OPTIMISATION CONTINUE :

DUALITÉ LAGRANGIENNE

Hacène Ouzia

MAIN (4 ème année)
Université Pierre et Marie Curie

2017-18

Agenda

1. Dualité lagrangienne
   - Fonction de Lagrange
   - Dualité lagrangienne
   - Propriétés de la fonction duale
2. Théorème du point col
3. Méthode duale

Problème primal

Modèle général Problème primal

$$
\begin{array}{ll}
\text{MINIMISER} & f\left(\vec{x}\right) \\
\text{s.c.} & \\
& g_i\left(\vec{x}\right) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\
& h_k\left(\vec{x}\right) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\
& \vec{x} \in \Omega
\end{array}
\tag{1}
$$

- Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- f une fonction définie sur Ω
- $g_i, i \in \mathcal{I}$ des fonctions définies sur Ω
- $h_k, k \in \mathcal{K}$ des fonctions définies sur Ω

Relaxation lagrangienne

Fonction de Lagrange La fonction de Lagrange associée au problème (1) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$$

Relaxation lagrangienne La relaxation lagrangienne associée au problème (1) est définie comme suit, pour tout vecteur $\vec{u} \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

Relaxation lagrangienne

FONCTION DE LAGRANGE La fonction de Lagrange associée au problème (1) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}\right) = f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$$

RELAXATION LAGRANGIENNE La relaxation lagrangienne associée au problème (1) est définie comme suit, pour tout vecteur $\vec{u} \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{MINIMISER} & \mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

Le dual lagrangien

■ FONCTION DUALE LAGRANGIENNE La fonction duale lagrangienne associée au problème (1) est définie comme suit :

$$\theta\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \text{MINIMISER}\left\{\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}\right) : \vec{x} \in \Omega\right\}$$

■ DUAL LAGRANGIEN Le dual lagrangien du problème (1) est définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{MAXIMISER} & \theta\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{u} \geq 0 \end{array}$$

Le dual lagrangien

■ FONCTION DUALE LAGRANGIENNE La fonction duale lagrangienne associée au problème (1) est définie comme suit :

$$\theta\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \text{MINIMISER}\left\{\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}\right) : \vec{x} \in \Omega\right\}$$

■ DUAL LAGRANGIEN Le dual lagrangien du problème (1) est définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{MAXIMISER} & \theta\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{u} \geq 0 \end{array}$$

Dual lagrangien

DUAL LAGRANGIEN PROBLÈME DUAL

$$\underset{\vec{u} \geq 0}{\text{MAX}} \quad \underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{MIN}} \quad f\left(\vec{x}\right) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i\left(\vec{x}\right) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k\left(\vec{x}\right) \tag{2}$$

où

- Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- f une fonction définie sur Ω
- $g_i, i \in \mathcal{I}$ des fonctions définies sur Ω
- $h_k, k \in \mathcal{K}$ des fonctions définies sur Ω

Dual lagrangien

DUAL LAGRANGIEN PROBLÈME DUAL

$$\underset{\vec{u} \geq 0}{\text{MAX}} \quad \underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{MIN}} \quad f\left(\vec{x}\right) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i\left(\vec{x}\right) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k\left(\vec{x}\right) \tag{2}$$

où

- Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- f une fonction définie sur Ω
- $g_i, i \in \mathcal{I}$ des fonctions définies sur Ω
- $h_k, k \in \mathcal{K}$ des fonctions définies sur Ω

Dual lagrangien

Problème primal

$$
\begin{array}{ll}
\text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) \\
\text{s.c} & \\
 & g_i\left(\vec{x}\right) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\
 & h_k\left(\vec{x}\right) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\
 & \vec{x} \in \Omega
\end{array}
$$

Dual lagrangien

$$
\underset{\vec{u} \geq 0}{\text{MAX}} \; \underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{MIN}} \quad f\left(\vec{x}\right) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i\left(\vec{x}\right) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k\left(\vec{x}\right)
$$

