SORBONNE UNIVERSITÉ | POLYTECH MAIN 4
ANNÉE 2019-2020 | FOURIER, CONVOLUTION

**Feuille de TP1**

Du 1er octobre 2019

**Rappel 1 : méthodes des rectangles et des trapèzes**. Il s'agit de méthodes classiques d'approximation des intégrales. On rappelle que si une fonction $f$ est définie sur un intervalle $[a,b]$, alors, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ donné, les nombres

$$\begin{cases} R_n(f) \equiv \dfrac{b-a}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \text{ où } x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}. \\ T_n(f) \equiv \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right) \end{cases} \tag{1}$$

fournissent des approximations de l'intégrale $I(f) \equiv \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (respectivement par les méthodes dites des rectangles et des trapèzes à l'ordre $n$).

**Rappel 2 : coefficients de Fourier**.Si $f$ est une fonction $2\pi$-périodique, alors pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\widehat{f}(k)$ d'ordre $k$ de $f$ est donné par la formule

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\exp(-iks)\mathrm{d}s.$$

**Rappel 3 : convolution** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à support compact, on définit la fonction $f \star g$ par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

**Travail 1**

(*Lire Rappel 1)*. On prend dans cette partie $a = -10, b = 10$ et on travaille sur l'intervalle $I = [a,b] = [-10,10]$.

A1) Pour $f$ donnée, calculer la différence $T_n(f) - R_n(f)$.

A2) Que peut-on dire de cette différence lorsque $f$ s'annule en dehors de $[-8,8]$ ?

On considère dans la suite la fonction $\chi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\chi(s) = \frac{1}{2} \text{ pour } s \in [-1,1] \text{ et } \chi(s) = 0 \text{ pour } s \notin [-1,1]. \tag{2}$$

B1) Représenter le graphe de $\chi$ à l'aide de *mathlab*.

B2) Calculer, en utilisant *mathlab*, les valeurs de $R_n(\chi)$ et $T_n(\chi)$ pour $n = 10, 50, 100$.

B3) Calculer des valeurs approchées de $\chi \star \chi(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, (où $x_i$ est défini dans (1)) pour $n = 10, 50, 100$ en utilisant la méthode des rectangles et/ou la méthode des trapèzes (à l'ordre $n$).
B4) A l'aide de la question précédente, tracer le graphe (approché) correspondant de la fonction $\chi \star \chi$.
B5) Donner une estimation, en fonction de $n$, du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour effectuer les calculs des questions B3) et B4).

**Travail 2**

*Approximation de l'identité*

Soit $g$ une fonction donnée sur $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_k(s) = kg(ks), s \in \mathbb{R}.$$

A) On suppose dans cette partie que

$$g(s) = (1 - |s|) \text{ pour } |s| \leq 1 \text{ et } g(s) = 0 \text{ si } |s| > 1.$$

A1) Représenter le graphe de $g_k$ à l'aide de *mathlab* pour $k = 1, 5, 10, 50$ en utilisant la méthode des rectangles, c'est à dire en calculant $R_n(g_k)$ pour diverses valeurs de $n$.
A2) Pourquoi convient t-il de choisir $n$ en fonction de$k$ ? Pourquoi est-il souhaitable d'avoir $n \gg k$ ?
A3) Calculer des valeurs approchées de $\int_{\mathbb{R}} g_k(s)\mathrm{d}s$, pour $k = 1, 5, 10, 50$.
A4) Calculer des valeurs approchées de $\chi \star g_k(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, pour $k = 1, 5, 10, 50$ (où $x_i$ est défini dans (1)) en utilisant la méthode des rectangles et/ou la méthode des trapèzes (à un ordre $n \gg k$).
A5) A l'aide de la question précédente, tracer le graphe (approché) correspondant de la fonction $\chi \star g_k$.

B) Reprendre les questions précédentes en prenant pour $g$ la fonction

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

**Travail 3**

*Polynôme de Dirichlet*

On rappelle que pour $N \in \mathbb{N}^*$, le polynôme trigonométrique de Dirichlet est donné par

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} (\exp it)^k \text{ ou } D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left[(N + \frac{1}{2})t\right]}{\sin \frac{t}{2}}.$$

1) Représenter le graphe de la fonction $D_N$ pour les valeurs $n = 1, 5, 10, 20$.
2) Calculer des valeurs approchées de $\int_{\mathbb{R}} D_N(s)\mathrm{ds}$, pour $N = 1, 5, 10, 50, 100$, en utilisant la méthode des rectangles, c'est à dire en calculant $R_n(D_N)$ pour diverses valeurs de $n \gg N$.
3) Calculer des valeurs approchées de $\int_{\mathbb{R}} |D_N(s)|\mathrm{ds}$, pour $N = 1, 5, 10, 50, 100$, en utilisant la méthode des rectangles, c'est à dire en calculant $R_n(|D_N|)$ pour diverses valeurs de $n \gg N$.
4) que remarque-t-on ?

**Travail 4**

*Polynôme de Fejer*

On considère de même le noyau trigonométrique de Fejer donné par

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\sin(\frac{n+1}{2} t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2, \text{ ou } F_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \exp ikt, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1) Représenter le graphe de la fonction $F_n$ pour les valeurs $n = 1, 5, 10, 15, 20$.
2) Comparer les graphes de $D_n$ et $F_n$ sur un même graphique.
2) Calculer des valeurs approchées de $\int_{\mathbb{R}} F_N(s)\mathrm{ds}$, pour $N = 1, 5, 10, 50, 100$, en utilisant la méthode des rectangles, c'est à dire en calculant $R_n(F_N)$ pour diverses valeurs de $n \gg N$.
Que peut-on dire de $\int_{\mathbb{R}} |F_N(s)|\mathrm{ds}$ ?
4) que remarque-t-on ?

**Travail 5**

*Phénomène de Gibbs*

On considère la fonction $2\pi$ periodique définie par

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ pour } t \in ]0, \pi] \\ f(t) = -1 \text{ pour } t \in ]-\pi, 0]. \end{cases}$$

1) Calculer $\widehat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) Représenter graphiquement la série de Fourier associée à $f$ :

$$S_N(f)(t) = f \underset{\text{per}}{\star} D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) \exp ikt.$$

pour diverses valeurs de $N$ (on représentera $f$ sur le même graphique).
3) Interpréter.
4) Représenter graphiquement la série de Fejer associée à $f$ :

$$H_N(f)(t) = f \underset{\text{per}}{\star} F_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{n+1}) \widehat{f}(k) \exp ikt.$$

pour diverses valeurs de $N$ (on représentera $f$ sur le même graphique).
5) Interpréter.

**Travail 6**

*Fonction "triangle"*

On considère la fonction $2\pi$ periodique définie par

$$\begin{cases} f(t) = \pi - t \text{ pour } t \in ]0,\pi] \\ f(t) = \pi + t \text{ pour } t \in ]-\pi,0] \end{cases}$$

1) Représenter le graphe de $f$.
2) Calculer $\widehat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3) Représenter graphiquement la série de Fourier associée à $f$.

$$S_N(f)(t) = f \underset{\text{per}}{\star} D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) \exp ikt.$$

pour diverses valeurs de $N$ (on représentera $f$ sur le même graphique).
3) Interpréter.
4) Représenter graphiquement la série de Fejer associée à $f$ :

$$H_N(f)(t) = f \underset{\text{per}}{\star} F_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} (1 - \frac{|k|}{n+1}) \widehat{f}(k) \exp ikt.$$

pour diverses valeurs de $N$ (on représentera $f$ sur le même graphique).
5) Interpréter.