Méthode simplexe

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

- Soit un problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & c^t x & \leftarrow \text{ fonction objectif} \\ s.c. & & \\ & Ax \leq b & \leftarrow m \text{ contraintes structurelles} \\ & x \geq 0 & \leftarrow \text{ contraintes de non-négativité} \end{array}$$

Son équivalent sous forme standard est :

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & c^t x & \\ s.c. & & \\ & Ax + \mathbb{1}\zeta = b & \leftarrow \text{ ajout de variables d'écart} \\ & x, \zeta \geq 0 & \leftarrow \text{ variables d'écart positives} \end{array}$$

- Méthode simplexe : soit $y_1, \dots, y_m$ les variables d'écart :

1 construire le tableau simplexe initial :

	x_1	$\dots$	x_n	y_1	$\dots$	y_m	z
	vecteur des coûts réduits c^t						val. fonction objectif
y_1							
$\dots$	matrice des contraintes						second membre
y_n							

Au départ, les variables d'écart sont en base. La matrice des contraintes étendue contient donc la matrice identité à droite.

2 à chaque itération, déterminer le pivot :
- var. qui améliorera le plus la fonction objectif entre en base (soit k son indice)
- critère du ratio : var. de base bloquante sort de la base (soit r son indice) :

$$x_r \text{ sort si } r = \text{argmin} \left\{ \frac{\text{second membre}_i}{\text{matrice contr.}_{ik}}, \text{ si matrice contr.}_{ik} > 0 \right\}$$

- on effectue l'opération de pivot de Gauss

3 on vérifie le vecteur des coûts réduits :
- **minimisation** : tous les coûts sont positifs $\rightarrow$ arrêt
- **maximisation** : tous les coûts sont négatifs $\rightarrow$ arrêt

Remarque : on peut aussi mettre dans le tableau l'opposé du vecteur des coûts réduits et dans ce cas, l'algo. s'arrête quand tous les coûts réduits sont négatifs pour une min. (ou positifs pour une max.)

- Complexité de l'algo. : exponentielle en la taille de l'instance

- Visualisation géométrique : les points trouvés à chaque itération sont les points extrêmes du polyèdre des solutions réalisables

Application

- Soit le problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & \\ s.c. & & & & \\ & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 3 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Son équivalent sous forme standard est :

$$\begin{array}{llllllll} \text{Min} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +0.y_1 & +0.y_2 & +0.y_3 & \\ s.c. & & & & & & & \\ & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +y_1 & & & = 5 \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & & +y_2 & & = 3 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & +y_3 & = 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

- 1 tableau simplexe initial (coûts réduits opposés pour une min. : arrêt de l'algo. quand tous les coûts réduits sont négatifs) :

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z
	-2	-1	3	0	0	0	0
y_1	1	-2	2	1	0	0	5
y_2	1	1	-1	0	1	0	3
y_3	1	2	1	0	0	1	4

$\rightarrow$ coût réduit le plus grand pour x_3 : x_3 entre en base
$\rightarrow$ critère du ratio : y_1 sort car $\frac{5}{2} = \min\left\{\frac{5}{2}, \frac{4}{1}\right\}$

2 déroulement de l'algorithme :

- itération 1 :

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z
	$-\frac{7}{2}$	2	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{15}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
y_2	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{11}{2}$
y_3	$\frac{1}{2}$	3	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

$\rightarrow$ x_2 entre en base
$\rightarrow$ critère du ratio : y_3 sort

- itération 2 :

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z
	$-\frac{23}{6}$	0	0	$-\frac{7}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{17}{2}$
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3
y_2	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{11}{2}$
x_2	$\frac{1}{6}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3 tous les coûts réduits sont négatifs : l'algorithme s'arrête et on a trouvé une solution de base réalisable optimale :

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, \frac{1}{2}, 3) \text{ et } \hat{z} = -\frac{17}{2}$$

Remarque : sur cet exemple, on est loin de la complexité exponentielle : l'algo n'a pas eu besoin de parcourir tous les points extrêmes pour trouver l'optimum !)