Dual lagrangien

Problème primal

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & f(\vec{x}) \\
\text{s.c} & \\
 & g_i(\vec{x}) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\
 & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\
 & \vec{x} \in \Omega
\end{array}
$$

Dual lagrangien

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \text{Min} & f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x}) \\
\vec{u} \geq 0 & \vec{x} \in \Omega &
\end{array}
$$

Dual lagrangien

■ APPLICATION Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \textrm{MIN} & f(\vec{x}) \\ \textrm{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

■ DUAL LAGRANGIEN :

$$\textrm{MAX}_{\vec{u} \leq 0} \ \textrm{MIN}_{\vec{x} \in \Omega} \quad f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$$

Dual lagrangien

APPLICATION Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

DUAL LAGRANGIEN

$$\begin{array}{lll} \text{MAX} & \text{MIN} & f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x}) \\ \vec{u} \leq 0 & \vec{x} \in \Omega & \end{array}$$

Dual lagrangien

■ **APPLICATION** Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

■ **DUAL LAGRANGIEN**

$$\begin{array}{lll} \text{MIN} & \text{MAX} & f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x}) \\ \vec{u} \geq 0 & \vec{x} \in \Omega & \end{array}$$

Dual lagrangien

APPLICATION Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

DUAL LAGRANGIEN

$$\underset{\vec{u} \geq 0}{\text{MIN}} \quad \underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{MAX}} \quad f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$$

Dual lagrangien

■ **APPLICATION** Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \langle c, x\rangle \\ \text{s.c.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

■ **DUAL LAGRANGIEN**

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & \langle w, b\rangle \\ \text{s.c.} & \\ & w^t A \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

Dual lagrangien

■ APPLICATION Quel est le dual lagrangien du problème primal :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.c.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

■ DUAL LAGRANGIEN

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & \langle w, b \rangle \\ \text{s.c.} & \\ & w^t A \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

Propriétés de la fonction duale

THÉORÈME DUALITÉ FAIBLE

Supposons que

- $\vec{x}_0$ est un point réalisable du primal (1)
- $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ un point réalisable du dual (2)

Alors, nous avons :

$$\boxed{\theta\left(\vec{u}_0, \vec{v}_0\right) \leq f\left(\vec{x}_0\right)}$$

Indication : Utiliser la définition

Propriétés de la fonction duale

THÉORÈME DUALITÉ FAIBLE

Supposons que

- $\vec{x}_0$ est un point réalisable du primal (1)
- $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ un point réalisable du dual (2)

Alors, nous avons :

$$\theta\left(\vec{u}_0, \vec{v}_0\right) \leq f\left(\vec{x}_0\right)$$

Indication : Utiliser la définition

Propriétés de la fonction duale

Données

- Ω un ensemble *compact*
- f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$
- $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ une famille finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$

Théorème Concavité de la fonction duale

La fonction

$$\gamma(\vec{u}) = \text{Min}\left\{ f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega \right\}$$

est concave.

Indication : Utiliser la définition et le fait que

$$Min_{\vec{x} \in \Omega}\{f(\vec{x})\} + Min_{\vec{x} \in \Omega}\{g(\vec{x})\} \leq Min_{\vec{x} \in \Omega}\{f(\vec{x}) + g(\vec{x})\}$$

Propriétés de la fonction duale

Données

- Ω un ensemble *compact*
- f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$
- $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ une famille finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$

Théorème Concavité de la fonction duale

La fonction

$$\gamma(\vec{u}) = \text{Min}\left\{f(\vec{x}) + \sum_{i\in\mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega\right\}$$

est concave.

Indication : *Utiliser la définition et le fait que*

$$Min_{\vec{x}\in\Omega}\{f(\vec{x})\} + Min_{\vec{x}\in\Omega}\{g(\vec{x})\} \leq Min_{\vec{x}\in\Omega}\{f(\vec{x}) + g(\vec{x})\}$$

Propriétés de la fonction duale

Données

- Ω un ensemble *compact*
- f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$
- $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ une famille finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$
- Pour un vecteur $\vec{u}$, soit l'ensemble $\Omega(\vec{u})$ suivant :

$$\Omega(\vec{u}) = \mathtt{argmin} \left\{ f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega \right\}$$

Théorème Différentiabilité de la fonction duale

Si $\vec{u}_0$ tel que $\Omega(\vec{u}_0) = \{\vec{x}_0\}$, alors la fonction

$$\gamma(\vec{u}) = \text{Min} \left\{ f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega \right\}$$

est différentiable en $\vec{u}_0$ et

$$\nabla \gamma(\vec{u}_0) = \left[g_i(\vec{x}_0) : i \in \mathcal{I} \right]^t$$

Propriétés de la fonction duale

EXEMPLE Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + 3y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq -2 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

QUESTIONS

- ✍ Déterminer l'expression de la fonction dual θ.
- ✍ Vérifier que la fonction θ est concave.

Propriétés de la fonction duale

Exemple Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2 + 3y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq -2 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Solution

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \text{Min}\,\mathcal{L}(x, y, w) \\ &= \text{Min}\left\{x^2 + 3y^2 + w(2y + x + 2) : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= -\frac{7}{12}w^2 + 2w \end{aligned}$$

Propriétés de la fonction duale

■ EXEMPLE Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + 3y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq -2 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

■ SOLUTION

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \text{MIN}\mathcal{L}(x, y, w) \\ &= \text{MIN}\left\{x^2 + 3y^2 + w(2y + x + 2) : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= -\frac{7}{12}w^2 + 2w \end{aligned}$$

Propriétés de la fonction duale

Données

- Ω un ensemble *compact*
- f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$
- $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ une famille finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$
- Pour un vecteur $\vec{u}$, soit l'ensemble $\Omega(\vec{u})$ suivant :

$$\Omega(\vec{u}) = \texttt{argmin}\left\{ f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) : \vec{x} \in \Omega \right\}$$

Théorème Sous-différentiabilité de la fonction duale

Si pour tout $\vec{u}_0$ tel que $\Omega(\vec{u}_0) \neq \emptyset$, alors pour tout $\vec{x}$ nous avons :

$$\vec{x}_0 \in \Omega(\vec{u}_0) \Longrightarrow \left[g_i(\vec{x}_0) : i \in \mathcal{I}\right]^t \in \partial\theta(\vec{u}_0)$$

Propriétés de la fonction duale

■ EXEMPLE Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & -x-y \\ \text{s.c.} & \\ & 2y+x \leq 3 \\ & x \in \Omega \end{array}$$

où :

$$\Omega = \mathtt{Conv}\left\{(0,0),(1,2),(2,3),(3,1),(2,0)\right\}.$$

■ QUESTIONS

- Déterminer l'expression de la fonction dual θ.
- Vérifier que la fonction θ est différentiable au point 2.

Propriétés de la fonction duale

■ EXEMPLE Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & -x - y \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq 3 \\ & x \in \Omega \end{array}$$

où :

$$\Omega = \texttt{Conv}\left\{(0,0),(1,2),(2,3),(3,1),(2,0)\right\}.$$

■ QUESTIONS

- Déterminer l'expression de la fonction dual θ.
- Vérifier que la fonction θ est différentiable au point 2.

Propriétés de la fonction duale

EXEMPLE Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & -x-y \\ \text{s.c.} & \\ & 2y+x \leq 3 \\ & x \in \Omega = \mathtt{Conv}\{(0,0),(1,2),(2,3),(3,1),(2,0)\} \end{array}$$

SOLUTION

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \text{MIN}\{-x-y+w(x+2y-3) : x \in \Omega\} \\ &= \text{MIN}\{5+5w, -3w\} \end{aligned}$$

1. Dualité lagrangienne
2. Théorème du point col
   - Définition
   - Théorèmes de dualité
3. Méthode duale

Condition de point-col

Données

- $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$
- Une fonction de $\mathcal{L} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

Problème primal

Soit le problème suivant :

$$\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \quad (3)$$

Problème dual

Soit le problème suivant :

$$\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \quad (4)$$

Théorème Dualité faible

On a :

$$\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \leq \text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right)$$

Condition de point-col

Données

- $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$
- Une fonction de $\mathcal{L} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

Problème primal Soit le problème suivant :

$$\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \quad (3)$$

Problème dual Soit le problème suivant :

$$\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \quad (4)$$

Théorème Dualité faible On a :

$$\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right) \leq \text{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\text{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{y}\right)$$

Condition de point-col

■ **DONNÉES**

- $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$
- Une fonction de $\mathcal{L} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

■ **POINT-COL** Un point $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est un *point-col* pour $\mathcal{L}$ si :

$$\mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{y}) \leq \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \leq \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y}_0), \forall \vec{x} \in \mathcal{A}, \forall \vec{y} \in \mathcal{B}$$

■ **EXEMPLE** Soit $\mathcal{L}(x, y) = x^2 - y^2$

$$\mathcal{L}(0, y) \leq \mathcal{L}(0, 0) \leq \mathcal{L}(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Condition de point-col

Données

- $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$
- Une fonction de $\mathcal{L} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

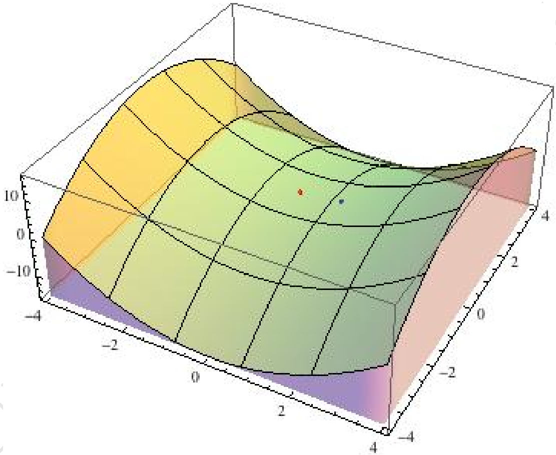
Point-col Un point $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est un *point-col* pour $\mathcal{L}$ si :

$$\mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{y}) \leq \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \leq \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y}_0), \forall \vec{x} \in \mathcal{A}, \forall \vec{y} \in \mathcal{B}$$

Exemple Soit $\mathcal{L}(x, y) = x^2 - y^2$

$$\mathcal{L}(0, y) \leq \mathcal{L}(0, 0) \leq \mathcal{L}(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Condition de point-col



- Point-col $(0, 0)$, point non col $(1, 0)$

Condition de point-col

Données

- $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$
- Une fonction de $\mathcal{L} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

Théorème Point-col

Un point $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est un *point-col* pour $\mathcal{L}$ si et seulement si :

- Le point $\vec{x}_0$ est solution du problème (5)
- Le point $\vec{y}_0$ est solution du problème (4)
- L'égalité suivante est valide :

$$\mathrm{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathrm{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{INF}_{\vec{x}\in\mathcal{A}}\mathrm{SUP}_{\vec{y}\in\mathcal{B}}\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y})$$

Condition de point-col

- **PROBLÈME PRIMAL** Traduire le problème

$$
\begin{array}{lll}
\text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) & \\
\text{s.c.} & & \\
& g_i\left(\vec{x}\right) \leq \vec{0}, & i \in \mathcal{I} \\
& h_k\left(\vec{x}\right) = \vec{0}, & k \in \mathcal{K} \\
& \vec{x} \in \Omega &
\end{array}
$$

en

$$
\text{INF}_{\vec{x} \in \mathcal{A}} \text{SUP}_{\vec{y} \in \mathcal{B}} \mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{y}\right)
$$

Condition de point-col

PROBLÈME PRIMAL Le problème

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \leq \vec{0}, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = \vec{0}, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

est équivalent à :

$$\text{INF}_{\vec{x}\in\Omega}\text{SUP}_{\vec{\lambda}\geq\vec{0}}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{\lambda},\vec{\mu}\right)$$

Sont dual est le probème

$$\text{SUP}_{\vec{\lambda}\geq\vec{0}}\text{INF}_{\vec{x}\in\Omega}\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{\lambda},\vec{\mu}\right)$$

Condition de point-col

THÉORÈME POINT-COL

Un point $\left(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}\right)$ est un point-col pour $\mathcal{L}$ si et seulement si :

- Le point $\hat{x}$ est solution du problème

$$\text{INF}_{x\in\Omega}\text{SUP}_{\lambda\geq 0}\mathcal{L}\left(x, \lambda, \mu\right)$$

- Le point $\left(\hat{\lambda}, \hat{\mu}\right)$ est solution du problème dual

$$\text{SUP}_{\lambda\geq 0,\mu}\text{INF}_{x\in\Omega}\mathcal{L}\left(x, \lambda, \mu\right)$$

- L'égalité suivante est valide :

$$\text{INF}_{x\in\Omega}\text{SUP}_{\lambda\geq 0}\mathcal{L}\left(x, \lambda, \mu\right) = \text{SUP}_{\lambda\geq 0}\text{INF}_{x\in\Omega}\mathcal{L}\left(x, \lambda, \mu\right)$$

Condition de point-col

■ COROLLAIRE Soit le problème

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_i(\vec{x}) \leq \vec{0}, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = \vec{0}, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

et soit $\mathcal{L}$ le lagragien associé, i.e :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$$

Tout point-col pour la fonction $\mathcal{L}$ est un point KKT.

Condition de point-col

EXEMPLE [?] Soit le programme convexe suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2x + y \leq -4 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

QUESTIONS

- Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème (5)
- Montrer que $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\mu}) = (-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ est un point-col de $\mathcal{L}$
- Vérifier que ce même point est un point KKT du problème (5).

Condition de point-col

EXEMPLE Soit le problème convexe suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + 3y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq -2 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- La solution optimale $(\hat{x}, \hat{y}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{4}{7})$
- La valeur du primal $\frac{12}{7}$
- La fonction duale est

$$\theta(w) = -\frac{7}{12}w^2 + 2w$$

- La solution optimale du dual $\hat{w} = \frac{12}{7}$
- La valeur du dual $\frac{12}{7}$

Condition de point-col

■ EXEMPLE Soit le problème convexe suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + 3y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & 2y + x \leq -2 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- La solution optimale $(\hat{x}, \hat{y}) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}\right)$
- La valeur du primal $\frac{12}{7}$
- La fonction duale est

$$\theta(w) = -\frac{7}{12} w^2 + 2w$$

- La solution optimale du dual $\hat{w} = \frac{12}{7}$
- La valeur du dual $\frac{12}{7}$

Condition de point-col

■ EXEMPLE Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & e^{-\sqrt{xy}} \\ \text{s.c.} & \\ & y = 0 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \end{array}$$

- La solution optimale $(\hat{x}, \hat{y}) = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \geq 0$
- La valeur du primal 1
- La fonction duale est

$$\theta(w) = 0$$

- La solution optimale du dual $\hat{w} \geq 0$
- La valeur du dual 0

Condition de point-col

■ EXEMPLE Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & e^{-\sqrt{xy}} \\ \text{s.c.} & \\ & y = 0 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \end{array}$$

- La solution optimale $(\hat{x}, \hat{y}) = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \geq 0$
- La valeur du primal 1
- La fonction duale est

$$\theta(w) = 0$$

- La solution optimale du dual $\hat{w} \geq 0$
- La valeur du dual 0

Méthode de sous-gradient

Problème convexe non différentiable

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

où

- Ω un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$
- f une fonction définie sur Ω
- f est convexe et non différentiable sur Ω

Méthode de sous-gradient

Algorithme 1 : Méthode de sous-gradient

Entrées : Ω :: sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenant un minimum de f
f :: fonction définie sur Ω,
ϵ :: précision,
$\vec{x}_0 \in \Omega$ :: Point initial

Sortie : $\vec{z}$ :: minimum local de f

Début
  $k \leftarrow 0$, $UB \leftarrow f\left(\vec{x}_k\right)$, $\vec{z} \leftarrow \vec{x}_k$, $Stop \leftarrow non$
  Répéter
    Calculer $\vec{\gamma}_k \in \partial f\left(\vec{x}_k\right)$
    Si $\vec{\gamma}_k = \vec{0}$ **alors**
      Stop $\leftarrow$ *oui*, $\vec{z}$ optimum local
    sinon
      $\vec{d}_k \leftarrow -\frac{\vec{\gamma}_k}{\|\vec{\gamma}_k\|}$
      Calculer le pas de déplacement λ_k
      $\vec{x}_{k+1} \leftarrow \mathrm{Proj}_{\Omega}\left(\vec{x}_k + \lambda_k \vec{d}_k\right)$
      Si $f\left(\vec{x}_{k+1}\right) < UB$ **alors** $UB \leftarrow f\left(\vec{x}_{k+1}\right)$, $\vec{z} \leftarrow \vec{x}_{k+1}$
      $k \leftarrow k + 1$
    Fin si
  Jusqu'à *Stop*
Fin

Méthode de sous-gradient

- LE PAS DE DÉPLACEMENT
  - RÈGLE DE LA SÉRIE DIVERGENTE Choisir les λ_k tels que :

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = 0, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k = +\infty$$

  - RÈGLE DE LA SÉRIE CONVERGENTE Choisir les λ_k tels que :

$$\lambda_k = \lambda_0 \rho^k, \quad \rho \in (0, 1)$$

  - RÈGLE DU PAS CONSTANT Choisir les λ_k tels que :

$$\lambda_k = \lambda$$

  - RÈGLE DE RELAXATION Choisir les λ_k tels que :

$$\lambda_k = \beta_k \frac{\left(f\left(x^k\right) - LB\right)}{\|\gamma^k\|}, \quad \beta_k > 0$$

Méthode de sous-gradient

APPLICATION

$$
\begin{array}{ll}
\text{MIN} & f(\vec{x}) \\
\text{s.c.} & \\
& g_i(\vec{x}) \leq \vec{0}, \quad i \in \mathcal{I} \\
& h_k(\vec{x}) = \vec{0}, \quad k \in \mathcal{K} \\
& \vec{x} \in \Omega
\end{array}
$$

Méthode de sous-gradient

Algorithme 2 : Méthode d'Uzawa et Arrow-Hurwicz

Entrées : Ω **::** sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenant un minimum de f
f **::** fonction définie sur Ω,
ϵ **::** précision,
$\pi^0 \geq 0$

Sortie : $\hat{\pi}$ **::** minimum local de θ

Début
  $k \leftarrow 0$, $LB \leftarrow -\infty$, $\hat{\pi} \leftarrow \pi^k$, *Stop* $\leftarrow$ *non*
  Répéter
    `Calculer` $\theta\left(\pi^k\right)$
    `Calculer` $\gamma^k \in \partial\theta\left(\pi^k\right)$
    Si $\gamma^k = 0$ **alors**
      Stop $\leftarrow$ *oui*, $\hat{\pi}$ optimum local
    sinon
      $d^k \leftarrow \frac{\gamma^k}{\|\gamma^k\|}$
      `Calculer le pas de déplacement` λ_k
      $x^{k+1} \leftarrow \mathrm{Proj}_\Omega\left(x^k + \lambda_k d^k\right)$
      Si $\theta\left(\pi^{k+1}\right) > LB$ **alors** $LB \leftarrow \theta\left(\pi^{k+1}\right)$, $\hat{\pi} \leftarrow \pi^{k+1}$
      $k \leftarrow k + 1$
    Fin si
  Jusqu'à *Stop*
Fin

Bibliographie

- M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali (2006),
  Nonlinear Programming,
  Wiley
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer
- J. Nocedal and S.J. Wright (2000),
  Numerical Optimization,
  Springer
- D.G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer