UNIVERSITÉ PIERRE & MARIE CURIE
ANNÉE 2016-2017

EPU MAIN 4
EDP, DISTRIBUTIONS

Test 1 du 14 Mars 2017
Durée : 1h45, Polycopié autorisé.

Exercice 1. Trouver les solutions $t \to y(t)$ des équations différentielles suivantes, en précisant le domaine de définition :
a) $y'(t) = y(t)\cos t$, avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.
b) $y'(t) = y(t) + \cos t$, avec pour donnée intiale $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \dfrac{\exp -(y(t))^2}{y(t)}$, avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.
d) $y'(t) = 1 + t^2 + \dfrac{y(t)}{t}$, avec pour donnée initiale $y(1) = 2$.

Exercice 2. On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + x^3 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[. \qquad (1)$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une équation de transport linéaire.
2) Préciser les courbes caractéristiques, en particulier celle qui passe par un point $(x^\star, t^\star)$ donné.
3) Donner l'expression de la solution qui vérifie $u(x,0) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit u_0 une foncion régulière, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On cherche une solution u qui soit 2π-périodique par rapport à x, c'est à dire telle que $u(x+2\pi,t) = u(x,t)$.
1) Montrer que si une telle solution u, alors elle est unique.
2) Trouver la solution en utilisant un développement en séries de Fourier.
3) Trouver la solution du problème pour $u_0 = (\sin x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) Trouver la solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = t(\cos x)^3 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\\ u(x,0) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (2)$$

*5) Que peut-on dire des solutions 2π-périodiques par rapport à x de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 4. A) Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f_a(x) = \exp(-a|x|)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
A1 Déterminer la fonction $\widehat{f_a}$.
A2) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(s^2+1)^2} \mathrm{d}s$.
A3) Déduire de la question A1) l'expression de $\widehat{g}$, où g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

B) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 1 - x^2 \text{ pour } |x| \leq 1 \text{ et } h(x) = 0 \text{ pour } |x| > 1. \tag{3}$$

B1) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de h.
B2) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s^6}(s\cos s - \sin s)^2 \mathrm{d}s$.
B3) En utilisant la question B1) calculer l'intégrale

$$K = \int_{\mathbb{R}} \frac{s\cos s - \sin s}{s^3} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \mathrm{d}s.$$