Résolution d'un problème sous contraintes d'égalité

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

Soit le problème de minimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(\vec{x}) \\ s.c. & \\ & h_k(\vec{x}) = 0 \qquad k = 1, \dots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Etapes de résolution :

1 Vérification de la régularité du domaine : avec les critères de qualification des contraintes (contraintes affines, fonctions h_k convexes...)

2 Fonction de Lagrange associée :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{k} \pi_k h_k(\vec{x})$$

3 Conditions nécessaires d'optimalité :

- $\vec{\nabla}_{\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) = \vec{0}$
- $\vec{\nabla}_{\vec{\pi}} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) = \vec{0}$
- Point $\vec{x}$ régulier $\Leftrightarrow$ rg$\left(\vec{\nabla} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} (\vec{x}) \right) = m$

On résoud ce système pour trouver le (ou les) point(s) de Lagrange **candidat(s)** à l'optimum.

4 Etude de la nature des points stationnaires : pour un problème de minimisation, il faut vérifier si la hessienne de $\mathcal{L}$ est définie positive sur l'espace tangent au domaine des contraintes.
Pour chacun des points stationnaires $\vec{x_0}$:

- caractérisation de l'espace tangent :

$$T_{\vec{x_0}}(\Omega) = \{ z \in \mathbb{R}^n : z^T \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} h(\vec{x_0}) = 0 \}$$

- vérification de la définie-positivité de la hessienne sur l'espace tangent : il faut regarder le signe de :

$$z^T \cdot \vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) \cdot z, \text{ pour } z \in T_{\vec{x_0}}(\Omega)$$

Application

Soit le problème de minimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -xy - xz - yz \\ s.c. & \\ & x + y + z = 3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

1 Vérification de la régularité du domaine : toutes les fonctions sont différentiables ; de plus, la contrainte est affine, donc le domaine est régulier (pour tout $\vec{x}$, $\vec{\nabla} h(\vec{x}) = (1, 1, 1)^T \neq (0, 0, 0)^T$, et ce gradient est indépendant du point).

2 Fonction de Lagrange associée :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) = -xy - xz - yz + \lambda(x + y + z - 3)$$

3 Conditions nécessaires d'optimalité :

- $\begin{cases} -y - z + \lambda = 0 \\ -x - z + \lambda = 0 \\ -x - y + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z \\ 3x - 3 = 0 \\ \lambda = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$
- $x + y + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow$
- $\vec{x}$ régulier car rg$(\vec{\nabla} h(\vec{x})) = m = 1$

$\vec{x_0} = (1, 1, 1)$ est candidat à l'optimum (point de Lagrange).

4 Etude de la nature des points stationnaires :

- calcul de la hessienne : $\vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $T_{\vec{x_0}}(\Omega) = \{ z \in \mathbb{R}^n : z_1 + z_2 + z_3 = 0 \}$
- soit $z \in T_{\vec{x_0}}(\Omega)$:

$$z^T \cdot \vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) \cdot z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{-z_2 - z_3}_{z_1} & \underbrace{-z_1 - z_3}_{z_2} & \underbrace{-z_1 - z_2}_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

qui est nul si $z = (0, 0, 0)^T$ (trivial) et strictement positif sinon. Donc la hessienne est définie-positive et $\vec{x_0} = (1, 1, 1)$ est bien un minimum (global, ici, car c'est le seul candidat !).

Résolution d'un problème sous contraintes d'inégalité

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

Soit le problème de minimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(\vec{x}) \\ s.c. & \\ & g_k(\vec{x}) \leq 0 \qquad k = 1, \ldots, m \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Etapes de résolution :

1 Vérification de la régularité du domaine : avec les critères de qualification des contraintes (contraintes affines, fonctions g_k convexes...)

2 Fonction de Lagrange associée :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\mu}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{k} \mu_k g_k(\vec{x})$$

3 Conditions KKT :

- Stationarité : $\vec{\nabla}_{\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\mu}) = \vec{0}$
- Complémentarité : $\forall k = \{1, \ldots, m\}, \quad \mu_k g_k = 0$
- Admissibilité primale : $\forall k = \{1, \ldots, m\}, \quad g_k \leq 0$
- Admissibilité duale : $\forall k = \{1, \ldots, m\}, \quad \mu_k \geq 0$ (pour un problème de minimisation avec contraintes "$\leq$")

On résoud ce système pour trouver le (ou les) point(s) KKT **candidat(s)** à l'optimum. La complémentarité nous donne 2 cas :
$*$ si $\mu = 0$: la contrainte n'intervient pas dans la résolution du problème, elle est saturée ou non
$*$ si $\mu \neq 0$: la contrainte est saturée
En général, si on trouve une solution candidate pour $\mu = 0$, il faut se méfier : la contrainte est inactive donc le point peut ne pas être réalisable...

4 Etude de la nature des points stationnaires : pour un problème de minimisation, il faut vérifier si la hessienne de $\mathcal{L}$ est définie positive sur l'espace tangent au domaine des contraintes.
Pour chacun des points stationnaires $\vec{\hat{x}}$:

- caractérisation de l'espace tangent :

$$T_{\vec{\hat{x}}}(\Omega) = \{z \in \mathbb{R}^n : z^T \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} h(\vec{\hat{x}}) = 0\}$$

- vérification de la définie-positivité de la hessienne sur l'espace tangent : il faut regarder le signe de :

$$z^T \cdot \vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\pi}) \cdot z, \text{ pour } z \in T_{\vec{\hat{x}}}(\Omega)$$

Application

Soit le problème de minimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.c. & \\ & x + y + z \leq -3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array}$$

1 Vérification de la régularité du domaine : toutes les fonctions sont différentiables ; de plus, la contrainte est affine, donc le domaine est régulier (pour tout $\vec{x}$, $\vec{\nabla} g(\vec{x}) = (1,1,1)^T \neq (0,0,0)^T$, et ce gradient est indépendant du point).

2 Fonction de Lagrange associée :

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \mu) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(x + y + z + 3)$$

3 Conditions KKT :

- $\begin{cases} x + \mu = 0 \\ y + \mu = 0 \\ z + \mu = 0 \end{cases}$
- $x + y + z + 3 \leq 0$
- $\mu(x + y + z + 3) = 0$
- $\mu \geq 0$

$*$ si $\mu = 0$: $x = y = z = 0$, or le point $(0,0,0)$ n'est pas réalisable $\Rightarrow$ dans ce cas, le système KKT ne donne aucune solution candidate
$*$ si $\mu > 0$: $x + y + z = -3$ (et $x = y = z = -\mu$), donc : $-3 + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 1$ est une solution candidate

La solution KKT ($\vec{\hat{x}} = (-1,-1,-1)$ et $\hat{\mu} = 1$) est candidate à l'optimum.

4 Etude de la nature des points stationnaires :

- $$\vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{\hat{x}}, \hat{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \hat{\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{hessienne de la contrainte :} \\ g(\vec{x}) = x+y+z+3 \leq 0}}$$
- $\vec{\nabla}^2_{\vec{x}\vec{x}} \mathcal{L}(\vec{\hat{x}}, \hat{\mu})$ est la matrice identité donc elle est définie positive sur tout $\mathbb{R}^3$, a fortiori sur l'espace tangent $T_{\vec{\hat{x}}}(\Omega)$ qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Donc $\vec{\hat{x}} = (-1,-1,-1)$ est bien un minimum (global, ici, car c'est le seul candidat !).

Théorème des écarts complémentaires

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

Soit le problème primal :

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & c^t x \\ s.c. & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

On a le problème dual associé :

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & w^t b \\ s.c. & \\ & w^t A \leq c^t \\ & w \geq 0 \end{array}$$

Notations : on pose :

$*$ $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$: solution optimale primale

$*$ $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m)$: solution optimale duale

1 **primal $\to$ dual :** on connaît $\hat{x}$, on cherche $\hat{w}$

$*$ étude du signe de la solution primale :

$\forall i = 1, \dots, n$, $\hat{x}_i \neq 0 \Rightarrow$ i-e contrainte duale saturée

$*$ étude de la saturation des contraintes primales : on calcule la valeur de chaque contrainte primale au point $\hat{x}$ et on vérifie si la contrainte est saturée ou non

$\forall j = 1, \dots, m$, j-e contr. primale non saturée $\Rightarrow \hat{w}_j = 0$

$*$ résolution du système d'équations obtenu

2 **dual $\to$ primal :** on connaît $\hat{w}$, on cherche $\hat{x}$

$*$ étude du signe de la solution duale :

$\forall j = 1, \dots, m$, $\hat{w}_j \neq 0 \Rightarrow$ j-e contrainte primale saturée

$*$ étude de la saturation des contraintes duales : on calcule la valeur de chaque contrainte duale au point $\hat{w}$ et on vérifie si la contrainte est saturée ou non

$\forall i = 1, \dots, n$, i-e contr. duale non saturée $\Rightarrow \hat{x}_i = 0$

$*$ résolution du système d'équations obtenu

Application

Soit le problème primal :

$$(P)\quad \begin{array}{lccccccl} \text{Max} & -3x_1 & +10x_2 & -2x_3 & +4x_4 & & & \\ s.c. & & & & & & & \\ & -x_1 & +4x_2 & +4x_3 & -6x_4 & \leq & 8 & \\ & -x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq & 0 & \\ & & & -x_3 & & \leq & 1 & \\ & x_1, & x_2, & & x_4 & \leq & 0 & (x_3 \in \mathbb{R}) \end{array}$$

On a le problème dual associé :

$$(D)\quad \begin{array}{lcccccc} \text{Min} & 8w_1 & & +w_3 & & \\ s.c. & & & & & \\ & -w_1 & -w_2 & & \leq & -3 \\ & 4w_1 & +3w_2 & & \leq & 10 \\ & 4w_1 & +w_2 & -w_3 & = & -2 \\ & -6w_1 & -w_2 & & \leq & 5 \\ & w_1, & w_2, & w_3 & \geq & 0 \end{array}$$

On suppose que l'on a déterminé $\hat{x}$ ou $\hat{w}$, par exemple par une méthode simplexe primale ou duale. Soit :

$*$ $\hat{x} = (-1, 0, -1, 0)$: solution optimale primale

$*$ $\hat{w} = (0, 3, 5)$: solution optimale duale

1 **primal $\to$ dual :** $\hat{x} = (-1, 0, -1, 0)$ $\quad \hat{w} = ?$

$*$ étude du signe de la solution primale :

$\hat{x}_1 \neq 0 \Rightarrow -\hat{w}_1 - \hat{w}_2 = -3$

$\hat{x}_3 \neq 0 \Rightarrow 4\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - \hat{w}_3 = -2$

$*$ étude de la saturation des contraintes primales :

$-\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 4\hat{x}_3 - 6\hat{x}_4 = -3 < 8$ (non sat.) $\Rightarrow \hat{w}_1 = 0$

$-\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 = 0$ (sat.)

$-\hat{x}_3 = 1$ (sat.)

$*$ résolution du système d'équations obtenu

$$\left\{ \begin{array}{l} -\hat{w}_1 - \hat{w}_2 = -3 \\ 4\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - \hat{w}_3 = -2 \\ \hat{w}_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{w}_1 = 0 \\ \hat{w}_2 = 3 \\ \hat{w}_3 = 5 \end{array} \right.$$

2 **dual $\to$ primal :** $\hat{w} = (0, 3, 5)$ $\quad \hat{x} = ?$

$*$ étude du signe de la solution duale :

$\hat{w}_2 \neq 0 \Rightarrow -\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 = 0$

$\hat{w}_3 \neq 0 \Rightarrow -\hat{x}_3 = 1$

$*$ étude de la saturation des contraintes duales :

$-\hat{w}_1 - \hat{w}_2 = -3$ (sat.)

$4\hat{w}_1 + 3\hat{w}_2 = 9 < 10$ (non sat.) $\Rightarrow \hat{x}_2 = 0$

3-ème contrainte saturée

$-6\hat{w}_1 - \hat{w}_2 = -3 < 5$ (non sat.) $\Rightarrow \hat{x}_4 = 0$

$*$ résolution du système d'équations obtenu

$$\left\{ \begin{array}{l} -\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 = 0 \\ -\hat{x}_3 = 1 \\ \hat{x}_2 = 0 \\ \hat{x}_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 = -1 \\ \hat{x}_2 = 0 \\ \hat{x}_3 = -1 \\ \hat{x}_4 = 0 \end{array} \right.$$

Relaxation lagrangienne

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

Soit le problème primal :

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & f(\vec{x}) \\ & g_i(\vec{x}) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in \mathcal{K} \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

- Fonction de Lagrange associée :
  $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})$

- Relaxation lagrangienne du problème (P) :

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \\ & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

d'où la fonction duale lagrangienne :
$\theta(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Min}\,\{\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) : \vec{x} \in \Omega\}$

et le problème dual lagrangien :
$$\theta(\vec{u}, \vec{v}) = \underset{\vec{u} \geq 0}{\text{Max}}\ \underset{\vec{x} \in \Omega}{\text{Min}} \left\{\{(\vec{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} u_i g_i(\vec{x}) + \sum_{k \in \mathcal{K}} v_k h_k(\vec{x})\right\}$$

- Méthode :
  1. étudier le problème :
  - régularité du domaine, convexité de la fonction objectif f...
  - fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ associée au problème
  - convexité de la fonction de Lagrange
  2. déterminer l'expression de la fonction duale de Lagrange θ : si $\mathcal{L}$ est convexe alors elle possède un unique min. et ce point critique donnne θ
  Remarque : il faut vérifier que θ est concave (sinon, il y a une erreur quelque part... !).)
  3. déterminer la solution optimale du problème dual : comme θ est concave, elle possède un unique max. qui est la solution optimale
  4. en déduire la solution optimale de (P) : en utilisant les relations entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{x}$ trouvées dans les calculs
  Remarque : si le problème (P) est convexe, on doit vérifier la dualité forte qui assure qu'il n'y a pas de saut de dualité, i.e. la solution optimale du dual est égale à celle du primal.)

Application

Soit le problème primal :

$$(P)\quad \begin{array}{llllll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & -x & -y & +3x^2 & +2y^2 & -2xy \\ & x & +y & \leq & 1 & \\ & (x, & y) & \in & \mathbb{R}^2 & \end{array}$$

1. Toutes les fonctions sont différentiables en tant que polynômes et on a la contrainte : $g(\vec{x}) = x + y - 1$ qui est linéaire donc le domaine est régulier.

$$\mathcal{L}(\vec{x}, w) = -x - y + 3x^2 + 2y^2 - 2xy + w(x + y - 1)$$

$$\nabla\mathcal{L}(\vec{x}, w) = \begin{pmatrix} -1 + w + 6x - 2y \\ -1 + w - 2x + 4y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2\mathcal{L}(\vec{x}, w) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si on calcule le polynôme caractéristique, on trouve deux valeurs propres positives ($5 + \sqrt{5}$ et $5 - \sqrt{5}$) donc $\nabla^2\mathcal{L}(\vec{x}, w)$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\mathcal{L}$ est convexe pour tout w et admet un unique minimum.

2. Fonction duale lagrangienne :

$$\theta(w) = \begin{array}{llllll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & -x & -y & +3x^2 & +2y^2 & -2xy \\ & x & +y & \leq & 1 & \\ & (x, & y) & \in & \mathbb{R}^2 & \end{array}$$

$\mathcal{L}$ est convexe donc on étudie son unique point fixe :

$$\nabla\mathcal{L}(\vec{x}, w) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + w + 6x - 2y = 0 \\ -1 + w - 2x + 4y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{10}(1 - w) \\ y = \frac{4}{10}(1 - w) \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta(w) = -x - y + 3x^2 + 2y^2 - 2xy$
Après calculs, on trouve : $\theta(w) = -\frac{7}{20}w^2 + \frac{17}{10}w - \frac{7}{20}$.
Remarque : $\theta(w)$ est bien concave (polynôme de degré 2 à coefficient négatif).

3. On cherche : $\underset{w \geq 0}{\text{Max}}\ \theta(w) = \underset{w \geq 0}{\text{Max}} \left\{-\frac{7}{20}w^2 + \frac{17}{10}w - \frac{7}{20}\right\}$
θ concave $\Rightarrow$ il suffit de chercher l'unique point critique :
$\theta'(w) = -\frac{7}{10}w + \frac{17}{10} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{17}{7}$
D'où la solution optimale du dual lagrangien :

$$\boxed{\hat{w} = \frac{17}{7}} \text{ et } \boxed{\theta(\hat{w}) = \frac{12}{7}}$$

4. On en déduit :

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{3}{10}(1 - \hat{w}) = -\frac{3}{7} \\ \hat{y} = \frac{4}{10}(1 - \hat{w}) = -\frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\hat{x}, \hat{y}) = (-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7})} \text{ et } \boxed{f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{12}{7}}$$

Remarque : on a un problème convexe et on vérifie bien qu'il y a la dualité forte car il n'y a pas de saut de dualité : $\theta(\hat{w}) = f(\hat{x}, \hat{y})$.

Méthodes itératives

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

- Idée : inspirée de la méthode de plus forte pente pour une optimisation sans contraintes avec l'ajout d'une **projection** sur l'espace des contraintes Ω
- Principe :
  - point initial $x^{(0)}$ donné
  - calcul d'un nouvel itéré à partir du point courant par la méthode de plus forte pente (mais on n'assure pas que la direction de descente soit réalisable) :
  $y^{(k)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$
  - projection sur l'ensemble des contraintes Ω pour retrouver le problème contraint : $x^{(k+1)} = \mathrm{Proj}_{\Omega}(y^{(k)})$
  Remarques :
  - le pas de déplacement α peut être différent à chaque itération ou constant ; certains choix de pas assurent la convergence de la méthode
  - plus le domaine Ω est "compliqué", plus la projection est compliquée (donc plus le problème est lent à résoudre)
- Comparaison aux autres méthodes : ce schéma est intéressant si Ω est simple et que la projection n'est pas trop longue ; elle doit être utilisée sur ordinateur
- Cas d'un problème quadratique : soit, sur l'ensemble de contraintes Ω, la fonction objectif :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T Q \vec{x} + b^T \vec{x}$$

  Si on ne veut pas calculer un $\alpha^{(k)}$ à chaque itération et que l'on prend un pas constant, le pas optimal est : $\hat{\alpha} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$ (avec $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ les valeurs propres minimale et maximale de Q).
  Alors la convergence de l'algorithme est linéaire.

Méthode de Zoutendijk

[MAIN4] Mina Pêcheux - Cours de H. Ouzia

Théorie

Soit le problème non linéaire avec des contr. linéaires :

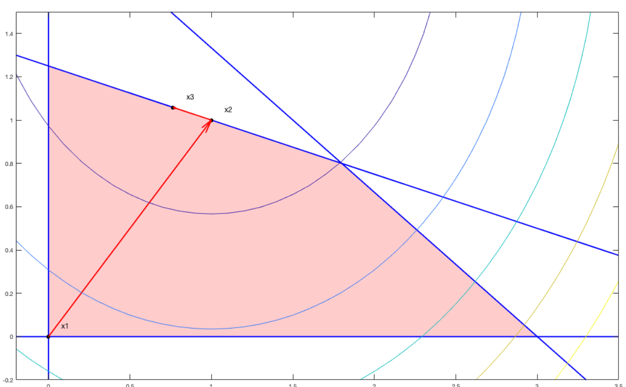
$$\begin{array}{ll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & f(\vec{x}) \\ & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & B\vec{x} = \vec{h} \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

- calcul du grad. de f : $\vec{\nabla} f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- choix du point initial réalisable
- à chaque itération :
  1 calcul du gradient au point $\vec{\nabla} f(\hat{\vec{x}})$
  2 calcul de la direction de descente réalisable (DDR) optimale $\hat{\vec{d}}$: problème de min. de $\vec{\nabla} f(\hat{\vec{x}}) \cdot (d_1, \ldots, d_n)^T$ avec conditions de normalisation, contraintes $A^= \cdot (d_1, \ldots, d_n)^T \leq 0$ ($A^=$: matrice des contr. sat. en $\hat{x}$) et contraintes $B \cdot (d_1, \ldots, d_n)^T = 0$
  $\rightarrow$ si la valeur optimale du problème de min. de la DDR est nulle, arrêt de l'algorithme
  $\rightarrow$ sinon, nouvelle itération
  3 calcul du pas de déplacement : problème de min. de $f(\hat{\vec{x}} + \lambda \hat{\vec{d}})$ soumis aux contraintes $\lambda A \hat{d} \leq \vec{b} - A\hat{\vec{x}}$ et $\lambda B \hat{d} = \vec{h} - B\hat{\vec{x}}$
  4 calcul du nouvel itéré : new_$\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \hat{\lambda}\hat{\vec{d}}$
- conclusion sur le pt KKT : min/max ? local/global ?

Application

Soit le problème :

$$\begin{array}{lllll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & \frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{2}y^2 & -x & -2y \\ & 2x & +3y & \leq & 6 \\ & x & +4y & \leq & 5 \\ & x, & y & \geq & 0 \end{array}$$



- $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = (x-1, y-2)^T$, $\vec{x}_0 = (0,0)^T$
- Itération 1 :
  1 calcul du gradient au point : $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = (-1,-2)^T$
  2 calcul de la DDR :

$$\begin{array}{llllll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & -d_1 & -2d_2 & & & \\ & -1 \leq & d_1 & \leq & 1 & \\ & -1 \leq & d_2 & \leq & 1 & \text{cond. de normalisation} \\ & -d_1 & \leq & 0 & & \\ & -d_2 & \leq & 0 & & \text{contr. saturées en } x_0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lllll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & -d_1 & -2d_2 & & \\ 0 & \leq & d_1 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & d_2 & \leq & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{\hat{\vec{d}}_0 = (1,1)^T}$$

Valeur optimale : $-\hat{\vec{d}}_{0,1} - 2\hat{\vec{d}}_{0,2} \neq 0 \rightarrow$ nouvelle itération

3 calcul du pas de déplacement : $\vec{x}_0 + \lambda \hat{\vec{d}}_0 = (\lambda, \lambda)^T$

$$\begin{array}{llll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & \lambda^2 & -3\lambda & \\ & 2\lambda & +3\lambda & \leq 6 \Rightarrow \lambda \leq \frac{6}{5} \\ & \lambda & +4\lambda & \leq 5 \Rightarrow \lambda \leq 1 \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda}_0 = 1} \\ & -\lambda & & \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0 \\ & & -\lambda & \leq 0 \end{array}$$

4 calcul du nouvel itéré : $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \hat{\lambda}_0 \hat{\vec{d}}_0 = (1,1)^T$

- Itération 2 :
  1 $\vec{\nabla} f(\vec{x}_1) = (0,-1)^T$

2
$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & -d_2 & & & \\ & -1 \leq & d_1, d_2 & \leq & 1 \\ & d_1 & +4d_2 & \leq & 1 \Rightarrow \boxed{\hat{\vec{d}}_1 = (-1, \frac{1}{4})^T} \end{array}$$

Valeur optimale $\neq 0 \rightarrow$ nouvelle itération

3 $\vec{x}_1 + \lambda \hat{\vec{d}}_1 = (1-\lambda, 1+\frac{\lambda}{4})^T$

$$\begin{array}{llll} \underset{s.c.}{\text{Min}} & \frac{17}{32}\lambda^2 & -\frac{\lambda}{4} & -2 \\ & -\frac{5}{4}\lambda & \leq & 1 \Rightarrow \lambda \geq -\frac{4}{5} \\ & \lambda & \leq & 1 \qquad \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda}_1 = \frac{4}{17}} \\ & \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

4 $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \hat{\lambda}_1 \hat{\vec{d}}_1 = (\frac{13}{17}, \frac{18}{17})^T$

- Itération 3 :
  1 $\vec{\nabla} f(\vec{x}_2) = (-\frac{4}{17}, -\frac{16}{17})^T$

2
$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & -\frac{4}{17}d_1 & -\frac{16}{17}d_2 & & \\ & -1 \leq & d_1, d_2 & \leq & 1 \\ & d_1 & +4d_2 & \leq & 1 \Rightarrow \boxed{\hat{\vec{d}}_1 = (1, -\frac{1}{4})^T} \end{array}$$

Valeur optimale $= 0 \rightarrow$ arrêt de l'algorithme

- Donc le point $\boxed{\vec{x}_2 = (\frac{13}{17}, \frac{18}{17})^T}$ est un point KKT.
  De plus, on vérifie que, ici : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{\nabla}^2 f(\vec{x}) = \mathbb{1}$ déf. positive $\Rightarrow f$ convexe $\Rightarrow$ les conditions KKT sont nécessaires et suffisantes $\Rightarrow \vec{x}_2$ est un min. global