Traitement du Signal

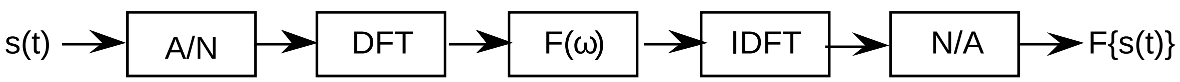
James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG 2000/2001

Séance 5 : 20 octobre 2000

Echantillonnage des Signaux

Schèma d'un dispositif de traitement numérique du signal

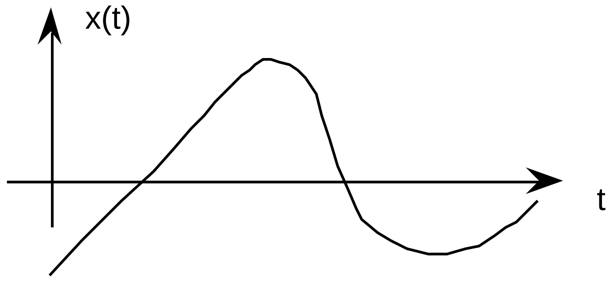


<u>Formule du Jour :</u>

$$\boxed{\text{La Fréquence Nyquist : } f_N = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}}$$

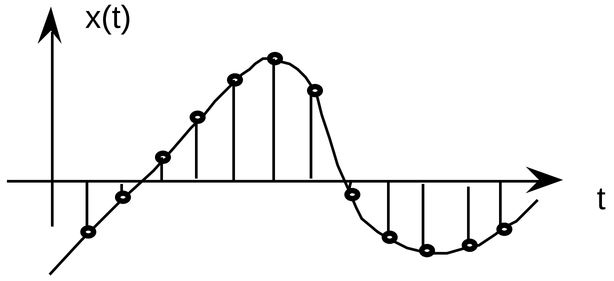
Echantillonnage des Signaux

Soit un signal continu :

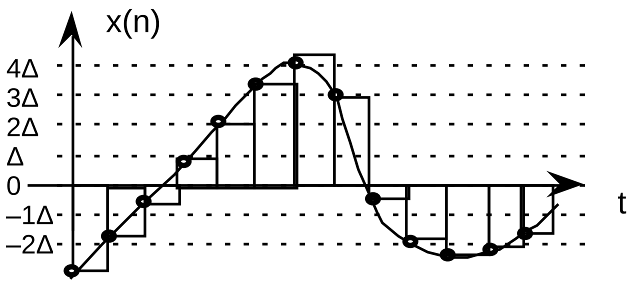


Si l'on veut traiter un signal par voie numérique à l'aide d'un calculateur, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées régulièrement ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé échantillonnage.

Une échantillonage représent un signal par une suite de valeurs ponctuelles :



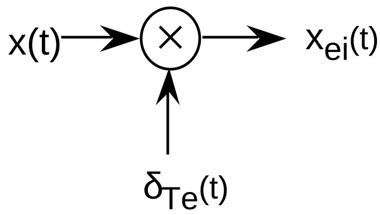
La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de quantification et de codage, dont la nature et les conséquences sont examinées dans le prochaine séance. L'ensemble réalise une fonction de conversion analogique-numérique A/N, (Dite Analog to Digital ou A/D en Anglais).



Reversibilité : Seules les conditions théoriques, irréalisables parfaitement dans la pratique (voir théorème de Paley-Wiener), permettent une reconstitution exacte du signal analogique à partir de ses échantillons. La procédure d'échantillonnage introduit toujours une distorsion quil convient de limiter à un niveau acceptable.

Le modèle général d'un échantillonneur idéal

Le modèle général d'un échantillonneur idéal est :



$$x_{ei}(t) = x(t) \cdot \delta_{Te}(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t - nT_e)$$

par convention on dit que $T_e = 1$, et que $x_{ei}(n) = x_{ei}(nT_e)$

On peut assimiler théoriquement la suite idéale d'échantillons prélevés avec une cadence fixe $f_e = \frac{1}{T_e}$ à un signal $x_{ei}(t)$ obtenu par la multiplication du signal analogique x(t) par une fonction d'échantillonnage idéalisée :

Le fonction peigne ("Unit Impulse Train" or "Sampling Function")

$$e_i(t) = \delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_e})$$

La Transformée de Fourier d'une suite de deltas

La transformée de Fourier d'une fonction peigne est une fonction peigne, de poids $f_e = \frac{1}{T_e}$.

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_e})\} = f_e\, \delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\, f_e)$$

La forme de la transformée de Fourier $X_e(f) = X_e(\omega/2\pi)$ devient :

$$X_e(f) = X(f) * f_e\, \delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_e)$$

Note : Une échantillonnage en temps implique une périodicité en fréquence.
En général, le spectre $X(\omega)$ du signal échantilloné est noté entre $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
et le spectre $X(f)$ du signal échantilloné est noté entre $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$.

Demonstration : Par suite de Fourier : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\, e^{jn2\pi f_o x}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\, e^{jn\omega_o t} \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T_e}$$

les coeficients sont determiné par l'integrale dans la periode $[\frac{-T_e}{2}, \frac{T_e}{2}]$.

$$\alpha_n = \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta(t)\, e^{-jn\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T_e}$$

Donc : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_o t} = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\, n(2\pi/T_e)\, t}$

ou bien $\delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e}\, \delta(t)\, e^{jn(2\pi/T_e)t}$ (Rétard en phase par $n\frac{2\pi}{T_e}$)

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_e)\right\} = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{e^{j2\pi n/T_e}\right\} = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T_e})$$

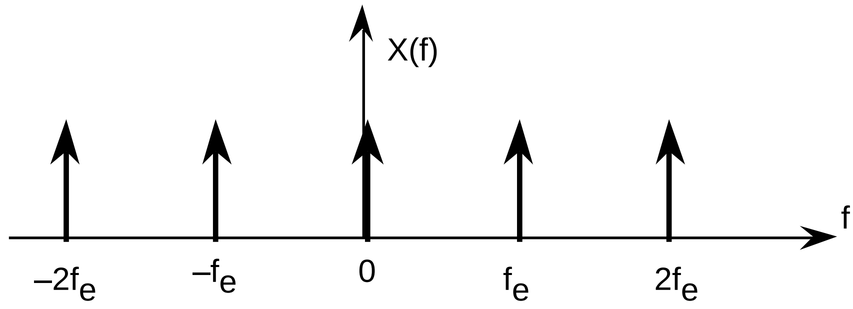
$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_e)\right\} = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T_e})}$$

ou en f avec $f_e = \dfrac{1}{T_e}$

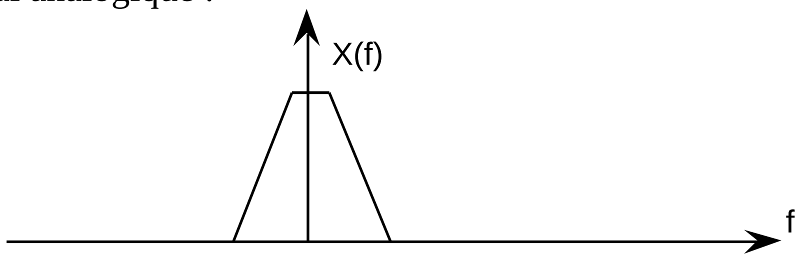
$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\frac{1}{f_e})\right\} = f_e\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-n\,f_e) = f_e\,\delta_{fe}(f)}$$

Schéma de l'échantillonage

Spectre d'un échantillonneur idéal :

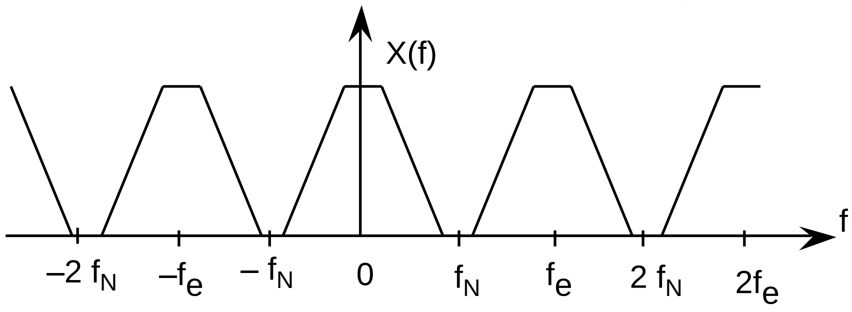


Spectre du signal analogique :



Spectre du signal après échantillonnage (idéalisé) :

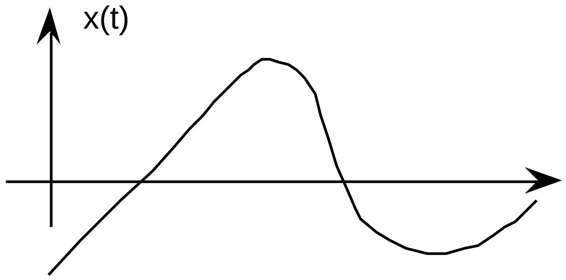
Replié autour du fréquence de "Nyquist". $f_N = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$

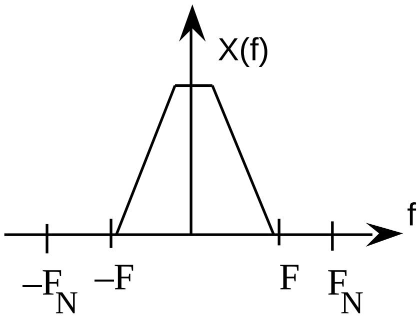


Théorème de Shannon

Un signal analogique x(t) ayant une largeur de bande finie limité à 2F hz ne peut être reconstitué exactement à partir de ses échantillons x(nΔt) que si ceux-ci ont été prélevés avec une période $T_e = \frac{1}{f_e} \leq \frac{1}{2F}$.

Spectre du signal analogique :



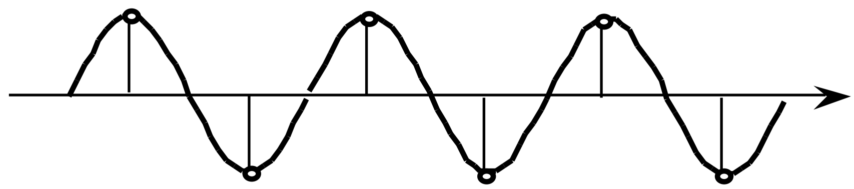


Pour que la répétition périodique de ce spectre ne déforme pas le motif répété, Il faut et il suffit que la fréquence de répétition $f_e = \frac{1}{T_e}$ (la fréquence d'échantillonnage) soit égale ou supérieure à 2 fois la fréquence maximum F du signal.

$$\boxed{F \leq f_N = \frac{f_e}{2}}$$

Exemple :

Pour une sinusoïde, Cos($2\pi f_o t$), la fréquence d'échantillonnage minimale est deux échantillons par cycle. $T_e = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2f_o}$ ou $f = \frac{1}{2T_e}$ (Cycle/échantillon)



Soit une fréquence d'échantillonage f_e.

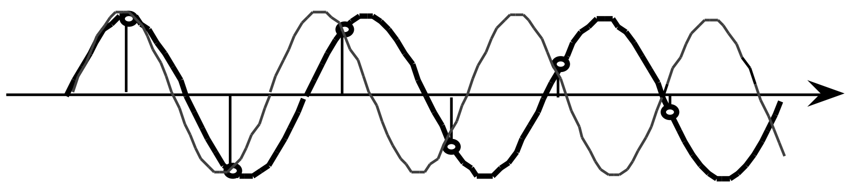
Si la fréquence du signal, f_o, est supérieure à $\frac{f_e}{2}$ par Δf :

c-à-d : si $f_o = \frac{f_e}{2} + \Delta f$ tel que $\Delta f > 0$

alors, la séquence d'échantillons est assimilée à une suite de fréquence f_{alias} tel que :

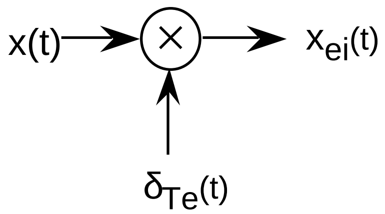
$$f_{alias} = \frac{f_e}{2} - \Delta f.$$

c-à-d : $E_2\{ \text{Cos}(2\pi t (\frac{f_e}{2} + \Delta f))\} = \text{Cos}(2\pi t (\frac{f_e}{2} - \Delta f))$



Rappel du modèle idéal d'un échantillonneur

Le modèle général d'un échantillonneur idéal $E_2\{\}$ est :



$$x_{ei}(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t - nT_e)$$

par convention on dit que $T_e = 1$, et que $x_{ei}(n) = x_{ei}(nT_e)$

La transformée de Fourier d'une fonction peigne est une fonction peigne,
de poids $f_e = \dfrac{1}{T_e}$.

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_e})\} = f_e\ \delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\ f_e)$$

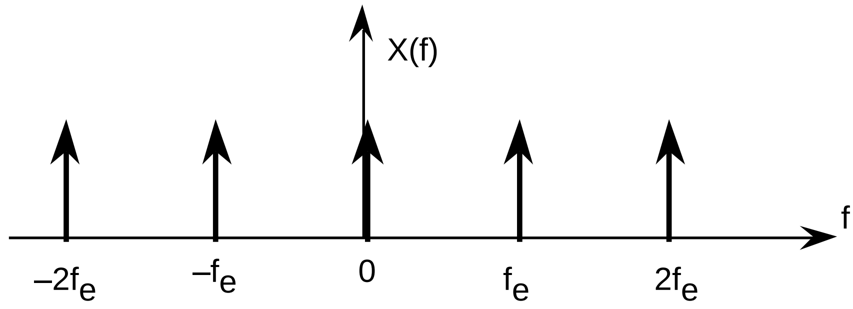
La forme de la transformée de Fourier $X_e(f) = X_e(\omega/2\pi)$ devient :

$$X_e(f) = X(f) * f_e\ \delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_e)$$

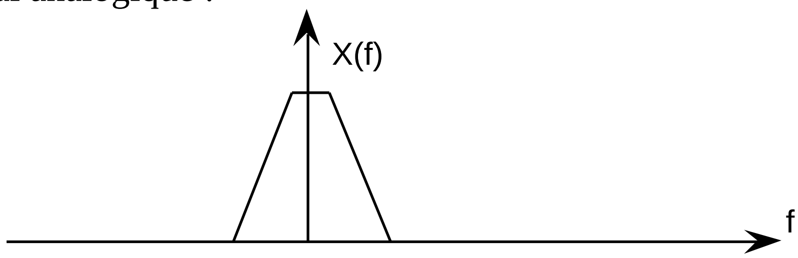
Note : Une échantillonnage en temps implique une périodicité en fréquence.
En général, le spectre $X(\omega)$ du signal échantilloné est noté entre $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
et le spectre $X(f)$ du signal échantilloné est noté entre $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$.

Schématiquement

Spectre d'un échantillonneur idéal :

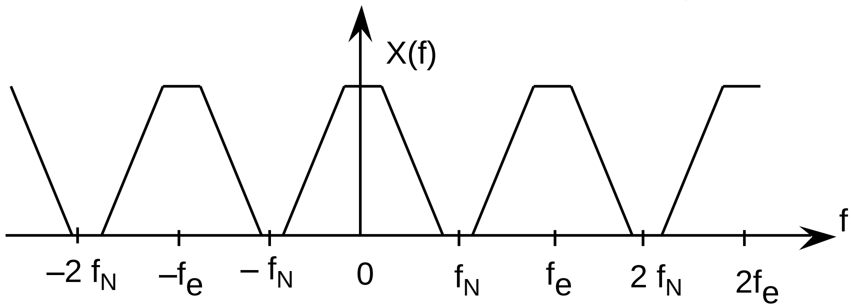


Spectre du signal analogique :



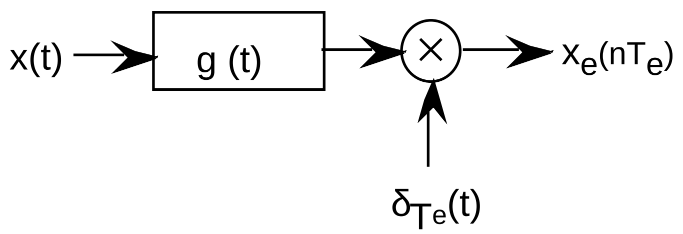
Spectre du signal après échantillonnage (idéalisé) :

Replié autour du fréquence de “Nyquist”. $f_N = \frac{f_e}{2} = \frac{1}{2T_e}$

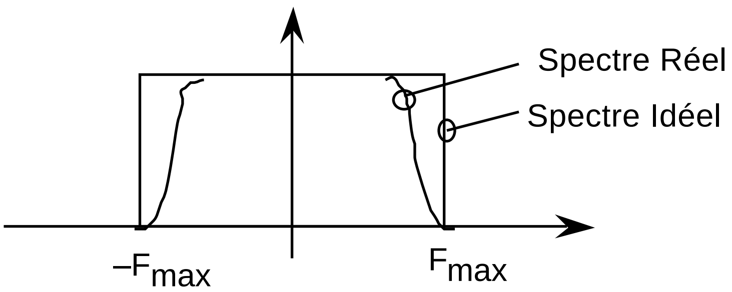


Filtre Anti-repliement

Afin d'éviter ce repliement de spectre, Il est indispensable d'introduire un préfiltrage du signal analogique avant de procéder à l'échantillonnage.



Le filtre Anti-repliement (ou filtre de garde) parfait serait un filtre passe-bas idéal de bande passante $B = \frac{f_e}{2}$. Tout filtre anti-repliement réel comporte une bande de transition qui reporte la bande passante limite B_M au delà de la bande passante effective.



Nous allons voir dans les séances suivants qu'on spécifie les caractéristique d'un filtre avec un gabarit en donnant des paramètres:

δ_p :	L'ondulation en bande passant
ω_p	Dernière fréquence passante
ω_a :	première fréquence atténuée
δ_a :	L'ondulation en bande atténuée.