base

$$\left[N^2, B^2\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$

$$\left[N^3, B^3\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$

$$\left[N^4, B^4\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$

$$\left[N^5, B^5\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$

$$\left[N^6, B^6\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$

$$\left[N^7, B^7\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}^7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$

Terminologie : solution de base réalisable

DONNÉES :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$

OBJECTIF :

- Résoudre le système

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

HYPOTHÈSES :

- La matrice A est de plain rang, i.e., $rang(A) = m$
- On a l'inégalité suivante : $m \leq n$

Terminologie : solution de base réalisable

DONNÉES :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$

OBJECTIF :

- Résoudre le système

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

HYPOTHÈSES :

- La matrice A est de plain rang, i.e., $rang(A) = m$
- On a l'inégalité suivante : $m \leq n$

Terminologie : solution de base réalisable

■ SOLUTION DE BASE RÉALISABLE Une solution de base $(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$ du système

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

est réalisable si $x_{\mathcal{B}} \geq 0$.

Solution de base réalisable

Exemple 4 Soit le système $Ax = b, x \geq 0$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspondant à la base :

$$\left[N^8, B^8\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas réalisable, car

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}^8} &= (x_2, , x_5, x_6, x_7) = \left(-\frac{25}{3}, 150, 3, \frac{40}{3}\right) \\ x_{\mathcal{N}^8} &= (x_1, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Liens

- **POLYÈDRES** Soit le polyèdre P

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

- **BASES RÉALISABLES** Soit le système

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

✍ Quel est le lien entre les bases réalisables du système (2) et les points extrêmes du polyèdre P ?

Liens

■ POLYÈDRES Soit le polyèdre P

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

■ BASES RÉALISABLES Soit le système

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

✍ Quel est le lien entre les bases réalisables du système (2) et les points extrêmes du polyèdre P ?

Liens

EXEMPLE 5 Soit le polyèdre P suivant :

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b, x \geq 0\right\}$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 \\ -5 & 9 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 75 \\ 75 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Considérons le système associé :

$$\begin{array}{cccccccccc}
25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & +x_4 & & & & = & 75 \\
-5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & & +x_5 & & & = & 75 \\
+x_1 & & & & & +x_6 & & = & 3 \\
 & +x_2 & & & & & +x_7 & = & 5 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

Liens

$$\left[N^2, B^2\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$

$$\left[N^3, B^3\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$

$$\left[N^4, B^4\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$

$$\left[N^5, B^5\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$

$$\left[N^6, B^6\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

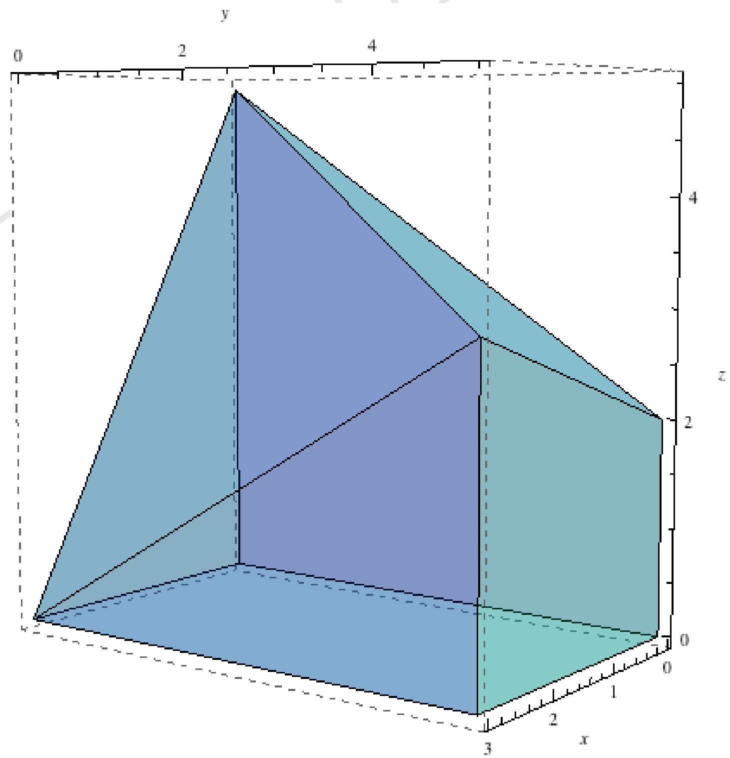
- $x_{\mathcal{B}6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$

$$\left[N^7, B^7\right] = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $x_{\mathcal{B}7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$

Liens

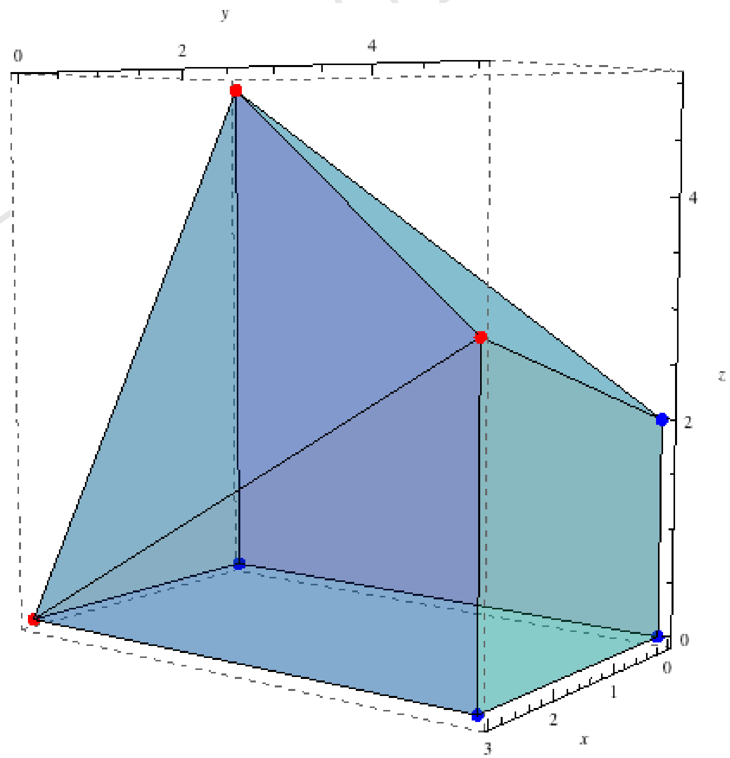
- $x_{\mathcal{B}1} = (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5)$
- $x_{\mathcal{B}2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$
- $x_{\mathcal{B}3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$
- $x_{\mathcal{B}4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$
- $x_{\mathcal{B}5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$
- $x_{\mathcal{B}6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$
- $x_{\mathcal{B}7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$



Liens

- $x_{\mathcal{B}1} = (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5)$
- $x_{\mathcal{B}2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$
- $x_{\mathcal{B}3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$
- $x_{\mathcal{B}4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$
- $x_{\mathcal{B}5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$
- $x_{\mathcal{B}6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$
- $x_{\mathcal{B}7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$

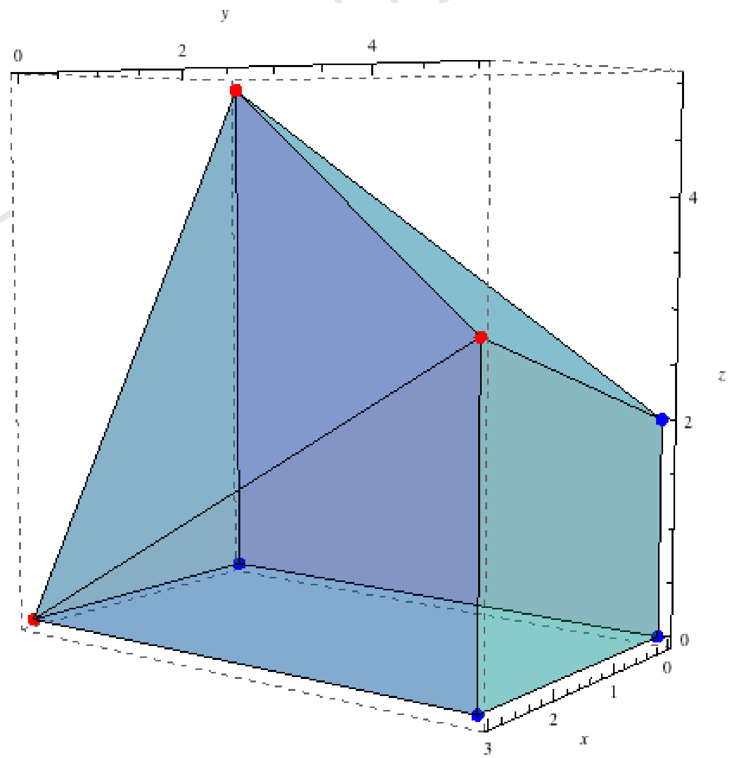
- $x_{\mathcal{B}9} = (x_1, x_4, x_5, x_7) = (3, 0, 90, -85)$
- $x_{\mathcal{B}10} = (x_1, x_3, x_5, x_7) = (3, 0, 90, 5)$



Liens

- $x_{\mathcal{B}1} = (x_4, x_5, x_6, x_7) = (75, 75, 3, 5)$
- $x_{\mathcal{B}2} = (x_1, x_5, x_6, x_7) = (3, 90, 0, 5)$
- $x_{\mathcal{B}3} = (x_1, x_2, x_4, x_5) = (3, 5, 45, 45)$
- $x_{\mathcal{B}4} = (x_2, x_4, x_5, x_6) = (5, 120, 30, 3)$
- $x_{\mathcal{B}5} = (x_2, x_3, x_4, x_6) = (5, 2, 90, 3)$
- $x_{\mathcal{B}6} = (x_1, x_2, x_3, x_5) = (3, 5, 3, 0)$
- $x_{\mathcal{B}7} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = (5, 0, 3, 5)$

- $x_{\mathcal{B}9} = (x_1, x_4, x_5, x_7) = (3, 0, 90, -85)$
- $x_{\mathcal{B}10} = (x_1, x_3, x_5, x_7) = (3, 0, 90, 5)$



Liens

■ DONNÉES :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang m
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$
- Le polytope P de $\mathbb{R}^n$ donné par le système :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

■ PROPOSITION LIEN ENTRE SOLUTION DE BASE ET POINT EXTRÊME

Un point x appartenant à $\mathbb{R}^n$ est un point extrême du polytope P si et seulement si x est une solution de base réalisable du système (3)

AGENDA

Forme standard

- Fonction objectif

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Contraintes structurelles
- Contraintes de non négativité

Forme standard

- Fonction objectif

$$
\begin{array}{ll}
\textsc{Min} & c^t x \\
\text{s.c.} & \\
 & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

- Contraintes structurelles
- Contraintes de non négativité

Forme standard

- Fonction objectif

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Contraintes structurelles
- Contraintes de non négativité

Forme standard

- Fonction objectif

$$
\begin{array}{ll}
\textsc{Min} & c^t x \\
\text{S.C.} & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

- Contraintes structurelles
- Contraintes de non négativité

Forme standard

- Fonction objectif

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Contraintes structurelles
- Contraintes de non négativité

Forme canonique

- **MINIMISATION**

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- **MAXIMISATION**

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

PROPOSITION ÉQUIVALENCE DES FORMES

Tout problème linéaire peut s'écrire sous la forme standard.

Forme canonique

- **MINIMISATION**

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- **MAXIMISATION**

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

PROPOSITION ÉQUIVALENCE DES FORMES

Tout problème linéaire peut s'écrire sous la forme standard.

Équivalence des formes

	Forme canonique	Forme standard
Minimisation	$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax - I\zeta = b \\ & x, \zeta \geq 0 \end{array}$
Maximisation	$\begin{array}{ll} \text{MAX} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{MAX} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax + I\zeta = b \\ & x, \zeta \geq 0 \end{array}$

Données :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang m
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$
- Un problème linéaire sous la forme

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & c^t x \\ \text{S.C.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

Théorème fondamental de l'optimisation linéaire

- S'il existe une solution réalisable pour (PL), alors il existe une solution de base réalisable
- S'il existe une solution réalisable optimale pour (PL), alors il existe une solution de base réalisable optimale

Ce théorème répond à a question d'existence d'une solution pour un problème d'optimisation linéaire.

DONNÉES :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rang m
- Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$
- Un problème linéaire sous la forme

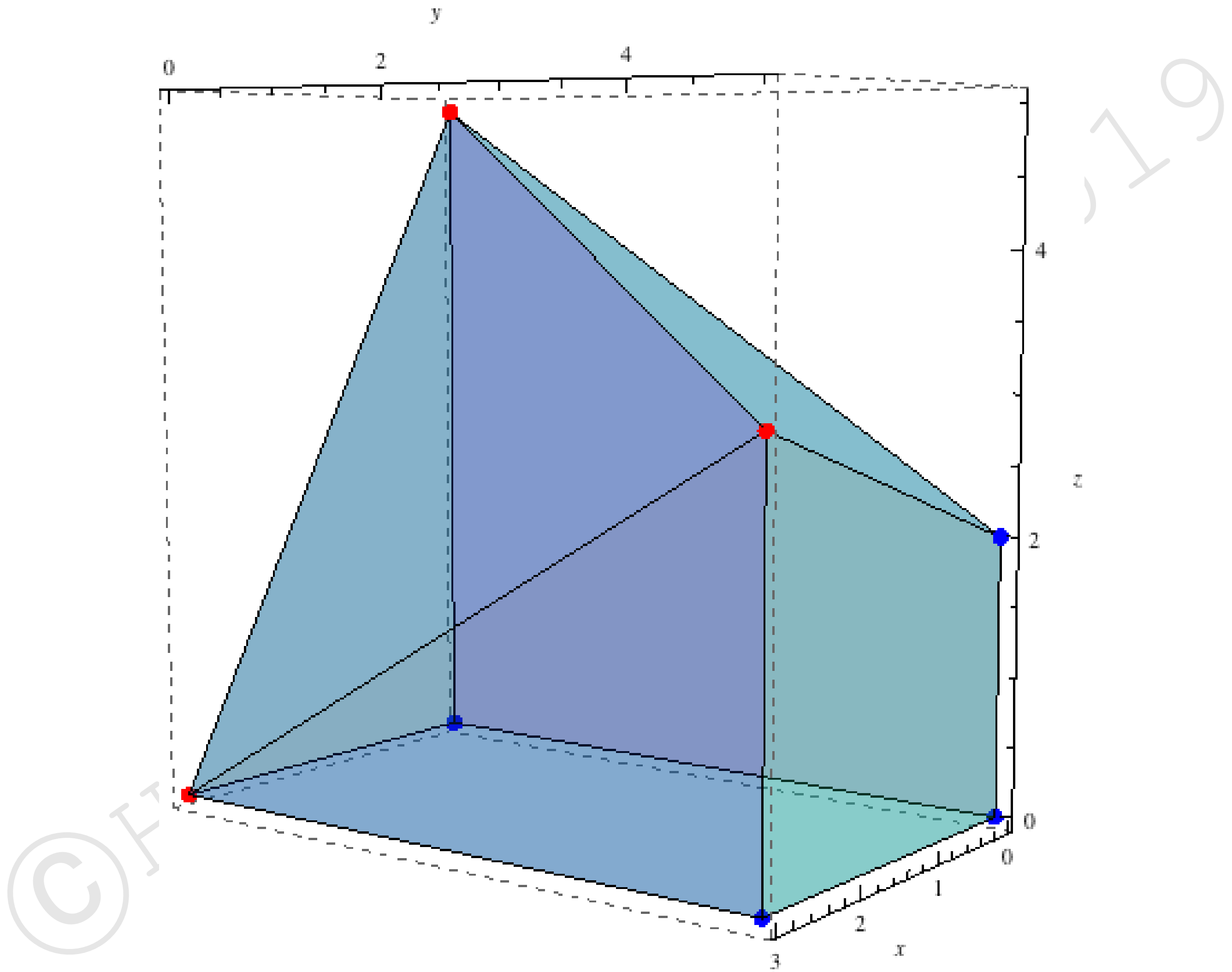
$$
\begin{array}{ll}
\text{MIN} & c^t x \\
\text{S.C.} & \\
 & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
\tag{4}
$$

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'OPTIMISATION LINÉAIRE

✍ S'il existe une solution réalisable pour (PL), alors il existe une solution de base réalisable

✍ S'il existe une solution réalisable optimale pour (PL), alors il existe une solution de base réalisable optimale

☞ Ce théorème répond à a question d'existence d'une solution pour un problème d'optimisation linéaire.



☞ Les plans de productions optimaux sont donc parmi les points extrêmes !

AGENDA

Autre exemple

Soit le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& x_1 & -2x_2 & +2x_3 & \leq & 5 \\
& x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 3 \\
& x_1 & +2x_2 & x_3 & \leq & 4 \\
& & & & & \\
& x_1\,, & x_2\,, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\tag{5}
$$

Autre exemple : mise sous forme standard

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & & \\
\text{s.c.} & & & & & & & & \\
 & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = & 5 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = & 3 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & 4 \\
 & & & & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (6)
$$

- Variables d'écrat

Autre exemple : mise sous forme standard

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & & \\
\text{s.c.} & & & & & & & & \\
& x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = & 5 \\
& x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = & 3 \\
& x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & 4 \\
& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq & 0
\end{array} \quad (6)
$$

- Variables d'écrat

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Autre exemple : tableau simplexe

- Valeur de la fonction objectif
- Vecteur des coûts réduits
- Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Matrice des contraintes
- Second membre

Optimalité du tableau simplexe ?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

D'après le vecteur des coûts réduits on a :

$$z - 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \iff z = 0 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 \tag{7}$$

La valeur de l'objectif diminuerait si la variable x_3 entre en base.

☞ On peut améliorer la valeur de la fonction objectif en faisant entrer dans la base une variable hors base de coût réduit positif.

Optimalité du tableau simplexe ?

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

D'après le vecteur des coûts réduits on a :

$$z - 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \iff z = 0 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 \tag{7}$$

La valeur de l'objectif diminuerait si la variable x_3 entre en base.

☞ On peut améliorer la valeur de la fonction objectif en faisant entrer dans la base une variable hors base de coût réduit positif.

Variable de base bloquante

- Quelle variable doit sortir de la base ?

Si x_3 entre en base, alors la nouvelle solution doit être réalisable, i.e. :

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \geq 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} 5 - 2x_3 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_3 \leq \frac{5}{2} \\ 3 + x_3 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_3 \geq -3 \\ 4 - x_3 \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_3 \leq 4 \end{aligned}$$

La variable de base bloquante est x_4 (variable de base associée à la première équation). Donc, x_4 sort de la base et laisser sa place à x_3.

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal ?
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

POLYTECH SORBONNE

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 0

- Est-ce que le tableau est optimal $\rightarrow$ non
- Faire entrer, dans la base, une variable hors base ...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	1	0	0	1	4

- Déterminer le pivot ...
- Faire sortir une variable de la base ...

Algorithme simplexe : itération 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	$-\frac{7}{2}$	2	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{15}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
x_5	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{11}{2}$
x_6	$\frac{1}{2}$	3	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

Algorithme simplexe : itération 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	$-\frac{23}{6}$	0	0	$-\frac{7}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{17}{2}$
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3
x_5	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{11}{2}$
x_2	$\frac{1}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Analyse de la méthode : pourquoi le format tableau ?

Soit à résoudre :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & c^t x & \\
\text{s.c.} & & \\
 & Ax & = b \\
 & x & \geq 0
\end{array}
\qquad (PL)
$$

Avec :

$$
\begin{aligned}
A &= (B, N), \\
c &= (c_B, c_N), \\
x &= (x_B, x_N),
\end{aligned}
$$

où B est la base courante.

Analyse de la méthode : pourquoi le format tableau ?

Le problème (PL) est équivalent au problème linéaire suivant (why ?) :

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z & \\ \text{s.c.} & & \\ & z + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N + 0 x_B & = c_B B^{-1} b \\ & 0z + x_B + B^{-1} N x_N & = B^{-1} b \\ & x_B, x_N & \geq 0 \end{array} \tag{8}$$

Analyse de la méthode : pourquoi le format tableau ?

D'où le tableau simplexe :

	x_N	x_B	z
	$c_B B^{-1} N - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

Analyse de la méthode : critère d'optimalité

NOTATION

- $\mathcal{N}$ ensemble des indices des variables hors base
- $\zeta = c_B B^{-1} N$, i.e, $\zeta_j = (c_B B^{-1} N)_j, j \in \mathcal{N}$.

CRITÈRE D'OPTIMALITÉ Le tableau simplexe

	x_N	x_B	z
	$\zeta - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

est optimal **si et seulement si** $\zeta_j - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{N}$.

Analyse de la méthode : var. entrante et var. sortante

■ **CHOISIR LA VAR. ENTRANTE : RÈGLE DE DANTZIG** La variable hors base x_k entre en base si

$$k \in argmax\{\zeta_j - c_j : j \in \mathcal{N}\}$$

■ **CHOISIR LA VAR. SORTANTE : RÈGLE DU RATIO MINIMUM** La variable x_r sort de la base si

$$r \in argmin_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ik}} : (B^{-1}N)_{ik} > 0 \right\}$$

- ☞ $B^{-1}b$ la dernière colonne du tableau simplexe
- ☞ $\left(B^{-1}N\right)_k$ la colonne sous la variable hors base x_k

Analyse de la méthode : convergence et complexité

THÉORÈME CONVERGENCE ET COMPLEXITÉ DE LA MÉTHODE SIMPLEXE

En l'absence de dégénérescence, l'algorithme simplexe

- converge en un nombre fini d'itérations et,
- sa complexité est exponentielle en la taille de l'instance.

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & \sum_{j=1}^{n} x_j & & & \\ \text{s.c.} & & & & \\ & x_j + 2\sum_{k=1}^{j-1} x_j & \leq & 3^{(j-1)}, & j = 2, \ldots, n \\ & x_1 & \leq & 1 & \\ & x & \geq & 0 & \end{array} \quad (9)$$

- Résoudre le problème (9) dans le cas où n vaut 2 et 3.
- Que remarquez-vous ?

Analyse de la méthode : convergence et complexité

THÉORÈME CONVERGENCE ET COMPLEXITÉ DE LA MÉTHODE SIMPLEXE

En l'absence de dégénérescence, l'algorithme simplexe

- converge en un nombre fini d'itérations et,
- sa complexité est exponentielle en la taille de l'instance.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & \sum_{j=1}^{n} x_j & & \\
\text{s.c.} & & & \\
& x_j + 2\sum_{k=1}^{j-1} x_j & \leq & 3^{(j-1)}, \quad j = 2, \ldots, n \\
& x_1 & \leq & 1 \\
& x & \geq & 0
\end{array}
\tag{9}
$$

- Résoudre le problème (9) dans le cas où n vaut 2 et 3.
- Que remarquez-vous ?

Problèmes non bornés

PROPOSITION PROBLÈME NON BORNÉ

Si le vecteur

$$\left(B^{-1}N\right)_k \leq 0 \Longleftrightarrow \left(B^{-1}N\right)_{ik} \leq 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

alors le problème d'optimisation linéaire est non borné.

En effet, la solution suivante est base réalisable pour toute valeur de x_k, i.e.,

$$x_B = B^{-1}b - (B^{-1}N)_k x_k \geq 0$$

et

$$z = c_B B^{-1} b - (\zeta_k - c_k)\, x_k \quad \text{où} \quad (\zeta_k - c_k) > 0$$

Donc, on peut décroître la valeur de la fonction objectif z en augmentant la valeur de x_k sans porter atteinte à la réalisabilité.

Problème non borné : exemple

Soit le problème suivant :

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& x_1 & -2x_2 & -2x_3 & \leq & 5 \\
& x_1 & +x_2 & -1x_3 & \leq & 3 \\
& x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 \\
& & & & & \\
& x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\tag{10}
$$

- Le problème (10) est non borné car
  - la solution $(0, 0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ est réalisable.
  - sa valeur est -3α.

Problème non borné : exemple

Soit le problème suivant :

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& x_1 & -2x_2 & -2x_3 & \leq & 5 \\
& x_1 & +x_2 & -1x_3 & \leq & 3 \\
& x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 \\
& & & & & \\
& x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array} \tag{10}
$$

- Le problème (10) est non borné car
  - la solution $(0, 0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ est réalisable.
  - sa valeur est -3α.

Problème non borné : exemple

Le tableau simplexe associé à (10) est

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	-2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	-1	0	0	1	4

- Pour ce tableau on a

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \left(B^{-1}N\right)_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  - Impossible de déterminer une variable sortante
  - Donc, problème non borné

Problème non borné : exemple

Le tableau simplexe associé à (10) est

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
x_4	1	-2	-2	1	0	0	5
x_5	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	1	2	-1	0	0	1	4

- Pour ce tableau on a

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \left(B^{-1}N\right)_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  - Impossible de déterminer une variable sortante
  - Donc, problème non borné

AGENDA

Modèle mathématique

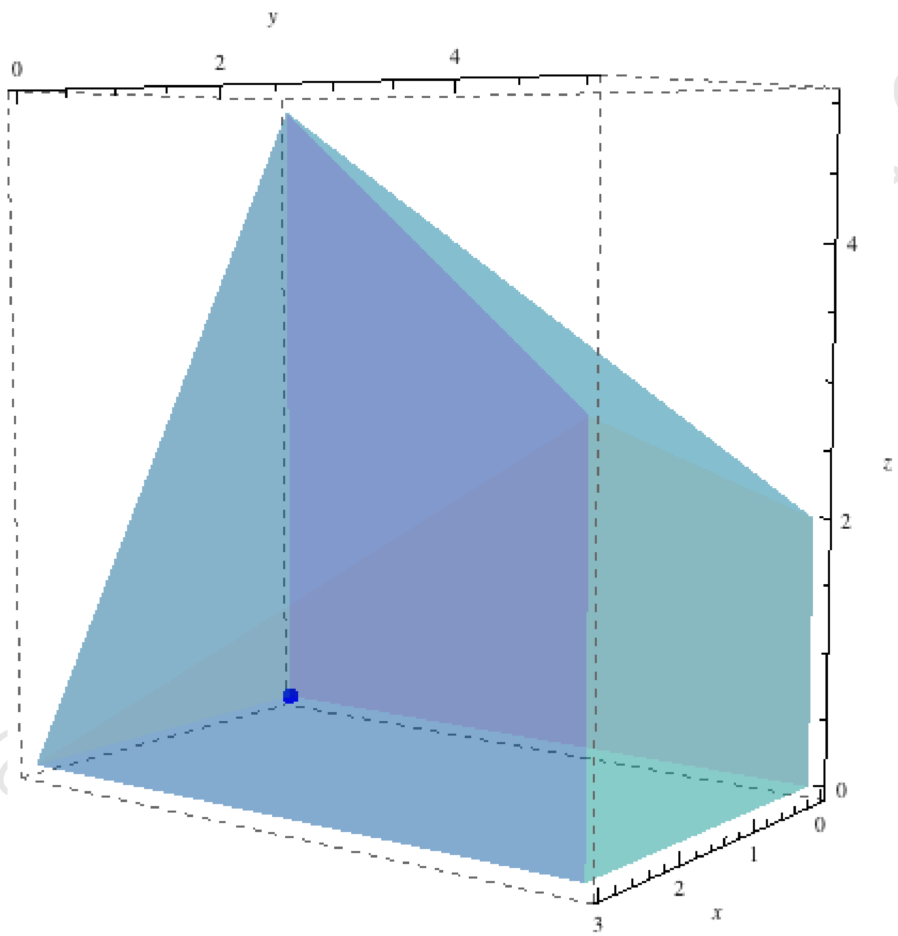
■ ENTREPRISE POLLUETOUT Soit à résoudre le problème suivant

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\text{MIN} & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
 & 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & x_2 & & \leq & 5 \\
 & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème sous format tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	4	2	3	0	0	0	0	0
x_4	25	-9	15	1	0	0	0	75
x_5	-5	9	15	0	1	0	0	75
x_6	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

Position de la solution courante



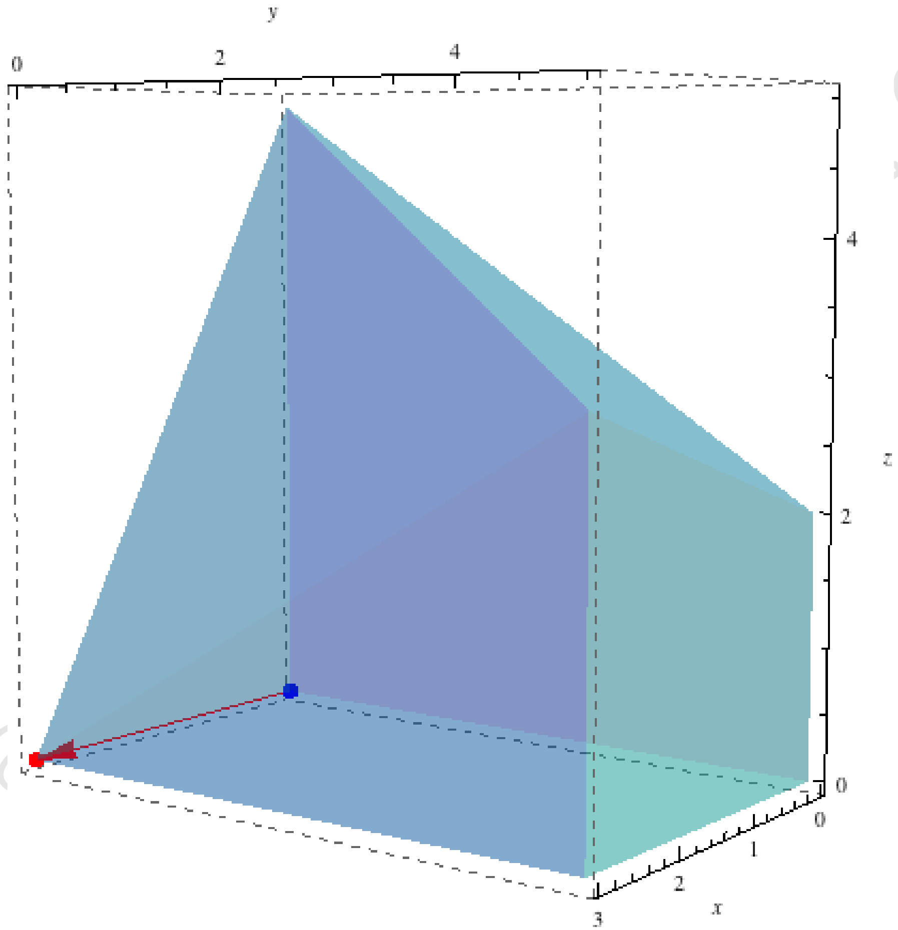
☞ Sommet de départ $(0, 0, 0)$.

Première itération de la méthode simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	4	2	3	0	0	0	0	0
x_4	25	-9	15	1	0	0	0	75
x_5	-5	9	15	0	1	0	0	75
x_6	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- Variable entrant en base : x_1
- Variable sortante x_6.

Passage vers le sommet suivant



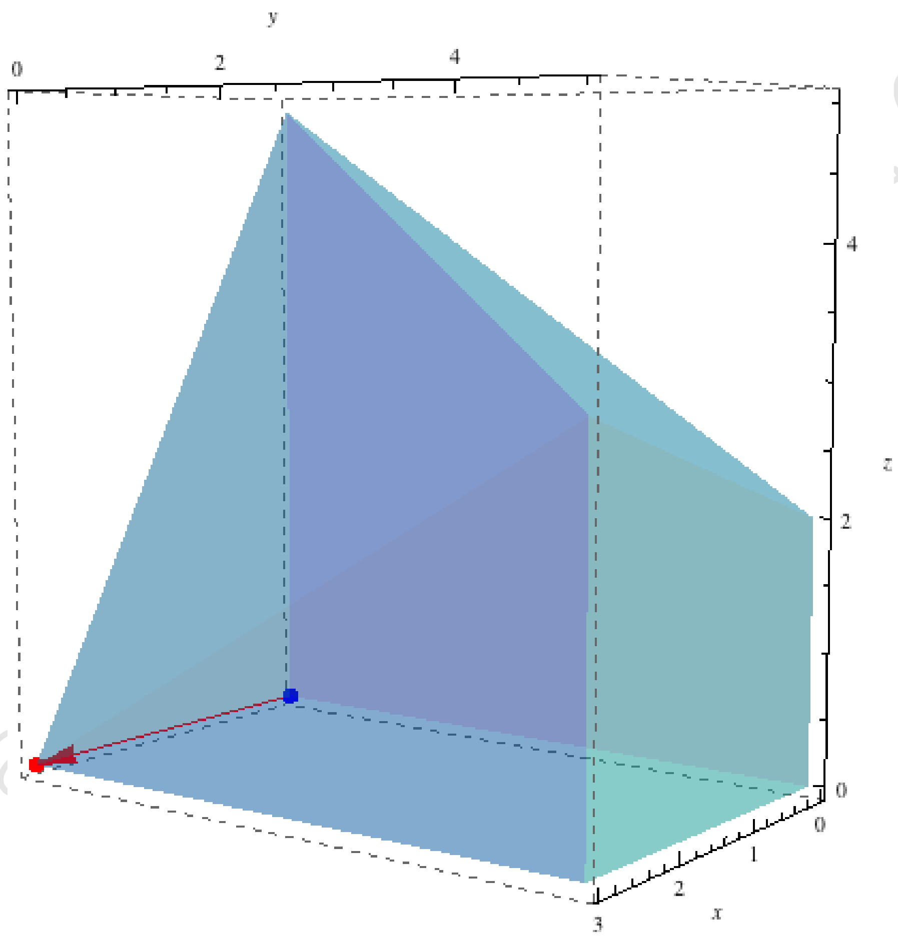
☞ Passage vers le sommet $(3, 0, 0)$.

Deuxième itération de la méthode simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	2	3	0	0	-4	0	-12
x_4	0	-9	15	1	0	-25	0	0
x_5	0	9	15	0	1	5	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- Variable entrant en base : x_3
- Variable sortante x_4

Position de la solution courante



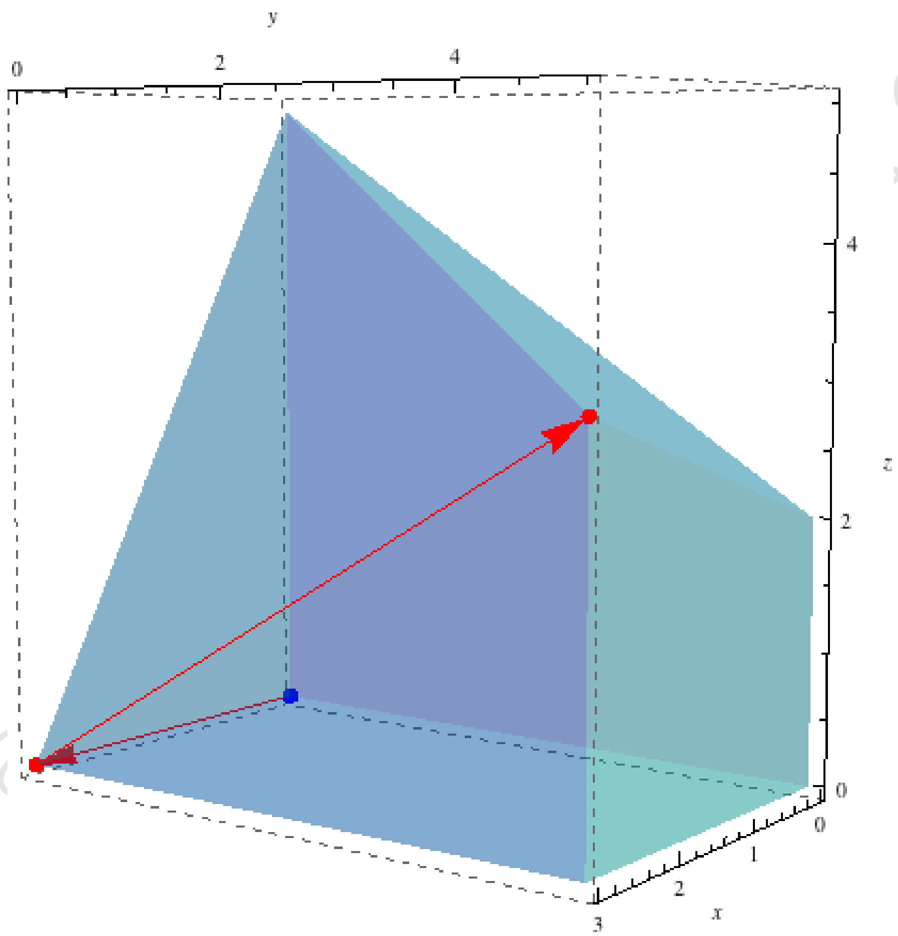
☞ Toujours sur le sommet $(3, 0, 0)$.

Troisième itération de la méthode simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	19/5	0	-1/5	0	1	0	-12
x_3	0	-3/5	1	1/15	0	-5/3	0	0
x_5	0	18	0	-1	1	30	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- Variable entrant en base : x_2
- Variable sortante x_5

Position de la solution courante



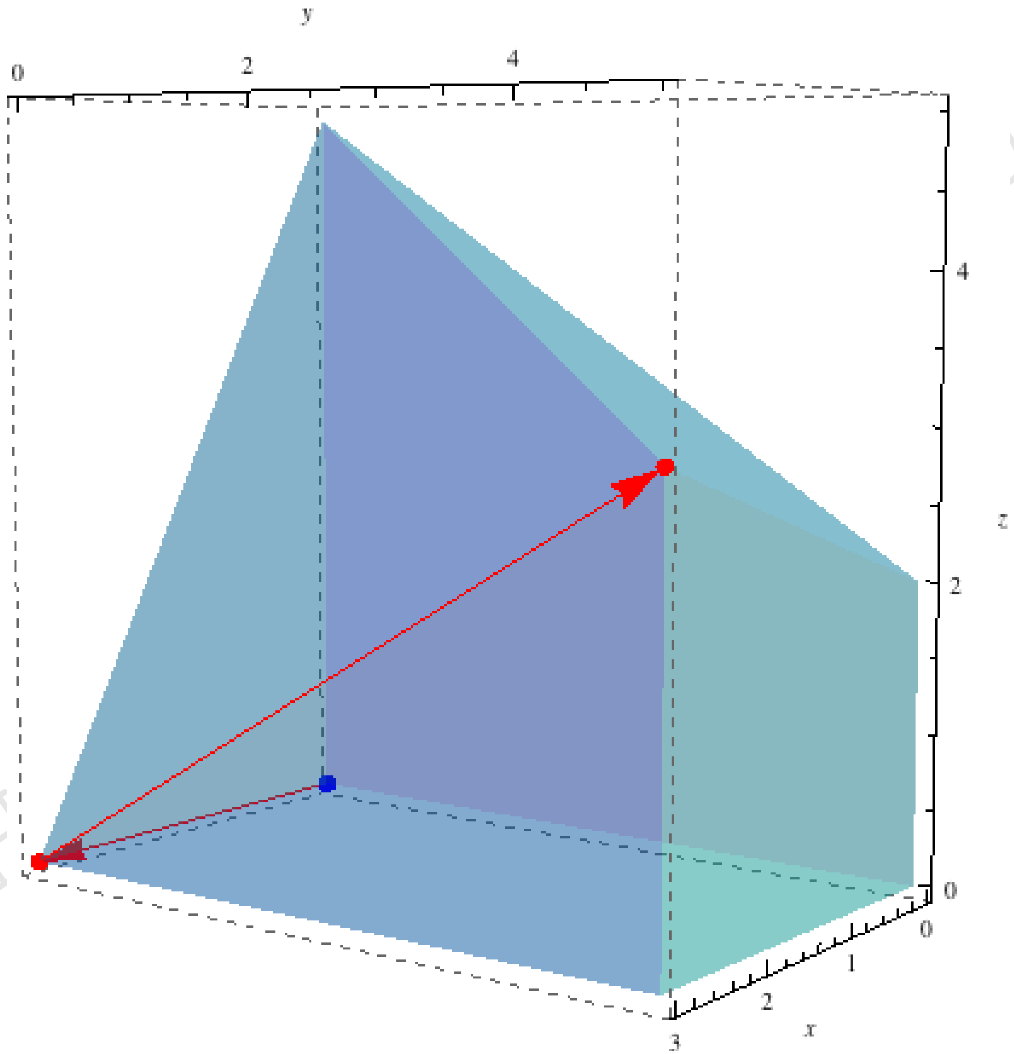
☞ Passage au sommet $(3, 5, 3)$.

Quatrième itération de la méthode simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	1/90	-19/90	-16/3	0	-31
x_3	0	0	1	1/30	1/30	-2/3	0	3
x_2	0	1	0	-1/18	1/18	10/9	0	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1/18	-1/18	-10/9	1	0

- Variable entrant en base : x_4
- Variable sortante x_7

Position de la solution courante



☞ Sommet optimal $(3, 5, 3)$.

Dernière itération de la méthode simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	0	-1/5	-5	-1/5	-31
x_3	0	0	1	0	1/15	1/3	-3/5	3
x_2	0	1	0	0	0	0	1	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_4	0	0	0	1	-1	-30	18	0

- Le plan de production optimal pour l'entreprise polluetout est

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 3)$$

- Son bénéfice est de 31

Bibliographie

- D. G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer
- M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali (2006),
  Linear Programming and Network Flows
- G.B. Dantzig and N.T. Mukund (1997),
  Linear Programming,
  Springer
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer