OPTIMISATION CONTINUE :

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ

Hacène Ouzia

MAIN (4 ème année)
Sorbonne Université

2019-20

AGENDA

Modèle général

Problème d'optimisation

Nous considérerons les problèmes s'écrivant sous la forme :

$$\min_{\vec{x} \in \Omega} \quad f(\vec{x}) \tag{1}$$

où :

- Le vecteur de décision $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur Ω
- Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$:
  - Description implicite : on le supposera convexe
  - Description explicite : $\Omega = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) \leq \vec{0}, h(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$

Théorème d'existence

Théorème de Weierstrass Existence d'un minimum global

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* d'un espace métrique $\mathcal{K}$. Si l'espace $\mathcal{K}$ est *compact*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$$

Ensemble compact Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* si : (i) X est *fermé* et (ii) X est *borné*, c.-à-d. :

$$\exists \gamma, \forall \vec{x} \in X : \|\vec{x}\| \leq \gamma.$$

Exemple :

- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, \beta]$
- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, +\infty[$

Théorème d'existence

Théorème de Weierstrass — Existence d'un minimum global

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* d'un espace métrique $\mathcal{K}$. Si l'espace $\mathcal{K}$ est *compact*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$$

Ensemble compact Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* si : (i) X est *fermé* et (ii) X est *borné*, c.-à-d. :

$$\exists \gamma, \forall \vec{x} \in X : \|\vec{x}\| \leq \gamma.$$

Exemple :

- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, \beta]$
- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, +\infty[$

Théorème d'existence

Théorème de Weierstrass Existence d'un minimum global

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* d'un espace métrique $\mathcal{K}$. Si l'espace $\mathcal{K}$ est *compact*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$$

Ensemble compact Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* si : (i) X est *fermé* et (ii) X est *borné*, c.-à-d. :

$$\exists \gamma, \forall \vec{x} \in X : \|\vec{x}\| \leq \gamma.$$

Exemple :

- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, \beta]$
- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, +\infty[$

Théorème d'existence

THÉORÈME D'EXISTENCE FONCTIONS COERCIVES

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$. Si l'ensemble $\mathcal{K}$ est *fermé* et la fonction f est *coercive*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f\left(\vec{x}\right) \leq f\left(\vec{y}\right).$$

FONCTION COERCIVE Une fonction $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si la condition suivante est vérifiée :

$$f\left(\vec{x}\right) \to +\infty, \|x\| \to +\infty$$

Théorème d'existence

THÉORÈME D'EXISTENCE FONCTIONS COERCIVES

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$. Si l'ensemble $\mathcal{K}$ est *fermé* et la fonction f est *coercive*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f(\vec{x}) \leq f(\vec{y}).$$

FONCTION COERCIVE Une fonction $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si la condition suivante est vérifiée :

$$f(\vec{x}) \to +\infty, \|x\| \to +\infty$$

Théorème d'existence

Fonctions coercives

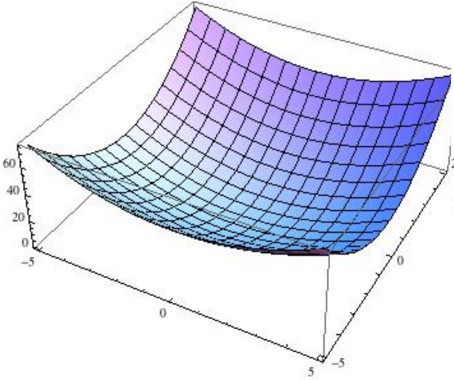

FIGURE – Coercive

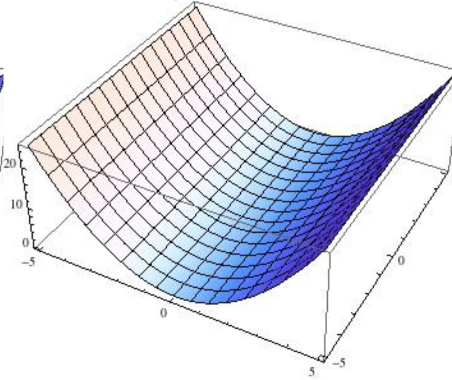

FIGURE – Non coercive

Théorème de Weierstrass

Théorème d'existence **Fonctions coercives**

Soit $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$. Si l'ensemble $\mathcal{K}$ est *fermé* et la fonction f est *coercive*, alors la fonction f admet un minimum global sur $\mathcal{K}$, c.-à-d.,

$$\exists \vec{x} \in \mathcal{K}, \forall \vec{y} \in \mathcal{K} : f(\vec{x}) \leq f(\vec{y}).$$

Fonction coercive Une fonction $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si la condition suivante est vérifiée :

$$f(\vec{x}) \to +\infty, \|x\| \to +\infty$$

Exemple :

- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, \beta]$
- Le point $\hat{x} = \alpha$ est un minimum global de $f(x) = e^x, x \in [\alpha, +\infty[$

POLYTECH SORBONNE

Gestion de portefeuille

Données

- Un budget d'un 1 euros à investir
- n produits financiers
- Le gain aléatoire par produit est : $\mu_j : j = 1, \ldots, n$
- Le gain moyen par produit est : $\bar{\mu}_j : j = 1, \ldots, n$
- La matrice de covariance est $Q = (\sigma_{ij})$ où

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}\left\{(\mu_i - \bar{\mu}_i)(\mu_j - \bar{\mu}_j)\right\}$$

Gestion d'un portefeuille

Déterminer un portefeuille $x = (x_1, \ldots, x_n)$ minimisant la variance du gain, respectant le budget total disponible et garantissant un gain moyen de γ.

Gestion de portefeuille

Gestion d'un portefeuille Un modèle

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & x^t Q x \\
\text{s.c.} & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& \sum_{j=1}^{n} \bar{\mu}_j x_j = \gamma \\
& x \in \mathbb{R}_+^n
\end{array}
$$

Approximation suivant une norme

Données

- ☞ Deux entiers non nuls n et m tels que $m > n$,
- ☞ Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang m,
- ☞ Un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$,
- ☞ Une norme $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{R}^m$.

Approximation suivant une norme Modèle général

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimiser}} \quad \|Ax - b\| \tag{2}$$

- ☞ Le problème (2) est un problème *convexe*

Approximation suivant une norme

Estimation de paramètres

- x un vecteur de paramètres à estimer
- b un vecteur d'observables
- $Ax - b$ erreur inconnue mais supposée très petite

Projection d'un point sur un polyèdre

- Le problème (2) est équivalent à

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \|y - b\| \\ y = Ax & \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Problème de conception

- x un vecteur de décision
- b un vecteur de demandes

Approximation suivant une norme

Approximation au sens des moindres carrés

- La norme $\|.\|$ est la norme *euclidienne* $\|.\|_2$, c.-à-d. :

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

- Le problème (2) s'écrit :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimiser}} \quad \|Ax - b\|_2^2 \tag{3}$$

- Le vecteur x est solution de (3) **ssi** :

$$\left(A^t A\right) x = A^t b$$

Approximation suivant une norme

APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRÉS

- La norme $\|.\|$ est la norme *euclidienne* $\|.\|_2$, c.-à-d. :

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

- Le problème (2) s'écrit :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimiser}} \quad \|Ax - b\|_2^2 \tag{3}$$

- Le vecteur x est solution de (3) **ssi** :

$$\left(A^t A\right) x = A^t b$$

Approximation suivant une norme

APPROXIMATION AU SENS MINIMAX

- La norme $\|.\|$ est la norme $\|.\|_\infty$, c.-à-d. :

$$\|x\|_\infty = max\left\{|x_1|, \ldots, |x_n|\right\}$$

- Le problème (2) est équivalent au *problème linéaire* :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \gamma \\ \text{s.c.} & \\ & Ax - b \leq \gamma 1_m \\ & Ax - b \geq -\gamma 1_m \end{array}$$

Approximation suivant une norme

Approximation au sens minimax

- La norme $\|.\|$ est la norme $\|.\|_\infty$, c.-à-d. :

$$\|x\|_\infty = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

- Le problème (2) est équivalent au *problème linéaire* :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \gamma \\ \text{s.c.} & \\ & Ax - b \leq \gamma 1_m \\ & Ax - b \geq -\gamma 1_m \end{array}$$

Approximation suivant une norme

Approximation au sens l_1

- La norme $\|.\|$ est la norme $\|.\|_1$, c.-à-d. :

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

- Le problème (2) est équivalent au *problème linéaire* :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \\ \text{s.c.} & \\ & Ax - b \leq \gamma \\ & Ax - b \geq -\gamma \end{array}$$

Approximation suivant une norme

APPROXIMATION AU SENS l_1

- La norme $\|.\|$ est la norme $\|.\|_1$, c.-à-d. :

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

- Le problème (2) est équivalent au *problème linéaire* :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \\ \text{s.c.} & \\ & Ax - b \leq \gamma \\ & Ax - b \geq -\gamma \end{array}$$

Projection sur un ensemble

Approximation au sens des moindres carrés

- Un ensemble *convexe fermé* C définit par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

- Un ensemble *convexe fermé* C définit par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

- Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- Un modèle

$$\begin{array}{ll} \min & \|x - x_0\| \\ \text{s.c.} & \\ & x \in C \end{array} \tag{4}$$

Projection sur un ensemble

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN POLYÈDRE

- L'ensemble convexe C est définit par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

- La norme $\|.\|$ est la norme euclidienne $\|.\|_2$
- Le problème de la projection orthogonale sur C s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \min & \|x - x_0\|_2^2 \\ \text{s.c.} & \\ & Ax \leq b \end{array} \tag{5}$$

- Le problème (5) est un *programme quadratique convexe sous contraintes linéaires*

Distance entre ensembles

DISTANCE ENTRE DEUX ENSEMBLES CONVEXES ET FERMÉS

☞ Deux ensembles convexes C_1 et C_2 tels que

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_k(x) \leq 0, k = 1, \ldots, r\}$$

✍ La distance entre C_1 et C_2 est :

$$\begin{array}{lll} \min & \|x - y\|^2 & \\ \text{s.c.} & & \\ & f_i(x) \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & g_k(y) \leq 0 & k = 1, \ldots, r \end{array} \tag{6}$$

Discrimination

Distance entre deux ensembles convexes et fermés

☞ Deux ensembles de points E_1 et E_2 tels que

$$E_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$$
$$E_2 = \{y_1, \ldots, y_m\}$$

✍ Identifier une fonction f telle que

$$f(x_i) > 0, \forall i = 1, \ldots, n$$
$$f(y_k) < 0, \forall k = 1, \ldots, m$$

Discrimination

Discrimination linéaire robuste

- Un paramètre non négatif γ
- Deux ensembles de points E_1 et E_2 tels que

$$E_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$$
$$E_2 = \{y_1, \ldots, y_m\}$$

- Identifier un *hyperplan* h tel que

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.c.} \quad & \\ & h(x_i) \geq \gamma, \forall i = 1, \ldots, n \\ & h(y_k) \leq -\gamma, \forall k = 1, \ldots, m \\ & \|\gamma\|_2 \leq 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Allocation et localisation

Allocation et localisation

- Un ensemble de n points de $\mathbb{R}^n$
- Pour chaque paire de points x_i et x_j une fonction

$$\phi_{ij}\left(x_i, x_j\right) = dist\left(x_i, x_j\right)$$

- Identifier la localisation des points x_i de telle sorte à minimiser la distance totale.

Domaine convexe

Théorème Inégalité variationnelle

Soit Ω un sous-ensemble *convexe* de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^1$.

- Si le point $\vec{x}_0 \in \Omega$ est un *minimum local* alors

$$\langle \nabla f\left(\vec{x}_0\right), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle \geq 0,\ \forall \vec{x} \in \Omega \tag{8}$$

- Si, de plus, la fonction f est *convexe* alors la condition (8) est suffisante

Remarque : Tout point de Ω satisfaisant l'inégalité variationnelle (8) est dit *point stationnaire*. Car si $\Omega = \mathbb{R}^n$ on a :

$$\nabla f\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0}.$$

Domaine convexe

Théorème Inégalité variationnelle

Soit Ω un sous-ensemble *convexe* de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^1$.

- Si le point $\vec{x}_0 \in \Omega$ est un *minimum local* alors

$$\langle \nabla f\left(\vec{x}_0\right), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle \geq 0, \ \forall \vec{x} \in \Omega \tag{8}$$

- Si, de plus, la fonction f est *convexe* alors la condition (8) est suffisante

Remarque : Tout point de Ω satisfaisant l'inégalité variationnelle (8) est dit *point stationnaire*. Car si $\Omega = \mathbb{R}^n$ on a :

$$\boxed{\nabla f\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0}.}$$

Domaine convexe

Preuve

① Raisonnons par l'absurde. Soit $\vec{y} \in \Omega$ tel que :

$$\langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{y} - \vec{x}_0 \rangle < 0 \tag{9}$$

☞ Pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\exists \beta \in [0, 1], \langle \nabla f(\vec{x}_0 + \beta(\vec{y} - \vec{x}_0)), \vec{y} - \vec{x}_0 \rangle < 0.$$

D'où :

$$f(\vec{x}_0 + \beta(\vec{y} - \vec{x}_0)) < f(\vec{x}_0).$$

Or $\forall \beta \in [0, 1], \vec{x}_0 + \beta(\vec{y} - \vec{x}_0) \in \Omega$. Contradiction !

② Puisque f est convexe, alors :

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle, \forall \vec{x} \in \Omega.$$

D'où le résultat.

Domaine convexe

APPLICATION

Expliciter les conditions d'optimalité dans le cas suivant :

$$\underset{\vec{x} \in \mathbb{R}^n_+}{\text{Minimiser}} \quad f\left(\vec{x}\right) \tag{10}$$

SOLUTION En utilisant l'inégalité variationnelle (8), on obtient :

$$\frac{\partial \nabla f\left(\vec{y}\right)}{\partial x_k} = 0, \text{ si } y_k > 0.$$

Domaine convexe

APPLICATION

Expliciter les conditions d'optimalité dans le cas suivant :

$$\underset{\vec{x} \in \mathbb{R}^n_+}{\text{Minimiser}} \quad f\left(\vec{x}\right) \tag{10}$$

SOLUTION En utilisant l'inégalité variationnelle (8), on obtient :

$$\frac{\partial \nabla f\left(\vec{y}\right)}{\partial x_k} = 0, \text{ si } y_k > 0.$$

Domaine convexe

Théorème Projection orthogonale

Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, le problème suivant admet une unique solution

$$\underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{Min}} \quad \|\vec{x} - \vec{z}\|^2$$

  Le vecteur solution, noté $[\vec{z}]^+$, est dit *projeté* de $\vec{z}$ sur l'ensemble Ω.
- Le point $\vec{x}_0$ est le projeté de $\vec{z} \in \Omega$ si et seulement si :

$$\langle \vec{x}_0 - \vec{z}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle \geq 0, \forall \vec{x} \in \Omega \tag{11}$$

  - Si Ω est $\mathbb{R}$-S.E.V, alors la condition (11)

$$\langle \vec{z} - \vec{x}_0, \vec{x} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in \Omega$$

- L'application $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\pi(\vec{x}) = [\vec{x}]^+$ est *continue* et *non-expansive*, c.-à-d. :

$$\left\| [\vec{x}]^+ - [\vec{y}]^+ \right\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Domaine convexe

Données

- Un vecteur $\vec{\gamma}$ de $\mathbb{R}^n$
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ de rang m

Application

Résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \textsc{Min} & \frac{1}{2}\left\|\vec{x}\right\| + \langle\vec{\gamma},\vec{x}\rangle \\ \text{s.c.} & \\ & A\vec{x} = \vec{0} \end{array}$$

Domaine convexe

SOLUTION Le problème

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \frac{1}{2}\left\|\vec{x}\right\|^2 + \langle\vec{\gamma}, \vec{x}\rangle \\ \text{s.c} & \\ & A\vec{x} = \vec{0} \end{array}$$

est équivalent au problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \frac{1}{2}\left\|\vec{x}+\vec{\gamma}\right\|^2 \\ \text{s.c} & \\ & A\vec{x} = \vec{0} \end{array}$$

Donc, c'est la projection du vecteur $-\vec{\gamma}$ sur le sous-espace vectoriel $A\vec{x} = \vec{0}$. Ainsi, la solution $\vec{z}$ est donnée par

$$\langle\vec{z}+\vec{\gamma}, \vec{x}\rangle = 0, \forall\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}.$$

D'où :

$$\boxed{\vec{z} = -\left[I - A^t\left(AA^t\right)^{-1}A\right]\vec{\gamma}}$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

MODÈLE PROBLÈME D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES D'ÉGALITÉ

Le modèle général est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k\left(\vec{x}\right) = 0, \; k = 1, \ldots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \qquad (12)$$

où :

- Le vecteur de décision $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- le domaine $\Omega = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : h_k\left(\vec{x}\right) = 0, \; k = 1, \ldots, m\right\}$
- Les fonctions h_j sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$
- La fonction $f\left(\vec{x}\right)$ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$

Conditions nécessaires d'ordre 1

Définition Fonction de Lagrange

La *fonction de Lagrange* associée au problème (12) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{\pi}\right) = f\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k h_k\left(\vec{x}\right) \tag{13}$$

➟ le vecteur $\vec{\pi}$ est dit vecteur des *multiplicateurs de Lagrange*

Conditions nécessaires d'ordre 1

Définition Fonction de Lagrange

La *fonction de Lagrange* associée au problème (12) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{\pi}\right) = f\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k h_k\left(\vec{x}\right) \tag{13}$$

- le vecteur $\vec{\pi}$ est dit vecteur des *multiplicateurs de Lagrange*

Conditions nécessaires d'ordre 1

Théorème Multiplicateurs de Lagrange

Si $\vec{x}_0$ un *minimum local* du problème :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k(\vec{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{14}$$

et si la matrice $\nabla \vec{H}(\vec{x}_0)$ est de rang m, alors il existe un *unique* vecteur $\vec{\pi}$ tel que :

$$\nabla_x \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k \nabla h_k(\vec{x}_0) = 0.$$

Point régulier Un point $\vec{x} \in \Omega$ est qualifié de *régulier* si la matrice

$$\text{rg}\ \nabla \vec{H}(\vec{x}_0) = m.$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

THÉORÈME MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Si $\vec{x}_0$ un *minimum local* du problème :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k\left(\vec{x}\right) = 0,\ k = 1, \ldots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{14}$$

et si la matrice $\nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right)$ est de rang m, alors il existe un *unique* vecteur $\vec{\pi}$ tel que :

$$\nabla_x \mathcal{L}\left(\vec{x}_0, \vec{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow \nabla f\left(\vec{x}_0\right) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k \nabla h_k\left(\vec{x}_0\right) = 0.$$

POINT RÉGULIER Un point $\vec{x} \in \Omega$ est qualifié de *régulier* si la matrice

$$\boxed{\text{rg}\ \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right) = m.}$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

JACOBIENNE La fonction $\vec{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est définit comme suit :

$$\vec{H}(\vec{x}) = (h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))^t$$

et sa *Jacobienne* est donnée par :

$$\nabla^t \vec{H}(\vec{x}) = [\nabla h_1(\vec{x}), \ldots, \nabla h_m(\vec{x})]$$

FONCTION DE PÉNALITÉ La fonction suivante

$$F_k(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \frac{k}{2}\left\|\vec{H}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|^2,$$

est dite *fonction de pénalité* associée au problème (12) :

- k est une constante très grandes
- $\vec{x}_0$ est un minimum locale du problème (12)
- γ un constante positive

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ JACOBIENNE La fonction $\vec{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est définit comme suit :

$$\vec{H}(\vec{x}) = \left(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})\right)^t$$

et sa *Jacobienne* est donnée par :

$$\nabla^t \vec{H}(\vec{x}) = \left[\nabla h_1(\vec{x}), \ldots, \nabla h_m(\vec{x})\right]$$

■ FONCTION DE PÉNALITÉ La fonction suivante

$$F_k(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \frac{k}{2}\left\|\vec{H}(\vec{x})\right\|^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|^2,$$

est dite *fonction de pénalité* associée au problème (12) :

- ➡ k est une constante très grandes
- ➡ $\vec{x}_0$ est un minimum locale du problème (12)
- ➡ γ un constante positive

Conditions nécessaires d'ordre 1

LEMME FONCTION DE PÉNALITÉ

Le problème (12) est équivalent au problème non contraint suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) + \frac{k}{2} \left\|\vec{H}\left(\vec{x}\right)\right\|^2 + \frac{\gamma}{2} \left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|^2 \\ \text{s.c.} & \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

pour k suffisamment grand.

Conditions nécessaires d'ordre 1

PREUVE Puisque $\vec{x}_0$ est un minimum local alors

$$\exists \epsilon > 0, \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \epsilon \Longrightarrow f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$$

Posons

$$\vec{x}_k \in \mathtt{argmin}\left\{F_k(\vec{x}) : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \epsilon\right\}$$

- On a nécessairement :

$$\lim_{k \to +\infty} \left\|\vec{H}(\vec{x}_k)\right\| = 0.$$

D'où, tout point d'accumulation $\vec{y}$ de la suite $\left\{\vec{x}_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait

$$\boxed{\vec{H}(\vec{y}) = \vec{0}}$$

Par conséquent :

$$f(\vec{y}) + \frac{\gamma}{2}\|\vec{y} - \vec{x}_0\|^2 \leq f(\vec{x}_0).$$

- Aussi, on a

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{y})$$

D'où, la suite $\left\{\vec{x}_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\vec{x}_0$.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ PREUVE Pour une constante k suffisamment grande on a :

$$\nabla f\left(\vec{x}_k\right)+k \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right) \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)+\gamma\left(\vec{x}_k-\vec{x}_0\right)=\vec{0}. \tag{15}$$

- Pour k suffisamment grand, la matrice

$$\nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)^t \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)$$

  est inversible.
- D'où la relation suivante :

$$-k \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)=\left[\nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)^t \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)\right]^{-1} \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_k\right)^t\left[\nabla f\left(\vec{x}_k\right)+\gamma\left(\vec{x}_k-\vec{x}_0\right)\right].$$

- Par passage à la limite :

$$k \vec{H}\left(\vec{x}_k\right) \rightarrow-\left[\nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right)^t \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right)\right]^{-1} \nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right)^t \nabla f\left(\vec{x}_0\right)=\vec{\pi}.$$

- Par passage à la limite dans (15), on obtient :

$$\nabla f\left(\vec{x}_0\right)+\left\langle\nabla \vec{H}\left(\vec{x}_0\right), \vec{\pi}\right\rangle=0.$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x + y \\ \text{s.c.} & \\ & (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ & x, y \in \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{16}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Déterminer la solution optimale globale du problème (30)
- ✍ Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité
- ✍ Que remarquez-vous ?

Conditions nécessaires d'ordre 1

APPLICATION EXISTENCE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE Soit à résoudre le problème suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\textsc{Min} & x + y \\
\text{s.c.} & \\
 & (x-1)^2 + y^2 = 1 \\
 & (x+1)^2 + y^2 = 1 \\
 & x, y \in \mathbb{R}^2
\end{array}
\tag{17}
$$

QUESTIONS

- Déterminer la solution optimale globale du problème (30)
- Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité
- Que remarquez-vous ?

Conditions nécessaires d'ordre 2

Théorème Multiplicateurs de Lagrange Si $\vec{x}_0$ un *minimum local* du problème :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \ k = 1, \ldots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{18}$$

et si la matrice $\nabla \vec{H}(\vec{x}_0)$ est de rang m et que les f et h sont 2-fois différentiables alors il existe un *unique* vecteur $\vec{\pi}$ tel que :

$$\langle \vec{y}, \left(\nabla^2 f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k \nabla^2 h_k(\vec{x}_0) \right) \vec{y} \rangle \geq 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0)$$

ou de façon équivalente :

$$\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}) \succeq 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0)$$

où $\mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0)$ est l'espace *tangent* à la surface Ω au point $\vec{x}_0$:

$$\mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla h_k(\vec{x}_0), \vec{y} \rangle = 0, k = 1, \ldots, m\}$$

Conditions nécessaires d'ordre 2

■ PREUVE Pour k suffisamment grand et pour tout γ, nous avons :

$$\nabla^2 f\left(\vec{x}^k\right) + k\nabla H\left(\vec{x}^k\right)\nabla^t H\left(\vec{x}^k\right) + k\sum_{i=1}^{m} h_i\left(\vec{x}^k\right)\nabla^2 h_i\left(\vec{x}^k\right) + \gamma I_n \succeq 0.$$

☞ Soit $\vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega\left(\vec{x}_0\right)$. Soit $\vec{y}^k$ sa projetée sur l'espace :

$$\left\{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \nabla^t H\left(\vec{x}_k\right)\vec{z} = \vec{0}\right\}.$$

Donc,

$$\vec{y}^k = \vec{y} - \nabla H\left(\vec{x}^k\right)\left(\nabla^t H\left(\vec{x}_k\right)\nabla H\left(\vec{x}^k\right)\right)^{-1}\nabla^t H\left(\vec{x}^k\right)\vec{y}$$

☞ Il s'en suit que :

$$\langle \vec{y}^k, \left(\nabla^2 f\left(\vec{x}^k\right) + k\sum_{i=1}^{m} h_i\left(\vec{x}^k\right)\nabla^2 h_i\left(\vec{x}^k\right)\right)\vec{y}^k\rangle + \gamma\left\|\vec{y}^k\right\|^2 \geq 0.$$

D'où, par passage à la limite

$$\langle \vec{y}, \left(\nabla^2 f\left(\vec{x}_0\right) + \sum_{i=1}^{m} \vec{\pi}_i\nabla^2 h_i\left(\vec{x}_0\right)\right)\vec{y}\rangle + \gamma\left\|\vec{y}\right\|^2 \geq 0.$$

POLYTECH SORBONNE

Conditions nécessaires d'ordre 2

APPLICATION Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.c.} & \\ & x + y + z = 2 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \tag{19}$$

QUESTIONS

- ✍ Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité
- ✍ Quelle est la nature du point stationnaire trouvé ?

Conditions nécessaires d'ordre 2

■ APPLICATION Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & x+y+z \\ \text{s.c.} & \\ & x^2+y^2+z^2=1 \\ & x,y,z\in\mathbb{R} \end{array} \tag{20}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité
- ✍ Quelle est la nature des points stationnaires trouvés ?

POLYTECH SORBONNE

Conditions suffisantes d'ordre 2

THÉORÈME CONDITIONS SUFFISANTES Soit le problème suivant :

$$\begin{aligned} &\text{MIN} \quad f(\vec{x}) \\ &\text{s.c.} \\ &\quad h_k(\vec{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, m \\ &\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{21}$$

Supposons que dans (21) les fonctions f et $\vec{H}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $(\vec{x}_0, \vec{\pi}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ un point tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}) &= 0, \\ \nabla_\pi \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}) &= 0, \\ \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}) &\succ 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Alors, $\vec{x}_0$ est un *minimum stricte* du problème (21), c.-à-d. :

$$\exists \gamma > 0, \epsilon > 0 : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + \frac{\gamma}{2} \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2, \forall \vec{x} : \vec{H}(\vec{x}) = \vec{0}, \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \leq \epsilon$$

Conditions suffisantes d'ordre 2

Application Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -xy - xz - yz \\ \text{s.c.} & \\ & x + y + z = 3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \tag{22}$$

Questions

- ✍ Résoudre le système traduisant les conditions suffisantes d'optimalité.
- ✍ Déterminer la nature des points stationnaires trouvés.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ MODÈLE PROBLÈME AVEC CONTRAINTES D'ÉGALITÉ ET D'INÉGALITÉ

Le modèle général est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k\left(\vec{x}\right) = 0,\ k = 1, \ldots, \rho \\ & g_k\left(\vec{x}\right) \leq 0,\ k = 1, \ldots, \kappa \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{23}$$

où :

- Le vecteur de décision $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- le domaine $\Omega = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{H}\left(\vec{x}\right) = \vec{0}, \vec{G}\left(\vec{x}\right) \leq \vec{0}\right\}$
- Les fonctions $\vec{H}$ et $\vec{G}$ sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$
- La fonction $f\left(\vec{x}\right)$ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ DÉFINITION FONCTION DE LAGRANGE

La *fonction de Lagrange* associée au problème (24) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{\pi}, \vec{\mu}\right) = f\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{\rho} \pi_k h_k\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{\kappa} \mu_k g\left(\vec{x}\right)$$

- le vecteur $(\vec{\pi}, \vec{\mu})$ est dit vecteur des *multiplicateurs de Lagrange*

■ DÉFINITION POINT RÉGULIER Un point $\vec{x} \in \Omega$ est qualifié de *régulier* si les vecteurs :

$$\nabla h_k\left(\vec{x}\right), \; k = 1, \ldots, \rho$$
$$\nabla g_k\left(\vec{x}\right), \; k \in \mathcal{A}\left(\vec{x}\right),$$

où $\mathcal{A}\left(\vec{x}\right)$ est l'ensemble des indices des contraintes saturées en $\vec{x}$, c.-à-d. :

$$\mathcal{A}\left(\vec{x}\right) = \left\{k : g_k\left(\vec{x}\right) = 0\right\}.$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

DÉFINITION FONCTION DE LAGRANGE

La *fonction de Lagrange* associée au problème (24) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\left(\vec{x},\vec{\pi},\vec{\mu}\right) = f\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{\rho} \pi_k h_k\left(\vec{x}\right) + \sum_{k=1}^{\kappa} \mu_k g\left(\vec{x}\right)$$

- le vecteur $(\vec{\pi},\vec{\mu})$ est dit vecteur des *multiplicateurs de Lagrange*

DÉFINITION POINT RÉGULIER Un point $\vec{x} \in \Omega$ est qualifié de *régulier* si les vecteurs :

$$\begin{aligned} &\nabla h_k\left(\vec{x}\right), k = 1,\ldots,\rho \\ &\nabla g_k\left(\vec{x}\right), k \in \mathcal{A}\left(\vec{x}\right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}\left(\vec{x}\right)$ est l'ensemble des indices des contraintes saturées en $\vec{x}$, c.-à-d. :

$$\mathcal{A}\left(\vec{x}\right) = \left\{k : g_k\left(\vec{x}\right) = 0\right\}.$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ THÉORÈME CONDITIONS KARUSH-KUHN-TUCKER Si $\vec{x}_0$ un *minimum local* du problème :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f\left(\vec{x}\right) \\ \text{s.c.} & \\ & h_k\left(\vec{x}\right) = 0,\ k = 1, \ldots, \rho \\ & g_k\left(\vec{x}\right) \leq 0,\ k = 1, \ldots, \kappa \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{24}$$

où les fonctions f, g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$. Si le point $\vec{x}_0$ est *régulier* alors il existe un *unique* vecteur $(\vec{\pi}, \vec{\mu})$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}} \mathcal{L}\left(\vec{x}_0, \vec{\pi}, \vec{\mu}\right) &= \vec{0}, \\ \vec{\mu} &\geq 0, \\ \mu_k &= 0, \forall k \notin \mathcal{A}\left(\vec{x}_0\right). \end{aligned}$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ **APPLICATION** Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & f(\vec{x}) \\ \text{S.C.} & \\ & g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0 \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

■ **QUESTIONS**

✍ Ecrire les conditions KKT.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & f(\vec{x}) \\ \text{S.C.} & \\ & g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0 \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

■ SOLUTION Il existe des scalaires $\pi_i, i \in \mathcal{I}$, et $\mu_k, k \in \mathcal{K}$, tels que :

$$-\nabla f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i \nabla g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} \mu_k \nabla h_k(\vec{x}) = 0$$

$$\pi_i g_i(\vec{x}) = 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

$$\pi_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\text{MIN} & f(\vec{x}) \\
\text{S.C.} & \\
& g_i(\vec{x}) \geq 0 \qquad i \in \mathcal{I} \\
& h_k(\vec{x}) = 0 \qquad k \in \mathcal{K} \\
& \vec{x} \in \Omega
\end{array}
$$

QUESTIONS

✍ Ecrire les conditions KKT.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{S.C.} & \\ & \begin{array}{ll} g_i(\vec{x}) \geq 0 & i \in \mathcal{I} \\ h_k(\vec{x}) = 0 & k \in \mathcal{K} \\ \vec{x} \in \Omega & \end{array} \end{array}$$

■ SOLUTION Il existe des scalaires π_i, $i \in \mathcal{I}$, et μ_k, $k \in \mathcal{K}$, tels que :

$$\nabla f(\vec{x}) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i \nabla g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} \mu_k \nabla h_k(\vec{x}) = 0$$

$$\mu_i g_i(\vec{x}) = 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

$$\mu_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{MAX} & x + 2y & \\ \text{S.C.} & & \\ & 2x + 3y & \leq 5 \\ & -x + 4y & \leq 3 \\ & x, y & \geq 0 \end{array} \tag{25}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Ecrire les conditions KKT pour le problème (25)
- ✍ Pour chaque point extrême vérifier, géométriquement et algébriquement, si les conditions KKT sont satisfaites ou pas.
- ✍ En déduire la solution optimale du problème linéaire (25)

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{MIN} & x^2 + 2y^2 & \\ \text{S.C.} & & \\ & x + y & \geq 2 \\ & x, y & \geq 0 \end{array} \tag{26}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Ecrire les conditions KKT pour le problème (26).
- ✍ Trouver un point réalisable satisfaisant les équations KKT.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{MAX} & x+y & \\ \text{S.C.} & & \\ & (x-1)^2+y^2 & \leq 1 \\ & (x+1)^2+y^2 & \leq 1 \end{array} \tag{27}$$

■ QUESTIONS

- Vérifier que le problème non linéaire (27) est convexe.
- Ecrire les conditions KKT pour le problème (27).
- Que remarquez-vous ?

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + 2y^2 \\ \text{S.C.} & \\ & x + y = 3 \end{array}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
- ✍ Résoudre les conditions KKT.
- ✍ Vérifier que la solution trouvée est unique.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x^2 + y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & x^2 + 3y^2 \leq 3 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité.
- ✍ Résoudre le système KKT.

Conditions nécessaires d'ordre 1

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & xyz \\ \text{S.C.} & \\ & x + 2y + 3z \leq 1 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

■ QUESTIONS

✍ Ecrire les conditions nécessaires d'ordre 1.

✍ Résoudre le système KKT.

✍ En déduire l'optimum global.

Conditions nécessaires d'ordre 2

■ THÉORÈME CONDITIONS DE KARUSH-KUHN-TUCKER Si $\vec{x}_0$ un *minimum local* du problème :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{S.C} & \\ & h_k(\vec{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, \rho \\ & g_k(\vec{x}) \leq 0,\ k = 1, \ldots, \kappa \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{28}$$

et si $\vec{x}_0$ est *régulier* et que les fonctions f, g et h sont 2-fois différentiables, alors il existe un *unique* vecteur $(\vec{\pi}, \vec{\mu})$ tel que :

$$\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}, \vec{\mu}) \succeq 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0)$$

où *l'espace tangent* $\mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{y}$ tels que :

$$\langle \nabla h_k(\vec{x}_0), \vec{y} \rangle = 0, k = 1, \ldots, m,$$
$$\langle \nabla g_k(\vec{x}_0), \vec{y} \rangle = 0, k \in \mathcal{A}(\vec{x}_0)$$

Conditions nécessaires d'ordre 2

APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & x + y = 2 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

QUESTIONS

- ✍ Vérifier les conditions nécessaires d'ordre 1 et 2
- ✍ Résoudre le système KKT.
- ✍ Pouvez-vous en déduire la nature de la solution KKT.
- ✍ Vérifiez que les conditions suffisantes d'ordre 1 ne sont pas satisfaites.

Conditions nécessaires d'ordre 2

■ **APPLICATION** Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + y^2 \\ \text{s.c.} & \\ & x + y = 2 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

■ **SOLUTION**

- ☞ $\mathcal{L}(X, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$
- ☞ $\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow (X, \lambda) = (1, 1, -2)$
- ☞ $\mathcal{M} = \{\zeta \in \mathbb{R}^2 : \zeta_1 + \zeta_2 = 0\}$

Conditions nécessaires d'ordre 2

■ APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & xy + x + y \\ \text{S.C.} & \\ & x + y = 2 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Vérifier que les conditions nécessaires d'ordre 1
- ✍ Résoudre le système KKT
- ✍ Pouvez-vous en déduire la nature de la solution KKT
- ✍ Les conditions suffisantes d'ordre 2 sont-elles suffisantes

Conditions nécessaires d'ordre 2

APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & xy + x + y \\ \text{s.c} & \\ & x + y = 2 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

SOLUTION

- $\mathcal{L}(X, \lambda) = xy + x + y + \lambda(x + y - 2)$
- $\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow (X, \lambda) = (1, 1, -2)$
- $\mathcal{M} = \{\zeta \in \mathbb{R}^2 : \zeta_1 + \zeta_2 = 0\}$
- $\nabla^2_X \mathcal{L}(X, \lambda) \prec 0$, sur $\mathcal{M}$
- $\mathtt{Spec}\left(\nabla^2_X \mathcal{L}(X, \lambda)\right) = \{-1, 1\}$

Conditions nécessaires d'ordre 2

APPLICATION Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & x^2 + xy + y^2 - 5x - 2y \\ \text{s.c} & \\ & x + y \leq 2 \\ & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

QUESTIONS

- ✍ Vérifier que les conditions nécessaires d'ordre 1
- ✍ Résoudre le système KKT
- ✍ Pouvez-vous en déduire la nature de la solution KKT

Conditions suffisantes d'ordre 2

THÉORÈME CONDITIONS SUFFISANTES D'ORDRE 2

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c} & \\ & h_k(\vec{x}) = 0,\ k = 1, \ldots, \rho \\ & g_k(\vec{x}) \leq 0,\ k = 1, \ldots, \kappa \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{29}$$

Supposons que les fonctions f, g et h sont de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Soit $(\vec{x}_0, \vec{\pi}, \vec{\mu})$ un vecteur tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}, \vec{\mu}) = \vec{0}, \vec{H}(\vec{x}_0) = \vec{0}, \vec{G}(\vec{x}_0) \leq \vec{0}, \\ \vec{\mu} \geq \vec{0}, \mu_k = 0, \forall k \notin \mathcal{A}(\vec{x}_0), \\ \mu_k > 0, \forall k \in \mathcal{A}(\vec{x}_0), \\ \langle \vec{y}, \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\vec{x}_0, \vec{\pi}, \vec{\mu}) \vec{y} \rangle \geq 0, \forall \vec{y} \in \mathcal{T}_\Omega(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Alors, le point $\vec{x}_0$ est un *minimum stricte* du problème (29)

Conditions suffisantes d'ordre 2

■ APPLICATION Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & -x^2 + y^2 \\ \text{s.c} & \\ & x \leq 0 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array} \tag{30}$$

■ QUESTIONS

- ✍ Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité
- ✍ Que remarquez-vous ?

Conditions suffisantes générales

Théorème Conditions suffisantes générales

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & f(\vec{x}) \\ \text{s.c.} & \\ & g_k(\vec{x}) \leq 0,\ k = 1, \ldots, \kappa \\ & \vec{x} \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array} \tag{31}$$

Soit $(\vec{x}_0, \vec{\pi})$ un vecteur satisfaisant les conditions suivantes :

$$\vec{x}_0 \in \texttt{argmin}\left\{\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) : \vec{x} \in X\right\}$$

$$\vec{\pi} \geq \vec{0}, k = 1, \ldots, \kappa$$

$$\pi_k = 0, \forall k \notin \mathcal{A}(\vec{x}_0)\,.$$

Alors, le point $\vec{x}_0$ est un *minimum global* du problème (31)

Conditions suffisantes générales

PREUVE D'après les hypothèses, d'une part nous avons

$$f\left(\vec{x}_0\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \langle \vec{\pi}, \vec{G}\left(\vec{x}_0\right)\rangle \Longrightarrow \langle \vec{\pi}, \vec{G}\left(\vec{x}_0\right)\rangle = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f\left(\vec{x}_0\right) &= \min\left\{\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{\pi}\right) : \vec{x} \in X\right\} \\ &\leq \min\left\{\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{\pi}\right) : \vec{x} \in X, \vec{G}\left(\vec{x}\right) \leq \vec{0}\right\} \\ &\leq \min\left\{f\left(\vec{x}\right) : \vec{x} \in X, \vec{G}\left(\vec{x}\right) \leq \vec{0}\right\}. \end{aligned}$$

POLYTECH SORBONNE

Qualification des contraintes

QUALIFICATION DES CONTRAINTES CONDITIONS SUFFISANTES

L'hypothèse de *qualification des contraintes* au point $\vec{x}_0$ pour l'ensemble

$$\Omega = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i\left(\vec{x}\right) \leq 0, i \in \mathcal{I}\right\}$$

est satisfaite dans les cas suivants :

- Les fonctions $g_i, i \in \mathcal{I}$ sont toutes affines.
- Les fonctions $g_i, i \in \mathcal{I}$ sont convexes différentiables en $\vec{x}_0$ et

$$\exists \vec{y} : g_i\left(\vec{y}\right) < 0, \forall i \in \mathcal{I}$$

- Les vecteurs $\left\{\nabla g_i\left(\vec{x}_0\right), i \in \mathcal{I}^{=}\right\}$ sont linéairement indépendants.

Qualification des contraintes

Qualification des contraintes Conditions suffisantes

L'hypothèse de *qualification des contraintes* au point $\vec{x}_0$ pour l'ensemble

$$\Omega = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g_i\left(\vec{x}\right) \leq 0, i \in \mathcal{I}, h_k\left(\vec{x}\right) = 0, k \in \mathcal{K}\right\}$$

est satisfaite dans les cas suivants :

- Les fonctions $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ et $\{h_k, k \in \mathcal{K}\}$ sont toutes affines.
- Les fonctions $\{g_i, i \in \mathcal{I}\}$ sont convexes différentiables en $\vec{x}_0$, $\{h_k, k \in \mathcal{K}\}$ sont affines et

$$\exists \vec{y} : g_i\left(\vec{y}\right) < 0, \forall i \in \mathcal{I}, h_k\left(\vec{y}\right) = 0, \forall k \in \mathcal{K}$$

- Les vecteurs $\left\{\nabla g_i\left(\vec{y}\right), i \in \mathcal{I}^=\right\}$ et $\left\{\nabla h_k\left(\vec{y}\right), k \in \mathcal{K}\right\}$ sont linéairement indépendants.

Bibliographie

- M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali (2006),
  Nonlinear Programming,
  Wiley
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer
- J. Nocedal and S.J. Wright (2000),
  Numerical Optimization,
  Springer
- D.G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer