SORBONNE UNIVERSITÉ — POLYTECH MAIN 4

ANNÉE 2017-2018 — EDP, DISTRIBUTIONS

Test 2 du 29 Mars 2018

Durée : 1h50, Polycopié autorisé.

Exercice 1. On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \left(\frac{2-2x}{(t+1)}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[.$$

A1) Montrer qu'il s'agit d'une équation de transport linéaire.

A2) Préciser les courbes caractéristiques, en particulier celle qui passe par un point $(x^\star, t^\star)$ donné.

A3) Donner l'expression de la solution qui vérifie $u(x,0) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

B) Donner la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \left(\dfrac{2-2x}{(t+1)}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = x(t+1)^2, \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \\ u(x,0) = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2. A) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $\tau_a(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A1) Montrer que $\tau_a(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

A2) Montrer que $\widehat{\tau_a(f)}(\xi) = \exp(-ia\xi)\widehat{f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

A3) Montrer que, pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\tau_a(f) \star g = f \star \tau_a(g)$.

B) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\sin x, \text{ si } x \in [-\pi,\pi], f(x) = 0 \text{ sinon.} \tag{2}$$

B1) Représenter le graphe de f.Vérifier que f est impaire.

B2) La fonction f est-elle continue ? Continue par morceaux ?

B3) la fonction f appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? $L^2(\mathbb{R})$?$L^\infty(\mathbb{R})$?

B4) Montrer, sans faire de calcul, que $\widehat{f}$ est continue, imaginaire pure. Quelle est la valeur de $\widehat{f}(0)$?

B5) Calculer $\widehat{f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

B6) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$.

B7) Calculer $\widehat{f \star f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

C) Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière à support compact. On considère l'équation sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[. \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

On cherche une solution u de (3) qui soit intégrable par rapport à x, pour tout $t \geq 0$, et on pose $\widehat{u}(\xi, t) \equiv \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,t) \exp(-ix.\xi) \mathrm{d}x, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0.$

C1) Pour $\xi \in \mathbb{R}$ donné, quelle équation différentielle la fonction $t \mapsto \widehat{u}(\xi, t)$ vérifie-t-elle ?

C2) En déduire la forme explicite de $\widehat{u}(\xi, t)$ en fonction de $u_0(\xi)$.

C3) Montrer que l'on peut écrire $u(\cdot, t) = G(\cdot, t) \star u_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où G est une fonction de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

C4) Montrer que $G(x,t) = \mathbf{H}(x - ct, t)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, où $\mathbf{H}$ désigne le noyau de la chaleur. [*Indication : on pourra utiliser la question A1)*].

C5) Montrer que $u(\cdot, t) = \mathbf{H}(\cdot, t) \star \tau_{ct}(u_0)$.

Exercice 3. A) Parmi les applications suivantes $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, déterminer celles qui sont des distributions :

1) $T(\varphi) = \varphi(0)\varphi(1)$, pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

2) $T(\varphi) = \varphi(-1) + 4\varphi'(3)$, pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

3) $T(\varphi) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left(\inf\{\varphi(x), \varphi(-x)\}\right)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

4) $T(\varphi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(\frac{3}{n})\right)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

B1) Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la limite suivante existe :

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x - \varphi(0) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right].$$

B2) Montrer que l'application $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une distribution.