

Distributions et équations aux dérivées partielles

Fabrice Bethuel

Année Universitaire 2019-2020

Table des matières

1	Un peu de modélisation	5
1.1	Modèles de dynamiques de population	5
1.1.1	Modélisation par des équations différentielles	5
1.1.2	Modélisation par équations aux dérivées partielles (EDP)	6
1.2	Modèles de transport de particules	8
1.2.1	Equation de continuité	8
1.2.2	Equation de transport	10
1.2.3	La méthode des caractéristiques pour l'équation de transport	10
1.2.4	Solutions de l'équation de transport avec termes sources	14
1.2.5	Solutions de l'équation de continuité	15
1.3	Trafic routier	15
1.3.1	Le modèle	15
1.3.2	Utilisation de la méthode des caractéristiques	16
1.3.3	Croisement des caractéristiques	18
1.4	Modèles de diffusion	19
1.4.1	Loi de Fick et équation de la chaleur	20
1.4.2	Équations de diffusion non-linéaires	21
1.5	Équations aux dérivées partielles linéaires	21
1.5.1	Équations sans terme source	21
1.5.2	Équations avec termes sources	21
1.5.3	Résolution des EDP linéaires	21
2	L'équation de la chaleur périodique	23
2.1	Introduction	23
2.2	Unicité des solutions	24
2.3	Construction de solutions par développement en séries de Fourier	25
2.3.1	Des solutions explicites dans le cas où $u_0 = \mathbf{e}_k, k \in \mathbb{Z}$	25
2.3.2	Le cas où u_0 est un polynôme trigonométrique	26
2.3.3	Développement en série de Fourier des solutions	26
2.4	Équation de la chaleur périodique avec terme source	30
2.4.1	Unicité	31
2.4.2	Existence de solutions	31
2.5	Équation de la chaleur périodique avec terme source et donnée initiale non nulle	32
3	L'intégrale de Fourier	34
3.1	Introduction	34
3.2	Théorie de Fourier pour les fonctions L -périodiques	34

3.2.1	Décomposition des fonctions L -périodiques	34
3.2.2	Les relations de Parseval	35
3.3	La transformée de Fourier des fonctions sur \mathbb{R}	36
3.3.1	Définition de la transformée de Fourier	36
3.3.2	Propriétés de la Transformée de Fourier des fonctions à support compact	37
3.3.3	La formule d'inversion de Fourier	40
3.3.4	Le théorème de Parseval	43
3.4	Transformée de Fourier et convolution	43
3.5	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	44
3.5.1	Définition abstraite	44
3.5.2	Formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	45
3.5.3	Calculs pratiques	46
3.5.4	Transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions	47
3.6	Transformée de Fourier et régularité	49
3.7	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz	50
4	Résolution d'EDP par transformée de Fourier	53
4.1	Introduction	53
4.2	Transformée de Fourier partielle par rapport à la variable d'espace	53
4.3	Équations de transport	54
4.4	Equation de la chaleur homogène	55
4.4.1	Resolution par analyse de Fourier	55
4.4.2	Le noyau de la chaleur	57
4.4.3	Propriétés des solutions	59
4.5	Equation de la chaleur avec terme source	59
4.5.1	Résolution par transformée de Fourier partielle	60
4.5.2	Représentation des solutions à l'aide du noyau de la chaleur \mathbf{H}	60
4.6	L'équation de Laplace sur \mathbb{R}^N	61
4.6.1	L'opérateur de Laplace	61
4.7	L'équation de Laplace sur \mathbb{R}^N	62
4.7.1	La transformée de Fourier sur \mathbb{R}^N	62
4.7.2	Résolution de l'équation de Laplace	63
5	La théorie des distributions : un aperçu	66
5.1	Introduction	66
5.1.1	La notion de fonction	66
5.1.2	Les séries de Fourier	66
5.1.3	La théorie de l'intégration comme point de départ	67
5.2	Définition des distributions	72
5.2.1	La propriété de continuité des distributions	72
5.2.2	Exemples	73
5.2.3	Restriction d'une distribution à un ouvert	76
5.2.4	Support d'une distribution	76
5.3	Opérations sur les distributions	77
5.3.1	Dérivation des distributions	77
5.3.2	Multiplication d'une distribution et d'une fonction C^∞	80
5.3.3	Les distributions à support compact	80

5.3.4	Convolutions des distributions	82
5.4	Convergence des distributions	85
5.4.1	Définition et premières propriétés	85
5.4.2	Approximation des distributions par des fonctions régulières	87
5.4.3	Quelques conséquences	87
6	Distributions et EDP	89
6.1	Introduction	89
6.2	La notion de solution fondamentale	89
6.2.1	Etude du noyau de la chaleur	89
6.2.2	Construction de solutions de l'équation avec terme source	91
6.3	Etude du noyau de Laplace	92
6.3.1	Construction de solutions de l'équation de Poisson	95
6.4	La notion de solution élémentaire	95
A	Equations différentielles ordinaires	97
A.1	Introduction	97
A.1.1	Définition	97
A.1.2	Le problème de Cauchy	98
A.2	Exemples d'intégrations explicites	98
A.2.1	Fonctions f indépendantes de u	98
A.2.2	Méthode de séparation des variables	99
A.2.3	Méthode de variation de la constante	101
A.2.4	Équations différentielles vectorielles	102
A.2.5	Remarques sur les solutions construites	102
A.3	Le Théorème de Cauchy-Lipschitz	103
A.3.1	Solutions maximales	105
A.4	Quelques propriétés	106
A.4.1	Un outil fondamental : les inégalités différentielles	106
A.4.2	Le Lemme de Gronwall	107
B	Rappels sur les fonctions de plusieurs variables	108
B.1	La notion de dérivée partielle	108
B.1.1	Développement limité à l'ordre 1	109
B.1.2	Le gradient	109
B.1.3	Intégration par parties	110
B.1.4	Dérivation des fonctions composées	111
B.1.5	Changements de coordonnées	113
B.1.6	Changement de coordonnées et intégration	115
B.2	Dérivées secondes	116
B.2.1	Développement limité à l'ordre 2 et matrice Hessienne	116
B.2.2	Dérivée seconde de la restriction à une droite	117
B.2.3	Dérivée seconde de la restriction à une courbe	117
B.2.4	Transformation par changement de base	118
B.2.5	Changements de bases orthonormées	119
B.2.6	Le laplacien	119
B.2.7	Conditions du premier et du deuxième ordre en un point minimisant intérieur	121
B.3	Dérivées partielles d'ordre supérieur	123

B.3.1	Multi-indices	123
C	Quelques notions d'analyse vectorielle	124
C.1	Champ de vecteurs	124
C.1.1	Champ de gradient	125
C.1.2	Courbes intégrales	127
C.1.3	La divergence	128
C.1.4	Divergence, flux et intégration par partie	130
C.2	Une interprétation du théorème flux-divergence : l'équation de continuité	131
C.3	Le rotationnel	136
C.3.1	Invariance du rotationnel par changement de repère orthonormé	137
C.3.2	Champs à rotationnel nul	138
C.3.3	Champ à divergence nulle, potentiels vecteurs	138
C.3.4	Le cas $N=2$	139

Chapitre 1

Un peu de modélisation

Les *équations aux dérivées partielles (EDP)* peuvent être considérées comme des généralisations des équations différentielles à des fonctions de plusieurs variables. Elles décrivent une relation entre diverses dérivées partielles d'une fonction. Dans la pratique, la fonction qui vérifie l'équation aux dérivées partielles représente une quantité que l'on aimerait décrire, quantité dépendant de plusieurs variables, dont, souvent, le temps. L'équation aux dérivées partielles est alors une conséquence des modèles décrivant le comportement de la quantité en question.

Nous allons donner dans ce chapitre quelques modèles qui aboutissent à des EDP relativement simples, en commençant par décrire quelques modèles de dynamiques de populations.

1.1 Modèles de dynamiques de population

Les modèles de dynamique de population décrivent l'évolution au cours du temps d'une population d'individu. Dans les modèles les plus simples, on ne distingue pas les divers individus, et on ne s'intéresse qu'à leur nombre total. Soit alors $I = [0, T[$ l'intervalle de temps sur lequel on étudie le nombre total d'individus de la population que l'on désigne, pour un temps t donné, par $q(t)$. Ceci définit donc une fonction

$$q : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^+, q \mapsto q(t). \quad (1.1)$$

En modélisant la manière dont la population évolue, nous allons obtenir des équations différentielles pour la fonction q .

1.1.1 Modélisation par des équations différentielles

En fonction des diverses hypothèses que nous allons faire sur la croissance de f , nous obtiendront des équations différentes

L'hypothèse de Malthus (1766-1894)

C'est le modèle le plus simple. On suppose ici qu'à chaque instant, la croissance de la population est proportionnelle à son effectif total. Ceci nous conduit à la relation

$$\frac{dq}{dt}(t) = \alpha q(t), \text{ pour tout } t \in I = [0, T[, \quad (1.2)$$

où α désigne un paramètre réel, et $T > 0$ la durée de temps maximal sur laquelle on désire étudier la population. Pour que l'on puisse définir entièrement la solution, il faut compléter l'équation (1.2) par une donnée initiale, par exemple

$$q(0) = q_0, \text{ où } q_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ est donnée.} \quad (1.3)$$

Bien entendu, il est facile d'intégrer cette équation différentielle (voir Appendice A) : on trouve

$$q(t) = q(0) \exp(\alpha t) = q_0 \exp(\alpha t), \text{ pour tout } t \in I = [0, T[.$$

La solution est donc entièrement déterminée lorsqu'on connaît la donnée initiale $q_0 = q(0)$.

L'hypothèse de Verhulst (1804-1849)

On suppose ici qu'à chaque instant la croissance de la population est proportionnelle à son effectif, mais inhibée par des ressources limitées. L'équation d'évolution s'écrit alors

$$\frac{dq}{dt}(t) = \alpha q(t)(m - q(t)), \text{ pour tout } t \in I = [0, T[, \quad (1.4)$$

où α et $m > 0$ sont deux paramètres. On complète bien entendu de nouveau cette équation différentielle par une donnée initiale du type (1.3). On résout cette équation par la *méthode de séparation des variables*.

1.1.2 Modélisation par équations aux dérivées partielles (EDP)

Structuration en âge de la population

On peut enrichir le modèle précédent en augmentant le nombre de variables. Un modèle de ce type est donné par exemple par une *structuration en âge*. On considère la fonction de *deux variables* $n : (a, t) \mapsto n(a, t)$ où la variable $t \in [0, T[$ représente comme auparavant le temps, où $a > 0$, et où $n(a, t)$ représente la densité de population d'âge a à l'instant t . En d'autres termes, pour Δa *infinitement petit*, $n(a, t)\Delta a$ représente le nombre d'individus au temps t dont l'âge est compris entre a et $a + \Delta a$, ou encore, sous forme intégrale, pour $0 \leq c \leq d$,

$$\int_c^d n(a, t) da = \text{nombre d'individus dont l'âge est compris entre } c \text{ et } d \text{ à l'instant } t.$$

Il en résulte en particulier que la population totale $q(t)$ à l'instant t est donnée par

$$q(t) = \int_0^{+\infty} n(a, t) da.$$

Nous allons voir maintenant comment des hypothèses simples d'évolution de la population mènent à des équations aux dérivées partielles.

L'EDP du vieillissement

Supposons tout d'abord que la population est *isolée*, c'est à dire qu'il n'y a ni immigration, ni émigration. Négligeons aussi dans un premier temps les décès. Les seuls phénomènes pris en compte sont donc :

- Les naissances
- Le vieillissement de la population.

Le vieillissement (sans décès) de la population s'exprime pour sa part par la relation

$$n(a + s, t + s) = n(a, t), \text{ pour tous } s \geq 0, t \geq 0. \quad (1.5)$$

Pour t et a donnés, considérons maintenant la fonction F de la variable réelle s définie par

$$F(s) = n(a + s, t + s), \text{ pour } a \text{ et } t \text{ donnés.}$$

La relation (1.5), qui exprime le vieillissement de la population s'exprime donc par la relation $F(s) = F(0)$, pour tout $s \geq -t$, c'est à dire, si F est dérivable

$$F'(s) = 0 \text{ pour tout } s \geq -t. \quad (1.6)$$

Remarquons que si n est de classe C^1 , c'est à dire si elle possède des dérivées partielles continues, les règles de dérivation des fonctions composées montrent que F est une fonction de classe C^1 . En effet, F est la composée de l'application $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$s \mapsto A(s) = (A_1(s), A_2(s)) = (a + s, t + s), \text{ pour tout } s \geq -t,$$

avec l'application n de sorte que

$$F(s) = n \circ A(s) \text{ pour tout } s \geq -t.$$

Les règles de dérivation des fonctions composées donnent alors

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{\partial n}{\partial t}(a + s, t + s) \cdot A_1'(s) + \frac{\partial n}{\partial s}(a + s, t + s) \cdot A_2'(s) \\ &= \frac{\partial n}{\partial t}(a + s, t + s) + \frac{\partial n}{\partial s}(a + s, t + s). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Il résulte de (1.6) que $F'(0) = 0$. La relation (1.7) donne donc

$$\frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial s}(a, t) = 0 \text{ pour tous } t \geq 0, a \geq 0. \quad (1.8)$$

Cette relation nous fournit un premier exemple d'équation aux dérivées partielles. On dit quelle est du premier ordre, car elle ne contient que des dérivées partielles première. On peut vérifier réciproquement que cette relation est équivalente à (1.5).

Si on désire déterminer la fonction n de notre problème, il est naturel de compléter l'équation par une donnée initiale : On se donne une fonction $n_0 :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ connue, et on suppose

$$n(a, 0) = n_0(a) \text{ pour tout } a \geq 0. \quad (1.9)$$

La condition initiale (1.9) combinée avec l'équation d'évolution (3.3.2) ne permet cependant pas de déterminer explicitement la solution n . Nous verrons, par la *méthode des caractéristiques*, que si on se donne de plus les naissances à tout instant $t \geq 0$, c'est à dire une fonction $n_1 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et que l'on impose

$$n(0, t) = n_1(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (1.10)$$

alors la solution n est déterminée de manière unique. En d'autres termes, le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial s}(a, t) = 0 \text{ pour tous } t \geq 0, a \geq 0. \\ n(a, 0) = n_0(a) \text{ pour tout } a \geq 0 \\ n(0, t) = n_1(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

possède une unique solution pour toutes fonctions n_0 et n_1 données.

Remarque 1. Notons cependant que la relation (3.3.2) suppose que la fonction n soit dérivable, alors que la relation (1.5) a un sens pour des fonctions beaucoup moins régulières. Nous verrons plus loin comment la *théorie des distributions* réconcilie ces deux points de vue.

Le modèle de Mc Kendrick

Dans le modèle précédent, les données sont représentées par les deux fonctions n_0 (donnée initiale) et n_1 (taux de naissance). Il n'est cependant pas naturel de supposer que n_1 , c'est à dire le taux de naissance pour tout temps, soit une donnée. Il est plus naturel de supposer que, pour tout t , le taux de naissance $n(0, t)$ soit lui-même une fonction de la population, c'est à dire de la fonction $a \mapsto n(a, t)$.

Dans le modèle de Mc Kendricks, on fait l'hypothèse que chaque tranche d'âge a a un taux de reproduction donné $B(a)$. Les nouveau-nés à l'instant t correspondent à $n(0, t)$, et on a la relation

$$n(0, t) = \int_0^\infty B(a)n(a, t)da \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (1.12)$$

La résolution du modèle de Mc Kendricks est bien plus délicate.

1.2 Modèles de transport de particules

1.2.1 Equation de continuité

Considérons des particules repartis sur un segment de droite $I =]a, b[$. On note $\rho(x, t)$ la densité de particules présente à l'instant $t \geq 0$ au point $x \in I$. Ceci signifie que le nombre de particules présent à l'instant t dans l'intervalle $[c, d] \subset I$ est donné par $\int_c^d \rho(x, t)dx$. On suppose que les particules se déplacent sur l'intervalle, et que la vitesse des particules est donnée, en chaque point de la droite par $V(x, t)\vec{e}_1$, où \vec{e}_1 désigne un vecteur unitaire de la droite portant le segment I . de manière plus précise, considérons une particule situé au point x_0 au temps 0, et désignons par $\mathbf{x}(t)$ la position de la même particule à l'instant T . Son équation d'évolution est donnée par

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = V(\mathbf{x}(t), t) \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (1.13)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous enseigne que si V est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe un intervalle de la forme $[0, \varepsilon[$ sur lequel la solution \mathbf{x} existe et est unique les solutions \mathbf{x} de (1.13) sont appelées *caractéristiques* de V .

Dans beaucoup d'applications concrètes, on s'intéresse plus à la densité ρ qu'à la trajectoire des particules prises de manière individuelle. La question est alors :

Quelle est l'équation qui gouverne la fonction de deux variable $\rho(\cdot, \cdot)$?

Nous allons voir qu'il s'agit de nouveau d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. A cet effet, considérons un intervalle de la forme $[x, x + \Delta x] \subset I$ et regardons comment évolue la quantité intégrale

$$Q(x, t, \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} \rho(y, t) dy,$$

qui représente le nombre total de particules présentes dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ à un temps donné temps $t \geq 0$. En dérivant sous le signe somme, on a la relation

$$\frac{dQ}{dt}(x, t, \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(y, t) dy. \quad (1.14)$$

Voyons maintenant comment on peut calculer cette quantité d'une manière un peu différente : le point central est que les particules ne disparaissent pas, ce qu'on appelle une *loi de conservation*. Pour voir comment varie la quantité Q au cours du temps, il suffit donc de faire le bilan des particules qui entre dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ et de celles qui sortent, sur u intervalle de temps donné $[t, t + \Delta t]$. Les particules qui entrent et qui sortent de l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ le font par les deux bords, à savoir les points x et $x + \Delta x$. Considérons un petit intervalle de temps Δt arbitrairement petit, et déterminons les flux entrant et sortant de particules sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. On obtient

$$\begin{aligned} \text{Flux}(t, t + \Delta t) &= \int_t^{t+\Delta t} \rho(x, s) V(s, x - \Delta x) ds - \int_t^{t+\Delta t} \rho(x + \Delta x, s) V(x + \Delta x, s) ds \\ &= \int_t^{t+\Delta t} [\rho(x, s) V(x, s) - \rho(x + \Delta x, s) V(x + \Delta x, s)] ds. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En effet, les particules qui entrent par le point x à l'instant $s \in [t, t + \Delta t]$ ont pour vitesse $V(x, s)$ et densité $\rho(x - \Delta, s)$, et de même, les particules qui sortent par le point $x + \Delta x$ à l'instant $s \in [t, t + \Delta t]$ ont pour vitesse $V(s, x + \Delta x)$ et densité $\rho(x + \Delta, s)$. Comme la variation du nombre de particules correspond au flux de particule, on a

$$\begin{aligned} \text{Flux}(t, t + \Delta t) &= Q(t + \Delta t) - Q(t) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \frac{dQ}{dt}(x, t, \Delta x) ds. \end{aligned} \quad (1.16)$$

En combinant (1.15) et (1.16), on obtient

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dQ}{dt}(s, x, \Delta x) ds = \int_t^{t+\Delta t} [\rho(x, s) V(x, s) - \rho(x + \Delta x, s) V(x + \Delta x, s)] ds. \quad (1.17)$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient alors

$$\frac{dQ}{dt}(t, x, \Delta x) = \rho(x - \Delta x, t) V(x - \Delta x, t) - \rho(x + \Delta x, t) V(x + \Delta x, t)$$

En utilisant (1.14), on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \frac{\partial \rho}{\partial t}(y, t) dy &= \rho(x, t) V(x, t) - \rho(x + \Delta x, t) V(x + \Delta x, t) \\ &= - \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (\rho V)(y, s) dy. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En faisant tendre Δx vers 0, on obtient alors la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V)(x, t) = 0. \quad (1.19)$$

Cette équation, qui exprime la conservation du nombre de particules est appelée *équation de continuité*. Il s'agit de nouveau d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

1.2.2 Equation de transport

Cette équation, à la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + V(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.20)$$

Elle coïncide avec l'équation de continuité lorsque V est constant. Une propriété importante des équations de transport est la suivante :

Proposition 1. *Soit u une solution de classe C^1 de l'équation (1.20). Alors la restriction de ρ aux courbes caractéristiques de V est constante, c'est à dire que l'on a*

$$u(\mathbf{x}(t), t) = C^{\text{te}},$$

pour toute solution \mathbf{x} de (1.13).

Démonstration. Il faut montrer que, pour toute solution \mathbf{x} de (1.13), on a

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t), t) = 0. \quad (1.21)$$

Or, par la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + V(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}(t), t) = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

□

1.2.3 La méthode des caractéristiques pour l'équation de transport

La Proposition 1 permet de fournir les solutions de l'équation (1) dans de nombreux cas, en particulier lorsque $I = \mathbb{R}$ tout entier, et lorsqu'on se donne une condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considérons donc le problème avec condition initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + V(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.23)$$

où la fonction u_0 est donnée.

Théorème 1. Soit x^* et t^* donnée, et soit $\mathbf{x}^* : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) = V(\mathbf{x}^*(t), t) \\ \mathbf{x}^*(t^*) = x^* \end{cases} \quad (1.24)$$

lorsqu'elle existe. Alors on a

$$u(x^*, t^*) = u_0(x^*(0))$$

En particulier, la solution est entièrement déterminée en (x^*, t^*) .

Démonstration. Grâce à la Proposition 1 on a

$$u(\mathbf{x}^*(t^*), t^*) = u(\mathbf{x}^*(0), 0).$$

Comme $\mathbf{x}^*(t^*) = x^*$ la conclusion en découle. □

Exemple 1. Considérons le cas le plus simple, où V est constant, c'est à dire

$$V(x, t) = c \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

où $c \in \mathbb{R}$. L'équation des caractéristiques est alors

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) = c \\ \mathbf{x}^*(t^*) = x^* \end{cases}$$

La solution de cette équation est alors

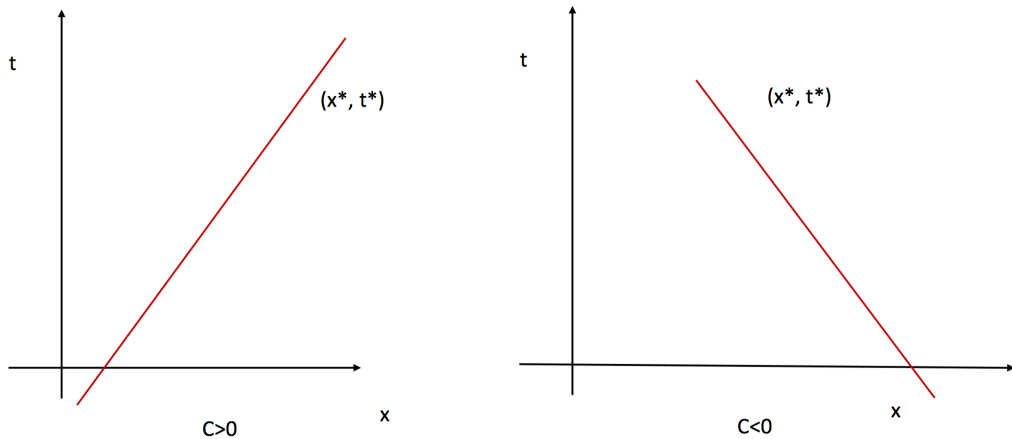
$$\mathbf{x}^*(t) = x^* + c(t - t^*). \quad (1.25)$$

d'où l'on déduit que $\mathbf{x}^*(0) = x^* - ct^*$. La solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

est donc donnée par

$$u(x^*, t^*) = u_0(x^* - ct^*).$$



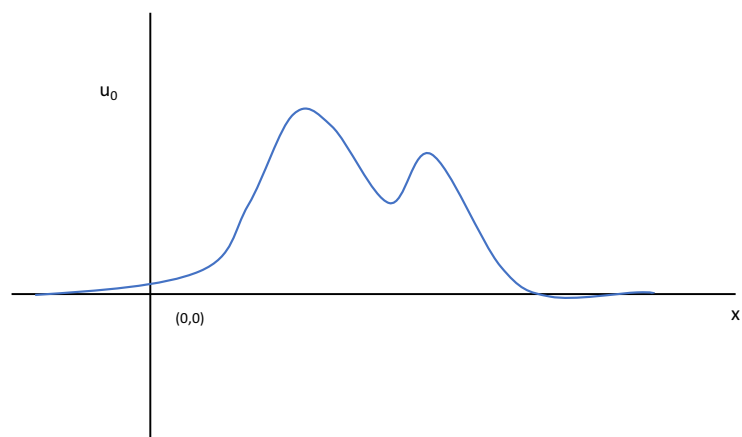


FIGURE 1.1 – Graphe de la donnée initiale u_0 .

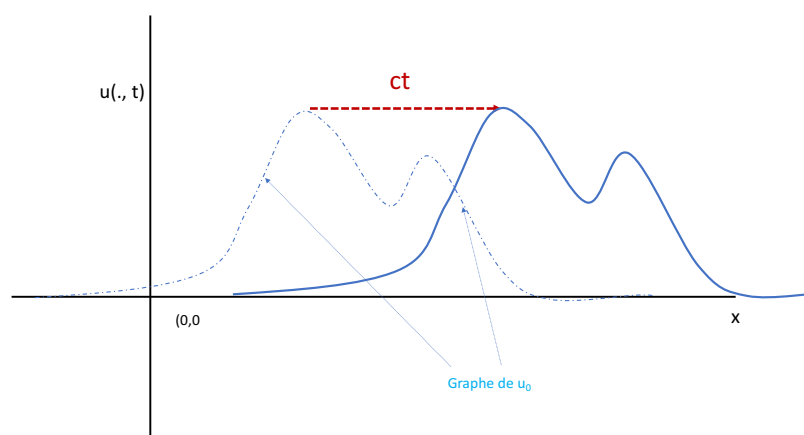


FIGURE 1.2 – pour $t \geq 0$ fixé, graphe de la fonction $x \mapsto u(x, t)$. Ce graphe correspond au graphe de la donnée initiale, décalé de ct .

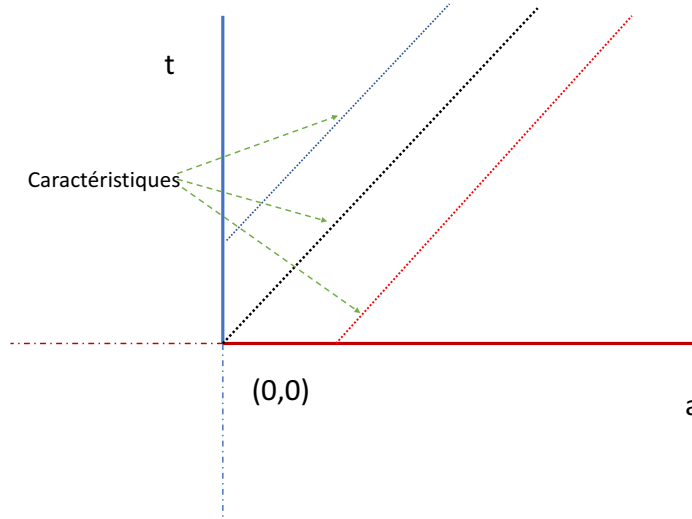
Les graphes des caractéristiques dans le plan (x, t) sont donc des droites de pentes $\frac{1}{c}$.

Exemple 2. Résolution du modèle de dynamique de population (1.11)

Revenons au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial s}(a, t) = 0 \text{ pour tous } t \geq 0, a \geq 0. \\ n(a, 0) = n_0(a) \text{ pour tout } a \geq 0 \\ n(0, t) = n_1(t) \text{ pour tout } a \geq 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

qui est maintenant posé sur le quadran $Q = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, les conditions aux limites portant sur le bord de ce quadran $\partial Q = [0, +\infty[\times \{0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$



Les caractéristiques sont, comme auparavant, les droites de pente $c = 1$, donc d'équation $a = t + c$, $a \in \mathbb{R}$. Considérons maintenant in point $A^* = (a^*, t^*)$ du quadran Q : la caractéristique D^* passant par A^* a donc pour équation $a - a^* = t - t^*$, c'est à dire $a(t) = t + (a^* - t^*)$. On doit alors distinguer deux cas :

1) **Cas 1** : $a^* \geq t^*$. Dans ce cas, la caractéristique quitte le domaine Q par la droite des origines $t = 0$. On a alors, en utilisant le fait que la fonction n est constante le long des caractéristiques

$$n(a^*, t^*) = n(a(0), 0) = n_0(a(0)) = n_0(a^* - t^*).$$

1) **Cas 2** : $a^* \leq t^*$. Dans ce cas, la caractéristique quitte le domaine Q par la droite $a = 0$, c'est à dire au point $S = (0, t^* - a^*)$, On a alors, en utilisant le fait que la fonction n est constante le long des caractéristiques

$$n(a^*, t^*) = n(0, t^* - a^*) = n_1(t^* - a^*)$$

On a donc

$$\begin{cases} n(a^*, t^*) = n_0(a^* - t^*) \text{ si } a^* \geq t^* \\ n(a^*, t^*) = n_1(t^* - a^*) \text{ si } a^* \leq t^*. \end{cases} \quad (1.27)$$

Exemple 3. Résolution du modèle de dynamique de population de Mc Kendricks Ce modèle reprend l'équation de transport avec données initiale n_0

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial n}{\partial s}(a, t) = 0 \text{ pour tous } t \geq 0, a \geq 0. \\ n(a, 0) = n_0(a) \text{ pour tout } a \geq 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

mais ici la fonction $n_1 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $n_1(t) \equiv n(0, t)$ pour tout $t \geq 0$ n'est plus *une donnée*, mais est reliée à la solution elle même par l'équation

$$n_1(t) = n(0, t) = \int_0^\infty B(a)n(a, t)da \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (1.29)$$

Pour résoudre le problème (1.28)-(1.12), on peut de nouveau évoquer la méthode des caractéristiques, comme dans l'exemple précédent. Cette dernière nous donne $n(a, t) = n_0(a - t)$ si $a \geq t$ et $n(a, t) = n_1(t - a)$ si $a \leq t$, de sorte que (1.29) devient

$$\begin{aligned} n_1(t) &= \int_0^t B(a)n_1(t - a)da + \int_t^{+\infty} B(a)n_0(a - t)da, \text{ pour tout } t \geq 0 \\ n_1(t) &= \int_0^t B(t - s)n_1(s)ds + F_0(t), \end{aligned} \quad (1.30)$$

où la fonction F_0 ne dépend que de la donnée initiale n_0 et est donnée par

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \int_t^{+\infty} B(a)n_0(a - t)da \\ &= \int_0^{+\infty} B(s + t)n_0(s)ds. \end{aligned} \quad (1.31)$$

L'équation (1.30) est une *équation intégrale* pour la fonction n_1 , dans laquelle la fonction F_0 joue le rôle de donnée. On peut démontrer qu'elle possède une solution unique¹. Une fois la fonction n_1 déterminée, on résout l'équation grâce aux formules

1.2.4 Solutions de l'équation de transport avec termes sources

On se donne ici une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, et on considère le problème avec terme source f

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + V(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Nous allons voir comment adapter les arguments précédents pour calculer la solution. On considère de nouveau les caractéristiques associées à V . Posons $U(t) = u(\mathbf{x}^*(t), t)$. On a

$$\frac{d}{dt}U(t) = f(\mathbf{x}^*(t), t).$$

En intégrons entre 0 et t^* , on obtient donc

$$\begin{aligned} u(x^*, t^*) &= U(t^*) = U(0) + \int_0^{t^*} f(\mathbf{x}^*(s), s)ds. \\ &= u_0(\mathbf{x}^*(0)) + \int_0^{t^*} f(\mathbf{x}^*(s), s)ds. \end{aligned}$$

1. La démonstration se fait dans le même esprit que la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, en utilisant un argument basé sur le théorème de point fixe de Picard.

Dans le cas particulier où $V = c$ est constant, on obtient la formule

$$u(x^*, t^*) = u_0(x^* - ct^*) + \int_0^{t^*} f(x^* + c(s - t^*), s) ds.$$

1.2.5 Solutions de l'équation de continuité

Considérons de nouveau l'équation de continuité

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot V(x, t)) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } t > 0. \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), \end{cases} \quad (1.33)$$

On peut développer la seconde dérivée de sorte que l'équation s'écrit

$$\partial_t u + V(x, t) \cdot \partial_x u = -u \frac{\partial}{\partial x} V$$

En utilisant les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, on obtient, si on considère les caractéristiques, et en posant $U(t) = u(t, \mathbf{x}^*(t))$ et $a(t) = \operatorname{div} \vec{V}(\mathbf{x}^*(t), t)$,

$$\frac{d}{dt} U(t) = -a(t) U(t).$$

On intègre cette équation comme $U(t^*) = U(0) \exp\left(-\int_0^{t^*} a(s) ds\right)$. On obtient donc

$$u(x^*, t^*) = u_0(\mathbf{x}^*(0)) \exp\left(-\int_0^{t^*} \frac{\partial}{\partial x} V(\mathbf{x}^*(s), s) ds\right).$$

1.3 Trafic routier

1.3.1 Le modèle

Les équations aux dérivées partielles que nous venons d'introduire sont linéaires, elles obéissent au principe de superposition, c'est à dire que la somme de deux solutions est aussi une solution. L'équation que nous allons voir maintenant est non linéaire.

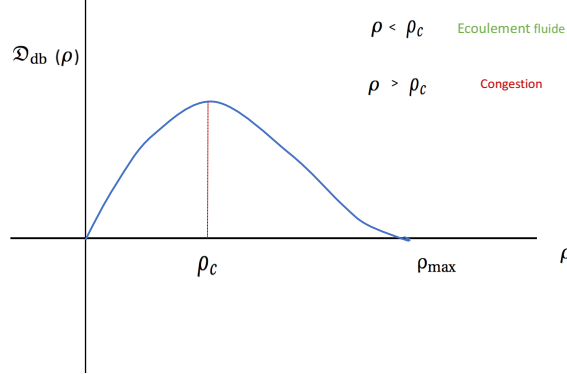
Soit un intervalle I de \mathbb{R} , supposé modéliser une portion de route. On s'intéresse à la densité ρ de voitures sur la chaussée, c'est à dire au nombre de voitures par unité de longueur. La vitesse V désigne ici la vitesse des voitures. L'équation de continuité s'écrit alors, comme ci-dessus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.34)$$

La différence principale avec ce qui précède est que nous allons supposer que la vitesse V est elle-même une fonction de la densité ρ : ceci correspond à l'idée intuitive selon laquelle, plus il y a de voitures, moins on roule vite. En pratique, on préfère raisonner sur la quantité $D(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$, qui représente le débit de voiture en un point donné x de l'intervalle I , au temps donné $t \geq 0$, c'est à dire le nombre de voitures passant en ce point au temps t par unité de temps. Dans les modèles de trafic que nous venons d'évoquer, on suppose que le débit est une fonction de la densité, c'est à dire, qu'il existe une fonction $\mathfrak{D}_{\text{db}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$D(x, t) = \mathfrak{D}_{\text{db}}(\rho(x, t)).$$

Le graphe de la fonction \mathfrak{D}_{db} a plus ou moins l'allure d'une cloche, comme le montre le dessin ci-dessous :



De tels graphes sont le plus souvent établis de manière empirique. Comme la structure routière a par nature une capacité limitée, il existe une valeur ρ_{max} au delà de laquelle le débit est nul : dans ce cas là, on se trouve dans une situation de congestion du trafic, et les voitures sont à l'arrêt (on presque). En revanche, si la densité ρ est faible, alors la vitesse des véhicules s'approche de la vitesse maximale autorisée V_{max} , et le débit est alors proche de ρV_{max} . Il en résulte que la pente à l'origine de la fonction \mathfrak{D}_{db} vaut V_{max} . Par ailleurs, le débit maximal est atteint pour la valeur ρ_c , pour laquelle la vitesse n'est pas maximale. Lorsque

- $\rho < \rho_c$, on alors l'écoulement est fluide
- $\rho \geq \rho_c$ des congestions apparaissent.

En revenant à l'équation (1.34) on obtient une équation pour la densité ρ qui a la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial(\mathfrak{D}_{\text{db}}(\rho))}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (1.35)$$

Pour décrire entièrement la solution, il faut se donner la valeur de la fonction ρ au temps initial $t = 0$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

1.3.2 Utilisation de la méthode des caractéristiques

Bien que nous ayons à faire à une équation non linéaire, la méthode des caractéristiques, permet de résoudre le problème, avec cependant des limitations que nous verrons plus loin.

Considérons de nouveau un couple (t^*, x^*) pour lequel nous aimerions calculer la valeur de la solution $\rho(t^*, x^*)$ arbitraire. Introduisons la fonction

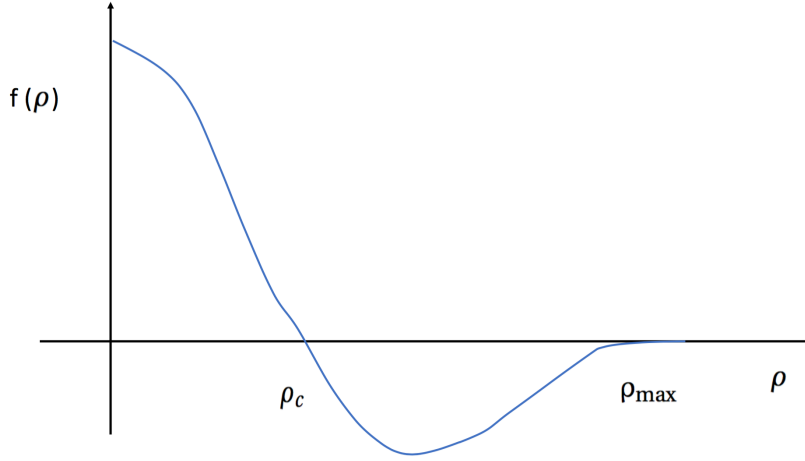
$$f(\rho) = \frac{d}{d\rho} \mathfrak{D}_{\text{db}}(\rho), \text{ pour } \rho \in \mathbb{R}^+,$$

de sorte que l'équation (1.35) devient, par la règle de dérivation composée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + f(\rho(x, t)) \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.36)$$

Soit alors la solution $\mathbf{x}^* : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, de l'équation différentielle du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) = f(\rho(\mathbf{x}^*, t^*)) \\ \mathbf{x}^*(t^*) = x^*. \end{cases}$$



Comme le second membre est constant (par rapport à la variable t), cette caractéristique est affine : son graphe est donné par la droite paramétrée d'équation

$$\mathbf{x}^*(t) = x^* + f(\rho(\mathbf{x}^*, t^*)) (t - t^*), \forall t \in J.$$

Remarque 2. La quantité $f(\rho(t^*, x^*))$ représente la pente du graphe de la caractéristique lorsque l'on place t en abscisse et x en ordonnée. Si en revanche, on place, comme on le fait souvent x en abscisse et t en ordonnée, la pente est alors $f(\rho(t^*, x^*))^{-1}$. Dans les deux cas, elle est positive pour $\rho(t^*, x^*) \leq \rho_c$, négative sinon. La quantité $f(\rho(t^*, x^*))$ représente une vitesse de propagation pour l'équation. Notons, qu'en général cette vitesse est différente de la vitesse des véhicules considérés.

On vérifie que le long de cette caractéristique, la solution ρ est constante tant qu'elle est régulière. Posons

$$\Phi(t) = \rho(t, \mathbf{x}^*(t)), \text{ pour } t \in I^*.$$

et montrons que Φ est constante près de t^* . Calculons tout d'abord sa dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= \frac{d}{dt}\rho(t, \mathbf{x}^*(t)) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{x}^*(t)) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, \mathbf{x}^*(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t), t) + f(\rho(t^*, x^*)) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, \mathbf{x}^*(t)) \\ &= [f(\rho(t^*, x^*)) - f(\rho(\mathbf{x}^*(t), t))] \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, \mathbf{x}^*(t)) \\ &= [f(\Phi(t^*)) - f(\Phi(t))] \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, \mathbf{x}^*(t)) \end{aligned}$$

On vérifie en particulier que

$$\frac{d}{dt}\Phi(t^*) = 0 \text{ pour } t \in I^*.$$

Si on suppose *a priori* que la solution ρ est régulière près de (x_\star, t_\star) , alors il existe un voisinage $I_\varepsilon \equiv]t_\star - \varepsilon, t_\star + \varepsilon[$ de t_\star , et une constante $K_0 \geq 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x^\star(t)) \right| \leq K_0 \text{ pour tout } t \in I_\varepsilon.$$

de sorte que, pour une constante $K \geq 0$, on a l'inégalité différentielle

$$\left| \frac{d}{dt} [\Phi(t) - \Phi(t^\star)] \right| \leq K |\Phi(t) - \Phi(t^\star)|,$$

et il résulte alors du lemme de Gronwall que

$$\Phi(t) - \Phi(t^\star) = 0$$

tant que la solution est régulière près de la caractéristique. Si tel est le cas, on a alors

$$\begin{aligned} \rho(x^\star, t^\star) &= \Phi(t^\star) = \Phi(0) = \rho(\mathbf{x}^\star(0), 0) = \rho_0(\mathbf{x}^\star(0)) \\ &= \rho_0(x^\star - f(\rho(t^\star, x^\star)t^\star)), \end{aligned} \tag{1.37}$$

On a donc

Proposition 2. *Supposons que la solution ρ est régulière sur $I \times [0, t^\star]$. Alors la solution ρ est déterminée de manière unique par la formule*

$$\rho(t^\star, x^\star) = \rho_0(x^\star - f(\rho(t^\star, x^\star)t^\star)). \tag{1.38}$$

Prenons garde au fait que nous avons supposé, *a priori* que toute la solution est *régulière*. toutefois que ceci ne demeure vrai que tant que les solutions restent régulières. On peut vérifier *a posteriori* que la solution donnée par (3.3.24) est régulière, tant que les caractéristiques ne se coupent pas!

1.3.3 Croisement des caractéristiques

Supposons que la donnée initiale ρ_0 est bornée, et supposons de plus que

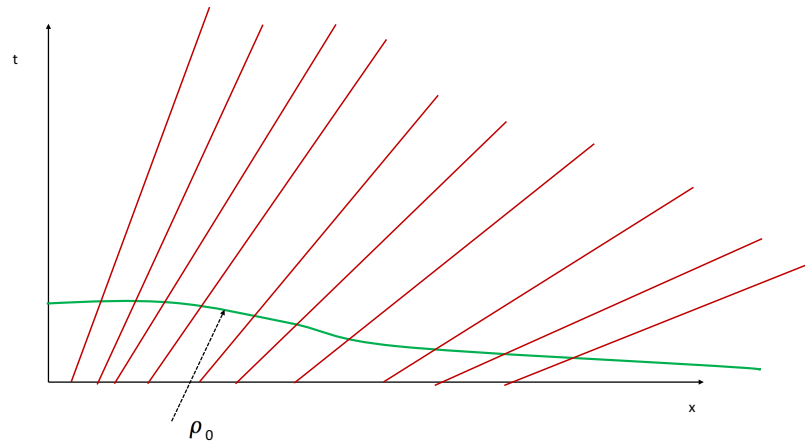
$$0 \leq \rho_0(x) < \rho_c, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

Plaçons au temps $t = 0$, et traçons les graphes des caractéristiques issus des points $(0, x)$, où l'abscisse x parcourt \mathbb{R} tout entier. Notons qu'il résulte de l'hypothèse (1.39) que toutes les caractéristiques sont de pente positives, donc penchées de la gauche vers la droite. La question principale est alors de savoir si de telles caractéristiques peuvent se couper, et si oui, quel est le premier temps T_{\max} pour lequel un tel croisement a lieu. Pour comprendre le phénomène, considérons deux cas particuliers simples.

Le cas où ρ_0 est décroissante. Comme f décroît dans le zone $[0, \rho_c]$, il en résulte que la fonction

$$x \mapsto f(\rho_0(x))^{-1}$$

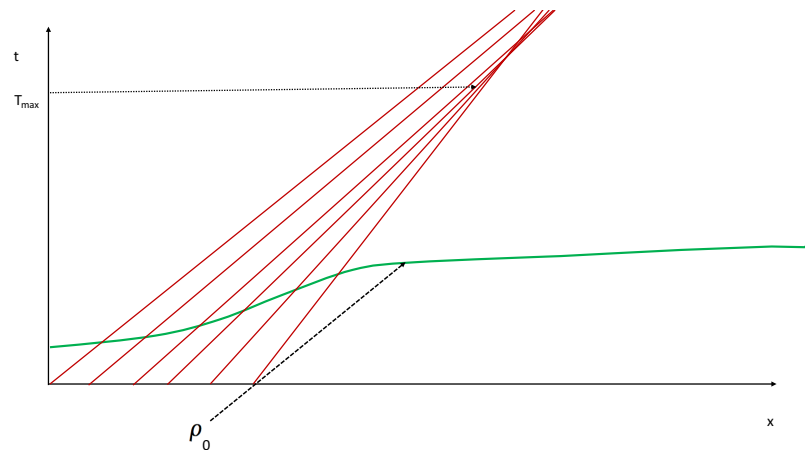
est une fonction décroissante, de sorte que les pentes des caractéristiques sont décroissantes. Elles ne se coupent donc jamais, et la solution du problème est donnée par (3.3.24).



Le cas où ρ_0 est croissante. Dans ce cas

$$x \mapsto f(\rho_0(x))^{-1}$$

est une fonction décroissante, et les pentes des caractéristiques sont décroissantes. Elles ne se coupent donc forcément. Il est alors difficile de déterminer la solution au delà du premier temps de croisement des caractéristiques.



1.4 Modèles de diffusion

Dans ce modèle, on va supposer que l'intervalle I est peuplé d'une espèce animale : on peut penser à des bactéries par exemple. la densité ρ désigne alors la densité de bactéries par unité de longueur. L'équation de continuité (1.19) est toujours valide, mais nous allons faire de nouvelles hypothèses sur leur déplacement.

Considérons tout d'abord un premier modèle, extrêmement simple, où le seul but des bactéries est d'avoir le plus d'espace possible, et donc d'être le plus loin possible de leurs congénères. Si un individu est situé en un point x de l'intervalle I , il voudra rejoindre les zones où la densité est plus faible que $\rho(x)$. En faisant l'hypothèse que chaque bactérie ressent son voisinage immédiat (et qu'elle connaît donc $\rho(x, t)$, mais aussi $\partial_x \rho(x, t)$, elle se déplace alors dans la direction de $\partial_x(x, t)\rho\vec{e}_1$. Ceci nous amène à supposer

$$V(x, t) = -c(x, \rho, |\partial_x \rho|) \partial_x \rho(x, t), \quad (1.40)$$

où $c > 0$ désigne une fonction de $I \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ donné. On parle alors de modèles de *diffusion*. Du choix de cette fonction c dépend bien entendu la nature exacte du modèle.

1.4.1 Loi de Fick et équation de la chaleur

Un modèle classique pour la fonction c est donné par la loi dite de *Fick*

$$\vec{V}(x, t) = -d \frac{\partial_x \rho}{\rho} \text{ de sorte que } \rho \vec{V} = -d \partial_x \rho, \quad (\text{Fick})$$

Où l'on suppose que $d > 0$ est un *paramètre fixé*, appelé paramètre de diffusion. En remplaçant dans l'équation de continuité on obtient, en utilisant le fait que $\text{div}(\vec{V}) = \Delta$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - d \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur } I \times \mathbb{R}^+. \quad (41)$$

Cette équation, du premier ordre en temps et de deuxième ordre en espace est appelée *équation de la chaleur* (ou *équation de Fourier*). Il s'agit d'une des EDP *linéaire* les plus classiques, et nous en étudierons en détail les propriétés. Si les bactéries restent confinées dans I une condition au bord de l'intervalle I naturelle est donnée par

$$\partial_x \rho = 0 \text{ sur } \Sigma = \partial I. \quad (42)$$

On appelle ce type de conditions au bord du domaine les conditions de *Neumann*. Par ailleurs, on se donne aussi en général une condition au temps $t = 0$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) \text{ pour } x \in \Omega, \quad (43)$$

où la fonction ρ_0 est donnée. On s'intéresse alors aux propriétés de la fonction $\rho(\cdot, t)$ pour $t > 0$ et en premier lieu pour pour le mathématicien l'existence et l'unicité d'une solution²

Remarque 3. La nature précise des conditions aux limites à imposer est également un des enjeux de la modélisation des phénomènes. Si des bactéries sont prélevés en quantité déterminée en chaque point du bord, cela conduit à la condition non homogène

$$\partial_x \rho = g(\sigma) \text{ sur } \Sigma = \partial I, \quad (44)$$

où la fonction g désigne le prélèvement. On parle alors de *condition de Neumann non-homogène*. En revanche, si on pense que *tous* les bactéries se reprochant du bord sont absorbées, alors il convient de remplacer la condition de Neumann (42) par la condition de *Dirichlet* ci-dessous

$$\rho = 0 \text{ sur } \Sigma = \partial I. \quad (45)$$

2. cette question va souvent de soi pour le modélisateur, car cette dernière est l'objet de son étude

1.4.2 Équations de diffusion non-linéaires

Dans la loi de Fick, l'intensité du champ de vitesse ne dépend que de l'intensité relative du gradient de la densité par rapport à cette dernière. On peut imaginer bien d'autres types de comportement, par exemple que le champs \vec{V} soit proportionnel à $\partial_x \rho$

$$\vec{V}(x, t) = -2d\nabla \rho(x, t),$$

ou $d > 0$ est une constante. En remplaçant dans l'équation de continuité on trouve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - d\partial_{xx}(\rho^2) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times I, \quad (\text{EMP})$$

Cette équation *non-linéaire* est connue sous le nom *d'équation des milieux poreux*, car elle intervient dans la modélisation de ce type de matériaux.

1.5 Équations aux dérivées partielles linéaires

1.5.1 Équations sans terme source

Plusieurs des équations aux dérivées partielles que nous venons de rencontrer satisfont au *principe de superposition*, qui est la propriété suivante :

- la somme de deux solutions est une solution
- la multiplication par un scalaire d'une solution est une solution.

On dit d'une équation qu'elle vérifie le principe de superposition qu'il s'agit d'une *équation linéaire*. Parmi les équations que nous venons de voir, l'équation de continuité (1.19), l'équation de transport (1.20) et l'équation de la chaleur (41) sont des équations linéaires. En revanche l'équation de trafic (1.35) ne sont pas linéaires.

Remarque 4. On reconnaît une équation linéaire au fait qu'elle ne faut apparaître que des fonctions *linéaires* de u .

1.5.2 Équations avec termes sources

En principe de termes sources, la définition précédente doit être adaptée. On dira que l'équation est linéaire si la partie sans terme source est linéaire, ou encore si et seulement si :

- si u_1 est une solution de l'EDP avec terme source f_1 , et si u_2 est une solution de l'EDP avec terme source f_2 , alors $u_1 + u_2$ est solution avec terme source $f_1 + f_2$
- si u est solution de l'EDP avec terme source f , et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λu est solution de l'EDP avec terme source λf .

1.5.3 Résolution des EDP linéaires

Dans ce cours, nous étudierons plusieurs méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous avons par exemple déjà vu comment la méthode des caractéristiques permet de résoudre les équations de transport et de continuité linéaires, méthode qui s'adapte, dans une certaine mesure aux équations de transport non-linéaire, comme l'équation de trafic. Cette méthode est cependant spécifique à ce type d'équation du premier ordre : c'est d'ailleurs un règle pour les équations aux dérivées partielles, chaque type d'équation possède des méthodes de

résolutions spécifiques, et il serait illusoire de chercher une méthode universelle. Dans de nombreux cas, nous verrons que le principe de superposition y joue un rôle crucial. L' idée de base est assez simple, et comporte très souvent les étapes suivantes :

Unicité des solutions. On montre que si une solution existe, alors elle est forcément unique.

Recherche de familles de solutions particulières. On cherche, pour des jeux de données particulières des solutions qui sont le plus souvent explicites.

Recomposition. Si notre famille de données est assez riche, alors on peut recomposer toute solution par superposition des solutions particulières.

Nous allons illustrer dans le prochain chapitre cette démarche sur l'équation de la chaleur, en commençant par des données périodiques en espace.

Chapitre 2

L'équation de la chaleur périodique

2.1 Introduction

Nous considérons dans cette partie l'équation de la chaleur, en commençant tout d'abord par l'équation de la chaleur homogène, c'est à dire sans terme source,. Nous cherchons donc une fonction u de deux variables continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ avec donnée initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

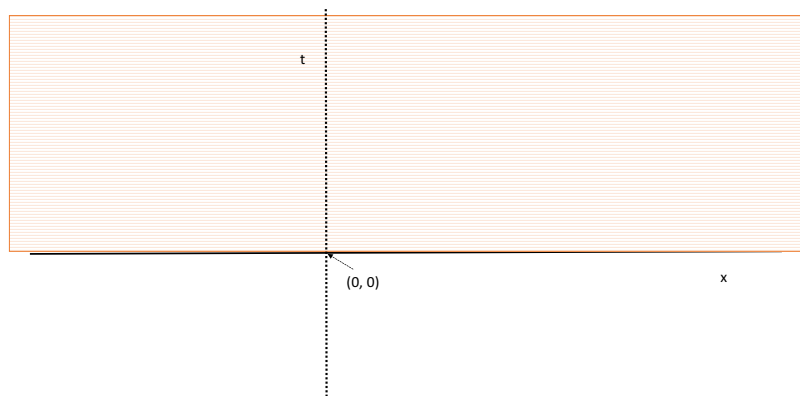
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Nous supposerons de plus que la fonction u_0 est *continue et 2π -périodique*, c'est à dire que

$$u_0(x + 2\pi) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.2)$$

Il est donc naturel de chercher une solution ayant elle-même cette propriété de périodicité par rapport à la variable spatiale x , à savoir vérifiant la relation

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.1.3)$$



Nous allons voir comment trouver des solutions à ce problème en appliquant le programme annoncé à la fin du dernier chapitre à savoir :

- démontrer **l'unicité des solutions**
- Construire des **solutions particulières** : ici nous le ferons pour des données initiales qui sont des polynôme trigonométriques
- En déduire la *solution générale* par analyse de Fourier.

2.2 Unicité des solutions

Nous allons démontrer dans cette partie, le résultat suivant :

Proposition 2.2.1. *le problème (2.4.1)-(2.1.3) possède au plus une solution.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 du problème (2.4.1)-(2.1.3). Introduisons la différence $w = u_2 - u_1$. Il s'agit de montrer que

$$w = 0. \quad (2.2.1)$$

par le principe de superposition¹, la fonction w , qui est 2π périodique par rapport à la variable x , vérifie elle aussi l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty$, à savoir

$$\begin{aligned} \partial_t w - \partial_{xx} w &= 0 \\ w(\cdot, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

la donnée initiale est en effet nulle, car u_1 et u_2 ont même donnée initiale u_0 . Pour obtenir (2.2.1), nous allons multiplier l'équation (2.2.2) par w . ceci nous donne

$$w \cdot \partial_t w - w \cdot w_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \quad (2.2.3)$$

On remarque que

$$w \cdot \partial_t w = \frac{1}{2} \partial_t (w^2)$$

de sorte que (2.2.3) devient

$$\frac{1}{2} \partial_t (w^2) - w \cdot w_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \quad (2.2.4)$$

Donnons nous maintenant un temps $t > 0$ et intégrons la relation précédente sur l'intervalle $[0, 2\pi] \times \{t\}$ de \mathbb{R}^2 . On obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \partial_t (w^2)(x, t) dx = \int_0^{2\pi} w \cdot w_{xx} dx \quad (2.2.5)$$

Notons que l'on a, par le théorème de dérivation sous le signe somme

$$\int_0^{2\pi} \partial_t (w^2)(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left[\int_0^{2\pi} w^2(x, t) dx \right] = \frac{dL}{dt}(t) \text{ où on a posé } L(t) = \int_0^{2\pi} w^2(x, t) dx.$$

alors qu'une intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi} w \cdot w_{xx} dx = - \int_0^{2\pi} (w_x)^2 + [w \cdot w_x]_0^{2\pi} = - \int_0^{2\pi} (w_x)^2,$$

1. c'est à dire la linéarité de l'équation.

les termes de bords s'annulant par périodicité. On obtient donc

$$\frac{dL}{dt}(t) = - \int_0^{2\pi} (w_x)^2 \leq 0. \quad (2.2.6)$$

En intégrant, on obtient

$$L(t) = \int_0^{2\pi} w^2(x, t) dx \leq L(0) = 0.$$

Comme $L(t) \geq 0$, on en déduit que

$$\int_0^{2\pi} w^2(x, t) dx = 0$$

ce qui entraîne $w(x, t) = 0$ pour $t > 0$ et $x \in [0, 2\pi]$, et donc (2.2.1) par périodicité de w par rapport à la variable x . \square

2.3 Construction de solutions par développement en séries de Fourier

2.3.1 Des solutions explicites dans le cas où $u_0 = \mathbf{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$

Nous avons déjà vu dans le cours "séries de Fourier, convolution" que les fonctions 2π périodiques $\mathbf{e}_k = \exp(ik \cdot)$ jouent un rôle special dans l'analyse des équations différentielles ordinaires, en particulier parce qu'elles sont valeurs propres des opérateurs de dérivations en dimension 1, c'est à dire parce que

$$\frac{d^m}{dx^m} \mathbf{e}_k = (ik)^m \mathbf{e}_k \text{ pour tous } k \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N}.$$

Cherchons maintenant à "deviner" une solution de l'équation de la chaleur (2.4.1) dans le cas spécial où la donnée initiale u_0 est de la forme

$$u_0 = \mathbf{e}_k, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

Pour ce faire, on va utiliser une méthode appelée *séparation des variables* en supposant que la solution u est de la forme

$$u(x, t) = f(t) \mathbf{e}_k(x) = f(t) \exp(ikx) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Les dérivées partielles se calculent alors comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) = \frac{df}{dt}(t) \exp(ikx) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t) = (ik)^2 f(t) \exp(ikx) = -k^2 f(t) \exp(ikx).$$

et l'équation (2.4.1) pour u devient alors

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t) \exp(ikx) = -k^2 f(t) \exp(ikx) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \\ f(0) \exp(ikx) = \exp(ikx), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En divisant par $\exp(ikx)$ ces deux équations on trouve alors une équation différentielle simple pour la fonction f , à savoir

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t) = -k^2 f(t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \\ f(0) = 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Cette équation a pour solution

$$f(t) = \exp(-k^2 t).$$

On obtient ainsi :

Proposition 2.3.1. *L'équation de la chaleur (2.4.1)-(2.1.3) ayant pour donnée initiale*

$$u(x, 0) = \exp i k x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

possède une unique solution, qui est donnée par

$$u(x, t) = \exp(-k^2 t) \exp i k x \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

2.3.2 Le cas où u_0 est un polynôme trigonométrique

Supposons maintenant que u_0 soit un polynôme trigonométrique, c'est à dire de la forme, pour un entier $N \in \mathbb{N}$

$$u_0(x) = \sum_{k=-N}^N a_k \exp i k x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (2.3.3)$$

La donnée initiale est donc une combinaison finie de fonction \mathbf{e}_k : le principe de superposition montre alors que la solution correspond à la combinaison linéaire, avec les mêmes coefficients, des solutions de l'équation de la chaleur correspondantes.

Proposition 2.3.2. *L'équation de la chaleur (2.4.1)-(2.1.3) ayant pour donnée initiale (2.3.3) possède une unique solution, qui est donnée par*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=-N}^N a_k \exp(-k^2 t) \exp i k x \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{k=-N}^N a_k \exp(-k^2 t + i k x) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Remarque 2.3.1. Rappelons que l'on a

$$a_k = \widehat{u_0}(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

2.3.3 Développement en série de Fourier des solutions

En développant la donnée initiale u_0 en série de Fourier, nous pouvons trouver une solution générale. Rappelons que l'on écrit

$$u_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_0}(k) \mathbf{e}_k,$$

formule qu'il faut interpréter au sens de la convergence quadratique, c'est à dire

$$\|u_0 - S_N(u_0)\|_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty,$$

où $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}(f)$ désigne, pour une fonction $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ donnée la série de Fourier

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) \mathbf{e}_k. \quad (2.3.5)$$

Rappelons que l'on a l'Identite de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2. \quad (2.3.6)$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Supposons que $u_0 \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors, l'équation de la chaleur (2.4.1)-(2.1.3) ayant pour donnée initiale (2.3.3) possède une unique solution u . Son développement en série de Fourier par rapport à la variable x est donné par*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_0}(k) \exp(-kt^2) \exp ikx \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_0}(k) \exp(-k^2 t + ikx). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

De plus u est C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Démonstration. Au vu de (2.3.4), la formule (2.3.7) présente un candidat naturel pour être solution. Montrons maintenant qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation de la chaleur. A cet effet, nous devons étudier les propriétés de régularité de u et commencer ainsi par établir la deuxième assertion. Montrons tout d'abord que u est régulière par rapport à la variable x .

Régularité de u par rapport à la variable d'espace x . Fixons à cet effet la variable de temps $t > 0$, et considérons la fonction $U(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable d'espace x seule définie par

$$U(t)(x) = u(x, t) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Il résulte de l'identité (2.3.7) que l'on a

$$\widehat{U(t)}(k) = \widehat{u_0}(k) \exp(-k^2 t). \quad (2.3.8)$$

En particulier, on a la majoration

$$|\widehat{U(t)}(k)| \leq \|u_0\|_2 \exp(-k^2 t), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.9)$$

Les coefficients de Fourier de $U(t)$ décroissent donc de manière exponentiel par rapport à k : en particulier, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C_m telle que

$$|\widehat{U(t)}(k)| \leq \frac{C_m}{k^{m+2}}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.10)$$

Les résultats du cours sur les séries de Fourier nous enseignent alors (voir Proposition 3.7 du polycopié) que f est de classe C^m pour tout m , et que de plus

$$\frac{d^m \widehat{U(t)}}{dk^m}(k) = (ik)^m \widehat{u_0}(k) \exp(-k^2 t). \quad (2.3.11)$$

Ceci signifie que

$$\frac{d^m U(t)}{dx^m}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^m \exp(-kt^2) \widehat{u_0}(k) \exp ikx$$

c'est à dire en revenant à la fonction u elle-même

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^m \exp(-kt^2) \widehat{u_0}(k) \exp ikx. \quad (2.3.12)$$

Régularité de u par rapport à la variable de temps t . Gelons maintenant la variable x et considérons la fonction $V(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V(x)(t) = u(x, t) \text{ pour tout } t > 0.$$

En utilisant le fait que les sommes partielles

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\sum_{k=-N}^N \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx) \right) = \sum_{k=-N}^N k^{2m} \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx)$$

convergent normalement, on en déduit que $V(x)$ est dérivable à tout ordre et que

$$\frac{d^m}{dt^m} V(x)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2m} \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx) \quad (2.3.13)$$

ce qui nous donne en revenant à la fonction u elle-même

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{2m} \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx). \quad (2.3.14)$$

Régularité sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Elle découle immédiatement des deux paragraphes précédents, en utilisant le fait que toutes les dérivées partielles sont *continues*.

La fonction u est solution de l'équation de la chaleur. En utilisant la formule (2.3.12) avec $m = 1$, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} -k^2 \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx) \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

et de même en utilisant la formule (2.3.15) avec $m = 1$ on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \exp(-k^2 t) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx) \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \quad (2.3.15)$$

En faisant, la somme, on trouve bien, comme attendu

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

La fonction u est 2π -périodique par rapport à la variable x . on doit vérifier

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

C'est immédiat au vu de la formule (2.3.7).

La fonction u vérifie la condition initial $u(\cdot, 0) = u_0$. En fait, nous allons montrer que

$$U(t) = u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \text{ dans } L^2_{2\pi}(\mathbb{R}). \quad (2.3.16)$$

On a en effet, en décomposant en séries de Fourier

$$u(\cdot, t) - u_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - \exp(-k^2 t)) \widehat{u_0}(k) \exp(ikx)$$

de sorte que

$$\widehat{u(\cdot, t) - u_0}(k) = (1 - \exp(-k^2 t)) \widehat{u_0}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

La formule de Parseval donne alors

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - \exp(-k^2 t))^2 |\widehat{u_0}(k)|^2, \quad (2.3.17)$$

d'où on déduit que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow 0^+. \quad (2.3.18)$$

Pour le voir, on introduit un nombre arbitraire $N \in \mathbb{N}^*$, et l'on décompose la somme de (2.3.17) sous la forme

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_0\|_2^2 &= \sum_{|k| \leq N} (1 - \exp(-k^2 t))^2 |\widehat{u_0}(k)|^2 + \sum_{|k| > N} (1 - \exp(-k^2 t))^2 |\widehat{u_0}(k)|^2 \\ &\leq (1 - \exp(-N^2 t))^2 \sum_{|k| \leq N} |\widehat{u_0}(k)|^2 + \sum_{|k| > N} |\widehat{u_0}(k)|^2 \\ &\leq (1 - \exp(-N^2 t))^2 \|u_0\|_2^2 + \sum_{|k| > N} |\widehat{u_0}(k)|^2. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Ensuite, on se donne $\varepsilon > 0$, et on montre qu'il existe un temps $t_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2^2 \leq \varepsilon, \text{ pour } 0 \leq T \leq t_\varepsilon. \quad (2.3.20)$$

1 ce qui entraîne immédiatement (2.3.18). Pour démontrer (2.3.20), on commence par choisir $N = N_\varepsilon$ de sorte que

$$\sum_{|k| > N} |\widehat{u_0}(k)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3.21)$$

Ensuite, on choisit $t_\varepsilon > 0$ de sorte que

$$(1 - \exp(-N_\varepsilon^2 t_\varepsilon))^2 \|u_0\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui donne, en additionnant les deux relations précédentes et en utilisant (2.3.19), la relation (2.3.18). \square

Remarque 2.3.2. On peut aussi écrire la solution sous la forme d'un produit de convolution périodique (par rapport à la variable x) à savoir

$$u(\cdot, t) = u_0 \star_{\text{per}} \Phi(\cdot, t) \text{ pour tout } t \geq 0$$

où $\Phi : \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ désigne la fonction de deux variables

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-k^2 t) \exp i k x, \quad (2.3.22)$$

qui est bien entendu 2π périodique par rapport à la variable spatiale x . On peut vérifier (exercice) que φ est régulière sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Voyons maintenant une conséquence du théorème 2.3.1.

Proposition 2.3.3. Soit u la solution (2.4.1)-(2.1.3) ayant pour donnée initiale (2.3.3). On a

$$u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{u}_0(0), \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty, \quad (2.3.23)$$

uniformément sur \mathbb{R} .

Démonstration. On a par développement de Fourier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t > 0$

$$u(x, t) - \widehat{u}_0(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \widehat{u}_0(k) \exp(-k^2 t) \exp i k x,$$

de sorte que par l'inégalité de Cauchy Schwarz pour les suites, on obtient

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \widehat{u}_0(0)| &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \exp(-2k^2 t) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{u}_0(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \exp(-2k^2 t) \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0\|_2, \end{aligned}$$

où on a aussi utilisé l'identité de Parseval pour u_0 . Le premier terme du membre de droite de cette inégalité correspond à la somme d'une suite géométrique. On a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \exp(-2k^2 t) = \exp(-2t) \left(\frac{1}{1 - \exp(-2t)} \right),$$

de sorte que

$$|u(x, t) - \widehat{u}_0(0)| \leq \exp(-t) \left(\frac{\|u_0\|_2}{\sqrt{1 - \exp(-2t)}} \right).$$

Cette inégalité entraîne le résultat, et montre même que la convergence est exponentielle en t . \square

2.4 Équation de la chaleur périodique avec terme source

On se donne dans cette partie une fonction $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, que l'on suppose périodique par rapport à la variable d'espace, c'est à dire telle que

$$f(x + 2\pi, t) = f(x, t) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in [0, +\infty[.$$

On cherche une solution $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, elle aussi 2π périodique par rapport à la variable d'espace x , solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Ici la condition initiale est supposée nulle, on parle alors de conditions initiales homogènes.

2.4.1 Unicité

L'unicité des solutions résulte de notre étude du problème sans terme source. Supposons en effet que nous ayons deux solutions u_1 et u_2 et notons alors $w = u_2 - u_1$ leur différence. Cette fonction est 2π périodique par rapport à la variable spatiale x et vérifie l'équation de la chaleur homogène avec conditions initiale homogène, c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = 0 \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ w(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

la fonction $w = 0$ est solution du problème précédent. Or nous avons vu que ce problème a une solution unique, on a donc $w = 0$, c'est à dire $u_1 = u_2$.

2.4.2 Existence de solutions

On va utiliser de nous la méthode du développement en série de Fourier par rapport à la variable d'espace x pour trouver des solutions du problème (2.4.1). On fixe, comme dans la partie précédente la variable de temps $t > 0$, et on considère les fonction $U(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable d'espace x seule définies par

$$U(t)(x) = u(x, t) \text{ et } F(t)(x) = f(x, t) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que l'on a comme précédemment

$$\frac{d}{dt}U(t)(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \text{ et } \frac{d^2 U(t)}{dx^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Développons les fonctions $U(t)$ et $F(t)$, qui sont 2π périodiques, en séries de Fourier : ceci nous donne

$$\begin{cases} U(t)(x) = u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{U(t)}(k) \exp i k x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u(\cdot, t)}(k) \exp i k x \\ F(t)(x) = f(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{F(t)}(k) \exp i k x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f(\cdot, t)}(k) \exp i k x, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \widehat{U(t)}(k) = \widehat{u(\cdot, t)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp -i k x dx \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \text{ et} \\ \widehat{F(t)}(k) = \widehat{f(\cdot, t)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t) \exp -i k x dx \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

En dérivant par rapport à t on trouve, au moins formellement

$$\frac{d}{dt}(\widehat{U(t)}(k)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \exp -i k x dx$$

alors que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \exp -i k x dx = (-i k)^2 \widehat{U(t)}(k).$$

En faisant la différence, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\widehat{U(t)}(k)) + k^2 \widehat{U(t)}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t) \exp(-ikx) dx \\ &= \widehat{F(t)}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle, avec condition initiale pour les coefficients de Fourier $\widehat{U(t)}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\widehat{U(t)}(k)) + k^2 \widehat{U(t)}(k) = \widehat{F(t)}(k) \text{ pour tout } t \geq 0, k \in \mathbb{Z} \\ \widehat{U(0)}(k) = 0. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Cette équation se résout en utilisant la méthode de variation de la constante. On écrit

$$\widehat{U(t)}(k) = C_k(t) \exp(-k^2 t),$$

ce qui, après calculs donne l'identité

$$C'_k(t) = \exp(k^2 t) \widehat{F(t)}(k), \text{ c'est à dire } C_k(t) = C_k(0) \int_0^t \exp(k^2 s) \widehat{F(s)}(k) ds.$$

Il en résulte

$$\widehat{U(t)}(k) = \int_0^t \exp(-k^2(t-s)) \widehat{F(s)}(k) ds \quad (2.4.4)$$

On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *L'unique solution du problème (2.4.1) s'écrit*

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_0^t \exp(-k^2(t-s)) \widehat{F(s)}(k) ds \right] \exp(ikx).$$

Remarque 2.4.1. On peut de nouveau écrire la solution sous la forme d'un produit de convolution périodique (par rapport à la variable x) à savoir

$$u(\cdot, t) = u_0 \star_{\text{per}} \left(\int_0^t \Phi(\cdot, t-s) ds \right) \text{ pour tout } t \geq 0$$

où $\Phi : \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ désigne la fonction définie en

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-k^2 t) \exp(ikx), \quad (2.4.5)$$

qui est bien entendu 2π périodique par rapport à la variable spatiale x .

2.5 Équation de la chaleur périodique avec terme source et donnée initiale non nulle

Considérons maintenant le problème général :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

En décomposant le problème (2.5.1) sous la forme

$$u = v + w$$

où v désigne la solution du problème (2.4.1) et w la solution du problème (2.4.1) on obtient

Proposition 2.5.1. *L'unique solution du problème (2.5.1) s'écrit*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-kt^2) \widehat{u_0}(k) \exp ikx \\ & + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_0^t \exp(-k^2(t-s)) \widehat{F}(s)(k) ds \right] \exp ikx. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Exercices

Exercice I

On considère l'équation de transport

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Chapitre 3

L'intégrale de Fourier

3.1 Introduction

La décomposition en séries de Fourier que nous avons vu dans la partie précédente fournit une méthode rapide pour trouver des solutions à certaines équations aux dérivées partielles. Cependant, elle est limitée aux données qui sont 2π -périodiques en espace. Comment doit-on faire pour adapter la méthode à des données plus générales ? La méthode que nous verrons ici repose sur la notion d'*intégrale de Fourier*. Il s'agit d'une décomposition similaire aux séries de Fourier, mais maintenant avec un spectre de fréquence qui couvre \mathbb{R} tout entier. En fait, on peut déduire cette théorie de celle des séries de Fourier en faisant tendre la période vers $+\infty$, comme nous allons le voir ci-dessous.

3.2 Théorie de Fourier pour les fonctions L -périodiques

3.2.1 Décomposition des fonctions L -périodiques

Soit $L > 0$ considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période L , c'est à dire telle que

$$f(x + L) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.2.1)$$

Considérons maintenant la fonction $F_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ déduite de f en posant

$$F_L(x) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

il résulte de cette définition que

$$F_L(x + 2\pi) = f\left(L \frac{x + 2\pi}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi} + L\right) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) = F_L(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de sorte que la fonction F est 2π -périodique sur \mathbb{R} . Si on suppose de plus que f est assez régulière (par exemple de carré intégrable sur une période), car on peut écrire la décomposition de Fourier

$$F_L(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{F}_L(k) \exp(ikx), \quad (3.2.2)$$

où pour $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{F}_L(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_L(x) \exp(-ikx) dx. \quad (3.2.3)$$

Récrivons ces expressions en revenant à la fonction f . On a tout d'abord, en inversant l'identité (3.2.1)

$$f(x) = F_L\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant cette expression, la décomposition (3.2.2) donne alors la décomposition

$$f(x) = \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c^L(k) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.4)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} c^L(k) &= L\widehat{F_L}(k) = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_L(x) \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) \exp(-ikx) dx. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, faisons le changement de variable $s = \frac{Lx}{2\pi}$. Il vient

$$\begin{aligned} c^L(k) &= \int_0^L f(s) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{L} s\right) ds \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{L} s\right) ds, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

la deuxième identité provenant du fait que l'intégrande est L -périodique. Pour interpréter ces coefficients, il est utile d'introduire la fonction $\widehat{f}^L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}^L(\xi) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \exp(-i\xi s) ds \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.2.6)$$

de sorte que

$$c^L(k) = \widehat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.7)$$

On a donc

Proposition 3.2.1. *Soit f une fonction L périodique régulière. On a l'identité*

$$f(x) = \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (3.2.8)$$

où la fonction \widehat{f}^L est donnée par (3.2.1).

3.2.2 Les relations de Parseval

L'égalité de Parseval pour la fonction 2π -périodique F_L s'écrivent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{F_L}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_L(x)|^2 dx.$$

Exprimons cette relation à l'aide des coefficients $c^L(k)$ et de la fonction f . On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_L(k)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\frac{2\pi x}{L})|^2 dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds\end{aligned}$$

Ainsi, on a la relation

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_L(k)|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds. \quad (3.2.9)$$

et donc

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}^L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \right|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds. \quad (3.2.10)$$

3.3 La transformée de Fourier des fonctions sur \mathbb{R}

3.3.1 Définition de la transformée de Fourier

Donnons tout d'abord la définition de la Transformée de Fourier d'une fonction sur \mathbb{R} sous des hypothèses assez générales. La définition (3.2.1) suggère la définition suivante :

Définition 1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} intégrable, c'est à dire telle que

$$\|f\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

On appelle transformée de Fourier de f , et on note \widehat{f} la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.3.1)$$

On note aussi souvent

$$\widehat{f} = \mathcal{F}(f), \text{ pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}). \quad (3.3.2)$$

On vérifie aisément que l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est linéaire, car

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g) \text{ pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ et } f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

On a comme première propriété :

Proposition 3.3.1. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} . la fonction \widehat{f} est continue et bornée sur \mathbb{R} . On a la majoration

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1. \quad (3.3.3)$$

Démonstration. Montrons d'abord que \widehat{f} est bornée. On a par définition, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1,\end{aligned}$$

ce qui donne (3.3.3).

Pour voir que \widehat{f} est continue, on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit ξ_0 donnée dans \mathbb{R} . Il faut montrer que $\widehat{f}(\xi) \rightarrow \widehat{f}(\xi_0)$ lorsque $\xi \rightarrow \xi_0$. Considérons à cet effet la famille de fonction $h_\xi(\cdot)_{\xi \in \mathbb{R}}$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$h_\xi(x) = f(x) \exp(-i\xi x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

La famille $h_\xi(\cdot)_{\xi \in \mathbb{R}}$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, à savoir

$$\begin{cases} |h_\xi(x)| \leq |f(x)| \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \text{ et pour } \xi \in \mathbb{R} \text{ (domination)} \\ h_\xi(x) \rightarrow h_{\xi_0}(x) \text{ lorsque } \xi \rightarrow \xi_0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ (convergence simple pour tout } x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

On a donc, par le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}} h_\xi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_{\xi_0}(x) dx \text{ lorsque } \xi \rightarrow \xi_0,$$

ce qui est la propriété demandée. □

Rappelons que l'on note $C_b^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction continues bornées sur \mathbb{R} . On peut réinterpréter les résultats précédents en disant que l'application \mathcal{F} est *linéaire et continue* de $L^1(\mathbb{R})$ vers $C_b(\mathbb{R})$.

3.3.2 Propriétés de la Transformée de Fourier des fonctions à support compact

Nous considérons de nouveau dans cette partie une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ régulière à support compact, c'est à dire telle qu'il existe $A > 0$ tel que

$$f(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]. \quad (3.3.4)$$

Rappelons que l'on note $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions régulières à support compact. On a

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

car, si f est à support dans $[-A, A]$, alors on a

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-A}^A |f(x)| dx \leq 2A \|f\|_\infty.$$

Il résulte alors de la Proposition 3.3.1 que la fonction \widehat{f} est continue et bornée.

Le résultat suivant donne un premier lien entre la fonction f et la fonction \widehat{f} :

Théorème 3.3.1. *Soit $L > 2A$. Alors on a les relations suivantes :*

$$f(x) = \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right), \text{ pour tout } x \in [-A, A]. \quad (3.3.5)$$

et

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \right|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(s)|^2 ds. \quad (3.3.6)$$

Démonstration. On commence par périodiser la restriction de la fonction f restreinte à l'intervalle $[-A, A]$. On définit ainsi la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et L périodique en posant

$$g(x + kL) = f(x) \text{ pour tout } x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \text{ et } k \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.7)$$

de sorte que g coïncide avec f sur l'intervalle $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, qui contient l'intervalle $[-A, A]$ en dehors duquel la fonction f prend pour valeur 0. On a donc, en vertu de la Proposition 3.2.1

$$g(x) = \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}^L \left(\frac{2\pi k}{L} \right) \exp \left(i \frac{2\pi k}{L} x \right) \right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (3.3.8)$$

où, par définition

$$\begin{aligned} \widehat{g}^L(\xi) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(s) \exp(-i\xi s) ds \text{ pour } \xi \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp(-i\xi s) ds \\ &= \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En combinant (3.3.9), (3.3.8) et (3.3.7) on obtient (3.3.5). L'identité (3.3.6) se démontre en partant de l'identité de Parseval pour la fonction L -périodique g , puis en utilisant de nouveau (3.3.9). \square

En ce qui concerne la dérivation, on a les propriétés suivantes de la transformée de Fourier \widehat{f} :

Proposition 3.3.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ à support compact. Alors la fonction f est de classe C^∞ et vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\ &= \widehat{(-ix)^k f(\cdot)}(\xi). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Par ailleurs, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.3.11)$$

Démonstration. La relation (3.3.10) découle directement du théorème de dérivation sous le signe somme des intégrales dépendant d'un paramètre, en l'occurrence la variable ξ ici.

La démonstration de l'identité (3.3.11) résulte d'une intégration par parties. Considérons tout d'abord le cas $k = 1$, le cas général pouvant s'en déduire par récurrence. On a, par définition de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x) \exp(-i\xi x) dx \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-A}^A \frac{df}{dx}(x) \exp(-i\xi x) dx \\ &= \int_{-A}^A i\xi f(x) \exp(-i\xi x) dx + [f(x) \exp(-i\xi x)]_{-A}^A \\ &= i\xi \int_{-A}^A f(x) \exp(-i\xi x) dx \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi), \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

ce qui donne bien le résultat annoncé. Au cours de ce calcul, on a utilisé, à la quatrième ligne, le fait que $f(A) = f(-A) = 0$. \square

Remarque 3.3.1. Les résultats que nous venons de voir reposent sur le théorème de dérivation sous le signe somme que nous rappelons ici.

Théorème 3.3.2 (Dérivation sous le signe somme). Soit $f : \mathcal{U} \times I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable, où \mathcal{U} désigne un ouvert de \mathbb{R}^N et I un intervalle de \mathbb{R} . On fait les hypothèses suivantes sur f :

- **Intégrabilité** : pour presque tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur \mathcal{U} .
- **dérivabilité** : pour presque tout $x \in \mathcal{U}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur I , de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$.
- **Domination de la dérivée partielle par rapport au temps** : Il existe une fonction positive $h \in L^1(\mathcal{U})$ telle que, pour presque

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x) \text{ pour tout } t \in I, \text{ pour presque tout } x \in \mathcal{U},$$

Alors la fonction F définie sur I par $F(t) = \int_{\mathcal{U}} f(x, t) dx$, pour tout $t \in I$ est bien définie et dérivable sur I , de dérivé F' donnée par

$$F'(t) = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx, \text{ pour tout } t \in I$$

Commentaire. Nous avons utilisé la même notation, à savoir \hat{f} pour désigner deux objets mathématiques différents, à savoir :

- Les séries de Fourier, c'est à dire la suite des coefficients $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Cette notion n'a de sens que pour des fonctions périodiques de période 2π .
- la transformée de Fourier \hat{f} , qui est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et qui a un sens, pour l'instant, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à support compact.

Nous étendrons un peu plus loin le domaine de définition de la transformée de Fourier. Nous voyons cependant dès à présent que les deux définitions portent sur des fonctions de nature différentes, ce qui évite pour l'instant les risques de confusion. Notons cependant les similitudes, en particulier au niveau des formules associées aux dérivées.

Une conséquence importante de la formule (3.3.11) est la suivante :

Corollaire 3.3.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ à support compact. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m > 0$ dépendant uniquement de m et de f telle que l'on ait la majoration suivante de la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier \hat{f}

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C_m}{|\xi|^m}, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.3.13)$$

De manière plus générale, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(k, m) > 0$ dépendant uniquement de m et de f telle que l'on ait la majoration des dérivées

$$\left| \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k}(\xi) \right| \leq \frac{C(m, k)}{|\xi|^m}, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.3.14)$$

Cette majoration montre que la transformée de Fourier converge très rapidement vers zéro lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. On déduit de la formule (3.3.11) que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|(i\xi)^m \widehat{f}(\xi)| = \left| \frac{\widehat{d^m f}}{d\xi^m} \right| \leq 2A \left\| \frac{d^m f}{dx^m} \right\|_\infty.$$

Il en résulte que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{2A}{|\xi|^m} \left\| \frac{d^m f}{dx^m} \right\|_\infty,$$

ce qui donne (3.3.13). Pour (3.3.14), on utilise la relation $\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \widehat{(-ix)^k f(\cdot)}$, et on observe que la fonction $x \mapsto (-ix)^k f(x)$ est une fonction régulière à support compact dans $[-A, A]$ \square

Corollaire 3.3.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ à support compact. Alors pour tout on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ tout $\ell \in \mathbb{N}$, et tout $p \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}} (|\xi| + 1)^\ell \left| \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) \right|^p d\xi < +\infty.$$

Le résultat est une conséquence directe du Corollaire 3.3.1 et est laissé en exercice.

3.3.3 La formule d'inversion de Fourier

Le résultat qui suit est le résultat fondamental de la théorie.

Théorème 3.3.3. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a l'identité, appelé formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.15)$$

On parle aussi souvent de formule de *recomposition spectrale* pour désigner la formule d'inversion de Fourier (3.3.15), les facteurs de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ désignant les coefficients spectraux. L'idée générale est que l'on a décomposé le *signal* f sous forme de superposition de signaux sinusoidaux $x \mapsto \exp(ix\xi)$, où ξ parcourt \mathbb{R} tout entier, pondéré par un coefficient $\widehat{f}(\xi)$.

Remarque 3.3.2. Le membre de droite de (3.3.15) est bien défini grâce au Corollaire 3.3.2 (pour $\ell = 0, k = 0$ et $p = 1$), qui montre que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Commentaire. Si l'on compare les formule (3.3.1) et (3.3.15) on voit que les variables x et ξ , jouent, au signe près des rôles symétriques. En particulier, la formule (3.3.15) permet de reconstituer intégralement la fonction f connaissant sa transformée de Fourier \widehat{f} .

Par ailleurs, alors que les signaux 2π -périodiques se décomposaient sous forme d'une série de multiples de signaux sinusoidaux $\exp(-ik\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}$, on retrouve un phénomène assez similaire pour les fonctions à support compact : elle apparaissent comme superposition de fonction sinusoidales $\exp(-ik\xi x)$, $\xi \in \mathbb{R}$ avec deux différences importantes :

- Les valeurs de ξ parcourt \mathbb{R} tout entier, au lieu de \mathbb{Z}
- la série est remplacée par une intégrale.

Démonstration du Théorème 3.3.4. On part de la formule (3.3.5) et on fait tendre la période L vers $+\infty$. Nous allons en effet montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ donné

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\xi) d\xi, \quad (3.3.16)$$

ce qui donne bien le résultat, en vertu de l'identité (3.3.5), pour tout $L > 2A$.

Pour démontrer (3.3.16), on observe que le membre de gauche de la formule correspond à une somme de Riemann pour la fonction φ_x définie par $\varphi_x(\xi) = \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Posons à cet effet $h = \frac{2\pi}{L}$, de sorte que $h \rightarrow 0$ lorsque $L \rightarrow +\infty$ et

$$\xi_k^h = kh, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors pour tout $L > 0$

$$\frac{1}{L} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{L} x\right) \right) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_x(\xi_k^h),$$

et on reconnaît bien une somme de Riemann pour la fonction régulière φ_x au second membre. On peut alors utiliser la preuve classique de convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de la fonction, qu'il faut néanmoins adapter car ici on travaille sur tout \mathbb{R} . Pour contrôler les "termes à l'infini", on utilise les résultats de la Proposition 3.3.2, qui nous donnent, pour une constante $C > 0$ dépendant de f

$$\begin{cases} |\varphi'_x(\xi)| \leq C(|x| + 1) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \\ |\varphi_x(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^2}, \end{cases} \quad (3.3.17)$$

majorations qui vont nous permettre de démontrer (3.3.16). Pour ce faire, on se donne $\varepsilon > 0$, et on montre qu'il existe L_ε tel que si $L \geq L_\varepsilon$ alors on a

$$\left| h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\mathbb{R}} \varphi_x(\xi) d\xi \right| \leq \varepsilon. \quad (3.3.18)$$

Preuve de (3.3.18). Il résulte de la deuxième majoration de (3.3.17) qu'il existe une constante $B > 0$, indépendante de h telle que

$$\begin{cases} \int_{|\xi| \geq B} |\varphi_x(\xi)| d\xi \leq C \int_{|\xi| \geq B} \frac{1}{\xi^2} d\xi \leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ h \sum_{|\xi_k^h| \geq B} |\varphi_x(\xi_k^h)| \leq Ch \sum_{|kh| \geq B} \frac{1}{|k|^2 h^2} = \frac{C}{h} \sum_{|kh| \geq B} \frac{1}{|k|^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \end{cases} \quad (3.3.19)$$

de sorte que

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| \geq 2B} \varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\mathbb{R} \setminus [B_1^h, B_2^h]} \varphi_x(\xi) d\xi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.3.20)$$

où

$$\begin{cases} B_1^h = \sup\{kh, kh \geq -2B, k \in \mathbb{Z}\} < 0, \\ B_2^h = \inf\{(k+1)h, kh \leq 2B, k \in \mathbb{Z}\} > 0. \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Par ailleurs, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \left| h\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} \varphi_x(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} (\varphi_x(\xi) - \varphi_x(\xi_k^h)) d\xi \right| \\ &\leq \int_{\xi_k^h}^{\xi_{k+1}^h} |\varphi_x(\xi) - \varphi_x(\xi_k^h)| d\xi \\ &\leq Ch^2(|x| + 1), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que, par le théorème des accroissements finis, on a pour $\xi \in [\xi_k^h, \xi_{k+1}^h]$

$$|\varphi_x(\xi) - \varphi_x(\xi_k^h)| \leq \|\varphi'_x\|_\infty |\xi - \xi_k^h| \leq Ch(|x| + 1).$$

En additionnant, il vient

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq Ch^2(|x| + 1) \cdot N_h, \quad (3.3.22)$$

où N_h désigne le nombre d'entiers $k \in \mathbb{Z}$, tels que $-2B < kh < 2B + h$. On vérifie facilement que

$$N_h \leq \frac{4B}{h} + 1$$

de sorte que (3.3.22) donne

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq Ch^2(|x| + 1) \cdot \left(\frac{4B}{h} + 1\right) \leq C'h = \frac{2\pi C'}{L}, \quad (3.3.23)$$

Où $C' > 0$ est une constante dépendant de x . On choisit $L_\varepsilon > 0$ assez grand pour que

$$\frac{2\pi C'}{L_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de sorte que si $L \geq L_\varepsilon$, on a

$$\left| h \sum_{|\xi_k^h| < 2B} |\varphi_x(\xi_k^h) - \int_{B_1^h}^{B_2^h} \varphi_x(\xi) d\xi| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.3.24)$$

En combinant (3.3.24) et (3.3.20), on obtient (3.3.18), ce qui termine la preuve. \square

Remarque 3.3.3. Le théorème 3.3.4 montre en particulier que si $\hat{f} = \mathcal{F}(f) = 0$, alors nécessairement $f = 0$. En d'autres termes, le noyau de \mathcal{F} est réduit au singleton nul, ou encore \mathcal{F} est injective.

Remarque 3.3.4. Il résulte de la formule d'inversion de Fourier que l'on a, et toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x), \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

soit

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f(-\cdot).$$

3.3.4 Le théorème de Parseval

Théorème 3.3.4. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a l'identité, appelé formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.26)$$

Idée de la démonstration. La preuve est parallèle à la preuve du théorème 3.3.4 : On part de l'identité (3.3.6) pour $L \geq 2A$ et on s'aperçoit que le membre de gauche correspond à une somme de Riemann pour le membre de droite de (3.3.26). On fait ensuite tendre L vers $+\infty$ pour obtenir le résultat. Les détails sont laissés en exercice. \square

On peut interpréter ce résultat à l'aide de la norme $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons que, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction définie sur \mathbb{R} de module au carré intégrable, alors

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.27)$$

On peut donc écrire l'identité (3.3.26) sous la forme

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|_2, \text{ pour tout } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

ou encore

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \right\|_2 = \|f\|_2, \text{ pour tout } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \quad (3.3.28)$$

Ceci montre que l'application linéaire $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}$ considérée comme application entre l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ à valeurs dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme habituelle $\|\cdot\|_2$ est une *isométrie*.

3.4 Transformée de Fourier et convolution

Nous considérons dans cette partie deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrables sur \mathbb{R} , c'est à dire telles que

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < +\infty.$$

Nous avons vu, dans le cours "Convolution, séries de Fourier" que la convolée $f \star g$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} et que

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Rappelons au passage que la convolée $f \star g$ est définie par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy, \quad (3.4.1)$$

et que cette expression est définie pour presque tout x grâce au Théorème de Fubini. On a

Théorème 3.4.1. Soit f et g deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Démonstration. On a pour $\xi \in \mathbb{R}$, grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) \exp(-i\xi x) dx \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(y) g(x-y) \exp(-i\xi x) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [f(y) \exp(-i\xi y)] [g(x-y) \exp(-i\xi(x-y))] dy dx\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $(x, y) \mapsto (y, u)$ où $u = x - y$, dont la valeur absolue du jacobien vaut 1. On obtient

$$\begin{aligned}\widehat{f \star g}(\xi) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [f(y) \exp(-i\xi y)] [g(u) \exp(-i\xi u)] dx du \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-i\xi y) dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) \exp(-i\xi u) du \right) \\ &= \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

Remarque 3.4.1. Introduisons l'opérateur "Fourier inverse" \mathcal{F}^{-1} défini par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(ix\xi) d\xi.$$

Le même calcul montre que

$$\mathcal{F}^{-1}(f \star g) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g). \quad (3.4.2)$$

3.5 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

3.5.1 Définition abstraite

Jusqu'à présent nous avons défini la transformée de Fourier pour des fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$. Nous allons voir comment la définition s'étend aux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, où

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

en utilisant un argument abstrait.

Théorème 3.5.1. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ on ait*

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}.$$

On a de plus l'identité de Parseval

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2. \quad (3.5.1)$$

Démonstration. La preuve repose sur un argument classique de *prolongement d'application linéaires définies sur un sous-espace dense*. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pour définir $\mathcal{F}(f)$, on part d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est à dire

$$\|f - f_n\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Rappelons qu'un résultat classique d'analyse des fonctions affirme qu'une telle suite existe toujours. Considérons maintenant la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cette suite est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ car, pour tous entiers $m \geq n$ on a

$$\|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_m - f_n)\|_2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet, la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite $g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que cette limite g est indépendante du choix de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. A cet effet, considérons une autre suite $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Soit alors \tilde{g} la limite de la suite $(\mathcal{F}(\tilde{f}_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a tout d'abord

$$\|\tilde{f}_n - f_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \|\tilde{g} - g\|_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}(\tilde{f}_n) - \mathcal{F}(f_n)\|_2 \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{f}_n - f_n\|_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire que $\tilde{g} = g$. Comme g ne dépend pas du choix de la suite, on peut alors écrire

$$g = \mathcal{F}(f).$$

On vérifie aisément que l'application $f \rightarrow \mathcal{F}(f)$ est linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour conclure, il reste à établir (3.5.1) : ceci est une conséquence immédiate du fait que

$$\|\mathcal{F}(f_n)\|_2 = 2\pi \|f_n\|_2 \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$

puis d'un passage à la limite $n \rightarrow +\infty$. □

Remarque 3.5.1. Nous utiliserons souvent, comme auparavant, la notation

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f} \text{ pour } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En revanche, la formule (3.3.1) n'a plus de sens pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, car le membre de droite n'est plus forcément intégrable.

Par polarisation de l'identité (3.5.1), on obtient

Proposition 3.5.1. Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \quad (3.5.2)$$

3.5.2 Formule d'inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

L'application \mathcal{F} étant linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, on peut considérer l'application $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. On a alors

Théorème 3.5.2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a la formule

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi \check{f}, \quad (3.5.3)$$

où la fonction \check{f} , est définie par

$$\check{f}(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.5.4)$$

Démonstration. Nous avons déjà établi cette formule pour des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans la Remarque . Il suffit ensuite de raisonner par densité $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, comme nous l'avons fait plus haut. \square

Le résultat précédent montre que l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est bijective.

Corollaire 3.5.1. *L'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est bijective et on a*

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f}) \text{ pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (3.5.5)$$

où \check{f} est définie dans (3.5.4).

Démonstration. Montrons tout d'abord que \mathcal{F} est injective. Comme \mathcal{F} est linéaire, il suffit de vérifier que $\text{Ker } \mathcal{F} = \{0\}$. Soit $f \in \text{Ker } \mathcal{F}$, c'est à dire tel que $\mathcal{F}(f) = 0$. Comme

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = 2\pi \|f\|_2,$$

on en déduit que $\|f\|_2 = 0$, c'est à dire que $f = 0$. Ceci établit l'injectivité.

Passons maintenant à la surjectivité. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Appliquons la formule (3.5.3) à la fonction \check{f} définie par $\check{f}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\check{f}) = 2\pi \check{f}(-\cdot) = 2\pi f,$$

c'est à dire

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f})\right) = f.$$

Ainsi $g \equiv \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f})$ est un antécédent de f par \mathcal{F} : l'application est donc surjective. Comme elle est injective, elle est bijective, et $g = \mathcal{F}^{-1}(f)$, ce qui donne bien la formule (3.5.5). \square

Remarque 3.5.2. On pourra vérifier les formules suivantes, on utilisant des changements de variables simples dans les définitions correspondantes

$$\check{\check{f}} = f, \mathcal{F}(\check{f}) = \check{\mathcal{F}(f)} \text{ et } \check{f} \star \check{g} = \check{f \star g}. \quad (3.5.6)$$

3.5.3 Calculs pratiques

Pour définir \mathcal{F} dans $L^2(\mathbb{R})$, nous avons utilisé un argument abstrait de densité. Dans ces conditions, comment calculer la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$? Une solution est d'utiliser une approximation. On peut par exemple utiliser le Lemme suivant :

Lemme 3.5.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle que $f_n \rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, on a*

$$\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

avec

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \exp(-ix\xi) d\xi \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}.$$

la preuve est laissée en exercice.

On peut utiliser le Lemme avec la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \mathbf{1}_{[-n, n]} f$, c'est à dire

$$f_n(x) = f(x) \text{ pour } x \in [-n, n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } |x| > n.$$

On a alors

$$\widehat{f_n}(\xi) = \int_{-n}^n f(x) \exp i x \xi dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R},$$

et

$$\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

3.5.4 Transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions

Pour déterminer la transformée de Fourier d'un produit, nous allons partir de la formule de la transformée du produit de convolution de deux fonctions (voir Théorème 3.4.1) et utiliser la transformée de Fourier inverse. Il s'avère qu'un cadre possible dans lequel toutes les formules ont un sens est donné par l'espace de fonctions $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.5.3. Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ telles que \widehat{f} et \widehat{g} appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$. Alors fg appartient à $L^1(\mathbb{R})$, et l'on a

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} \star \widehat{g}. \quad (3.5.7)$$

Démonstration. Le fait que fg appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy Schwartz : en effet, on a

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |fg| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Par ailleurs, nous avons vu que la transformée de Fourier d'une fonction de L^2 appartient à L^2 , celle d'une fonction de L^1 appartient à L^∞ de sorte que $\widehat{f} \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $\widehat{g} \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ (resp. $g \in L^2(\mathbb{R})$), il en est de même de \check{f} (resp. \check{g}), et on peut écrire la formule d'inversion de Fourier à savoir

$$f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\check{f}) \text{ et } g = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\check{g}).$$

On a donc

$$f \cdot g = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f})) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{g})) \quad (3.5.8)$$

Par hypothèse $\mathcal{F}(\check{f})$ et $\mathcal{F}(\check{g})$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$: on peut donc invoquer le théorème 3.4.1 pour écrire

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f})) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{g})) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g})). \quad (3.5.9)$$

En combinant (3.5.8) et (3.5.9), on obtient

$$f \cdot g = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g})).$$

Les deux membres de cette égalité appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer la transformée de Fourier \mathcal{F} , ce qui donne

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g})).$$

Comme par hypothèse $\mathcal{F}(\check{f})$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{F}(\check{g})$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, car $\check{g} \in L^2(\mathbb{R})$, le produit de convolution $\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g})$ appartient à L^2 , et on peut donc lui appliquer la formule (3.5.3) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g})) &= 2\pi(\mathcal{F}(\check{f}) \star \mathcal{F}(\check{g}))(-\cdot) \\ &= 2\pi(\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)),\end{aligned}\tag{3.5.10}$$

où on a utilisé les relations (3.5.6) pour la dernière identité. Ceci donne le résultat. \square

Remarque 3.5.3. l'espace vectoriel V des fonctions vérifiant les hypothèses du Théorème 3.5.3

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}.\tag{3.5.11}$$

est non vide. On vérifie en effet que $\mathbb{C}_c(\mathbb{R}) \subset V$, et de même que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui sera défini plus loin, est lui aussi inclus dans V . Notons au passage que toutes les fonctions de V sont continues.

Remarque 3.5.4. On démontre de même, et sous les mêmes hypothèses sur f et g que

$$\mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = \mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g).\tag{3.5.12}$$

C'est d'ailleurs cette dernière identité que nous utiliserons dans plusieurs applications ultérieures, où nous aboutirons souvent à des relations de la forme

$$\widehat{u} = g \cdot \widehat{f}.\tag{3.5.13}$$

Pour recomposer u , on obtient donc, en appliquant l'opérateur \mathcal{F}^{-1} aux deux membres de cette égalité

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(g) \star \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}).$$

Comme $u = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$ et $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$, on obtient donc

$$u = \mathcal{F}^{-1}(g) \star f.$$

Donnons un exemple. Pour f donné dans V (défini en (3.5.11)), cherchons $u \in V$ tel que

$$-u'' + u = f.$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on aboutit à la relation $(\xi^2 + 1)\widehat{u} = \widehat{f}$, qui donne

$$\widehat{u} = \frac{1}{1 + \xi^2} \widehat{f},$$

qui est bien du type (3.5.13), avec $g(s) = \frac{1}{1 + s^2}$. On obtient donc

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + s^2}\right) \star f.$$

3.6 Transformée de Fourier et régularité

Nous avons déjà vu, dans le cas des fonctions à support compact, que, plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Nous allons voir dans cette partie une forme de réciproque.

Proposition 3.6.1. *Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on ait*

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^k |\widehat{f}(\xi)| d\xi < +\infty. \quad (3.6.1)$$

alors f est de classe C^k , et on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \leq k$

$$\frac{d^m f}{dx^m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi. \quad (3.6.2)$$

Démonstration. La preuve repose sur la formule d'inversion de Fourier combinée avec un argument d'approximation. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-n,n]} \widehat{f})(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on vérifie que la fonction g_n est de classe C^∞ , et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{d^m f_n}{dx^m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Par les résultats du Chapitre 3.5, on voit que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.6.3)$$

Par ailleurs, il résulte de l'hypothèse (3.6.1) que, pour $k = 0, \dots, m$, les fonctions g_0, g_1, \dots, g_k définies par

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^m \widehat{f}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi \quad (3.6.4)$$

sont continues sur \mathbb{R} . De plus, on a pour tout entier $0 \leq m \leq k$, on a

$$\frac{d^m f_n}{dx^m} \rightarrow g_m \text{ uniformément sur } \mathbb{R} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.6.5)$$

En intégrant la relation (3.6.5), on vérifie que pour $1 \leq m \leq k$, on a

$$g_m = g'_{m-1}. \quad (3.6.6)$$

En combinant (3.6.3) et (3.6.5) pour $m = 0$, on obtient $f = g_0$. L'identité (3.6.6) montre alors que f est bien de classe C^k , la formule (3.6.2) découle alors de (3.6.4). \square

3.7 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz

Nous avons vu que l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R} n'était pas stable par transformée de Fourier, c'est à dire que la transformée de Fourier d'une fonction régulière à support compact est certes régulière, mais en général n'est pas à support compact. Pour avoir une classe de fonction régulière stable par transformée de Fourier, et donc dans laquelle elle est inversible, on doit élargir quelque peu la définition. Commençons par :

Définition 2. On dit d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ qu'elle est à décroissance rapide, si et seulement si, pour tout $k, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^k \left| \frac{d^m f}{dx^m}(x) \right| \right\} < +\infty.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à décroissance rapide. Il est appelé espace de Schwartz.

Il découle immédiatement de cette définition que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, les résultats du Corollaire 3.3.1 montrent que

$$\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On vérifie par ailleurs aisément, que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$. De sorte que l'on peut définir $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Proposition 3.7.1. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

L'application \mathcal{F} définit donc une application linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même. Cette application est inversible, d'inverse donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f}), \text{ où } \check{f}(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

EXERCICES

Exercice II

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on considère la fonction $\tau_a(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tau_a(f)(x) = f(x - a)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que $\tau_a(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{\tau_a(f)} = \exp ia\hat{f}$.
- 2) Calculer $\tau_a(\hat{f})$.

Exercice III

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que si f est paire, alors $\widehat{f}(\xi)$ est réel pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- 2) Montrer que si f est impaire, alors $\widehat{f}(\xi)$ est imaginaire pure pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- 3) Soit $R > 0$. On pose $f_R(x) = f(Rx)$. Comparer \widehat{f} et $\widehat{f_R}$.

Exercice IV

Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que \widehat{f} est analytique, c'est à dire qu'on peut la développer en séries entières près de tout point $\xi_0 \in \mathbb{R}$.
- 2) En déduire que \widehat{f} est à support compact si et seulement si f est nulle.

Exercice V

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1$, si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$, sinon. Calculer $\widehat{f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- 2) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin s)^2}{s^2} ds$.
- 3) Calculer $\widehat{f \star f}$.

Exercice VI

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1 - |x| \text{ pour } |x| \leq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } |x| > 1.$$

- 1) Calculer \widehat{f} .
- 2) Comparer avec la dernière question de l'exercice précédent.
- 3) Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin s)^4}{s^4} ds$.

Exercice VII

Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie par $f_a(x) = \exp(-a|x|)$.

- 1) calculer $\widehat{f_a}$.
- 2) En déduire \widehat{g} , où g est la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice VIII

Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie par $f_a(x) = \exp(-ax^2)$.

1) Montrer que f_a est solution de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2axy(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2) En appliquant la transformée de Fourier à cette équation en déduire une équation différentielle satisfaite par $\widehat{f_a}$.

3) Calculer $\widehat{f_a}(0)$. [On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$].

4) En déduire que

$$\widehat{f_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}\right) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

5) En passant, par la transformée de Fourier, calculer $f_{a^2} \star f_{b^2}$.

Exercice IX

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

[Indication : On rappelle que pour tout $A > 0$ on a $\int_{-A}^A f(x) \exp(-i\xi x) dx \rightarrow 0$ lorsque que $|\xi| \rightarrow +\infty$, voir exos "convolution , Fourier"].

Chapitre 4

Résolution d'EDP par transformée de Fourier

4.1 Introduction

Pour résoudre des EDP d'évolutions linéaires à coefficients constants posée sur l'espace \mathbb{R} tout entier, l'intégrale de Fourier joue un rôle similaire à celui du développement en série de Fourier, pour des données qui ne sont pas périodiques.

4.2 Transformée de Fourier partielle par rapport à la variable d'espace

Dans la suite de ce chapitre, nous serons amenés à considérer des fonctions de deux variables f définies en général sur le demi-espace $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, les variables (x, t) désignant, pour la première x une variable d'espace, et, pour la seconde t , une variable de temps. Nous considérerons alors transformée de Fourier de f par rapport à la variable spatiale x , à savoir la fonction de deux variables \hat{f}^x définie sur le demi-espace $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par

$$\hat{f}^x(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \text{ pour tout } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.2.1)$$

Pour insister sur le fait que la transformée de Fourier est faite uniquement par rapport à la variable x , nous avons placé un exposant x à droite du chapeau. On écrira aussi

$$\hat{f}^x(\xi, t) = \mathcal{F}^x(f)(x, t).$$

Remarque 4.2.1. à temps t fixé, la transformée de Fourier partielle est donc la transformée de Fourier de la fonction d'une variable réelle $x \mapsto f(x, t)$ et on peut alors appliquer à cette fonction les résultats du chapitre précédent.

Sous des conditions suffisantes de régularité on a alors les règles de dérivation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^x\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(\xi, t) &= \frac{\partial \hat{f}^x}{\partial t}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \\ &= \frac{\partial \hat{f}^x}{\partial t}(\xi, t) \text{ pour tout } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

De même on aura

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x^k}}(\xi, t) &= \mathcal{F}^x\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \exp(-i\xi x) dx \\
&= (i\xi)^k \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \exp(-i\xi x) dx \text{ après } k \text{ intégration par parties} \\
&= (i\xi)^k \mathcal{F}^x(f)(\xi, t) \\
&= (i\xi)^k \widehat{f^x}(\xi, t).
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Par soulager quelque peu les notations, nous omettrons par la suite, quand il n'y a pas d'ambiguïté l'exposant x qui désigne la transformée de Fourier partielle. Nous allons illustrer la méthode sur deux exemples : les équations de transport et l'équation de la chaleur.

4.3 Équations de transport

Soit $c \in \mathbb{R}$, on considère de nouveau l'équation de transport à coefficient constant

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où la donnée initiale u_0 est une fonction régulière à support compact ou éventuellement appartient à la classe de Schwartz $S(\mathbb{R})$.

Pour résoudre cette équation, nous allons utiliser la transformée de Fourier partielles par rapport à la variable spatiale x . En appliquant cette transformation, on obtient, en utilisant la linéarité de \mathcal{F}^x

$$\mathcal{F}^x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + c\mathcal{F}^x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

En utilisant maintenant les relations (4.2.2) et (4.2.3) on obtient donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \widehat{u}^x}{\partial t}(\xi, t) + c(i\xi)\widehat{u}^x(\xi, t) = 0, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On constate qu'à ξ fixé on obtient une équation différentielle ordinaire que l'on intègre facilement comme

$$\widehat{u}^x(\xi, t) = \widehat{u}^x(\xi, 0) \exp(-ic\xi t)$$

Comme

$$\widehat{u}^x(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \exp(-i\xi x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \exp(-i\xi x) dx = \widehat{u_0}(\xi),$$

on obtient la forme précise de la transformée de Fourier Partielle, à savoir

$$\widehat{u}^x(\xi, t) = \exp(-ic\xi t) \widehat{u_0}(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Voyons maintenant comment (re) trouver la forme de la solution u elle-même. On utilise à cette effet le théorème d'inversion de Fourier (ou de recomposition spectrale). On écrit donc

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ic\xi t) \widehat{u_0}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u_0}(\xi) \exp(i(x - ct)\xi) d\xi \\
&= u_0(x - ct).
\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat donné par la méthode des caractéristiques.

4.4 Equation de la chaleur homogène

Nous allons voir maintenant comment la transformée de Fourier partielle permet de déterminer les solutions de l'équation de la chaleur homogène

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

4.4.1 Resolution par analyse de Fourier

Appliquons \mathcal{F}_x à cette équation : on trouve

$$\mathcal{F}^x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathcal{F}^x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

c'est à dire, en utilisant les relations (4.2.2) et (4.2.3)

$$\frac{\partial \hat{u}^x}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}^x(\xi, t) = 0, \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (4.4.2)$$

où

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \text{ pour tout } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

On voit de nouveau que la relation (4.4.2) fournit, pour ξ fixé une équation différentielle pour la fonction d'une seule variable $t \mapsto \hat{u}^x(\xi, t)$. L'intégration de l'équation donne

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \exp(-\xi^2 t) \hat{u}^x(\xi, 0)(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Comme $\hat{u}^x(\xi, 0) = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \exp(-i\xi x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \exp(-i\xi x) dx = \widehat{u_0}(\xi)$, on obtient la forme exacte de la transformée de Fourier partielle

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

On recompose u par transposée de Fourier inverse (ou recombinaison spectrale), ce qui nous donne

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi, \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.4.3)$$

Jusqu'ici nous avons raisonné de manière assez formelle, sans justification précise des formules de dérivation que nous avons utilisée. Cette méthode nous a permis en tout cas de "deviner" la forme de la solution, et de trouver la formule (4.4.3).

Proposition 4.4.1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. La fonction u définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par la formule (4.4.3) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Elle vérifie l'équation $u_t - u_{xx} = 0$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. De plus

$$u(\cdot, t) \rightarrow u_0(\cdot) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ lorsque } t \rightarrow 0^+. \quad (4.4.4)$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx < +\infty. \quad (4.4.5)$$

Décomposons la preuve en plusieurs étapes.

1ère Etape : régularité de u par rapport à la variable x . Montrons pour $t > 0$ donné et fixé, la régularité de la fonction $U^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto U^t(x) = u(x, t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction φ_t définie par

$$\varphi^t(\xi) = \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Il résulte de (4.4.5) et de l'inégalité $|\exp(-\xi^2 t)| \leq 1$ que $\varphi^t \in L^2(\mathbb{R})$. Comme la transformée de Fourier est bijective sur $L^2(\mathbb{R})$, la formule (4.4.3) exprime le fait que

$$U^t = \mathcal{F}^{-1}(\varphi^t) \text{ pour tout } t \geq 0,$$

ou encore que

$$\widehat{U^t}(\xi) = \varphi^t(\xi) = \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

On a alors, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que (4.4.5)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^k |\widehat{U^t}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^k \exp(-\xi^2 t) |\widehat{u_0}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} \exp(-2\xi^2 t) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2\pi C_k(t)} \|u_0\|_2 < +\infty, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

où on a posé, pour $t > 0$

$$C_k(t) = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2k} \exp(-2\xi^2 t) d\xi < +\infty.$$

Il résulte alors de (4.4.6) et de la Proposition 3.6.1 que pour tout $t > 0$ la fonction U^t est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On trouve en particulier

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^k \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi, \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.4.7)$$

2ème Etape : régularité de u par rapport à la variable t . Elle résulte directement du Théorème de dérivation sous le signe somme, et est laissée en exercice. on trouve en particulier

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \exp(-\xi^2 t) \widehat{u_0}(\xi) \exp(ix\xi) d\xi, \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.4.8)$$

3ème Etape : la fonction u donnée par (4.4.3) vérifie l'équation de la chaleur homogène. il suffit d'additionner (4.4.7) pour $k = 2$ et (4.4.8) pour obtenir le résultat désiré.

3ème Etape : Preuve de la convergence (4.4.4). On a

$$(\widehat{u(\cdot, t) - u_0})(\xi) = (1 - \exp(-\xi^2 t)) \widehat{u_0}(\xi),$$

de sorte que l'égalité de Parseval nous donne

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(-\xi^2 t))^2 |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi$$

Comme pour tout ξ fixé, on a

$$1 - \exp(-\xi^2 t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow 0^+$$

le théorème de convergence dominé appliqué à l'intégrale du membre de droite de l'inégalité montre que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(-\xi^2 t))^2 |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow 0^+,$$

ce qui entraîne $\|u(\cdot, t) - u_0\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, et donne ainsi le résultat. \square

Commentaire. une façon légèrement différente et assez induite d'interpréter la formule (4.4.3) est d'invoquer les *ondes planes*, c'est à dire les fonctions sinusoïdales de la formes

$$e_{\xi}(x) = \exp(i\xi x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4.4.2 Le noyau de la chaleur

Nous avons vu au paragraphe précédent que

$$\begin{aligned} \widehat{u^x}(\xi, t) &= \widehat{U^t}(\xi) = \exp(-\xi^2 t) \cdot \widehat{u_0}(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G_t))(\xi) \cdot \mathcal{F}(u_0)(\xi) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G_t) \star u_0)(\xi) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

où on a utilisé l'identité du produit de convolution à savoir $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$, et où, G_a désigne pour $a > 0$, la fonction Gaussienne définie sur \mathbb{R} par

$$G_a(s) = \exp(-as^2) \text{ pour } s \in \mathbb{R}. \quad (4.4.10)$$

Pour continuer le calcul, nous allons utiliser le Lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *On a, pour tout $a > 0$*

$$\begin{aligned} \widehat{G_a}(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G_{\frac{1}{4a}}(\xi) \text{ et} \\ \mathcal{F}^{-1}(G_a)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} G_{\frac{1}{4a}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Démonstration. Calculons la dérivée de G_a

$$G'_a(x) = -2axG_a(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de sorte qu'on prenons la transformée de Fourier des deux membres, on trouve

$$\widehat{G'_a} = -2a\xi \widehat{G_a}$$

Or on a

$$\widehat{G'_a}(\xi) = i\xi \widehat{G_a}(\xi) \text{ et } \widehat{-ixG_a} = \frac{d\widehat{G_a}}{d\xi}.$$

On obtient donc la relation différentielle pour $\widehat{G_a}$

$$\frac{d\widehat{G_a}}{d\xi}(\xi) = -\frac{1}{2a}\xi \widehat{G_a}(\xi),$$

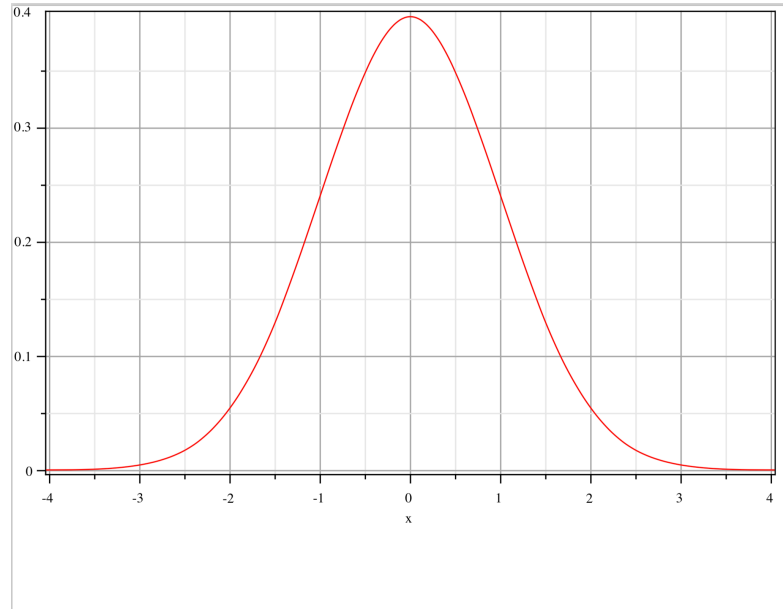


FIGURE 4.1 – Graphe de la Gaussienne G_1 .

qui donne par intégration

$$\widehat{G}_a(\xi) = \widehat{G}_a(0) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right).$$

Comme on a, en faisant le changement de variable $u = \sqrt{a}x$

$$\widehat{G}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}},$$

on obtient la première formule de (4.4.11). Pour la seconde identité de (4.4.11), on invoque le fait que, si f est paire, alors $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\check{f}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)$, puis on utilise la première identité. \square

Revenons maintenant à (4.4.9). En utilisant (4.4.11), on obtient, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{F}(U^t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathcal{F}\left(G_{\frac{1}{4t}} \star u_0\right).$$

Ceci donne donc

$$U^t = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} G_{\frac{1}{4t}} \star u_0,$$

et nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.4.1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. la solution u de (4.4.1) est donnée par la formule

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(G_{\frac{1}{4t}} \star u_0\right)(x) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

La fonction \mathbf{H} définie sur $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ par

$$\mathbf{H}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.4.13)$$

s'appelle le *noyau de la chaleur*. On peut encore écrire les formules précédentes sous la forme

$$u(\cdot, t) = \mathbf{H}(\cdot, t) \star u_0. \quad (4.4.14)$$

La fonction \mathbf{H} a les propriétés suivantes

Proposition 4.4.2. *Le noyau de la chaleur \mathbf{H} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Il vérifie l'équation de la chaleur homogène sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, c'est à dire que l'on a*

$$\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad (4.4.15)$$

Par ailleurs, on a les propriétés

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, t) > 0 \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, t) dx = 1 \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et} \\ \mathbf{H}(\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 \text{ uniformément sur } D_A \equiv \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq A\}, \forall A > 0. \end{cases} \quad (4.4.16)$$

La preuve est laissée en exercice. Comme conséquence, on observe

Corollaire 4.4.1. *La famille de fonctions $\{\mathbf{H}(\cdot, t)\}_{t>0}$ est une approximation de l'Identité. En particulier pour toute fonction continue f , on a*

$$\mathbf{H}(\cdot, t) \star f \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}.$$

4.4.3 Propriétés des solutions

Nous avons jusqu'à présent défini les solutions de (4.4.1) pour des données initiales $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. En utilisant les propriétés du noyau de la chaleur \mathbf{H} établie dans la Proposition 4.4.2 et le Corollaire 4.4.1 on obtient un résultat d'existence pour d'autres types de données :

Proposition 4.4.3. *Soit u_0 une fonction continue et bornée. Alors la fonction u définie dans (6.2.1) est C^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et se prolonge de manière continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. La fonction ainsi obtenue vérifie le probl'eme aux limites (4.4.1). De plus, si $u_0 \geq 0$, alors*

$$u(x, t) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\text{ et } u(x, t) > 0 \text{ si } u_0 \neq 0.$$

La preuve est laissée en exercice.

4.5 Equation de la chaleur avec terme source

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. On considère l'équation de la chaleur avec terme source f et donnée initiale nulle à savoir l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

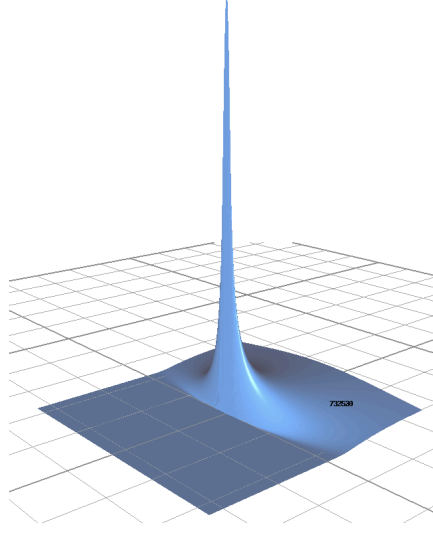


FIGURE 4.2 – Graphe du noyau de la chaleur H .

4.5.1 Résolution par transformée de Fourier partielle

Pour trouver la solution, appliquons de nouveau la transformée de Fourier partielle \mathcal{F}_x à l'équation : on trouve

$$\mathcal{F}^x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathcal{F}^x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \mathcal{F}^x(f),$$

c'est à dire, en utilisant les relations (4.2.2) et (4.2.3)

$$\frac{\partial \hat{u}^x}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}^x(\xi, t) = \hat{f}^x(\xi, t), \text{ pour tout } t \geq 0., \quad (4.5.2)$$

où

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \exp(-i\xi x) dx, \text{ pour tout } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

L'intégration de l'équation différentielle (4.5.2) donne

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \int_0^t \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}^x(\xi, s) ds \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.5.3)$$

On recompose u par transposée de Fourier inverse (ou recombinaison spectrale), ce qui nous donne

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}^x(\xi, s) \exp(ix\xi) d\xi \right) ds, \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4.5.4)$$

4.5.2 Représentation des solutions à l'aide du noyau de la chaleur H

Exprimons maintenant la solution (4.5.4) à l'aide de produit de convolution. On a pour tout $s \in [0, t]$, en raisonnant comme dans (4.4.9)

$$\begin{aligned} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}^x(\xi, s) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G_{t-s}))(\xi) \cdot \mathcal{F}(f(\cdot, s))(\xi) \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G_{t-s}) \star f(\cdot, s))(\xi) \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Il en résulte, en revenant à (4.5.3) que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U^t) &= \widehat{U^t} = \int_0^t \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(G_{t-s}) \star f(\cdot, s)) ds \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0. \\ &= \mathcal{F}\left(\int_0^t (\mathcal{F}^{-1}(G_{t-s}) \star f(\cdot, s)) ds\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\int_0^t (\mathbf{H}(\cdot, t-s) \star f(\cdot, s)) ds\right)\end{aligned}$$

On obtient ainsi la forme suivante des solutions :

Proposition 4.5.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ régulière et telle qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x, t) = 0$ pour $|x| > A$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par*

$$u(x, t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}\right) f(y) dy \right) ds$$

est régulière sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et vérifie (4.5.1).

4.6 L'équation de Laplace sur \mathbb{R}^N

Nous commençons par définir l'opérateur différentiel de Laplace, qui joue un rôle important dans de nombreuses applications des mathématiques (physique, mécanique, dynamique des populations..).

4.6.1 L'opérateur de Laplace

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , on définit la fonction Δu sur Ω par

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(\mathbf{x}), \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) \\ &= \operatorname{div}(\vec{\nabla} u)(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

où $\vec{\nabla} u$ désigne le champ de vecteurs

$$\vec{\nabla} u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \right)$$

et où l'opérateur divergence est défini, pour un champ de vecteur $\vec{V} = (V_1, \dots, V_N)$ sur Ω par

$$\begin{aligned}\operatorname{div} V(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial V_N}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{4.6.2}$$

On déduit de ces formules que Δu est aussi la trace de la matrice Hessienne de u

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \text{Tr}(\text{Hess}(u)(\mathbf{x})) \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega.$$

L'opérateur de Laplace est donc un opérateur différentiel d'ordre 2, car il est une combinaison linéaire de dérivées partielles d'ordre 2. Il possède des propriétés particulières, comme l'invariance par changement de base, qui sont décrites dans l'Appendice B.

4.7 L'équation de Laplace sur \mathbb{R}^N

Nous nous restreignons dans cette partie au cas $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^N et donnée. le problème de Laplace consiste à trouver une fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N. \quad (4.7.1)$$

Il ne s'agit plus ici d'un problème d'évolution, toutes les variables x_1, x_2, \dots, x_N jouent des rôles tout à fait similaires. Pour résoudre cette équation en utilisant la transformée de Fourier, nous devons tout d'abord généraliser cette notion aux fonctions définies sur \mathbb{R}^N .

4.7.1 La transformée de Fourier sur \mathbb{R}^N

Définition 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. La transformée de Fourier de f , notée \hat{f} ou $\mathcal{F}_N(f)$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^N par

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \exp(-i\xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N \text{ pour tout } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$$

où $\xi \cdot \mathbf{x}$ désigne le produit scalaire

$$\xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2 + \dots + \xi_N \cdot x_N = \sum_{i=1}^N \xi_i \cdot x_i$$

pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes

Proposition 4.7.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors la fonction $\mathcal{F}_N(f) = \hat{f}$ est continue, et vérifie

$$\hat{f}(\xi) \rightarrow 0 \text{ lorsque } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

On a de plus

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \text{ pour tout } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N.$$

On définit la convolution de fonctions définies sur \mathbb{R}^N de la même manière que sur \mathbb{R} par la formule

$$f \star g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (4.7.2)$$

où f et g désignent deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$: si l'une des fonctions f ou g est à support compact, alors l'intégrale est définie au sens habituel. Sinon, on vérifie, par le même argument que pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ que la définition (4.7.2) a un sens pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, en invoquant le théorème de Fubini. On a alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

Proposition 4.7.2. On a, pour deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Considérons maintenant des fonctions plus régulières, par exemple $C_c(\mathbb{R}^N)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la classe des fonctions à décroissance rapide, avec une définition similaire à celle donnée dans le cas $N = 1$. On a alors, si $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \text{ pour tout } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$$

où pour $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, on a posé

$$\mathbf{y}^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \dots y_N^{\alpha_N}.$$

La formule d'inversion de Fourier (ou de recomposition spectrale) se généralise au cas \mathbb{R}^N comme suit :

Proposition 4.7.3. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$. On a

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi \cdot \mathbf{x}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (4.7.3)$$

On a de plus l'identité de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x})|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_N = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N \quad (4.7.4)$$

En raisonnant comme pour la transformée de Fourier dans \mathbb{R} , on déduit de la proposition précédente que l'on peut définir, en utilisant la densité des fonctions régulières à support compact dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On démontre ainsi que l'application

$$\mathcal{F}_N : f \mapsto \mathcal{F}_N(f) = \widehat{f}$$

est une application linéaire continue et bijective de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même. telle que

$$\|\mathcal{F}_N(f)\|_2 = (\sqrt{2\pi})^N \|f\|_2, \text{ pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

La transformée de Fourier inverse est alors donnée par

$$\mathcal{F}_N^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^N} \mathcal{F}_N^{-1}(\check{f}) \text{ où } \check{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}). \quad (4.7.5)$$

4.7.2 Résolution de l'équation de Laplace

Revenons à l'équation de Laplace (4.7.1) : transformée de Fourier va nous permettre, pour des raisons de résoudre rigoureusement la solution, du moins de trouver par des arguments un peu formels, sa forme. Il ne restera alors plus qu'à vérifier que la solution trouvée est effectivement une solution.

Limitons nous pour ce faire au cas de la dimension trois $N = 3$, qui correspond à de nombreux modèles physiques. En prenant la transformée de Fourier des deux membres de l'équation (4.7.1), on trouve

$$|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^3$$

c'est à dire

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (4.7.6)$$

Cette formule ne nous garantit pas l'existence de la solution, car sa transformée de Fourier est définie par une division par $|\xi|^2$. On aimerait néanmoins pouvoir écrire, en utilisant la transformée de Fourier inverse

$$u = \mathcal{F}_N^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right) \star f, \text{ avec} \quad (4.7.7)$$

$$\mathcal{F}_N^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^2} \exp(i\mathbf{x} \cdot \xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Nous avons mis des guillemets " " à l'intégrale du second membre car la fonction à intégrer $\frac{1}{|\xi|^2} \exp(i\mathbf{x} \cdot \xi)$ n'est pas intégrable : néanmoins cette expression à u sens en décomposer le fonction $\frac{1}{|\xi|^2}$ en deux parties. On écrit

$$\frac{1}{|\xi|^2} = g_1(\xi) + g_2(\xi),$$

où

$$g_1 = \frac{1}{|\xi|^2} \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq 1\}} \text{ et } g_2 = \frac{1}{|\xi|^2} \mathbf{1}_{\{|\xi| > 1\}}.$$

On vérifie que $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et que $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, de sorte que l'on sait (mais par deux méthodes différentes définir $\mathcal{F}_N^{-1}(g_1)$, comme transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{F}_N^{-1}(g_2)$, comme transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Il en résulte que la quantité

$$I(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R(x) \text{ où on a posé} \quad (4.7.8)$$

$$I_R(\mathbf{x}) = \int_{|x| \leq R} \frac{\exp(i\mathbf{x} \cdot \xi)}{|\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

est bien définie. On a :

Lemme 4.7.1. *Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la quantité $I_R(x)$ ne dépend que $|x|$, la norme euclidienne de \mathbf{x} . On a*

$$I(\mathbf{x}) = \frac{c_0}{|\mathbf{x}|^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.7.9)$$

Démonstration. Pour la première assertion, il faut vérifier que si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs tels que $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$, alors on a on

$$I_R(\mathbf{x}) = I_R(\mathbf{y}). \quad (4.7.10)$$

Comme $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$, il existe une rotation \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 telle que $\mathbf{y} = \mathcal{R}(\mathbf{x})$. On a alors

$$I_R(\mathbf{y}) = \int_{|x| \leq R} \frac{\exp(i\mathcal{R}(\mathbf{x}) \cdot \xi)}{|\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Or $\mathcal{R}(\mathbf{x}) \cdot \xi = \mathbf{x} \cdot \mathcal{R}^{-1}(\xi)$. Effectuons alors le changement de variable $\omega = \mathcal{R}^{-1}(\xi)$, dont le Jacobien vaut 1. Il vient

$$\begin{aligned} I_R(\mathbf{y}) &= \int_{|x| \leq R} \frac{\exp(i\mathcal{R}(\mathbf{x}) \cdot \xi)}{|\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \int_{|x| \leq R} \frac{\exp(i\mathbf{x} \cdot \mathcal{R}^{-1}(\xi))}{|\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \int_{|x| \leq R} \frac{\exp(i\mathbf{x} \cdot \omega)}{|\xi|^2} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= I_R(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Ce qui donne (4.7.10). Pour trouver (4.7.9),



Chapitre 5

La théorie des distributions : un aperçu

5.1 Introduction

la théorie des distributions dont nous donnons ici un aperçu prend son origine dans plusieurs considérations qui nous ont amené les mathématiciens à reformuler la notion de fonction, et surtout à introduire des "fonctions généralisées". Dans cette nouvelle classe de fonctions, beaucoup d'opérations, qui auparavant réclamaient des hypothèses restrictives sur les fonctions, deviennent licites sans la moindre restriction : par exemple, toute les "fonctions généralisées" sont dérivables. Bien entendu, comme toujours la " magie a un prix". Les objets obtenues ont parfois un caractère "monstrueux"...

5.1.1 La notion de fonction

La notion de fonction, centrale en analyse, s'est dégagée seulement progressivement au fil du temps. Si semble-t-il, c'est Leibnitz qui le premier a utilisé ce terme, il recouvrait à l'époque une idée un peu vague de grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs, le plus souvent géométriques elle aussi. Euler restreint le terme à des fonctions s'exprimant sous forme de formules (c'est à dire des fonctions analytiques). Peu à peu se dégagent les notions générales d'applications d'un ensemble vers un autres, de graphes, de continuité, de régularité, etc... qui correspondent plus ou moins à notre intuition moderne sur la question, l'association d'un élément x de l'ensemble de départ à un élément $y = f(x)$ de l'ensemble d'arrivée, parfois visualisé à l'aide d'un graphe.

De ce point de vue, la notion de dérivée occupe un rôle centrale : la dérivée partiel de f par rapport à la variable x_i s'exprime alors au travers d'une notion locale simple, la limite du quotient différentiel

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\vec{e}_i) - f(x)}{h}. \quad (5.1.1)$$

où $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant en i -ème position. La notion de primitive n'est alors rien d'autre que l'inverse de la dérivation.

5.1.2 Les séries de Fourier

Cependant, dès le XIXème siècle, la théorie des séries de Fourier introduit un autre point de vue : elle associe à une fonction 2π périodique la suite de ses coefficients de Fourier $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

définie par

$$\hat{f}(n) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp -inx dx, \quad b_n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Ces coefficients correspondent à des moyennes pondérées de la fonction f avec les éléments de la famille de fonctions $^1(\exp(-in\cdot))_{n \in \mathbb{Z}}$. Le point central est que la connaissance des seuls coefficients de Fourier $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ permet en principe de recomposer entièrement la fonction. On a en effet la formule

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp inx, \quad \forall x \in [0, 2\pi], \quad (5.1.2)$$

qui permet de retrouver la valeur de $f(x)$ pour tout x . On peut aussi déduire de la série de Fourier la fonction dérivée de f . En effet, pour les fonctions dérivables, les coefficients de la fonction dérivée, peuvent, s'écrire, en utilisant une intégration par partie 2 comme

$$\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1.3)$$

De même, le produit de convolution (périodique, pour la formule ci-dessous), à une interprétation simple au niveau des coefficients de Fourier. On a en effet

$$\widehat{f \star_{\text{per}} g}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1.4)$$

c'est à dire qu'il se transforme en produit des coefficients de Fourier. Notons cependant que, pour interpréter les formules (5.1.3) et (5.1.4), il faut bien entendu imposer des conditions de convergences sur les coefficients pour pouvoir utiliser la formule (5.1.2).

Très tôt, on s'est aperçu qu'il y avait aussi des suites de nombres qui ne permettaient pas de recomposer de fonctions correspondantes, par manque de convergence, mais suggéraient des objets mathématiques nouveaux que l'on pouvait interpréter comme des "fonctions généralisées". Par exemple, si on rapproche les formules (5.1.2) et (5.1.4), on a envie de dire que la convolution correspond au produit de convolutions d'une fonction avec la "fonction généralisée" définie par la suite $\{in\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Cette suite, qui est divergente, ne permet pas de définir une fonction par (5.1.2). Quel est l'objet mystérieux qui se cache derrière? De manière encore plus simple, quel objet se cache derrière la suite $(c(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$c(n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

En convolant avec cet objet, on trouve l'identité...

La théorie moderne des distributions fournit un cadre abstrait donnant une signification mathématique précise à ces intuitions.

5.1.3 La théorie de l'intégration comme point de départ

Comme il y a beaucoup plus de fonctions intégrables que de fonctions dérivables, la théorie de l'intégration est un point de départ plus souple pour construire une théorie des fonctions. Par ailleurs, les modélisations en mécanique ou en physique, ou les lois de conservations s'expriment souvent sous forme de bilans utilisant des formulations intégrales sont une autre motivation pour

1. qui jouent le rôle des fonctions tests que nous évoquerons plus tard

2. le point clef étant que les dérivées des fonctions tests, sont, à un facteur multiplicatif près, elle même des fonctions test.

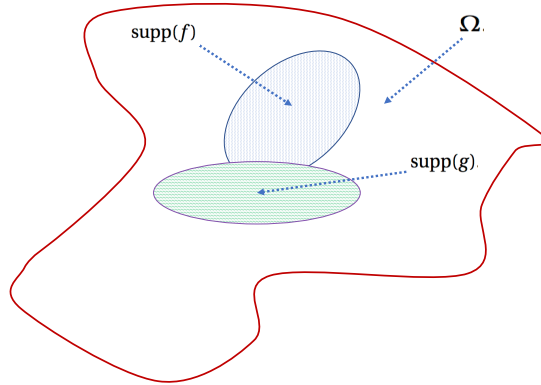
le faire. Enfin, la définition des coefficients de Fourier, que nous venons de voir, repose sur la théorie de l'intégration et l'utilisation d'un ensemble approprié, mais tout de même limité, de fonctions tests.

Considérons de manière générale un domaine Ω quelconque de \mathbb{R}^N . Les fonctions tests, qui dans le cas des coefficients de Fourier étaient constituées par la famille $(\exp(-in\cdot))_{n \in \mathbb{Z}}$, sont maintenant remplacées par l'ensemble $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact dans ω , que l'on note aussi $\mathcal{D}(\Omega)$. Il s'agit de l'ensemble de fonctions suivant :

$$C_c^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega) \equiv \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \text{ telles qu'il existe un compact } K_\varphi \subset \Omega, \text{ tel } \varphi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus K_\varphi\}. \quad (5.1.5)$$

Remarque 5.1.1. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue on appelle support de f et on note $\text{supp}(f)$ le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f s'annule. L'ensemble $\text{supp}(f)$ est donc un fermé de Ω . Par ailleurs, si f et g sont deux fonctions continues sur \mathbb{R}^N , on vérifie que

$$\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g). \quad (5.1.6)$$



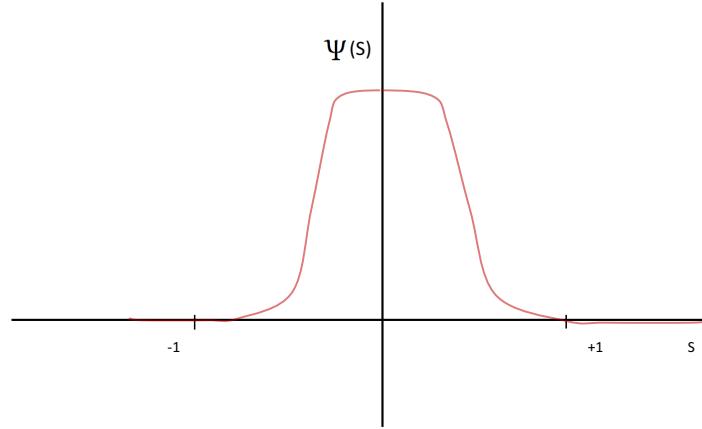
Proposition 5.1.1. L'ensemble $C_c^\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel qui n'est pas réduit au singleton $\{0\}$.

Démonstration. Soit f et g deux fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Pour λ et μ deux réels donnés, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe C^∞ . De plus, en vertu de (5.1.6), on a

$$\text{supp}(\lambda f + \mu g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subset \Omega,$$

de sorte que $\lambda f + \mu g$ est à support compact dans Ω . Il s'agit donc d'un élément de $C_c^\infty(\Omega)$, ce qui prouve que $C_c^\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel. Pour vérifier qu'il n'est pas restreint au singleton nul, considérons la fonction $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{cases} \Psi(s) = \exp\left(-\frac{1}{1-s^2}\right) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, |s| < 1, \\ \Psi(s) = 0 \text{ pour } |s| \geq 1. \end{cases} \quad (5.1.7)$$



On peut vérifier (exercice) que Ψ est bien une fonction de classe C^∞ dont le support est donné par l'intervalle fermé $[-1, 1]$. A partir de Ψ , on peut alors construire toute une famille de fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour se faire, soient $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$, tels que $B(x_0, r) \subset \Omega$, considérons alors les fonctions $\chi_{x_0, r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\chi_{x_0, r}(x) = \Psi\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que $\chi_{x_0, r}$ est bien de classe C^∞ et que son support est donné par la boule fermée $\mathbb{B}(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon $r > 0$ pour $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$ quelconques. \square

Remarquons au passage :

Lemme 5.1.1. Soit φ fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors on a

$$\varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega.$$

De plus, $\mathcal{D}(\Omega)$ est stable par dérivation, à savoir

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ alors } \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

La collection des intégrale des produits avec les fonctions tests

Rappelons qu'une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est dite localement intégrable si et seulement si, pour tout compact $K \subset \Omega$, on a

$$\int_K |f(x)| dx < +\infty.$$

On note alors $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Pour une fonction donnée f sur Ω , supposée localement intégrable, on considère alors la collection des nombres réels $\{L_f(\varphi)\}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$, définis par

$$L_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.1.8)$$

Cette collection de nombres peut être interprétée comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$, puisque l'application

$$L_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto L_f(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

est bien une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ vers \mathbb{R} . De plus elle est injective, grâce au Lemme classique d'intégration suivant, que nous admettrons :

Lemme 5.1.2. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si on a

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

alors nécessairement, on doit avoir $f = 0$.

Il en résulte que, pour deux fonctions localement intégrables f et g distinctes, les familles $\{L_f(\varphi)\}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ et $\{L_g(\varphi)\}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ sont distinctes. Voyons maintenant brièvement comment la connaissance de la famille $\{L_f(\varphi)\}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ permet de retrouver toutes les informations classiques sur la fonction.

Valeur en un point des fonctions continues

Lorsque f est une fonction continue, la donnée de la famille $\{L_f(\varphi)\}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$ permet de retrouver la valeur de $f(x_0)$, en un point quelconque $x_0 \in \Omega$ donné. En effet, considérons une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\chi(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) dx = 1,$$

et pour $\varepsilon > 0$ la fonction χ_ε définie par

$$\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \chi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.1.9)$$

de sorte que $\chi_\varepsilon(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{B}(x_0, \varepsilon)$, $\chi_\varepsilon \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon dx = 1$. On vérifie alors que si on choisit ε assez petit, alors $\mathbb{B}(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$, de sorte que $\chi_\varepsilon \in \mathcal{F}(\Omega)$. De plus, on a la convergence

$$L_f(\chi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \chi_\varepsilon(x) dx \rightarrow f(x_0) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.1.10)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \chi_\varepsilon(x) dx &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x_0) \chi_\varepsilon(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (f(x_0) - f(x)) \chi_\varepsilon(x) dx \right| \\ &= f(x_0) + \int_{\mathbb{B}(x_0, \varepsilon)} (f(x_0) - f(x)) \chi_\varepsilon(x) dx \end{aligned}$$

de sorte que

$$|L_f(\chi_\varepsilon) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{B}(x_0, \varepsilon)} |f(x) - f(x_0)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

ce qui donne (5.1.10).

Dérivation faible

Voyons maintenant comment on accède à la notion de dérivée d'une fonction. Lorsque la fonction f est de classe C^1 , on a par la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i f(x) \cdot \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \partial_i \varphi(x) dx \quad (5.1.11)$$

Ce que l'on peut réécrire comme

$$L_{\partial_i f}(\varphi) = -L_f(\partial_i \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.1.12)$$

Cette formule peut-être utilisée comme point de départ pour définir $\partial_i f$, même pour des fonction f relativement peu régulière.

Définition 4 (dérivée au sens faible). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit f et g_i deux fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ On dit que g_i est la dérivée partielle de f au sens faible par rapport à x_i ³ de f si et seulement si*

$$L_{\partial_i f}(\varphi) = -L_f(\partial_i \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_i(x) \cdot \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \partial_i \varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.1.13)$$

Le Lemme 5.1.2 montre que si f possède une dérivée partielle par rapport à x_i , alors elle est unique.

Remarque 5.1.2. Les fonctions dérivées au sens faible sont définies au sens "presque partout" et non pas en tout point, comme la dérivation classique (5.1.1).

Comme nous l'avons déjà mentionné, la formule d'intégration par parties montre que si f est de classe C^1 , alors la dérivée partielle de f au sens faible par rapport à x_i correspond à sa dérivée partielle au sens classique (c'est à dire au sens des coefficients différentiels (5.1.1)), et, il n'y a, a priori, rien de nouveau. Donnons maintenant quelques exemples où la notion "faible" permet détendre la définition de la dérivabilité.

Exemple 4. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $s \mapsto f(s) = |s|$. Sa dérivée au sens faible est donnée par la fonction

$$g(x) = -1 \text{ pour } x < 0 \text{ et } g(x) = +1 \text{ pour } x \geq 0.$$

En effet, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-\infty}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx \\ &= \left[\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx \right] + \left[-\varphi(0) - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \right] \\ &= - \int_{\mathbb{R}} g(x) dx, \end{aligned}$$

où on a intégré par partie sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

3. ou au sens des distributions, comme nous verrons plus loin

Exemple 5. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty. \quad (5.1.14)$$

On a alors

Proposition 5.1.2. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie (5.1.14), alors f possède une dérivée faible $g \in L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{g}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi) \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.1.15)$$

Démonstration. Il résulte de (5.1.14) et de la formule d'inversion de Fourier que la fonction g définie par (5.1.15) appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in D'(\mathbb{R})$. On a, en utilisant l'identité (3.5.2)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \cdot i\xi \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi) \widehat{f}(\xi) \cdot \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) \cdot \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

ce qui entraîne le résultat. □

Au delà de la dérivation faible

Nous nous sommes limité dans la discussion précédente à des notions de dérivées faibles menant à elles-mêmes des fonctions localement intégrables. Ceci a permis d'étendre la notion de dérivation à une classe assez large de fonction. Nous allons maintenant nous débarrasser des restrictions précédentes, au prix, il est vrai d'une plus grande abstraction. Pour ce faire, nous revenons à la donnée de l'application linéaire L_f en essayant de nous abstraire de la manière dont nous l'avons construite : que reste-t-il ? Essentiellement une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$! Ceci constitue notre point de départ pour construire les distributions, qui sont des *fonctions généralisées*.

5.2 Définition des distributions

Nous considérons dans cette partie des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Si T est une telle forme linéaire, nous utiliserons par la suite les deux notions $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ l'action de la distribution T sur la fonction test φ .

5.2.1 La propriété de continuité des distributions

Pour définir les distributions, nous nous restreindrons à une sous-classe de forme linéaires, qui vérifie la propriété de continuité suivante :

Propriétés de continuité : pour tout compact K de Ω , il existe des nombres $d_K \in \mathbb{N}$ et $C_K \geq 0$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq d_K} \{ |\partial^\alpha \varphi|(x), x \in \Omega \}, \quad (5.2.1)$$

où $\mathcal{D}_K(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$ nulles en dehors de K .

Ceci nous conduit directement à la définition

Définition 5. On appelle *distribution* toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie la propriété de continuité (5.2.1), pour tout compact $K \subset \Omega$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω .

Si, pour une distribution T donnée, il existe un nombre $d \in \mathbb{N}$ tel que $d_k \leq d$, pour tout compact $K \subset \Omega$, alors le plus petit nombre d ayant cette propriété est appelé *ordre de la distribution* T .

Remarque 5.2.1. On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si

- il existe un compact K tel que $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$
- Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Il résulte de la propriété de continuité des distributions que si T est une distribution et que si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors on a

$$\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \quad (5.2.2)$$

5.2.2 Exemples

Les fonctions localement intégrables. C'est l'exemple qui est à la base de la définition. Considérons une fonction localement intégrable $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors les formes linéaires L_f que nous avons définies plus haut vérifient bien la propriété de continuité \mathcal{C}_{ont} . En effet, pour tout compact K , on a

$$\begin{aligned} |\langle L_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_K f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \left(\int_K |f(x)| dx \right) \sup\{|\varphi(x)|, x \in \Omega\} \end{aligned}$$

de sorte que la propriété $\mathcal{C}_{\text{ont}}(K)$ est satisfaite avec $d_k = 0$ et $C_K = \int_K |f(x)| dx$. Il en résulte que L_f est bien une distribution d'ordre 0. Insistons sur le fait, que dans la pratique on *identifie* f et L_f , de sorte que l'on dit que *toute fonction localement intégrable est une distribution*.

Remarque 5.2.2. Il convient cependant de noter que, comme l'identification se réalise grâce à la théorie de l'intégration, deux fonctions égales sur éventuellement sur un ensemble de mesure nulle donne la même distribution. On identifie donc ces deux fonctions comme dans la théorie de l'intégration.

Notons au passage que toutes les fonctions continues sont des distributions, puisqu'elles sont localement intégrables. Il en est de même des fonctions bornées sur Ω , ou même des fonctions f seulement localement bornées sur Ω . Certaines fonction singulières sont des distributions, comme par exemple la fonction

$$f(x) = \ln(|x|), \forall x \neq 0.$$

Cette fonction est régulière sauf à l'origine, où elle tend vers $-\infty$. Néanmoins, comme elle est localement intégrable car

$$\int_R^R |\ln(|x|)| dx < +\infty, \forall R > 0$$

elle définit une distribution. Ce n'est pas le cas de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

qui est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mais la singularité l'origine n'est pas intégrable.

La masse de Dirac. Soit $a \in \Omega$. La masse de Dirac δ_a est la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui a une fonction φ associe sa valeur au point a . Elle est donc définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vérifions que la masse de Dirac possède la propriété de continuité caractérisant les distributions. On a

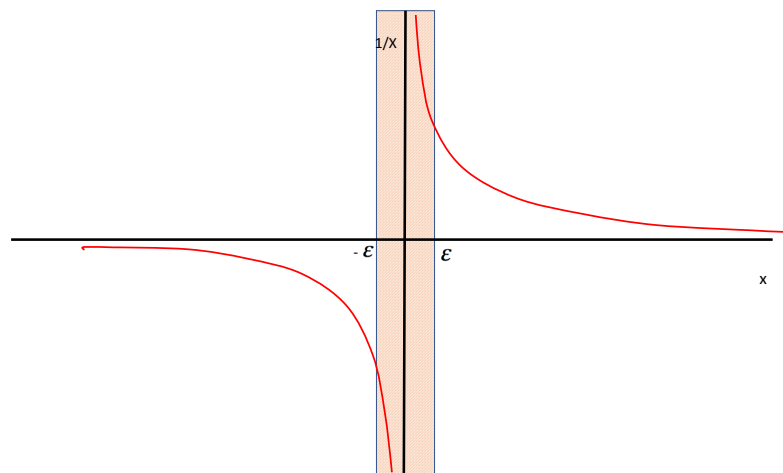
$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup\{|\varphi(x)|, x \in \Omega\}$$

de sorte de sorte que la propriété $\mathcal{C}_{\text{ont}}(K)$ est satisfaite avec $d_k = 0$ et $C_K = 1$, pour tout $K \subset \Omega$.

La valeur principale de $\frac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable au voisinage de 0, on ne peut donc pas définir directement la distribution correspondante sur \mathbb{R}^4 . On peut cependant lui associer une distribution en effectuant une normalisation, comme celle utilisée pour les intégrales singulières. Introduisons un paramètre $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction Γ_ε définie par

$$\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{|x| \geq \varepsilon},$$

qui est bornée, donc localement intégrable.



4. Elle est cependant localement intégrable sur tout intervalle ouvert ne contenant pas 0, de sorte qu'elle définit bien une distribution sur de tels intervalles

Soit $R > 0$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support compact dans l'intervalle $I_R = [-R, R]$. On a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\varphi) &\equiv \langle \Gamma_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

où pour la dernière identité on a utilisé le fait que, comme la fonction $\frac{1}{x}$ est impaire, on a

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x} dx = 0$$

Revenons maintenant à (5.2.3) : on peut majorer les intégrales en utilisant le fait que $\varphi(x) - \varphi(0)$ est nulle en zéro, d'où il résulte qu'elle est divisée par x . Plus précisément, nous allons utiliser l'identité

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(s) ds = x \int_0^1 \varphi'(xs) ds = x\Psi(x)$$

où on a introduit la fonction

$$\Psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xs) ds,$$

qui est une fonction C^∞ à support compact dans I_R . On a de plus

$$\sup_{x \in I_R} |\Psi(x)| \leq \sup_{x \in I_R} |\varphi'(x)|$$

on a alors

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{-R}^{-\varepsilon} \Psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^R \Psi(x) dx$$

De sorte que I_ε possède une limite, notée $\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I_\varepsilon(\varphi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_R^R \Psi(x) dx.$$

L'application $\varphi \mapsto \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$ est clairement linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R} , puisque l'application $\varphi \mapsto \Psi$ l'est. Comme par ailleurs

$$|\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq 2R \sup_{x \in I_R} |\Psi(x)| \leq 2R \sup_{x \in I_R} |\varphi'(x)|,$$

la propriété de continuité est satisfaite avec $d_{I_R} = 1$ et $C_{I_R} = 2R$, de sorte que $\text{vp} \frac{1}{x}$ est bien une distribution d'ordre au plus 1 (en fait, on vérifie que l'ordre est bien égal à 1).

Mesure de surface. Considérons une surface Σ de \mathbb{R}^3 , supposée régulière. On considère alors l'application linéaire μ_Σ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$\langle \mu_\Sigma, \varphi \rangle \equiv \int_\Sigma \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.2.4)$$

On vérifie que μ_σ est bien une distribution.

5.2.3 Restriction d'une distribution à un ouvert

Considérons un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$. Comme toute fonction à support compact dans Ω_1 a a fortiori support compact dans Ω , il en résulte que

$$\mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega).$$

En particulier, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on peut définir l'action de T sur les éléments $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ comme $\langle T, \varphi \rangle$. Ceci nous définit une forme linéaire $T|_{\Omega_1}$ sur $\mathcal{D}(\Omega_1)$ donnée par

$$\langle T|_{\Omega_1}, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega_1), \mathcal{D}(\Omega_1))} = \langle T, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

On vérifie sans peine que la forme linéaire $T|_{\Omega_1}$ satisfait la condition de continuités, avec les même constante que T , et qu'elle est d'ordre inférieur à celui de T .

Exemples.

La restriction d'une fonction localement intégrable, correspond à la restriction au sens classique du terme.

Pour a donné dans Ω , la restriction la restriction de la masse de Dirac δ_a correspond à la fonction nulle si $a \notin \Omega_1$, à la masse de Dirac en a sinon.

Si I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} ne contenant pas 0, alors la restriction de $\text{vp} \frac{1}{x}$ correspond à la fonction $\frac{1}{x}$ restreinte à cet intervalle.

5.2.4 Support d'une distribution

Rappelons que pour une fonction f définie sur l'ouvert Ω le support de f est donné par

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \text{ tels que } f(x) \neq 0\}}, \quad (5.2.5)$$

où la barre désigne l'adhérence, de sorte que le support d'une fonction est toujours un ensemble fermé. Une manière équivalente de définir le support de f est de considérer l'ensemble \mathcal{F} de tous les ensembles fermés F tels que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus F$$

On voit clairement que si F_1 et F_2 sont éléments de \mathcal{F} , alors $F_1 \cap F_2$ est encore un éléments de \mathcal{F} , de sorte que l'en est en droit de considérer le *plus petit fermé* en dehors duquel f s'annule, c'est à dire l'ensemble

$$\Gamma = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Cet ensemble correspond précisément au support de f défini en (5.2.5), c'est à dire $\Gamma = \text{supp}(f)$. Alors que la définition (5.2.5) ne peut s'étendre au cas des distributions, puisqu'on ne peut parler de valeur en un point d'une distribution, la définition alternative que nous venons de proposer s'étend au cas des distributions.

Définition 6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle support de T et on note $\text{supp}(T)$ le plus petit fermé Γ tel que $T|_{\Omega \setminus \Gamma}$ s'annule, c'est à dire

$$\text{supp}(T) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F, \quad (5.2.6)$$

où $\mathcal{F} = \{F \text{ fermé de } \Omega \text{ tel que } T|_{\Omega \setminus F} = 0\}$.

Il résulte immédiatement de cette définition que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est telle que

$$\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset, \quad (5.2.7)$$

alors

$$\langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Pour des fonctions localement intégrables, les deux définitions coïncident. Pour la masse de Dirac, on vérifie que $\text{supp}(\delta_a) = \{a\}$.

5.3 Opérations sur les distributions

L'ensemble des distributions étant un espace vectoriel, on peut additionner et multiplier des distributions, avec la règle, pour toutes distributions T_1 et T_2 de $\mathcal{D}'(\Omega)$ on a

$$\langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi \rangle = \lambda_1 \langle T_1, \varphi \rangle + \lambda_2 \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.3.1)$$

Passons maintenant à la propriété la plus remarquable, le fait que l'on peut définir une opération de dérivation pour toute distribution.

5.3.1 Dérivation des distributions

Comme nous l'allons déjà vu dans l'introduction, on part de la formule d'intégration par parties (B.1.5) de Annexe B), que l'on prend comme définition de la dérivée.

Définition 7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, On définit la dérivée partielle $\partial_i T$ comme l'unique distribution qui vérifie

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle \equiv -\langle T, \partial_i \varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

L'application $\varphi \mapsto -\langle T, \partial_i \varphi \rangle$ est en effet clairement linéaire : elle vérifie par ailleurs la propriété de continuité avec $d = d_k + 1$ et la même constante C_K que celle de T de sorte que la forme linéaire $\partial_i T$ est bien une distribution. Si d est l'ordre de T , alors l'ordre de $\partial_i T$ est au plus $d + 1$. Si, par ailleurs la distribution correspond une fonction de classe C^1 , on vérifie grâce à la formule d'intégration par parties (B.1.5) de l'Annexe B que sa dérivée au sens des distributions correspond bien à sa dérivée au sens classique, de sorte que l'on a bien *généralisé la notion de dérivation*.

Par récurrence, on définit les dérivées à tout ordre, et le fait que le théorème de Schwarz, c'est à dire que les dérivées successives commutent, reste vrai pour les distributions.⁵

Exemples. 1. Considérons sur \mathbb{R} la fonction H dite d'*Heavyside* définie par

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Cette fonction est bornée, donc localement intégrable et définit donc une distribution Montrons que

$$H' = \delta_0 \text{ au sens des distributions sur } \mathbb{R} \quad (5.3.3)$$

5. car il est vérifié pour les fonctions test

On a en effet, pour toute fonction test $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi \rangle &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

Ce qui donne le r\'esultat.

2. En fait, on peut g\'en\'eraliser ce r\'esultat \`a toutes les fonction C^1 par morceaux sur in intervalle I de \mathbb{R} . Consid\'erons une telle fonction f . On suppose donc qu'il existe un nombre finis de points

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \text{ dans } I,\tag{5.3.5}$$

tels que la restriction de f ainsi que de f' soit une fonction continue sur chacun des intervalles ferm\'es $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 1, \dots, n$. On note $f^+(a_i)$ (resp $f^-(a_i)$) la limite de f lorsque tend vers a_i par valeurs sup\'erieures (resp. inf\'erieures). On a alors le r\'esultat :

Proposition 5.3.1 (Formule des sauts). *La d\'eriv\'ee au sens des distribution de f est donn\'ee par*

$$f' = f' \mathbf{1}_{I \setminus \{a_1, \dots, a_n\}} + \sum_{i=1}^n (f^+(a_i) - f^-(a_i)) \delta_{a_i}.\tag{5.3.6}$$

Dans la formule (5.3.6) la fonction $f' \mathbf{1}_{I \setminus \{a_1, \dots, a_n\}}$ d\'esigne la fonction dont la valeur sur $I \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ est donn\'e par la d\'eriv\'ee classique de f . Elle est ainsi d\'efinie presque partout sur I (sauf pr\'ecisement au points a_i), et est donc une fonction localement int\'egrable.

D\'emonstration. On se donne une fonction test $\varphi \in (I)$, o\`u I a la forme $I =]a, b[$. On a, en \\'ecrivant $f = L_f$

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_I f(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_a^{a_1} f(x) \varphi'(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{a_n}^b f(x) \varphi'(x) dx\end{aligned}$$

Par hypoth\`ese la restriction de f \`a chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ est de classe C^1 , de sorte que l'on peut \\'ecrire, en int\'egrant par parties

$$\begin{aligned}-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \varphi'(x) dx &= [f(x) \varphi(x)]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= -(f^-(a_{i+1}) \varphi(a_{i+1}) - f^+(a_i) \varphi(a_i)) + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) \varphi(x) dx,\end{aligned}$$

et de m\^eme on a

$$-\int_a^{a_1} f(x) \varphi'(x) dx = -f^-(a_1) \varphi(a_1) + \int_a^{a_1} f'(x) \varphi(x) dx$$

et

$$-\int_{a_n}^b f(x) \varphi'(x) dx = f^+(a_n) \varphi(a_n) + \int_{a_n}^b f'(x) \varphi(x) dx.$$

En regroupant tous ces termes, il vient donc

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle &= -f(a_1)\varphi(a_1) + f(a_n)\varphi(a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (f^+(a_i)\varphi(a_i) - f^-(a_{i+1})\varphi(a_{i+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \int_a^{a_1} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{a_n}^b f'(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

soit

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_I f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=1}^n (f^+(a_i) - f^-(a_i))\varphi(a_i).$$

ce qui donne bien le résultat. \square

3. *Dérivation de la fonction $\ln|x|$.* Cette fonction est localement intégrable, elle définit donc une distribution. Pour calculer la dérivée de cette distribution, on peut écrire

$$\langle \ln|x|', \varphi \rangle = -\langle \ln|x|, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx. \quad (5.3.7)$$

la fonction $\ln|x|$ est régulière sur \mathbb{R} , sauf bien entendu à l'origine où elle diverge. On a de plus $\ln|x|' = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous allons intégrer par parties, dans l'intégrale de (5.3.7) en prenant soin d'isoler la singularité en 0. A cet effet, on introduit un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on écrit

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx = A_\varepsilon + B_\varepsilon,$$

où

$$A_\varepsilon = \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx \text{ et } B_\varepsilon = \int_{|x| \leq \varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx.$$

La fonction $\ln|x|$ étant intégrable dans un voisinage de 0, on a, par convergence dominée⁶

$$|A_\varepsilon| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour B_ε , on peut utiliser une intégration par partie, ce qui amène à

$$B_\varepsilon = -\int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)]|\ln \varepsilon|.$$

Par la formule des accroissements finis, on observe que $[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \leq 2\|\varphi'\|_\infty \varepsilon$ de sorte que

$$[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)]|\ln \varepsilon| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En combinant les majoration précédente, on en déduit donc que

$$-\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \leq \varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle.$$

6. on peut aussi faire une majoration directe et noter que

$$|A_\varepsilon| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\ln|x||dx = 2\|\varphi\|_\infty [-x \ln x + x]_0^\varepsilon \leq 2\|\varphi\|_\infty \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

En revenant à (5.3.7) on obtient

$$\langle \ln |x|', \varphi \rangle = -\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

de sorte que

$$\ln |x|' = \text{vp} \frac{1}{x} \text{ au sens des distributions sur } \mathbb{R}.$$

5.3.2 Multiplication d'une distribution et d'une fonction C^∞

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , et $g \in C^\infty(\Omega)$. On définit le produit de multiplication gT par la formule

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \text{ pour toute fonction test } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.3.8)$$

Comme $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'expression du membre de droite est bien définie. on vérifie par ailleurs la propriété de continuité, de sorte que gT est bien une distribution. On a

Proposition 5.3.2. *Pour toute fonction $g \in C^\infty$ on a*

$$\text{supp}(gT) \subset \text{supp}(T)$$

et

$$\partial_i(gT) = g\partial_i T + \partial_i g T.$$

La preuve est laissée en exercice.

5.3.3 Les distributions à support compact

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact dans Ω , c'est à dire

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega), \text{supp}(T) \text{ est compact} \}.$$

Pour des distributions à support compact, on peut utiliser des fonctions tests C^∞ , mais pas nécessairement à support compact. Pour le voir, commençons par un résultat préliminaire :

Lemme 5.3.1. *Soit K une compact de \mathbb{R}^N , et soit $\delta > 0$. Il existe une fonction $\chi_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\chi_K(x) = 1 \text{ pour tout } x \in K_\delta,$$

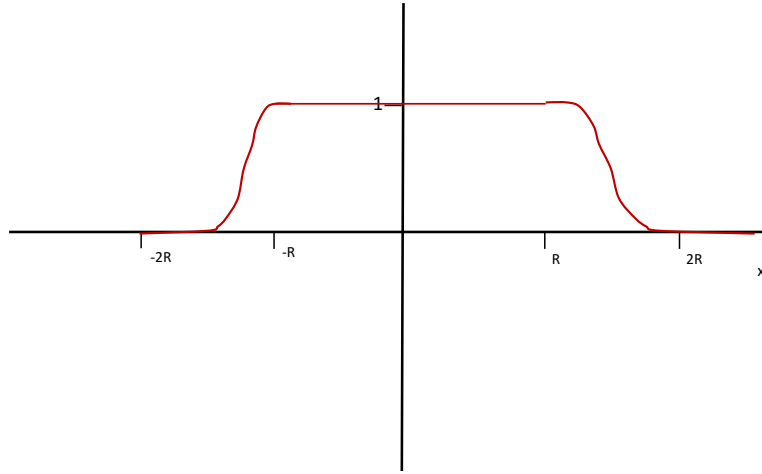
où

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N, \text{dist}(x, K) < \delta\} \supset K.$$

Démonstration. Introduisons l'ensemble Soit $\phi_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\text{supp}(\phi) \subset \mathbb{B}(0, \frac{\delta}{2})$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) dx = 1.$$

On vérifie (exercice) que la fonction $\chi_K = \mathbf{1}_{K_\delta} \star \phi$ à les propriétés demandées. □



Proposition 5.3.3. Soit T une distribution à support compact. Pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ la valeur $\langle T, \chi\varphi \rangle$ ne dépend pas du choix de $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\chi = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de } \text{supp}(T). \quad (5.3.9)$$

On définit alors

$$\langle T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \chi\varphi \rangle,$$

où χ désigne une fonction quelconque de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant (5.3.9).

Démonstration. Soient χ_1 et χ_2 deux fonctions de $C_c(\Omega)$ vérifiant (5.3.9) pour des voisinages ouverts V_1 et V_2 de K respectivement. On a donc

$$\chi_1|_{V_1} = 1 \text{ et } \chi_2|_{V_2} = 1,$$

de sorte que

$$(\chi_1 - \chi_2)|_{V_1 \cap V_2} = 0.$$

Comme $V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de $\text{supp}(T)$, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\text{supp}((\chi_1 - \chi_2)\varphi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset.$$

Ceci entraîne, par définition du support (voir (5.2.7)), que

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi \rangle = 0,$$

et donne donc

$$\langle T, \chi_1\varphi \rangle = \langle T, \chi_2\varphi \rangle.$$

□

5.3.4 Convolutions des distributions

Dans cette partie, on suppose que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Rappelons que si f et g sont deux fonctions bornées à support compact sur \mathbb{R}^N , alors on définit le produit de convolution de f et g par la formule

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

les deux formules se déduisant l'une de l'autre par changement de variable $u = x - y$. La fonction $f \star g$ est alors à support compact dans \mathbb{R}^N , son support vérifiant

$$\text{supp}(f \star g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$$

Nous avons par ailleurs vu de nombreuses extensions de cette formule sous des hypothèses, moins restrictives sur f et g , par exemple $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Notre but dans cette partie est d'étendre la définition aux distributions. Pour définir les convolutions des distributions, on va distinguer plusieurs cas, en partant du plus simple.

Convolution d'une distribution et d'une fonction régulière à support compact

On considère dans cette partie une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et une fonction $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour définir le produit de convolution $T \star \Psi$ nous allons imiter la formule et poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T \star \Psi(x) = \langle T, \Psi(x - \cdot) \rangle, \quad (5.3.11)$$

où $\Psi(x - \cdot)$ désigne la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ définie par $y \mapsto \Psi(x - y)$. On a alors

Proposition 5.3.4. *La fonction $x \mapsto T \star \Psi(x)$ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dont le support vérifie*

$$\text{supp}(T \star \Psi) \subset \text{supp}(T) + \text{supp}(\Psi). \quad (5.3.12)$$

On a la formule de dérivation

$$\partial_i(T \star \Psi) = \partial_i T \star \Psi = T \star \partial_i \Psi, \quad (5.3.13)$$

et de manière générale, pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}(T \star \Psi) = \partial^{\alpha_1} T \star \partial^{\alpha_2} \Psi.$$

Démonstration. Montrons que la fonction $T \star \Psi$ est de classe C^1 sur Ω , et établissons directement la formule (5.3.13). Soit $i \in \{1, \dots, N\}$, \vec{e}_i le i -ème vecteur de la base canonique, $x_0 \in \Omega$, h un petit incrément. Considérons la fonction Λ de la variable réelle h définie par

$$\Lambda(h) = T \star \Psi(x_0 + h\vec{e}_i) - T \star \Psi(x_0) - hT \star \partial_i \Psi \text{ pour } h \in [-1, 1]. \quad (5.3.14)$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\Lambda(h)| \leq Ch^2 \quad (5.3.15)$$

ce qui entraîne (5.3.13). Pour ce faire, on remarque d'abord que

$$\Lambda(h) = \langle T, \Phi_h \rangle \quad (5.3.16)$$

où Φ_h désigne la fonction définie par

$$\Phi_h(y) = [\Psi(x_0 + h - y) - \Psi(x_0 + h\vec{e}_i - y) - h\partial_i \Psi(x_0 - y)] \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Remarquons que la fonction $\Phi_D \in \mathcal{D}(\Omega)$, son support vérifie

$$\text{supp}(\Phi_h) \subset \text{supp}(\Psi) - h\vec{e}_i \subset K \equiv \text{supp}(\Psi) + \overline{\mathbb{B}(x_0, 1)} \text{ pour tout } h \in [-1, 1].$$

En utilisant la propriété de continuité de la distribution T pour le compact K , on en déduit qu'il existe une constante $C_K \geq 0$, un entier d_k tels que, pour tout $h \in [-1, 1]$

$$|\langle T, \Phi_h \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq d_k} \{|\partial^\alpha \Phi_h(y)|, y \in \Omega\} \quad (5.3.17)$$

Comme la fonction Φ_h correspond au développement limité par rapport à h de la fonction $\Psi(x_0 - \cdot)$, que pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_d \geq 0$, indépendante de h telle que

$$\sup_{|\alpha| \leq d} \{|\partial^\alpha \Phi_d(y)|, y \in \Omega\} \leq C_d h^2. \quad (5.3.18)$$

En combinant (5.3.18), (5.3.17), et (5.3.16) on obtient (5.3.15). Le reste de la proposition s'en déduit facilement. \square

Exemple 6. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ On a

$$\delta_0 \star \Psi = \Psi \text{ et plus généralement } \delta_a \star \Psi(\cdot) = \Psi(\cdot - a).$$

En effet, on a pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\delta_a \star \Psi(x) = \langle \delta_a, \Psi(x - \cdot) \rangle = \Psi(x - a).$$

Convolution d'une distribution avec une distribution à support compact

Pour définir la convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact, on raisonne en utilisant un argument de transposition basé sur le paragraphe précédent. Rappelons à cet effet que si f, g, h sont trois fonctions, supposées pour simplifier à support compact, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \star g(x) \cdot h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot \check{g} \star (x) dx \quad (5.3.19)$$

où $\check{g}(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f \star g(x) \cdot h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy \right) h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) h(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \check{g}(y - x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \cdot \check{g} \star (y) dy, \end{aligned}$$

ce qui donne bien (5.3.19). Cette identité suggère donc la définition suivante

Définition 8 (produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}'$). Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ une distribution à support compact. On définit le produit de convolution $T \star S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ comme la distribution donnée par la formule

$$\langle T \star S, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle \text{ pour toute fonction } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad (5.3.20)$$

où la distribution \check{S} est définie par

$$\langle \check{S}, \varphi \rangle = \langle S, \check{\varphi} \rangle \text{ pour toute fonction } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N). \quad (5.3.21)$$

Commentaire. 1) Dans le membre de droite de (5.3.4), l'expression $\check{S} \star \varphi$ est calculer par la méthode donnée au paragraphe précédent, à savoir, il s'agit du produit de convolution d'une distribution et d'une fonction régulière à support compact. La fonction $\check{S} \star \varphi$ est à support compact, puisque

$$\text{supp}(\check{S} \star \varphi) \subset \text{supp}(\check{S}) + \text{supp}(\varphi) = -\text{supp}(S) + \text{supp}(\varphi).$$

2) Il faut vérifier que cette définition est compatible avec la définition (5.3.11), c'est à dire que les résultats coïncident dans le cas où S est une fonction régulière à support compact. Cette propriété n'est pas évidente. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, il s'agit de démontrer que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} T \star \Psi(x) \cdot \varphi(x) dx = \langle T, \check{\Psi} \star \varphi \rangle \text{ où } T \star \Psi(x) = \langle T, \check{\Psi}(x - \cdot) \rangle. \quad (5.3.22)$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} T \star \Psi(x) \cdot \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle T, \check{\Psi}(x - \cdot) \rangle \cdot \varphi(x) dx \\ &= \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^N} \check{\Psi}(x - \cdot) \varphi(x) dx \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

3) la formule (5.3.21), qui définit \check{S} est vérifiée facilement sur des fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. On a en effet, en faisant un changement de variable $u = -x$. On a en effet

$$\begin{aligned} \langle \check{f}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(-x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u) \varphi(-u) du \\ &= \langle f, \check{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

on remarque par ailleurs que

$$\text{supp}(\check{S}) = -\text{supp} S, \quad (5.3.23)$$

que sorte que si S est à support compact, il en est de même pour \check{S} .

4) Bien entendu, il convient de vérifier la propriété de continuité de $T \star S$.

5) On peut changer l'ordre des convolutions définir le produit de convolution $S \star T$ de la manière suivante :

$$\langle S \star T, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi \rangle \text{ pour toute fonction } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N). \quad (5.3.24)$$

Ceci a un sens, car $\check{T} \star \varphi$ est une fonction C^∞ , définie au paragraphe précédent, et par ailleurs, comme S est une distribution à support compact, on peut prendre des fonctions tests qui ne sont pas à support compact.

Exemple 7 (Convolution avec la masse de Dirac). On a

Lemme 5.3.2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. On a

$$T \star \delta_0 = T.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\langle T \star \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_0 \star \varphi \rangle = \langle T, \delta_0 \star \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

où on a utilisé le fait que $\check{\delta}_0 = \delta_0$ et le fait que $\delta_0 \star \varphi = \varphi$ que nous avons vu dans la remarque 6. \square

Concernant la dérivation, on a les formules habituelles :

Proposition 5.3.5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. On a, pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^N$

$$\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} (T \star S) = \partial^{\alpha_1} T \star \partial^{\alpha_2} S.$$

Démonstration. On a, pour toute fonction test φ , on

$$\begin{aligned} \langle \partial^{\alpha_1 + \alpha_2} (T \star S), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha_1 + \alpha_2|} \langle (T \star S), \partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_1 + \alpha_2|} \langle (T, \check{S} \star \partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi) \rangle = (-1)^{|\alpha_1 + \alpha_2|} \langle (T, \partial^{\alpha_1} (\partial^{\alpha_2} \check{S} \star \varphi)) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha_2|} \langle (\partial^{\alpha_1} T, \partial^{\alpha_2} \check{S} \star \varphi) \rangle = \langle (\partial^{\alpha_1} T \star \partial^{\alpha_2} S), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

\square

Comme application, on peut interpréter l'opérateur de dérivation comme la convolution avec une distribution particulière, à savoir

$$\partial^\alpha T = T \star \partial^\alpha \delta_0. \quad (5.3.25)$$

5.4 Convergence des distributions

5.4.1 Définition et premières propriétés

On définit une notion de convergence pour les distributions de la manière suivante :

Définition 9. Soit $(T)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions. On dit que la suite T_n converge vers la distribution T et on note $T_n \rightarrow T$ lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \rightarrow \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (5.4.1)$$

Exemple 8. Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) dx = 1$. On pose, pour $\varepsilon > 0$

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Alors on a

$$\chi_\varepsilon \rightarrow \delta_0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.4.2)$$

Ainsi, la limite au sens des distributions d'une approximation de l'identité, c'est la masse de Dirac à l'origine.

Démonstration de (5.4.2). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a, en introduisant le changement de variable $u = \frac{x}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\langle \chi_\varepsilon, \varphi \rangle &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi(u) \varphi(\varepsilon u) du.\end{aligned}$$

On peut ensuite invoquer le théorème de convergence dominée : comme pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a la convergence simple

$$\chi(u) \varphi(\varepsilon u) \rightarrow \chi(u) \varphi(0) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et que l'hypothèse de domination est clairement vérifiée, on en déduit que

$$\langle \chi_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(u) \varphi(\varepsilon u) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \chi(u) \varphi(0) du = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^N} \chi(u) du = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

ce qui termine la preuve. □

Voyons maintenant quelques propriétés de cette notion de convergence. On a

Lemme 5.4.1. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. On suppose que

$$T_n \rightarrow T \text{ et lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ au sens des distributions.}$$

Alors on a, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T \text{ et lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ au sens des distributions.}$$

Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors on a

$$T_n \star S \rightarrow T \star S \text{ et lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ au sens des distributions.} \quad (5.4.3)$$

La preuve est immédiate en écrivant la définition de la convergence et celle de la dérivation. La proposition affirme donc que l'on a le droit de dériver les convergences. La convergence (5.4.3) se généralise comme suit :

Proposition 5.4.1. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ une suite de distributions à support compact. On suppose qu'il existe des distributions T et S telles que

$$T_n \rightarrow T \text{ et } S_n \rightarrow S \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ au sens des distributions.}$$

On suppose de plus qu'il existe un compact K tel que

$$\text{supp}(S_n) \subset K \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors S est une distribution à support compact, et

$$T_n \star S_n \rightarrow T \star S \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty \text{ au sens des distributions.}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a par définition

$$\langle T_n \star S_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \check{S}_n \star \varphi \rangle$$

On a

$$\text{supp}(\check{S}_n \star \varphi) \subset \text{supp}(\check{S}_n) + \text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(\varphi) - K$$

Par ailleurs, on peut démontrer, en utilisant la définition (5.3.11)

$$\partial^\alpha (\check{S}_n \star \varphi) = (\partial^\alpha \check{S}_n) \star \varphi \rightarrow (\partial^\alpha \check{S}) \star \varphi \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^N \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

c'est à dire

$$\check{S}_n \star \varphi \rightarrow \check{S} \star \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Il en résulte que

$$\langle T_n \star S_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \check{S}_n \star \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \check{S} \star \varphi \rangle = \langle T \star S, \varphi \rangle.$$

□

5.4.2 Approximation des distributions par des fonctions régulières

Proposition 5.4.2. *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est une limite au sens des distributions de fonctions T_ε dans C^∞ . On peut choisir T_ε de sorte que*

$$\text{supp} T_\varepsilon \subset \text{supp} T + \mathbb{B}(0, \varepsilon) \subset K \equiv \text{supp} T + \mathbb{B}(0, 1) \text{ pour } 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Démonstration. On prend la famille $(\chi_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ introduite dans l'exemple (8), en supposant de plus que $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\text{supp} \chi \subset \mathbb{B}(0, 1)$. On a alors

$$\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \text{supp} \chi_\varepsilon \subset \mathbb{B}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{B}(0, 1) \text{ pour } 0 < \varepsilon \leq 1,$$

et de plus

$$\chi_\varepsilon \rightarrow \delta_0 \text{ au sens des distributions lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

On a donc, grâce à la Proposition (5.4.1)

$$T_\varepsilon \equiv T_\varepsilon \star \chi_\varepsilon \rightarrow T \star \delta_0 = T \text{ au sens des distributions lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

Comme T_ε est une application C^∞ la propriété est démontrée.

□

5.4.3 Quelques conséquences

Voici quelques propriétés des convolutions qui se démontrent facilement grâce aux approximations par des fonctions régulières.

Proposition 5.4.3. *Soit T et S deux distributions à support compact. On a*

$$T \star S = S \star T.$$

Si $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est une autre distribution à support compact, alors on a

$$T \star (S \star U) = (T \star S) \star U.$$

Démonstration. .On pose, comme ci-dessus pour $0 < \varepsilon \leq 1$

$$T_\varepsilon = T \star \chi_\varepsilon, S_\varepsilon = S \star \chi_\varepsilon \text{ et } U_\varepsilon = U \star \chi_\varepsilon.$$

Comme $T_\varepsilon, S_\varepsilon, U_\varepsilon$ sont des fonctions à support compact, on a

$$T_\varepsilon \star S_\varepsilon = S_\varepsilon \star T_\varepsilon \text{ et } T_\varepsilon \star (S_\varepsilon \star U_\varepsilon) = (T_\varepsilon \star S_\varepsilon) \star U_\varepsilon. \quad (5.4.4)$$

En utilisant la Proposition 5.4.1 on obtient

$$T_\varepsilon \star S_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T \star S \text{ et } S_\varepsilon \star T_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S \star T \quad (5.4.5)$$

En combinant (5.4.5) et (5.4.4) on obtient la première relation. On déduit de même la seconde, en observant que

$$(T_\varepsilon \star S_\varepsilon) \star U_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (T \star S) \star U \text{ et } (T_\varepsilon \star (S_\varepsilon \star U_\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T \star (S \star U) \quad (5.4.6)$$

□

Chapitre 6

Distributions et EDP

6.1 Introduction

Nous allons voir dans ce chapitre comment la théorie des distributions fournit un nouvel éclairage sur plusieurs résultats concernant des EDP que nous avons présentées jusqu'à présent. Elle permet en particulier de donner un cadre naturel à la notion de solution fondamentale.

6.2 La notion de solution fondamentale

L'étude des équations aux dérivées partielles que nous avons menée au cours des chapitres précédents nous avait montré que des fonctions particulières jouent un rôle important dans la description des solutions. Nous revenons sur ces fonctions, en y apportant le nouvel éclairage que nous procure la théorie des distributions.

6.2.1 Etude du noyau de la chaleur

Au chapitre 4 nous avons montré, au paragraphe 4.5.2 comment représenter les propriétés des solutions de l'équation de la chaleur avec terme source à l'aide du *noyau de la chaleur* \mathbf{H} : cette dernière est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ par

$$\mathbf{H}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (6.2.1)$$

Cette fonction est clairement régulière pour sur le demi-espace $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, puisque c'est le facteur $\frac{1}{t}$ dans cette expression qui est susceptible d'induire des singularités. Par ailleurs, on remarque que, si $x \neq 0$, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{H}(x, t) = 0,$$

de manière uniforme par rapport à x de sorte que l'on peut prolonger \mathbf{H} de manière continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en posant

$$\mathbf{H}(x, t) = 0 \text{ pour } t \leq 0, (x, t) \neq (0, 0). \quad (6.2.2)$$

La fonction \mathbf{H} ainsi prolongée possède les propriétés suivantes :

Proposition 6.2.1. *Le noyau de la chaleur \mathbf{H} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et appartient à $L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Il vérifie l'équation de la chaleur homogène sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, c'est à dire que l'on a*

$$\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (6.2.3)$$

Par ailleurs, on a les propriétés

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, t) > 0 \text{ pour tous } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, t) dx = 1 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et} \\ \mathbf{H}(\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 \text{ uniformément sur } D_A \equiv \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq A\}, \forall A > 0. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

Démonstration. Pour la première assertion, on sait déjà que \mathbf{H} est C^∞ sur chacun des domaines $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et $\mathbb{R} \times]-\infty, 0[$. Il reste donc à voir si \mathbf{H} est régulière au voisinage des points de l'axe $\{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour s'en convaincre, on calcule les dérivées partielles de \mathbf{H} à un ordre quelconque, et on vérifie qu'elles convergent uniformément vers zéro dans le voisinage de tout point de $\{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ce qui entraîne le résultat. Par ailleurs, comme l'équation de la chaleur (6.2.3) est vérifiée sur chacun des domaines $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et $\mathbb{R} \times]-\infty, 0[$, elle est vérifiée par continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ce qui établit l'équation (6.2.3).

Pour voir que \mathbf{H} est localement intégrable, on remarque que, pour tous $a < b$ de \mathbb{R} , \mathbf{H} est intégrable sur la bande $\mathbb{R} \times [a, b]$, car, comme \mathbf{H} est positive ou nulle, on a

$$\int_{\mathbb{R} \times [a, b]} |\mathbf{H}(x, t)| dx dt = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, t) dx \right) dt \leq b - a.$$

Soit alors K un compact de \mathbb{R}^2 . Comme, il existe des réels $a < b$ de \mathbb{R} tels que $K \subset \mathbb{R} \times [a, b]$, il vient

$$\int_K |\mathbf{H}(x, t)| dx dt \leq \int_{\mathbb{R} \times [a, b]} |\mathbf{H}(x, t)| dx dt \leq b - a,$$

et la conclusion en découle. □

Comme la fonction \mathbf{H} est localement intégrable, elle définit une distribution. On a

Théorème 6.2.1. *la fonction \mathbf{H} vérifie, au sens des distributions, l'équation*

$$\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx} = \delta_{(0,0)} \text{ au sens des distributions sur } \mathbb{R}^2. \quad (6.2.5)$$

Démonstration. Il faut montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\langle \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0, 0).$$

On a

$$\langle \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{H}, -\varphi_t - \varphi_{xx} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H}(x, t) \cdot [-\varphi_t - \varphi_{xx}](x, t) dx dt,$$

Il faut donc montrer

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H}(x, t) \cdot [-\varphi_t - \varphi_{xx}](x, t) dx dt = \varphi(0, 0). \quad (6.2.6)$$

On a, en posant, $\mathcal{D}_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, t > \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H}(x, t) \cdot [-\varphi_t - \varphi_{xx}](x, t) dx dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \mathbf{H}(x, t) \cdot [-\varphi_t - \varphi_{xx}](x, t) dx dt$$

Comme \mathbf{H} est régulière sur \mathcal{D}_ε , on peut intégrer par parties et écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \mathbf{H}(x, t) \cdot [-\varphi_t - \varphi_{xx}] (x, t) dx dt &= \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} [\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx}(x, t)] \cdot \varphi(x, t) dx dt \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) \cdot \varphi(x, \varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Comme \mathbf{H} vérifie l'équation de la chaleur $\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx} = 0$ sur \mathcal{D}_ε , on a

$$\int_{\mathcal{D}_\varepsilon} [\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_{xx}(x, t)] \cdot \varphi(x, t) dx dt = 0. \quad (6.2.8)$$

Pour le second terme de (6.2.6), on écrit

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) \cdot \varphi(x, \varepsilon) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx \quad (6.2.9)$$

Etudions maintenant la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de ces expressions. Comme $\mathbf{H}(\cdot, \varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une approximation de l'identité, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx \rightarrow \varphi(0, 0) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (6.2.10)$$

alors que, pour le deuxième terme par le théorème des accroissements, on a $\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0) \leq C\varepsilon$, d'où il résulte que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx \right| \leq C\varepsilon \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.2.11)$$

En combinant (6.2.7), (6.2.8), (6.2.10) et (6.2.11) on obtient (6.2.6). \square

6.2.2 Construction de solutions de l'équation avec terme source

Considérons une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ à support compact dans Ω . Nous cherchons ici à construire une distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$U_t - U_{xx} = S \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \quad (6.2.12)$$

Théorème 6.2.2. *La distribution*

$$U \equiv \mathbf{H} \star S \quad (6.2.13)$$

est solution de (6.2.12). si de plus S est une fonction continue, alors U est une fonction continue. Si S est une fonction bornée, à support inclus dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, alors U est une fonction bornée, et vérifie

$$U(x, t) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \leq 0. \quad (6.2.14)$$

Démonstration. Le membre de gauche de (6.2.13) et le produit de convolution d'une distribution (à savoir \mathbf{H} et d'une distribution à support compact, donc parfaitement définie d'après les règles définies au Chapitre 5. On a,

$$U_t - U_{xx} = (\mathbf{H} \star S)_t - (\mathbf{H} \star S)_{xx} = (\mathbf{H}_t \mathbf{H}_{xx}) \star S = \delta_0 \star S = S,$$

ce qui établit la première assertion. Comme \mathbf{H} est une fonction localement intégrable, et comme S est une fonction bornées à support compact, le produit de convolution est donné par

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H}(x - y, t - s) S(y, s) dy ds = \int_{s \leq t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) S(y, s) dy ds.$$

Si maintenant S est à support dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, on obtient $U = 0$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et

$$U(x, t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) S(y, s) \right) ds. \quad (6.2.15)$$

□

Commentaires

1) Au cours de la démonstration précédente, nous avons retrouvé l'expression (6.2.15) de la solution trouvée au chapitre 4 pour l'équation de la chaleur avec terme source S . Notons cependant une différence importante :

la solution donnée par (6.2.15) est une solution au sens des distributions.

Sous les hypothèses données, à savoir S bornées, mais pas nécessairement continue, il n'y a aucune raison pour que U soit une solution classique, c'est à dire suffisamment différentiable pour que l'équation ait un sens en tout point.

2) Sous la même généralité, il est difficile de donner un sens à la condition en $t = 0$. En revanche, si on suppose de plus que la restriction de S à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ est continue, alors on vérifie que U est continue sur \mathbb{R}^2 et donc que

$$U(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

6.3 Etude du noyau de Laplace

Dans cette partie, nous allons porter notre attention sur le noyau de Laplace sur \mathbb{R}^3 , à savoir la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}. \quad (6.3.1)$$

On vérifie tout d'abord :

Proposition 6.3.1. *La fonction \mathbf{G} est C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On a, de plus*

$$\Delta G(\mathbf{x}) = 0 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Pour démontrer la Proposition 6.3.1, nous allons utiliser le Lemme suivant :

Lemme 6.3.1. *Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k , et $g = f(|x|)$. Alors la fonction g est de classe C^k de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dans \mathbb{R} . De plus, si $k \geq 2$, alors on a*

$$\Delta g(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) (|\mathbf{x}|) \quad (6.3.2)$$

Démonstration du Lemme 6.3.1. Pour la première affirmation, on utilise le fait que l'application $\mathbf{r} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Pour la seconde, on peut faire le calcul directement. On a tout d'abord

$$\vec{\nabla} \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\mathbf{r}(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}(\mathbf{x})}.$$

Par la règle de dérivation des fonction composées, on a donc, comme $g = f \circ \mathbf{r}$

$$\vec{\nabla} g(\mathbf{x}) = \frac{df}{dr}(\mathbf{r}(\mathbf{x})) \cdot \vec{\nabla} \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} f'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{r}(\mathbf{x})}.$$

Comme $\Delta g(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \left(\vec{\nabla} g \right)(\mathbf{x})$, il vient

$$\Delta g(\mathbf{x}) = 3 \frac{f'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{r}(\mathbf{x})} + \sum_{i=1}^3 x_i^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{r}(\mathbf{x})} \right) = 3 \frac{f'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{r}(\mathbf{x})} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{r}(\mathbf{x})} \right).$$

ce qui, en développant, donne bien (6.3.2). □

Démonstration de la Proposition 6.3.1. On applique le Lemme 6.3.1 pour la fonction $f(r) = \frac{1}{r}$. On trouve donc

$$r^2 \frac{df}{dr} = -1 \text{ et donc } \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0,$$

ce qui entraîne le résultat. □

La fonction \mathbf{G} est localement intégrable sur \mathbb{R}^3 , car pour tout $R \geq 0$, on a, en utilisant des coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}(R)} \mathbf{G}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{B}(R)} \frac{1}{|\mathbf{x}|} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^R \frac{1}{r} r^2 dr = \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2} < +\infty. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

La fonction \mathbf{G} définit donc une distribution sur \mathbb{R}^3 . On a :

Théorème 6.3.1. *La fonction \mathbf{G} vérifie sur \mathbb{R}^3*

$$-\Delta \mathbf{G} = \delta_{(0,0,0)} \text{ au sens des distributions sur } \mathbb{R}^3.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ une fonction test. Il s'agit de montrer que

$$\langle \Delta \mathbf{G}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

c'est à dire, comme

$$\langle \Delta \mathbf{G}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{G}, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \Delta \varphi d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \varphi d\mathbf{x},$$

on doit montrer que

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \Delta \varphi d\mathbf{x} = \varphi(0). \quad (6.3.4)$$

Pour établir cette égalité, on procède comme pour le Théorème 6.2.2 : on introduit un petit paramètre $\varepsilon > 0$ que nous ferons ensuite tendre vers zéro et on estime l'intégrale du membre de gauche sur la région $\mathcal{D}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$, sur laquelle on peut utiliser la Proposition 6.3.1. On a en effet, par intégration par parties sur le domaine \mathcal{D}_ε , dont le bord est donné par la sphère $\partial\mathbb{B}(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = \varepsilon\}$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\varphi) &\equiv \int_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \Delta \varphi d\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\vec{\nabla} \varphi) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \vec{\nabla} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi d\mathbf{x} - \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \mathbf{G}(\sigma) [\vec{\nabla} \varphi(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|}] d\sigma \\ &= + \int_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \Delta \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \vec{\nabla} \varphi d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \varphi(\sigma) [\vec{\nabla} \mathbf{G}(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|}] d\sigma - \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \mathbf{G}(\sigma) [\vec{\nabla} \varphi(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|}] d\sigma \\ &= \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \varphi(\sigma) [\vec{\nabla} \mathbf{G}(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|}] d\sigma - \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \mathbf{G}(\sigma) [\vec{\nabla} \varphi(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|}] d\sigma = A_\varepsilon(\varphi) + B_\varepsilon(\varphi), \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

car $\Delta \mathbf{G} = 0$ sur \mathcal{D}_ε . Il reste à étudier chacune de ces deux intégrales de bord. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon| &\leq \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \mathbf{G}(\sigma) |\vec{\nabla} \varphi(\sigma)| d\sigma \leq \left(\int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{1}{4\pi|\sigma|} d\sigma \right) \|\vec{\nabla} \varphi\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \frac{1}{4\pi} d\sigma \right) \|\vec{\nabla} \varphi\|_\infty = \varepsilon \|\vec{\nabla} \varphi\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Pour le terme A_ε on observe que

$$\vec{\nabla} \mathbf{G}(\sigma) = \frac{\vec{\sigma}}{4\pi|\sigma|^3} = \frac{\vec{\sigma}}{4\pi\varepsilon^3} \text{ pour } \sigma \in \partial\mathbb{B}(\varepsilon),$$

de sorte que

$$\vec{\nabla} \mathbf{G}(\sigma) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\sigma|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \text{ pour } \sigma \in \partial\mathbb{B}(\varepsilon).$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \varphi(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \varphi(0) d\sigma + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} [\varphi(\sigma) - \varphi(0)] d\sigma \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} [\varphi(\sigma) - \varphi(0)] d\sigma. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon - \varphi(0)| &\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} |\varphi(\sigma) - \varphi(0)| d\sigma \\ &\leq \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial\mathbb{B}(\varepsilon)} \varepsilon d\sigma \right) \|\vec{\nabla} \varphi\|_\infty \leq \varepsilon \|\vec{\nabla} \varphi\|_\infty. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

En revenant à (6.3.5), on trouve donc, en utilisant (6.3.6) et (6.3.7)

$$I_\varepsilon(\varphi) = \varphi(0) + \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{O}(\varepsilon)$$

ce qui entraîne (6.3.4). □

6.3.1 Construction de solutions de l'équation de Poisson

Considérons une distribution $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ à support compact dans \mathbb{R}^3 . Nous cherchons à construire une distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$-\Delta U = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.3.8)$$

Cette équation est souvent appelée *équation de Poisson*.

Théorème 6.3.2. *La distribution*

$$U \equiv \mathbf{G} \star f \quad (6.3.9)$$

est solution de (6.3.8). si de plus f est une fonction de classe C^1 , alors U est une fonction de classe C^2 et vérifie l'équation au sens ponctuel, c'est à dire que l'on a

$$-\Delta U(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (6.3.10)$$

Démonstration. La preuve est tout à fait parallèle à celle du théorème 6.2.2. Le membre de gauche de (6.3.9) et le produit de convolution d'une distribution (à savoir \mathbf{G} et d'une distribution à support compact, donc parfaitement définie d'après les règles définies au Chapitre 5. On a,

$$-\Delta U = -\Delta(\mathbf{G} \star f) = \Delta \mathbf{G} \star f = \delta_0 \star f = f,$$

ce qui établit la première assertion. □

6.4 La notion de solution élémentaire

Nous avons vu dans les deux sections précédentes, comment des distributions particulières permettent de représenter l'ensemble des solutions d'une équation aux dérivées partielles. La technique n'est pas spécifique aux équations considérées, et s'étend à l'ensemble des équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Soit $N \in \mathbb{N}$, considérons un opérateur différentiel $\mathcal{P}(D)$ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, c'est à dire une application linéaire de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ vers $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de la forme

$$\mathcal{P}(D)U = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \partial^\alpha U \quad (6.4.1)$$

où I désigne un ensemble *fini* d'indices de dérivation $I \subset \mathbb{N}^N$, et où pour $\alpha \in I$, a_α désigne un nombre réel.

Exemple 9. Nous avons vu plusieurs exemple de tels opérateurs, qui interviennent pour définir des EDP. Pour l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} nous avons $N = 2$, $I = \{(0, 1), (2, 0)\}$ avec $a_{(0,1)} = 1$ et $a_{(2,0)} = -1$, qui nous donnent bien

$$\mathcal{P}(D)U = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Pour l'équation de Poisson sur \mathbb{R}^3 , on a $N = 3$, $I = \{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$ et $a_{(2,0,0)} = a_{(0,2,0)} = a_{(0,0,2)} = -1$, ce qui donne

$$\mathcal{P}(D)U = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = -\Delta U.$$

Définition 10. On appelle solution élémentaire d'un opérateur différentiel $\mathcal{P}(D)$ une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de l'équation

$$\mathcal{P}(D)E \equiv \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \partial^\alpha E = \delta_0.$$

Cette définition est motivée par la recherche de solution au problème : trouver $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\mathcal{P}(D)U \equiv \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \partial^\alpha U = S \quad (6.4.2)$$

où $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est une distribution donnée. On a alors :

Théorème 6.4.1. Soit E une solution élémentaire de $\mathcal{P}(D)$. La distribution

$$U = E \star S$$

est une solution de (6.4.2).

Démonstration. On a, en utilisant les propriétés du premier de convolution

$$\mathcal{P}(D)U = \mathcal{P}(D)(E \star S) = \mathcal{P}(D)(E) \star S = \delta_0 \star S = S,$$

ce qui établit le résultat. □

Bien entendu, la solution trouvée est une solution particulière. Pour trouver toutes les solutions, il faut s'intéresser au noyau $\text{Ker}(\mathcal{P}(D))$, c'est à dire au sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

$$\text{Ker}(\mathcal{P}(D)) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{P}(D)(T) = 0\}$$

Toute solution U de (6.4.2) a alors la forme

$$U = E \star S + T, \text{ où } T \in \text{Ker}(\mathcal{P}(D)).$$

Remarque 6.4.1. En général, $\text{Ker}(\mathcal{P}(D))$ n'est pas restreint au sous-espace nul. par exemple, dans le cas où $\mathcal{P}(D)$ correspond au noyau de la chaleur, $\text{Ker}(\mathcal{P}(D))$ contient toutes les fonction f de la forme

$$f(x, t) = ax + b, \text{ pour tous nombres } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Annexe A

Equations différentielles ordinaires

A.1 Introduction

A.1.1 Définition

De nombreux problèmes de modélisation consistent à déterminer les solutions d'équations différentielles ordinaires, c'est à dire déterminer des fonctions $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectorielle \mathbb{R}^N (ou plus généralement dans un espace de Banach X) solution d'une relation du type

$$F\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)\right) = 0, \forall t \in I, \quad (\text{A.1.1})$$

où $u', \dots, u^{(k)}$ désignent les dérivées successives de u . Ici F désigne une fonction scalaire donnée et suffisamment régulière sur $I \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_k$, où $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ désignent des ouverts de \mathbb{R}^N . Bien souvent, la relation (A.1.1) permet d'exprimer la dérivée d'ordre le plus élevé en fonction des dérivées d'ordre inférieur, c'est à dire que la relation (A.1.1) se ramène à

$$u^{(k)}(t) = G\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)\right), \quad (\text{A.1.2})$$

où G désigne une fonction sur $I \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_{k-1}$, à valeurs dans \mathbb{R}^N qui se déduit de la fonction F . Si l'équation peut se mettre sous la forme (A.1.2), alors on parle d'une équation différentielle de degré k .

Remarque A.1.1. L'équation (A.1.2) est en fait un système de n équations scalaires couplées.

Remarquons que, quitte à augmenter la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée, toutes les équations différentielles ordinaires peuvent se ramener à des équations d'ordre 1. Introduisons en effet la fonction $U : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times k}$ définie par

$$U(t) = \left(u(t), \dots, u^{(k-1)}(t)\right) \in \mathbb{R}^{N \times k}, \forall t \in I,$$

on vérifie que la fonction U est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}U = H(t, U(t)), \forall t \in I,$$

où H est une fonction de définie par

$$H(t, U(t)) = \begin{pmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & I \end{pmatrix} U(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

C'est pourquoi nous ne considérons dans la suite que *des équations ordinaires d'ordre 1*, c'est à dire de la forme

$$\frac{d}{dt} u = f(t, u(t)), \forall t \in I, \quad (\text{A.1.4})$$

que l'on écrira parfois sous forme simplifiée

$$u' = f(t, u).$$

Ici u désigne la fonction inconnue $I \rightarrow X$, où X désigne un espace de dimension finie \mathbb{R}^N ou de manière plus générale un espace de Banach, et f désigne une fonction donnée $f : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Lorsque la fonction f ne dépend pas de t , on dit que *l'équation est autonome*.

Remarque A.1.2. On peut toujours se ramener au cas d'équations autonomes, mais ceci au prix d'une augmentation de la dimension de l'espace d'arrivée. En effet, l'équation (C.1.3) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, u(t)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A.1.2 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy consiste à imposer la valeur de la fonction en un temps donné pour les solutions de l'équation d'ordre 1 (C.1.3). On se donne un point quelconque de $u_0 \in \mathbb{R}^N$, et on cherche les solutions de (C.1.3) qui vérifie la condition au temps $t = t_0$

$$u(t_0) = u_0. \quad (\text{A.1.5})$$

En général, on peut espérer avoir unicité pour les solutions de (C.1.3)-(A.1.5). Nous verrons en particulier que c'est le cas si on impose des conditions de régularité pour f .

Remarque A.1.3. Dans le cas d'équation d'ordre k la condition de Cauchy consiste à imposer au temps t_0 les dérivés jusqu'à l'ordre $k - 1$

$$u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1, \dots, u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1}$$

où les nombres u_0, u_1, \dots, u_{k-1} sont donnés. On peut le voir en ramenant comme ci-dessous l'équation à une équation d'ordre 1.

A.2 Exemples d'intégrations explicites

A.2.1 Fonctions f indépendantes de u

Si la fonction f ne dépend que de la variable t , alors le problème de Cauchy se ramène simplement à

$$\frac{d}{dt} u = f(t), \forall t \in I, u(t_0) = u_0. \quad (\text{A.2.1})$$

On résoud cette équation par intégration. La solution est donnée par

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds, \forall t,$$

ce qui donne immédiatement existence et unicité du problème de Cauchy

A.2.2 Méthode de séparation des variables

Nous nous restreignons dans cette partie au cas des équations scalaires et nous supposons que la fonction f dans (C.1.3) peut s'exprimer sous forme d'un produit d'une fonction de la variable t et d'une fonction de la variable u , c'est à dire que f a la forme

$$f(t, u) = a(t)g(u), \quad (\text{A.2.2})$$

où h et g sont des fonctions d'une variable réelle supposées continues. Le problème de Cauchy s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t)g(u(t)), \forall t \in I, u(t_0) = u_0. \quad (\text{A.2.3})$$

Voyons maintenant comment trouver des solutions à cette équation. Distinguons tout d'abord le cas où $g(u_0) = 0$, auquel cas la fonction constante $u(t) = u_0$ est bien une solution de l'équation. Dans le cas contraire, on peut, par continuité, diviser par $g(u(t))$ dans un voisinage de t_0 de sorte que l'on obtient

$$\frac{1}{g(u(t))} \frac{d}{dt}u(t) = a(t), \forall t \in I, u(t_0) = u_0. \quad (\text{A.2.4})$$

Introduisons maintenant Φ la primitive de la fonction $\frac{1}{g}$ définie par

$$\Phi(s) = \int_{u_0}^s \frac{1}{g(s)} ds.$$

La règle de dérivation des fonctions composées nous donne

$$\frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = \Phi'(u(t)) \frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{g(u(t))} \frac{d}{dt}u(t)$$

de sorte que l'équation (A.2.4) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = a(t)$$

équation que l'on peut intégrer directement comme

$$\Phi(u(t)) = A(t), \text{ où l'on a posé } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds. \quad (\text{A.2.5})$$

Comme Φ est strictement monotone près de u_0 , elle est localement inversible, de sorte que, au moins pour t proche de t_0 , on trouve une solution donnée par

$$u(t) = \Phi^{-1}(A(t)).$$

Remarque A.2.1. On présente souvent l'argument précédent en réécrivant (un peu librement il est vrai) l'équation (A.2.3) comme

$$\frac{du}{g(u)} = a(t)dt$$

que l'on intègre ensuite, en tenant compte de la donnée initiale $u(t_0) = u_0$, comme

$$\int_{u_0}^{u(t)} g(u)du = \int_{t_0}^t a(t)dt,$$

et l'on retrouve ainsi la relation (A.2.5).

Exemple 10. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = u^2(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.2.6})$$

Ici la fonction a est constante, égale à 1 alors que la fonction g est ici donnée par $g(s) = s^2$. Si $u_0 = 0$ alors on trouve une solution constante, $u(t) = 0$. Sinon, on peut écrire en suivant l'argument ci-dessus

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{u^2} du = \int_{t_0}^t ds,$$

ce qui donne $\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)} = t - t_0$ ou encore

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(t - t_0)}.$$

On voit que l'expression du membre de gauche n'a de sens que si $t \leq t_0 + \frac{1}{u_0}$ lorsque $u_0 > 0$, et $t \geq t_0 - \frac{1}{u_0}$ lorsque $u_0 < 0$. La solution n'existe donc pas sur tout \mathbb{R} , mais seulement respectivement sur $] -\infty, t_0 + \frac{1}{u_0}[$ et $] t_0 - \frac{1}{u_0}, +\infty[$. De plus elle diverge vers $+\infty$ et $-\infty$ respectivement, lorsque quand s'approche de la borne finie de l'intervalle de définition. On dit dans ce cas qu'il y a explosion en temps fini.

Exemple 11. Les équations linéaires. Considérons une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = a(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.2.7})$$

Il s'agit donc d'une équation à variables séparables avec $g(s) = s$. Elle est par ailleurs linéaire. En l'intégrant comme ci-dessus, on obtient

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{u} du = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

ce qui donne

$$\ln\left(\frac{u(t)}{u_0}\right) = \int_{t_0}^t a(s) ds \quad (\text{A.2.8})$$

d'où l'on déduit finalement que

$$u(t) = u_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

Ici la solution est définie pour tout temps.

A.2.3 Méthode de variation de la constante

Cette méthode permet de résoudre une variante de type *affine* de l'équation différentielle (A.2.6) de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = a(t)u(t) + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

Pour résoudre cette équation, on se sert de d'une solution particulière de (A.2.6), aussi appelée équation homogène, (pour $u_0 = 1$) donnée par

$$w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right),$$

et on cherche une solution de (A.2.9) de la forme

$$u(t) = c(t)w(t). \quad (\text{A.2.10})$$

Remarquons au passage que la fonction w ne s'annule pas, de sorte que l'on ne perd pas de solutions en cherchant la fonction c à la place de u . Remarquons également que, comme $w(t_0) = 1$, on obtient comme condition initiale pour la fonction c

$$c(t_0) = u_0$$

Si l'on substitue la forme (A.2.10) dans (A.2.9), on obtient,

$$w \frac{d}{dt} c + c \frac{d}{dt} w = acw + b$$

Comme w est solution de (A.2.6), on a $c \frac{d}{dt} w = caw$, de sorte que le terme acw apparaît des deux côtés de l'identité précédente. On obtient ainsi, en l'éliminant

$$\frac{d}{dt} c = bw^{-1},$$

équation qu'il est maintenant facile d'intégrer. On obtient

$$c(t) = u_0 + \int_{t_0}^t b(s) \left[\exp - \left(\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau \right) \right] ds.$$

en revenant à l'expression (A.2.10) on trouve finalement la solution

$$u(t) = u_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \left[\exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) \right] ds, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2.11})$$

Notons tout d'abord que la solution de (A.2.10) donnée par (A.2.11) est définie sur \mathbb{R} tout entier. L'expression (A.2.11) porte souvent le nom de *formule de Duhamel*. dans de nombreuses applications, la fonction b est souvent appelée *terme source*. L'expression du membre de droite de (A.2.11) comporte deux termes :

- Le premier, $u_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ correspond à la solution du problème sans terme source (solution de l'équation homogène). Il ne dépend que de la donnée initiale.
- le second, qui ne dépend que du terme source et est indépendant de la donnée initiale.

Remarque A.2.2. Si on connaît une solution particulière v_0 de l'équation affine (A.2.9) alors toutes les autres solutions s'en déduisent par ajout d'une solution de l'équation homogène, c'est à dire on la forme

$$u = v_0 + cw.$$

A.2.4 Équations différentielles vectorielles

Les résultats des deux derniers paragraphes s'étendent sans grandes difficultés aux cas des équations différentielles vectorielles. Soit $N \geq 1$, et considérons tout d'abord le cas linéaire et l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (\text{A.2.12})$$

où la fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ est maintenant une fonction à valeurs vectorielles $u = (u_1, \dots, u_N)$, où u_1, \dots, u_N désignent des fonctions scalaires, et où $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ désigne une fonction continue de I vers les applications linéaires de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N (que l'on peut éventuellement identifier avec l'ensemble des matrices carrées d'ordre N si, l'on identifie U avec un vecteur colonne). On vérifie que la fonction donnée par

$$u(t) = \left[\exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) \right] \cdot u_0$$

est bien solution de l'équation. Ici \exp désigne l'exponentielle des endomorphisme (ou, modulo l'identification, des matrices). De même une solution de l'équation différentielle affine

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t) + B(t) \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (\text{A.2.13})$$

où B désigne une fonction vectorielle de $I \rightarrow \mathbb{R}^N$ est donnée par la formule de Duhamel

$$u(t) = \left(\exp \left(\int_{t_0}^t A(s) ds \right) \right) \cdot u_0 + \int_{t_0}^t \left[\exp \left(\int_s^t A(\tau) d\tau \right) \right] \cdot B(s) ds, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2.14})$$

A.2.5 Remarques sur les solutions construites

Nous venant de voir que les solutions des équations différentielles linéaires et affines étaient définies sur \mathbb{R} tout entier, alors que les équations non-linéaires, comme celle traitée dans l'exemple 10 pouvaient n'avoir qu'un temps d'existence fini. De manière moins explicites, nos méthode de construction nous donnent (ou du moins suggèrent) également l'unicité des solutions dans les cas considéré. Ce type de résultats se généralise grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

Remarque A.2.3. Donnons néanmoins un exemple classique de non unicité. Considérons l'équation différentielle sur $I = [0, +\infty[$ définie par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \sqrt{u(t)} \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.15})$$

La fonction constante $u_0(t) = 0$ est clairement solution. Une autre solution peut-être trouvée en utilisant la méthode de séparation des constantes. En effet la primitive

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\sqrt{u}, \forall u \in [0, +\infty[$$

est finie pour tout réel u positif. Une solution est donc donnée par

$$u(t) = \Phi^{-1}(t) = \frac{t^2}{4}, \forall t \geq 0.$$

On combinant les deux solutions, on peut même construire *une infinité de solutions distinctes*. Considérons, pour $a \in \mathbb{R}^+$ donné, la fonction u_0 définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 & \text{pour } 0 \leq t \leq a \\ u_0(t) = \frac{(t-a)^2}{4} & \text{pour } t \geq a. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces fonctions sont bien des solutions de l'équation différentielle (A.2.15).

A.3 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce résultat affirme, sous des conditions assez générale sur f , l'existence et l'unicité des solutions sur un petit intervalle de temps. Nous supposons dans cette partie que la fonction au problème abstrait général et considérons les fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (C.1.3) avec donnée de Cauchy (A.1.5), c'est à dire

$$\frac{d}{dt}u = f(t, u(t)), \forall t \in I, u(t_0) = u_0. \quad (\text{A.3.1})$$

Nous supposons que la fonction f est *définie et continue* sur $\mathcal{J} \times \mathbb{R}^N$, où \mathcal{J} désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant u_0 . Nous supposons de plus qu'elle est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Cela signifie que pour tout couple $(t_1, x_1) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}$, et $\delta > 0$ tel que $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \in \mathcal{J}$, il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v| \text{ si } |t - t_1| \leq \delta \text{ et } |u| \leq R, |v| \leq R. \quad (\text{A.3.2})$$

On a alors

Théorème A.3.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Supposons que la fonction f soit Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Il existe un nombre positif $\tau > 0$ tel que, pour le problème (A.3.1) possède une unique solution $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ pour l'intervalle $I = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*

Si de plus f est de classe C^r , alors u est de classe C^r .

La démonstration de ce résultat sert de modèles aux divers résultats de même type pour des EDP que nous avons présenté dans le cours. C'est pourquoi, il est utile de donner les idées principales de la preuve.

Démonstration. Le point de départ, c'est de réécrire l'équation (A.3.1) sous forme d'une équation intégrale : la fonction u est solution de (A.3.1) si et seulement si on a

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds, \text{ pour tout } t \in I. \quad (\text{A.3.3})$$

Cette égalité de fonctions peut s'interpréter comme un point fixe dans l'espace des fonctions continues. Considérons à cet effet l'espace de Banach $X = C^0(X, \mathbb{R}^N)$ et l'application $T : X \rightarrow X$ qui à une fonction v de X associe la fonction de X définie par

$$T(v) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s))ds, \text{ pour tout } t \in I.$$

L'identité (A.3.3) devient alors

$$u = T(u), \quad (\text{A.3.4})$$

c'est à dire une identité de point fixe, comme annoncé. Pour montrer que cette équation possède une solution unique, nous allons utiliser le Théorème de point fixe de Picard, dont nous admettrons la démonstration :

Lemme A.3.1 (Théorème de point fixe de Picard). *Soit X un espace métrique complet et N une application contractante de X dans lui-même. Alors il existe un unique point fixe de N , c'est à dire un unique élément u_\star de X tel que $u_\star = N(u_\star)$.*

Pour terminer la démonstration, nous allons travailler non pas sur l'espace X tout entier, mais localiser un peu. Donnons nous un nombre $R > 0$, considérons la partie N de l'espace X définie par

$$N_\tau = \{v \in X, v(t) \in \mathcal{B}(u_0, R), \forall t \in I\},$$

où l'intervalle I est choisi de la forme $I = I_\tau = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, avec $\tau \leq \tau_0$, où $\tau_0 > 0$ est choisi tel que $I_0 = [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$. Pour utiliser le théorème de Picard sur N , nous allons commencer par montrer, que si τ est assez petit alors

$$T(N_\tau) \subset N_\tau. \quad (\text{A.3.5})$$

Pour le voir, on observe qu'il résulte de la continuité de f qu'il existe une constante M tel que

$$|f(t, w)| \leq M, \forall t \in I_0, \forall w \in \mathcal{B}(u_0, R)$$

On a alors, pour toute fonction $v \in N_\tau$

$$|T(v(t)) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \leq |t_0 - t| M \leq \tau M,$$

de sorte que $T(v) \in N_\tau$ si $\tau \leq \frac{R}{M}$, ce qui établit donc (A.3.5). Passons maintenant à la propriété de contraction. On utilise maintenant le fait que f est lipschitzienne par rapport à la dernière variable, ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe une constante $L \geq 0$ tel que

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq L|w_1 - w_2|, \forall t \in I_0, \forall w_1, w_2 \in \mathcal{B}(u_0, R).$$

Il en résulte que si v_1 et v_2 sont deux fonctions dans N_τ alors on a, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} |T(v_1(t)) - T(v_2(t))| &\leq \left| \int_{t_0}^t [f(s, v_1(s)) - f(s, v_2(s))] ds \right| \\ &\leq |t_0 - t| L \|v_1 - v_2\|_\infty, \\ &\leq \tau L \|v_1 - v_2\|_\infty, \end{aligned}$$

En passant au supremum sur I , on en déduit que

$$\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq \tau L \|v_1 - v_2\|_\infty,$$

de sorte que T est contractante sur N_τ dès que $\tau < \frac{1}{L}$; En conclusion, si on choisit τ de sorte que

$$\tau < \inf \left\{ \frac{R}{M}, \frac{1}{L} \right\} \quad (\text{A.3.6})$$

alors N_τ et T vérifie les hypothèses du Théorème de Picard : il existe donc un unique point fixe de T dans N_τ , et partant, une solution de l'équation sur I_τ . Cette solution est par ailleurs unique, si on se restreint aux espaces \mathbb{N}_τ , pour tout τ vérifiant l'inégalité (A.3.6). Un petit raisonnement laissé au lecteur montre alors que ceci est suffisant pour conclure. \square

A.3.1 Solutions maximales

Le théorème de Cauchy-Lipschitz fournit l'existence et l'unicité locale de solutions. En fait, il existe un plus grand intervalle sur lequel la solution du problème de Cauchy (A.3.1) existe. Considérons en effet deux intervalles ouverts I_1 et I_2 tels que $t_0 \in I_1 \cap I_2$, et supposons qu'il existe une solution u_1 (resp. u_2) du problème de Cauchy sur I_1 (resp. I_2). On a alors

$$u_1(t) = u_2(t), \forall t \in I_1 \cap I_2. \quad (\text{A.3.7})$$

Pour démontrer (A.3.7), on introduit l'ensemble $A = \{t \in I_1 \cap I_2, u_1(t) = u_2(t)\}$, qui est non vide, car il convient t_0 , fermé comme image réciproque d'un fermé (à savoir $\{0\}$) par une application continue (à savoir $u_2 - u_1$). Il s'agit également d'un sous-ensemble *ouvert* de $I_1 \cap I_2$: c'est une conséquence immédiate du théorème d'existence et d'unicité locale. Il en résulte que, comme $I_1 \cap I_2$ est connexe que $A = I_1 \cap I_2$ ¹.

Nous pouvons maintenant construction une solution de (A.3.1) sur l'ensemble $J = I \cup I_2$ en posant

$$u(t) = u_1(t) \forall t \in I_1 \text{ et } u(t) = u_2(t), \forall t \in I_2.$$

On vérifie aisément que la solution ainsi construite est solution de (A.3.1) sur J . En prenant la réunion de tous les intervalles sur lesquels la solution existe, on construit aisément abstraitement l'intervalle *maximal* d'existence de la solution. Notons $I_{\max} =]t_0 - T_{\max}^-, t_0 + T_{\max}^+[$ cet intervalle, qui est un ouvert non vide de \mathbb{R}^N , avec

$$\{t_0 - T_{\max}^-, t_0 + T_{\max}^+\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Le théorèmes suivant montre que la solution diverge lorsqu'on s'approche des bornes et dans le cas où ces dernières sont finies (on dit alors que *la solution sort de tout compact*).

Théorème A.3.2. *Supposons que $T_{\max}^+ < +\infty$ ($T_{\max}^- < +\infty$). Alors pour tout nombre arbitraire $A > 0$ donné, il existe $-T_{\max} < T_A^+ < T_{\max}^+$ (resp. $T_A^- \geq T_{\max}^-$) tel que*

$$|u(t)| \geq A \text{ si } t_0 + T_A^+ \leq t < T_{\max}^+ + t_0 \text{ (resp. si } T_{\max}^- + t_0 < t \leq t_0 + T_A^-). \quad (\text{A.3.8})$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que la conclusion (A.3.8) n'est pas vraie. Dans ce cas, il existe un nombre $A > 0$, et une suite de nombre $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n \leq t_0 + T_{\max}$ et $t_n^+ \rightarrow t_0 + T_{\max}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et tels que

$$|u(t_n^+)| \leq A.$$

Par compacité et quitte à extraire une sous-suite, on peut alors supposer qu'il existe un point $M^+ \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$u(t_n^+) \rightarrow M^+, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.3.9})$$

En revenant à démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut vérifier que l'on peut faire dépendre continuellement le temps d'existence local τ donné par ce théorème en fonction de la donnée initiale et du temps initial. En particulier, en prenant comme temps initial t_n^+ et comme donnée initiale $u(t_n^+)$, on en déduit de (A.3.9) qu'il existe $\tau_0 > 0$ tel que pour n assez grand, la solution u existe sur l'intervalle $]t_n^- - \tau_0, t_n^+ + \tau_0[$. Comme $t_n^+ \rightarrow t_0 + T_{\max}$, la solution existe, pour n assez grand sur $[t_0, T_{\max} + \frac{\tau_0}{2}]$, ce qui contredit la définition de l'intervalle maximal. \square

1. le seul sous-ensemble non vide d'un connexe qui est ouvert et fermé, c'est lui-même

A.4 Quelques propriétés

A.4.1 Un outil fondamental : les inégalités différentielles

Les inégalités différentielles sont des outils fondamentaux pour l'étude des équations différentielles ordinaires, mais aussi, comme nous le verrons dans le cours, dans celle des équations aux dérivées partielles. la forme général de telles inéquation est donnée par

$$\frac{d}{dt} u \leq f(t, u(t)), \forall t \in I, \quad (\text{A.4.1})$$

où les hypothèses sur f sont les mêmes de pour (C.1.3). Le but principal des de trouver des majorations aux solutions de cette inéquation, le plus souvent en la comparant aux solutions de l'équations (C.1.3). Commençons par traiter des cas simples : un énoncé plus complet sera donné en Section.

Exemples linéaires et affines

Considérons une inéquation. Quitte à changer l'origine des temps, posons $I = [0, T]$, et supposons qu'une fonction $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfait l'inégalité différentielle suivante :

$$u'(t) \leq a(t)u(t), \forall t \in [0, T], \quad (\text{A.4.2})$$

où a est une fonctions continue sur \mathbb{R} .

Lemme A.4.1. *Si la fonction u vérifie l'inégalité (A.4.2), alors on a la majoration*

$$u(t) \leq u(0) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right).$$

Démonstration. on vérifie en effet que

$$\frac{d}{dt} u(t) \exp - \left(\int_0^t a(s) ds \right) = (u'(t) - a(t)u(t)) \exp - \left(\int_0^t a(s) ds \right) \leq 0.$$

□

L'argument se généralise sans peine aux équations scalaires affines, en utilisant la méthode de séparation des variable, c'est à dire dans le cas où la fonction u vérifie une inégalité différentielle de la forme

$$u'(t) \leq b(t) + a(t)u(t), \forall t \in [0, T], \quad (\text{A.4.3})$$

où a et b sont des fonctions continues sur \mathbb{R} . On a

Lemme A.4.2. *Si la fonction u vérifie l'inégalité (A.4.2), alors on a la majoration*

$$u(t) \leq u(0) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) + \int_0^t b(s) \left[\exp \left(\int_s^t a(\tau) d\tau \right) \right] ds.$$

Démonstration. On écrit, comme précédemment

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) \exp - \left(\int_0^t a(s) ds \right) &= (u'(t) - a(t)u(t)) \exp - \left(\int_0^t a(s) ds \right) \\ &\leq b(t) \exp - \left(\int_0^t a(s) ds \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

On intégrant, cette relation, on obtient le résultat.

□

A.4.2 Le Lemme de Gronwall

Il s'agit d'une généralisation du Lemme A.4.2 : il porte sur une inégalité intégrale, alors que le Lemme A.4.2 est une inégalité différentielle

Lemme A.4.3 (Lemme de Gronwall). *Soit $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie l'inégalité intégrale*

$$v(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)v(s)ds, \forall t \in [0, T]. \quad (\text{A.4.5})$$

On a alors

$$v(t) \leq b(t) + \int_0^t \left(\exp \int_s^t a(\tau)d\tau \right) b(s)a(s)ds. \quad (\text{A.4.6})$$

Remarque A.4.1. Si b est dérivable, l'inégalité (A.4.6) peut se réécrire, en utilisant une intégration par parties en en remarquant que $\frac{d}{ds} \left(\exp \int_s^t a(\tau)d\tau \right) a(s) = -\frac{d}{ds} \left[\left(\exp \int_s^t a(\tau)d\tau \right) \right]$, sous la forme

$$v(t) \leq b(0) \int_0^t \left(\exp \int_0^s a(s)ds \right) + \int_0^t \left(\exp \int_s^t a(\tau)d\tau \right) b'(s)a(s)ds \quad (\text{A.4.7})$$

En particulier, dans le cas où la fonction b est constante, $b(t) = C$, l'inégalité (??) prend la forme simple suivante

$$v(t) \leq C \left(\exp \int_0^t a(s)ds \right). \quad (\text{A.4.8})$$

Démonstration. Introduisons la fonction auxiliaire w définie sur $[0, T]$ par

$$w(t) = \int_0^t a(s)v(s)ds, \forall t \in [0, T],$$

de sorte qu'en dérivant, on obtient

$$w'(t) = a(t)v(t) \leq a(t)(b(t) + w(t)) = a(t)b(t) + a(t)w(t), \forall t \in [0, T]$$

On reconnaît une inégalité différentielle pour la fonction w qui est de type affine (A.4.3) : Lemme A.4.2 nous donne alors, comme $w(0) = 0$

$$\begin{aligned} w(t) &\leq w(0) \exp \left(\int_0^t a(s)ds \right) + \int_0^t b(s)a(s) \left[\exp \left(\int_s^t a(\tau)d\tau \right) \right] ds \\ &\leq \int_0^t b(s)a(s) \left[\exp \left(\int_s^t a(\tau)d\tau \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Si on revient à l'inégalité (A.4.5), on observe que pour tout $t \geq 0$, on a $v(t) \leq b(t) + w(t)$, ce qui donne le résultat annoncé, en combinant avec l'inégalité précédente. \square

Annexe B

Rappels sur les fonctions de plusieurs variables

Nous rappelons dans cette partie quelques notions d'analyse vectorielle qui sont utilisées dans le polycopié, et précisons les notations.

Dans toute la suite, on considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^N , et on notera ϵ la base canonique donnée par $\epsilon = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ou les vecteurs sont donnés par $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. On munit cet espace vectoriel du produit scalaire habituel

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i \text{ pour } \vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_N)$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne correspondante, à savoir

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}.$$

Dans toute la suite Ω désigne un domaine *ouvert* et non vide \mathbb{R}^N . Nous considérerons des fonctions f définies sur Ω $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mapsto f(x_1, \dots, x_N)$.

B.1 La notion de dérivée partielle

Soit f une fonction définie sur Ω . Rappelons que la notion de dérivée partielle par rapport à la x_i en un point $M = (m_1, \dots, m_N) \in \mathcal{D}$ consiste à considérer la restriction f_i de la fonction f à la droite D_i parallèle à \vec{e}_i puis à prendre sa dérivée usuelle en M . Si on paramètre la droite D_i , on a ainsi

$$f_i(t) = f(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + t, m_{i+1}, m_N)$$

Définition 11. On appelle *dérivée partielle* de f en M_0 par rapport à la variable x_i la dérivée $f'_i(0)$ lorsqu'elle existe. On la notera

$$f'_{x_i}(M_0), \partial_{x_i} f(M_0) \text{ ou encore } \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0).$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m_1, \dots, m_i, m_i + t, m_{i+1}, m_N) - f(m_1, \dots, m_i, \dots, m_N)}{t}.$$

Lorsque les dérivées partielles existent en tout point du domaine Ω , elles définissent des fonctions à N variables sur ce domaine, que l'on note f'_{x_i} , ou $\partial_{x_i} f$, $\partial_{x_i} f$, ou encore $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Exemple 12. Considérons le polynôme $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 + x_1 x - 2$. On a

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \text{ et } f'_{x_2} = 3x_2^2 + x_2.$$

Comme dans le cas de fonctions d'une seule variable, on a les règles de calcul suivantes :

Proposition B.1.1. On a pour $i = 1, \dots, N$ $(f \pm g)_{x_i} = f'_{x_i} \pm g'_{x_i}$, $(fg)_{x_i} = f'_{x_i} g + f g'_{x_i}$. De plus si là où g ne s'annule pas

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i} g - f g'_{x_i}}{g^2}.$$

B.1.1 Développement limité à l'ordre 1

Afin d'écrire un développement limité au premier ordre près d'un point $M = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ donné, nous allons supposer que la fonction possède des dérivées partielles en ce point, mais également que ces dernières soient définies et continues dans un voisinage de ce point : ces hypothèses sont donc plus exigeantes que celle que l'on demande en dimension 1. Dans ces conditions, on a :

Proposition B.1.2. On suppose que f'_{x_i} est définie et continue près de $M = (m_1, m_2)$, pour $i = 1, 2$. Alors on a pour $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ petit

$$f(M + h) = f(m_1 + h_1, m_2 + h_2, \dots, m_N) = f(M) + \sum_{i=1}^N h_i f'_{x_i}(m_1, m_2) + \|h\| \varepsilon(h), \quad (\text{B.1.1})$$

où la fonction ε est définie près de 0 et vérifie $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

B.1.2 Le gradient

Si f possède des dérivées partielles en M , alors on introduit le vecteur gradient de f , $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ou ∇f défini par

$$\overrightarrow{\nabla} f(M) = (f'_{x_1}(M), f'_{x_2}(M), \dots, f'_{x_N}(M)).$$

Si f est dérivable sur tout le domaine Ω , on définit ainsi une nouvelle fonction de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^N . Sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent sur f , on peut écrire le développement (B.1.1) sous la forme condensée

$$f'(M + h) - f(M) = h \cdot \overrightarrow{\nabla} f(M) + \|h\| \varepsilon(h). \quad (\text{B.1.2})$$

Considérons maintenant une droite quelconque D passant par M , de vecteur directeur \vec{e} , supposé de norme 1, c'est à dire $\|\vec{e}\| = 1$. Si on paramètre la droite par $M(t) = M + t\vec{e}$, et que s'intéresse à la restriction f_D définie par

$$f_D(s) = f(M + s\vec{e})$$

la formule (B.1.2) montre alors que f_D est dérivable en 0 et

$$f'_D(0) = \vec{e} \cdot \overrightarrow{\nabla} f(m). \quad (\text{B.1.3})$$

On peut en conclure que f est dérivable dans toutes les directions, et que la direction dans laquelle la fonction croît le plus est celle du *gradient*. On a par ailleurs :

Proposition B.1.3. Soit f une fonction continue, possédant des dérivées partielles sur Ω supposé connexe, et telle que $\vec{\nabla} f = 0$. Alors la fonction f est constante, c'est à dire il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = c$.

B.1.3 Intégration par parties

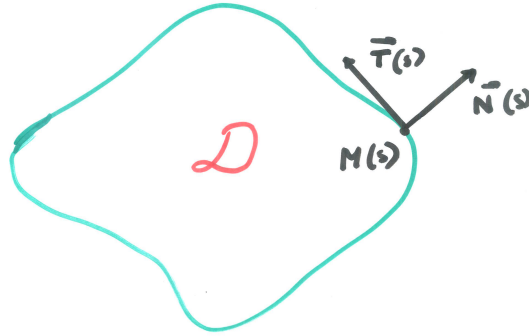
Considérons tout d'abord une fonction u dont les dérivées partielles sont continues et à support compact dans Ω . On vérifie, que, pour tout $i = 1, \dots, N$, on a en utilisant le théorème de Fubini (en découpant dans des plans contenant la direction \vec{e}_i) que

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) dx = 0. \quad (\text{B.1.4})$$

Il en résulte que si v est une fonction dont les dérivées sont continues, alors

$$\int_{\Omega} v(x) \partial_i u(x) dx = - \int_{\Omega} \partial_i v(x) u(x) dx, \quad (\text{B.1.5})$$

identité que l'on démontre en appliquant (B.1.4) à la fonction produit uv . Lorsque la fonction u ne s'annule pas au bord de Ω , l'intégration par parties fait apparaître un terme de bord. Supposons à cet effet que le bord $\partial\Omega$ de Ω soit régulier (une courbe en dimension 2, une surface en dimension 3...). En un point $\sigma \in \partial\Omega$, on note $\vec{n}(\sigma) = (n_1(\sigma), \dots, n_N(\sigma))$ le vecteur unitaire orthogonal à $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur.



Proposition B.1.4. Si u est une fonction dérivable sur $\bar{\Omega}$ de dérivée continue, on a

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma \quad (\text{B.1.6})$$

et de même si u et v sont des fonctions dérivables sur $\bar{\Omega}$ de dérivées continues, on a

$$\int_{\Omega} v(x) \partial_i u(x) dx = - \int_{\Omega} \partial_i v(x) u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(\sigma) v(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma. \quad (\text{B.1.7})$$

B.1.4 Dérivation des fonctions composées

Voyons maintenant comment dériver des fonctions composées, en commençant un exemple simple.

Première exemple. Soit f une fonction de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} et g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère la fonction G définie par $G = g \circ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto G(M) = g(f(M))$, pour $M \in \mathbb{R}^2$. On a alors

Proposition B.1.5. *On suppose f dérivable en M et g dérivable en $f(M)$. Alors G est dérivable en M et*

$$G'_{x_i}(M) = g'(f(M))f'_{x_i}(M), \text{ pour } i = 1, \dots, N$$

et donc $\vec{\nabla} G(M) = g'(f(M)) \vec{\nabla} f(M)$.

Preuve. On se ramène à la dimension 1. Pour $i = 1$, et $t \in \mathbb{R}$ petit, on a, si $M = (m_1, m_2)$

$$G(m_1 + t, \dots, m_N) - G(m_1, \dots, m_N) = g(f(m_1 + t, \dots, m_N)) - g(f(m_1, \dots, m_N)) = g(f_1(t)) - g(f_1(0)),$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(m_1 + t, \dots, m_N) - G(m_1, \dots, m_N)}{t} = (g \circ f_1)'(0) = g'(f_1(0))f'_1(0) = g'(f(M))f'_{x_1}(M).$$

□

Deuxième exemple. Soit f une fonction de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , dérivable dans le voisinage d'un point M , de dérivées continues, et soit \vec{N} une fonction d'une variable s à valeur dans \mathbb{R}^2

$$\vec{N}(s) = (n_1(s), \dots, n_M(s)),$$

telle que $\vec{N}(s_0) = M$. On suppose \vec{N} dérivable en s_0 . Une telle fonction \vec{N} représente par exemple le paramétrage d'une courbe \mathbb{C} , ou la trajectoire d'une particule se déplaçant le long de \mathbb{C} au cours du temps désigné par la variable s . On s'intéresse ici à fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(s) = f \circ \vec{N}(s) = f(\vec{N}(s)).$$

Si on reprend l'image de la particule se déplaçant sur la courbe \mathbb{C} , alors $\phi(s)$ désigne la valeur de f au temps s mesurée sur la particule.

Proposition B.1.6. *La fonction $\phi = f \circ \vec{N}$ de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} est dérivable en s_0 et*

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= (f \circ \vec{N})'(s_0) = \vec{N}'(s_0) \cdot \vec{\nabla} f(M) \\ &= \vec{N}'(s_0) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{N}(s_0)). \end{aligned}$$

Idée de la démonstration. On passe par les développements limités à l'ordre 1. On écrit tout d'abord le développement limité de \vec{n} près de s_0 , à savoir pour h petit

$$\vec{n}(s_0 + h) = \vec{n}(s_0) + h \cdot \vec{n}'(s_0) + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Posons $\vec{k}(h) = \vec{n}(s_0 + h) - M = h(\vec{n}'(s_0) + \varepsilon(h))$, de sorte que $\|\vec{k}(h)\| \leq C|h|$ pour h petit, où C est une constante. Utilisons maintenant B.1.2, à savoir

$$\begin{aligned} f(n(s_0 + h)) - f(M) &= f(M + \vec{k}(h)) - f(M) = \vec{k}(h) \cdot \vec{\nabla} f(M) + \|\vec{k}(h)\| \tilde{\varepsilon}(\vec{k}(h)), \text{ où } \tilde{\varepsilon}(\vec{k}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \vec{k} \rightarrow 0, \\ &= h(\vec{n}'(s_0) \cdot \vec{\nabla} f(M) + h \cdot \varepsilon_2(h)), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

La matrice Jacobienne

Il est possible de donner une forme plus concise aux résultats précédents en introduisant la matrice Jacobienne. Considérons de manière générale une application \vec{f} de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^n , où les nombres k et n peuvent prendre les valeurs 1, 2, voire 3 dans les chapitres ultérieurs. On peut écrire

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)).$$

On dira que \vec{f} est dérivable si et seulement si toutes les fonctions f_i le sont, pour $i = 1, \dots, n$. On introduit alors la matrice $D_{\vec{f}}$ à n lignes et k colonnes, matrice dont les lignes sont composées des gradients des fonctions f_i , $i = 1, \dots, n$. On a donc

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.8})$$

Exemple 13. Soit F est une application linéaire de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^n définie par une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}$$

à n lignes et k colonnes, c'est à dire telle que

$${}^t f(\vec{X}) = A^t \vec{X}. \quad (\text{B.1.9})$$

Ici ${}^t f$ et ${}^t \vec{X}$ désignent les vecteurs **colonnes** associés aux vecteurs *lignes* $\vec{f}(x)$ et \vec{X} respectivement (ce sont aussi leurs matrices transposée, si on considère ces vecteurs lignes comme des matrices). Plus précisément, on a

$${}^t \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \text{ et } {}^t \vec{f}(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

la relation matricielle (B.1.9) donne donc $f_i(X) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,k}x_k$. Alors

$$D_f(X) = A, \forall X \in \mathbb{R}^k.$$

Si par ailleurs, on note comme précédemment

$${}^t \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$$

alors les développements limités du type (B.1.2) peuvent s'écrire

$$\vec{f}(M+h) - \vec{f}(M) = D_f(M) \cdot {}^t \vec{h} + \|h\| \varepsilon(h), \quad (\text{B.1.10})$$

où ε tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (c'est à dire chacune de ses composantes), et où le produit $D_f(M) \cdot {}^t \vec{h}$ désigne la multiplication des matrices, c'est à dire

$$D_f(M) \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}.$$

Le produit précédent définit une application linéaire $\vec{h} \mapsto D_f(M) \cdot \vec{h}$ de \mathbb{R}^k à valeurs dans \mathbb{R}^n . Cette application est appelée *application linéaire tangente* à f au point M . L'application *affine*

$$\vec{h} \mapsto D_f(M) \cdot \vec{h} + \vec{f}(M)$$

est une *approximation* à l'ordre 1 de f près de M .

Proposition B.1.7. *Si Φ est une fonction \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^k dérivable de dérivées continues près de M et f une fonction de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^ℓ , dérivable de dérivées continues près de $\Phi(M)$ alors $f \circ \Phi$ est dérivable près de M et la matrice Jacobienne de la composée $f \circ \Phi$ en M est donnée par*

$$D_{f \circ \Phi}(M) = D_f(\Phi(M)) \cdot D_\Phi(M). \quad (\text{B.1.11})$$

Si Φ est une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n , dérivable de dérivées continues près de M , telle que Φ^{-1} existe près de $\Phi(M)$ et telle que $d_\Phi(M)$ soit inversible, alors

$$D_{\Phi^{-1}}(\Phi(M)) = (D_\Phi(M))^{-1}. \quad (\text{B.1.12})$$

B.1.5 Changements de coordonnées

La *notion de composition des applications* permet de formaliser la notion de *changement de coordonnées* et comment les formules précédentes permettent de mener les calculs qui lui correspondent.

Considérons pour fixer les idées deux domaines Ω et Θ de \mathbb{R}^N et une application \mathcal{U} de Ω vers Θ supposée bijective et différentiable, ainsi que son application inverse $\mathcal{U}^{-1} : \Theta \rightarrow \Omega$. Un point M quelconque de Ω peut se définir par ses coordonnées cartésiennes, le N -uplet (m_1, \dots, m_N) . Soit alors le N -uplet de nombres $(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{U}(m_1, \dots, m_N) \in \Theta$. Comme \mathcal{U} est supposée bijective, ces deux nombres permettent également de définir le point M sans ambiguïté puisque $M = \mathcal{U}^{-1}(u_1, u_2)$. On obtient ainsi une nouvelle façon de repérer les points de Ω , en utilisant comme carte Θ . Le couple (u_1, \dots, u_N) fournit donc de nouvelles coordonnées

Si f est maintenant une fonction définie sur Ω . Si nous désirons décrire la fonction f à l'aide des nouvelles coordonnées, nous sommes conduits à considérer la fonction $\tilde{f} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f} = f \circ \mathcal{U}^{-1}$ soit

$$\tilde{f}(u_1, \dots, u_N) = f(\mathcal{U}^{-1}(u_1, \dots, u_N)) = f(m_1, \dots, m_N) \text{ où } \mathcal{U}(m_1, \dots, m_N) = (u_1, \dots, u_N). \quad (\text{B.1.13})$$

Les dérivées partielles de \tilde{f} par rapports aux nouvelles coordonnées (u_1, \dots, u_N) se calculent alors grâce à la formule de dérivation composée, à savoir, en posant $U = (u_1, \dots, u_N)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}'_{u_1}(U) = \sum_{i=1}^N f'_{x_i}(M) (x_i)'_{u_1}(U) \\ \dots \\ \tilde{f}'_{u_N}(U) = \sum_{i=1}^N f'_{x_i}(M) (x_N)'_{u_N}(U). \end{array} \right.$$

qui s'écrit encore, en version plus condensée, par

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{(u_1, \dots, u_N)} \tilde{f}(U) &= \vec{\nabla}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M) \cdot D_{\mathcal{U}^{-1}}(U) \\ &= \vec{\nabla}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M) \cdot (D_{\mathcal{U}}(M))^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.14})$$

Comme \mathcal{U} et \mathcal{U}^{-1} jouent des rôles symétriques, on trouve aussi

$$\vec{\nabla}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M) = \vec{\nabla}_{(u_1, \dots, u_n)} \tilde{f}(U) \cdot D_{\mathcal{U}}(M) \quad (\text{B.1.15})$$

Illustrant ces opérations sur deux exemples. Comme nous le verrons sur ces deux exemples, c'est l'application inverse \mathcal{U}^{-1} qui sera le plus souvent la plus simple à décrire explicitement, de sorte que c'est la (B.1.15) que nous utiliserons le plus souvent.

Changement de coordonnées linéaires

si le couple (x'_1, \dots, x'_N) désigne les coordonnées d'un point X dans une nouvelle base $\epsilon' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_N)$, alors on a la relation

$$X = PX' \text{ où } {}^tX' = (x'_1, x'_2) \text{ et } {}^tX = (x_1, x_2),$$

où P désigne la matrice de passage de la base ϵ vers la base ϵ' . Nous sommes donc dans la situation où l'application \mathcal{U} est donnée par

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = {}^t \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathcal{U}^{-1}(x'_1, x'_2) = {}^t \left(P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right).$$

Il en résulte que pour tout (x'_1, x'_2) on a

$$D_{\mathcal{U}^{-1}}(x'_1, x'_2) = P,$$

Si f est une fonction définie sur un domaine quelconque Ω de \mathbb{R}^2 , Il faut prendre pour domaine d'arrivée $\Theta = {}^t(P^{-1}(\Omega))$. Soit $M' = (x'_1, x'_2)$ un élément quelconque de Θ et \tilde{f} la fonction définie sur Θ par

$$\tilde{f}(x'_1, x'_2) = f \circ \mathcal{U}^{-1}(x'_1, x'_2) = f(x_1, x_2) = f \left({}^t \left(P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right) \right).$$

En appliquant la formule (B.1.14), on trouve alors

$$\vec{\nabla}_{(x'_1, x'_2)} \tilde{f}(x'_1, x'_2) = \vec{\nabla}_{(x_1, x_2)} f(x_1, x_2) \cdot P$$

Coordonnées polaires

Illustrons les changements de coordonnées sur les coordonnées polaires. Rappelons que si $X = (x_1, x_2)$ est un point du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées polaires (r, θ) , avec $r \geq 0$, alors

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Nous pouvons interpréter les coordonnées polaires (r, θ) à l'aide du formalisme introduit plus haut. Ceci nous conduit à considérer l'application \mathcal{U} de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\mathcal{U}(r, \theta) = (\mathcal{U}_1(r, \theta), \mathcal{U}_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (\text{B.1.16})$$

On vérifie que \mathcal{U} est dérivable sur son domaine de définition et que ses dérivées partielles sont continues. En effet, on a

$$\begin{cases} (\mathcal{U}_1)'_r(r, \theta) = \cos \theta, & (\mathcal{U}_1)'_\theta(r, \theta) = -r \sin \theta \\ (\mathcal{U}_2)'_r(r, \theta) = \sin \theta, & (\mathcal{U}_2)'_\theta(r, \theta) = r \cos \theta. \end{cases}$$

Si f est une fonction définie en coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) , son expression *en coordonnées polaires* sera $\tilde{f} = f \circ \mathcal{U}$. On aura donc

$$\tilde{f}'_r(r, \theta) = f'_{x_1}(M) \sin \theta + f'_{x_2}(M) \cos \theta \quad (\text{B.1.17})$$

et

$$\tilde{f}'_\theta(M) = f'_{x_1}(M) r \cos \theta - f'_{x_2}(M) r \sin \theta. \quad (\text{B.1.18})$$

On peut réécrire ces formules en introduisant les vecteurs unitaires

$$\vec{e}_r = \frac{M}{\|M\|} = (\cos \theta, \sin \theta), \text{ et } \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (\text{B.1.19})$$

qui sont orthogonaux, de sorte que

$$\tilde{f}_r(r, \theta) = \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} f \text{ et } \tilde{f}_\theta(r, \theta) = r \vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} f.$$

Remarquons que l'on peut déduire de ces calculs l'expression de $\vec{\nabla}_{x_1, x_2} f$ en coordonnées polaires, à savoir

$$\vec{\nabla}_{(x_1, x_2)} f(M) = \tilde{f}_r(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \tilde{f}_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta. \quad (\text{B.1.20})$$

Remarque B.1.1. Dans de nombreux problèmes la fonction à étudier est exprimée en coordonnées polaires, mais c'est le gradient par rapport aux variables d'origine que l'on désire connaître : c'est pourquoi la formule (B.1.20) est très utile. Un cas particulier important est celui où la fonction \tilde{f} ne dépend pas de θ . Dans ce cas on a donc $\tilde{f}_\theta = 0$ et donc

$$\vec{\nabla}_{(x_1, x_2)} f(M) = \tilde{f}_r(r, \theta) \vec{e}_r$$

B.1.6 Changement de coordonnées et intégration

Replaçons nous dans la situation décrite au début de ce paragraphe, et considérons deux domaines Ω et Θ de \mathbb{R}^N , et une application $\Phi : \Theta \rightarrow \Omega$ supposée bijective. On considère par ailleurs une fonction f définie sur Ω . La fonction $f \circ \Phi$ est donc définie sur Θ . On a alors

Théorème B.1.1. *On a*

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 dx_2 = \int_{\Theta} f(\Phi(u_1, \dots, u_N)) |\det(D\Phi(u_1, u_2))| du_1 du_2$$

où $\det D\Phi$ désigne le déterminant jacobien

$$\det D\Phi(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_N) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_N}(u_1, \dots, u_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_N) & \dots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_N}(u_1, \dots, u_N) \end{vmatrix}.$$

Remarque B.1.2. Notons qu'il faut prendre ici la valeur absolue du déterminant Jacobien (qui peut bien entendu être négatif).

B.2 Dérivées secondes

Lorsque f est dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition, ceci définit de nouvelles fonctions, les dérivées partielles. Lorsque ces dernières sont elles-mêmes dérivables, les dérivées de ces dernières sont *appelées les dérivées secondes*. Ainsi, si f est une fonction sur \mathbb{R}^2 on a 4 dérivées partielles d'ordre 2, à savoir

$$f''_{x_1 x_1} = (f'_{x_1})_{x_1}, f''_{x_1 x_2} = (f'_{x_1})_{x_2}, f''_{x_2 x_1} = (f'_{x_2})_{x_1} \text{ et } f''_{x_2 x_2} = (f'_{x_2})_{x_2}$$

on utilise aussi souvent les notations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}.$$

En guise d'exemple on peut remarquer que si f est une fonction *affine*, toutes les dérivées secondes sont *nulls*. C'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante, lorsque le domaine est connexe.

Remarque B.2.1. Pour $M = (m_1, \dots, m_N)$ donnée, et f possédant des dérivées partielles près de M , considérons de nouveaux les fonctions f_i qui correspondent aux restrictions de f aux droites passant par M et parallèles aux deux axes de coordonnées. On a alors $f_1(t) = f(m_1 + t, \dots, m_N)$ de sorte que *par définition* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(m_1 + t, m_2) = f'_1(t)$ et donc, en appliquant cette relation à la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_1}(m_1 + t, \dots, m_N)$ on obtient la relation $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(m_1 + t, \dots, m_N) = f''_1(t)$, et plus généralement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(m_1, \dots, m_i + t, m_N) = f''_i(t).$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(M)$ peuvent donc se calculer en ne connaissant que la restriction de f restrictions de f aux droites passant par M et parallèles aux deux axes de coordonnées. Ceci n'est pas vrai pour les dérivées partielles "croisées" $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$.

Théorème B.2.1 (Lemme de Schwarz). *Si les dérivées secondes existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a l'identité*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (M) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (M).$$

c'est à dire $f''_{x_i x_j}(M) = f''_{x_j x_i}(M)$.

B.2.1 Développement limité à l'ordre 2 et matrice Hessienne

Théorème B.2.2. *Si les dérivées secondes existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a pour $h = (h_1, \dots, h_N)$ petit*

$$f(M + h) = f(M) + h \cdot \vec{\nabla} f(M) + \frac{1}{2} \text{Hess } f(M) \cdot (h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h), \quad (\text{B.2.1})$$

où la fonction ε tend vers 0 quand h tend vers 0 et où $\text{Hess } f(M)$ désigne la matrice symétrique

$$\begin{aligned}\text{Hess } f(M) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(M) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(M) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_N}(M) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et l'expression $\text{Hess } f(M) \cdot (\vec{h}, \vec{h})$ la forme quadratique associée, c'est à dire

$$\begin{aligned}\text{Hess } f(M) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) &= \vec{h} \cdot \text{Hess } f(M)^t \vec{h} \\ &= (h_1, \dots, h_N) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(M) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(M) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(M) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_N}(M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_N \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice $\text{Hess } f(M)$ est appelée matrice Hessienne de f au point M . Notons qu'en vertu du lemme de Schwartz, il s'agit d'une matrice symétrique.

B.2.2 Dérivée seconde de la restriction à une droite

Considérons un point $M = (m_1, \dots, m_N)$ de \mathbb{R}^N , $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N)$ un vecteur non nul et la droite \mathcal{D} passant par M et de vecteur directeur \vec{n} , c'est à dire l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} = (x_1, x_2) = M + t\vec{n}\}.$$

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 et f_D sa restriction à \mathcal{D} , c'est à dire la fonction sur \mathbb{R} définie par

$$f_D(t) = f(M + t\vec{n}), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lemme B.2.1. Si f possède des dérivées secondes continues alors $f_D''(t) = \vec{n} \cdot \text{Hess } f(M + t\vec{n}) \cdot {}^t \vec{n}$.

La preuve est laissée en exercice (on pourra utiliser le développement à l'ordre 2).

B.2.3 Dérivée seconde de la restriction à une courbe

Considérons de manière plus générale une courbe paramétrique \mathcal{C} image d'une application de classe C^2 $\vec{N} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, $s \mapsto \vec{N}(s)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , c'est à dire $\mathcal{C} = \{\vec{N}(s), s \in I\}$, et la restriction f_C de f à \mathcal{C} , c'est à dire la fonction $f_C : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_C(s) = f \circ \vec{N}(s) = f(\vec{N}(s)), \forall s \in I.$$

On montre alors que, pour tout $s \in I$, on a

$$f_C''(s) = \vec{N}'(s) \cdot \text{Hess } f(M + t\vec{n}) \cdot {}^t \vec{N}'(s) + \vec{N}''(s) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{N}(s)). \quad (\text{B.2.2})$$

En effet, on a

$$f_C(s+h) = f(\vec{N}(s+h)) = f(\vec{N}(s) + h\vec{N}'(s) + \frac{1}{2}h^2\vec{N}''(s) + o(h^2)).$$

En utilisant ce développement comme au paragraphe précédent, on obtient le résultat désiré.

Exemple 14. Illustrons (B.2.2) dans le cas où \mathcal{C} est un cercle de rayon $R > 0$. Dans ce cas, on peut prendre $I = [0, 2\pi[$, et pour paramétrage la fonction \vec{N} définie, pour $\theta \in [0, 2\pi[$ par

$$\vec{N}(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta) = R \vec{e}_r(\theta),$$

où les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont définis en (B.1.19). On a

$$\vec{N}'(\theta) = (-R \sin \theta, R \cos \theta) = R \vec{e}_\theta(\theta) \text{ et } \vec{N}''(\theta) = -(R \cos \theta, R \sin \theta) = -R \vec{e}_r(\theta).$$

En appliquant la formule (B.2.2), on obtient

$$f_C''(\theta) = R^2 \vec{e}_\theta \cdot \text{Hess} f(\vec{n}(\theta)) \cdot {}^t \vec{e}_\theta - R \vec{e}_r(\theta) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{N}(\theta)). \quad (\text{B.2.3})$$

Nous avons déjà rencontré le deuxième terme du membre de droite de (B.2.3) dans (B.1.20). Si on introduit des coordonnées polaires en posant $\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on obtient

$$\vec{e}_r(\theta) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{N}(\theta)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R, \theta).$$

Pour interpréter (B.2.3), introduisons la droite \mathcal{D}_θ passant par le point $\vec{N}(\theta)$ et de vecteur directeur \vec{e}_θ , c'est à dire

$$\mathcal{D}_\theta = \{\vec{N}(\theta) + s \vec{e}_\theta, s \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{B.2.4})$$

de sorte que $\mathcal{D}(\theta)$ est la droite affine tangente en $N(\theta)$ à la courbe \mathcal{C} . Posons

$$f_{D_\theta}(s) = f(\vec{N}(\theta) + s \vec{e}_\theta).$$

On a $f_{D_\theta}''(0) = \vec{e}_\theta \cdot \text{Hess} f(\vec{n}(\theta)) \cdot {}^t \vec{e}_\theta$, et en reportant les résultats précédents dans (B.2.3) on obtient

$$f_C''(\theta) = R^2 f_{D_\theta}''(0) - R \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R, \theta). \quad (\text{B.2.5})$$

Remarque B.2.2. On remarquera que $f_C''(\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(R, \theta)$, de sorte que l'identité (B.2.5) donne

$$R^2 f_{D_\theta}''(0) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(R, \theta) + R \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R, \theta). \quad (\text{B.2.6})$$

B.2.4 Transformation par changement de base

Considérons une nouvelle base ϵ' telle que la matrice de passage $P = P(\epsilon \rightarrow \epsilon')$ est donnée par (??). Pour $M = (m_1, \dots, m_N)$ point de \mathbb{R}^N , soient (m'_1, \dots, m'_N) ses nouvelles coordonnées dans la base ϵ' . De manière générale, si (x_1, \dots, x_N) sont des coordonnées dans la base ϵ , notons (x'_1, \dots, x'_N) les nouvelles coordonnées correspondantes dans la base ϵ' . Considérons sa matrice hessienne dans la nouvelle base

$$\text{Hess}_{(x'_1, \dots, x'_N)} \tilde{f}(M') = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x'_i \partial x'_j}(M) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

Cherchons la relation entre les matrices $\text{Hess}_{(x'_1, \dots, x'_N)} \tilde{f}(M')$ et $\text{Hess}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M)$

Proposition B.2.1. *On a*

$$\text{Hess}_{(x'_1, \dots, x'_N)} \tilde{f}(M') = {}^t P \cdot \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M) \cdot P. \quad (\text{B.2.7})$$

La preuve, de nouveau, peut se faire grâce aux développements limités.

Remarque B.2.3. Nous n'avons considéré plus haut que des changements de coordonnées linéaires ou affine. Dans le cas général des changements de coordonnées curvilignes, la transformation de la matrice Hessienne est beaucoup plus compliquée, et fait apparaître des termes d'ordre 1.

B.2.5 Changements de bases orthonormées

Nous supposons de plus dans ce paragraphe que la nouvelle base ϵ' est orthonormée, ce qui est équivalent au fait que la matrice de passage P est orthogonale, ou encore au fait que

$$P^{-1} = {}^t P.$$

Dans ce cas, la transformation (B.2.7) s'écrit

$$\text{Hess}_{(x'_1, \dots, x'_N)} \tilde{f}(M') = P^{-1} \cdot \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_N)} f(M) \cdot P. \quad (\text{B.2.8})$$

Le cours d'algèbre linéaire nous apprend alors que le polynôme caractéristique de $\text{Hess}_{(x'_1, x'_2)} \tilde{f}(M')$ est le même que celui de $\text{Hess}_{(x_1, x_2)} f(M)$. En d'autres termes, il ne dépend pas de la base *orthonormée* considérée. On en déduit :

Proposition B.2.2. *Soit f une fonction définie sur un domaine de \mathbb{R}^2 , de dérivées secondes continues. Le calcul des valeurs propres, du déterminant, et de la trace de la matrice hessienne $\text{Hess } f(M)$ ne dépendent pas de la base orthonormée choisie.*

Remarquons par ailleurs que la matrice $\text{Hess } f(M)$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée (qui dépend bien entendu du point M considéré).

B.2.6 Le laplacien

Soit f une fonction définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N , de dérivées secondes continues.

Définition 12. *On appelle laplacien de f , et on note Δf la fonction définie sur le domaine de définition de f par*

$$\begin{aligned} \Delta f(M) &= \text{Tr}(\text{Hess}_{x_1, \dots, x_N} f(M)) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M) \quad \text{pour tout } M \in \Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

Il résulte immédiatement de la Proposition B.2.2 que le *calcul du laplacien est indépendant de la base orthonormée choisie*. Plus précisément, si $\epsilon' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ désigne une nouvelle base orthonormée, (x'_1, x'_2) les coordonnées d'un point (x_1, x_2) dans cette nouvelle base, on a pour tout point M de coordonnées (m_1, m_2) dans l'ancienne base et (m'_1, m'_2) dans la nouvelle base

$$\Delta_{(x_1, \dots, x_N)} f(m_1, m_2) = \Delta_{(x'_1, \dots, x'_N)} \tilde{f}(m'_1, \dots, m'_N),$$

où \mathfrak{f} est l'expression de f dans la nouvelle base. On peut réécrire l'identité comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(m_1, \dots, m_N) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(m_1, \dots, m_N) = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_1'^2}(m_1', \dots, m_N') + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_N'^2}(m_1', \dots, m_N'). \quad (\text{B.2.10})$$

La laplacien est par ailleurs égal à la somme des valeurs propres de la matrice Hessienne au point considéré.

Expression du Laplacien en coordonnées polaires

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 de dérivées secondes continues, et considérons, comme en (B.1.16) l'expression \tilde{f} de la fonction en coordonnées polaire, à savoir

$$\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta), r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Soit $M_0 = (m_1^0, m_2^0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ un point donné de \mathbb{R}^2 , voyons comment on peut exprimer $\Delta f(M)$ en fonction de \tilde{f} et de ses dérivées partielles premières et secondes. Pour faire ce calcul, nous allons commencer par introduire une nouvelle base orthonormée, mieux adaptée au calcul. Considérons à cet effet tout d'abord la base orthonormée \vec{e}_1', \vec{e}_2' données par

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_{r_0} = \frac{M_0}{\|M_0\|} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0), \text{ et } \vec{e}_2' = \vec{e}_{\theta_0} = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$$

Soit (x_1', x_2') les coordonnées d'un point (x_1, x_2) dans cette nouvelle base, et \mathfrak{f} l'expression de la fonction dans cette nouvelle base, de sorte que $\mathfrak{f}(x_1', x_2') = f(x_1, x_2) = \tilde{f}(r, \theta)$. Par ailleurs, comme $O\vec{M}_0 = r_0 \vec{e}_{r_0} = r_0 \vec{e}_1'$, on a $m_1'^0 = r_0$ et $m_2'^0 = 0$. Il résulte de (B.2.10) que

$$\Delta f(m_1^0, m_2^0) = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_1'^2}(m_1'^0, m_2'^0) + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_2'^2}(m_1'^0, m_2'^0). \quad (\text{B.2.11})$$

Montrons tout d'abord que

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_1'^2}(m_1'^0, m_2'^0) = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_1'^2}(r_0, 0) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r_0, \theta_0). \quad (\text{B.2.12})$$

Le terme de gauche correspond en effet à la dérivée seconde de la restriction de la fonction f à la droite D_1 d'équation $x_2' = 0$ dans la base \mathfrak{e}' , mais qui est aussi la droite d'équation $\theta = \theta_0$ en coordonnées polaires, de sorte que $x_1' = r$ sur cette droite, pour $x_1' \geq 0$.

Considérons maintenant maintenant la droite D_2 d'équation $x_1' = r_0$, perpendiculaire à la droite \mathcal{D}_1 en M_0 . Si f_{D_2} désigne la restriction de f à cette droite obtenue en posant

$$f_{D_2}(s) = f(M_0 + s\vec{e}_2') = f(M_0 + s\vec{e}_{\theta_0}),$$

on obtient

$$f_{D_2}''(0) = \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial x_2'^2}(r_0, 0).$$

Ceci correspond exactement à la situation étudiée dans l'exemple 14 du paragraphe B.2.3. On peut donc utiliser (B.2.6) pour conclure que

$$r_0^2 f_{D_2}''(0) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r_0, \theta_0) + r_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \theta_0). \quad (\text{B.2.13})$$

En combinant les identités (B.2.11), (B.2.12) et (B.2.13) on obtient :

Proposition B.2.3. *Le laplacien se calcule en coordonnées polaires de la façon suivante :*

$$\Delta f(M_0) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r_0, \theta_0) + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r_0, \theta_0). \quad (\text{B.2.14})$$

Remarque B.2.4. On pourra observer que

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right) (r_0, \theta_0) \right]. \quad (\text{B.2.15})$$

Laplacien de fonctions possédant la symétrie radiale

Considérons une fonction f définie sur \mathbb{R}^N (ou une boule centrée à l'origine qui possède la symétrie radiale : ceci signifie qu'il existe une fonction $\tilde{f} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_1, \dots, x_N) = \tilde{f}(\|x\|), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

On vérifie dans ce cas de nouveau que la fonction Δf possède également la symétrie radiale et que

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \frac{d^2}{dr^2} \tilde{f}(\|x\|) + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \tilde{f}(\|x\|) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{d}{dr} \tilde{f} \right) (\|x\|) \quad (\text{B.2.16})$$

La preuve est laissée en exercice.

B.2.7 Conditions du premier et du deuxième ordre en un point minimisant intérieur

Rappelons pour commencer que si f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , si f possède un minimum local en un point x_0 intérieur à I , alors nécessairement, on doit avoir les deux conditions

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) \geq 0. \quad (\text{B.2.17})$$

La première identité est appelée *condition de premier ordre* en x_0 , alors que l'inégalité est appelée *condition du deuxième ordre*. Cherchons s'il existe des conditions similaires pour les fonctions plusieurs variables. Considérons à cet effet une fonction f définie et possédant des dérivées secondes continues sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^n .

Définition 13. *On dit que le point $M_0 = (m_1^0, \dots, m_N^0) \in \Omega$ est un point intérieur au domaine \mathcal{D} s'il existe un nombre $r_0 > 0$ tel que le disque $\mathcal{B}(M_0, r_0) = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, (x_1 - m_1^0)^2 + \dots + (x_N - m_N^0)^2 < r_0^2\}$ de centre M_0 et de rayon r_0 est inclus dans \mathcal{D} .*

Définition 14. *Soit M_0 un point de \mathcal{D} . On dit que M_0 est un point de minimum local de la fonction f définie sur \mathcal{D} si et seulement si il existe un rayon $r_1 > 0$ tel que*

$$f(M) \geq f(M_0) \text{ pour } M \in \mathcal{D} \cap D(M_0, r_1).$$

On dit que M_0 est un point de maximum local de la fonction f définie sur \mathcal{D} si et seulement si il existe un rayon $r_1 > 0$ tel que

$$f(M) \leq f(M_0) \text{ pour } M \in \mathcal{D} \cap D(M_0, r_1).$$

Si M_0 est à la fois un point de maximum local et un point de minimum local alors la fonction f est constante près de M_0 . Notons que si M_0 est un point de maximum local pour f sur \mathcal{D} , alors c'est un point de minimum local pour $-f$. On se contentera donc d'étudier les minimas locaux, les résultats étant similaires pour les maximas locaux en changeant de signe. On a alors :

Proposition B.2.4. Soit f une fonction dérivable, de dérivées continues sur un domaine \mathcal{D} , et M_0 un point intérieur à \mathcal{D} . On suppose que M_0 est un point de minimum local de f . On a alors

$$\vec{\nabla} f(M_0) = (0, \dots, 0) \text{ (condition de premier ordre en un point de minimum local).} \quad (\text{B.2.18})$$

Si de plus f possède des dérivées secondes continues alors la matrice Hessienne $\text{Hess} f(M_0)$ au point M_0 est positive, c'est à dire, pour tout vecteur $\vec{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\vec{n} \cdot \text{Hess} f(M_0) \cdot {}^t \vec{n} \geq 0 \text{ (condition de deuxième ordre en un point de minimum local).} \quad (\text{B.2.19})$$

Démonstration. Pour démontrer (B.2.18), on peut se ramener au résultat en dimension 1 en considérons la restriction de f à des droites passant par M_0 . Considérons un vecteur non nul \vec{n} de \mathbb{R}^N , et la fonction g définie par

$$g(t) = f(M_0 + t\vec{n}), t \in \mathbb{R}.$$

Comme f admet un minimum local en M_0 , il existe un $r_1 > 0$ tel que si

$$\|M - M_0\| < r_1 \text{ alors } f(M) \geq f(M_0).$$

Posons $t_1 = \frac{r_1}{\|\vec{n}\|}$. On voit que si $|t| < t_1$, alors on a $\|(M_0 + t\vec{n}) - M_0\| = |t|\|\vec{n}\| < r_1$ de sorte que

$$g(t) \geq g(0), \text{ pour } |t| < t_1,$$

d'où il résulte que 0 est un point de minimum local pour la fonction g . Il en déduit donc que

$$g'(0) = 0 \text{ et } g''(0) \geq 0.$$

Or $g'(0) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f(0)$ et $g''(0) = \vec{n} \cdot \text{Hess} f(M_0) \cdot {}^t \vec{n}$. On a donc pour tout vecteur \vec{n} non nul

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} f(0) = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \text{Hess} f(M_0) \cdot {}^t \vec{n} \geq 0,$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque B.2.5. Pour une matrice symétrique A , la condition de positivité

$$\vec{n} \cdot A \cdot {}^t \vec{n} \geq 0 \text{ pour tout vecteur } \vec{n} \text{ de } \mathbb{R}^N, \quad (\text{B.2.20})$$

est équivalente au fait que toutes ses valeurs propres sont *positives*. En effet, toute matrice symétrique étant diagonalisable dans une base orthogonale, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

telles que $A = P^{-1} \cdot D \cdot P = {}^t P \cdot D \cdot P$. On a donc

$$\vec{n} \cdot A \cdot {}^t \vec{n} = \vec{n} \cdot {}^t P \cdot D \cdot P \cdot \vec{n} = \vec{n}' \cdot A \cdot {}^t \vec{n}' = \sum_{i=1}^N \lambda_i n_i'^2,$$

où on a posé $\vec{n}' = \vec{n} \cdot {}^t P$. Il résulte de la condition de positivité (B.2.20) et du fait que P est inversible que

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i n_i'^2 \geq 0 \text{ pour tout vecteur } \vec{n}' \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui entraîne que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

B.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Lorsque f admet toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n et lorsque ces dérivées sont continues, alors il résulte du lemme de Schwartz que l'ordre dans lequel on effectue les dérivations n'a aucune importance. Pour n dérivations où interviennent p_i la variable x_i , $i = 1, \dots, N$ avec $n = \sum p_i$ on note

$$\frac{\partial^n f}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_N} x_N} \text{ ou } \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \dots \partial_N^{p_N} f$$

la dérivée partielle correspondante. Par exemple pour $n = 3$ et $N = 2$ les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_1} = \partial_1^3 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2} = \partial_1^2 \partial_2 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial^2 x_2} = \partial_1 \partial_2^2 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_2} = \partial_2^3 f.$$

On peut soulager un peu les notations en utilisant des multi-indices présentés ci-dessous.

B.3.1 Multi-indices

Un multi-indice de taille N est un N -uplet de la forme

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

où les coefficients α_i sont des entiers positifs. Au multi-indice sont associées sa longueur et sa factorielle définies par

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{et} \quad \alpha! = \prod_{i=1}^N \alpha_i.$$

On pose alors

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_N^{\alpha_N} f$$

En utilisant cette notation, de nombreuses formules d'analyse prennent une forme relativement simple. Par exemple la formule de Leibniz pour des fonctions à N variables devient

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\nu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\nu} \partial^\nu u \partial^{\alpha-\nu} v,$$

ou la relation d'ordre partielle sur les multi-indices $\nu \leq \alpha$ signifie que $\nu_i \leq \alpha_i$, pour tout $i = 1, \dots, N$ et où

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!}$$

Les multi-indices permettent également décrire de manière agréable des développements limités à tout ordre. on a

$$f(M + h) = f(M) + \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{\partial^\alpha f(M)}{\alpha!} + O(\|h\|^n).$$

Enfin, pour deux fonctions u et v suffisamment régulières dans l'une au moins est à support compact dans Ω , on a

$$\int_{\Omega} u(\partial^\alpha v) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^\alpha u) v dx.$$

Annexe C

Quelques notions d'analyse vectorielle

Nous rappelons dans cette parties les notions de bases de l'analyse vectorielle, en particulier les définitions et propriétés des principaux opérateurs (gradient, divergence, rotationnel). Les notations sont les même que dans l'Annexe B.

C.1 Champ de vecteurs

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^N .

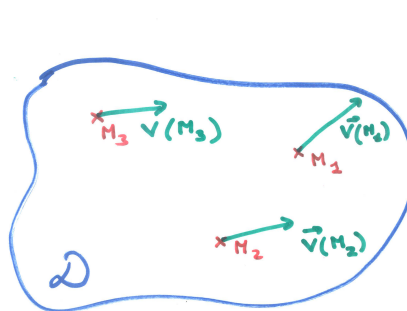
Définition 15. On appelle *champ de vecteurs* sur Ω toute application \vec{V} d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^N à valeur dans \mathbb{R}^2 :

$$M \in \mathcal{D} \mapsto \vec{V}(M) = (V_1(M), \dots, V_N(M)),$$

où, pour $i = 1, \dots, N$ les fonctions V_i sont des applications scalaires sur Ω , c'est à dire des applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} .

La terminologie relève en partie de la physique et de la mécanique, où les applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} sont appelées par contraste *champs scalaires*.

Comme exemple de tels champs, considérons par exemple la carte d'une région, notée ici \mathcal{D} , et que l'on peut considérer comme un domaine de \mathbb{R}^2 . En chaque point de cette carte, nous pouvons par exemple considérer la température au sol : il s'agit alors d'une fonction T de \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{R} , c'est à dire un champ scalaire. En revanche, si à chaque point M de la carte, on associe la direction et la vitesse du vent, que l'on peut représenter par un vecteur $\vec{V}(M)$, alors on a défini un champ de vecteurs. On représente en général le vecteur $\vec{V}(M)$ sous forme de vecteur attaché au point M .



Un exemple fondamental de champ de vecteur est fourni par les champs de gradient.

C.1.1 Champ de gradient

Définition 16. Soit f une application d'un domaine Ω de \mathbb{R}^N supposée dérivable en tout point du domaine. On appelle champs de gradient associé à f le champs de vecteurs $\vec{\nabla} f$ défini par

$$\vec{\nabla} f(M) = (f'_{x_1}(M), \dots, f'_{x_N}(M)). \quad (\text{C.1.1})$$

Nous avons déjà rencontré cette notion au chapitre précédent. La propriété suivante exprime le fait que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. Posons à cet effet, pour $c \in \mathbb{R}$

$$L^c = \{M \in \Omega, f(M) = c\}.$$

Proposition C.1.1. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que L^c est non vide, et soit $M \in L^c$ tel que $\vec{\nabla} f(M) \neq 0$. Alors, pour tout vecteur \vec{T} tangent à L^c en M , on a

$$\vec{T} \perp \vec{\nabla} f(M).$$

Remarque C.1.1. Si on dessine les lignes de niveau pour des valeurs de c espacées régulièrement, alors le gradient est orthogonale aux lignes de niveau, pointe vers les ensembles de valeurs de niveau croissant, et son module est plus élevé aux endroits où ces courbes se resserrent.

Il est naturel de se demander si tout champ de vecteur peut se représenter sous forme de gradient d'une fonction, ce qui est le cas pour les fonctions d'une variable réelle, qui sont la dérivée de leur primitive. En réalité, il est facile de se convaincre que ce n'est pas le cas pour *tous* les champs de vecteurs, comme le montre le résultat suivant :

Proposition C.1.2. Soit $\vec{V} = (V_1, \dots, V_N)$ un champ de vecteurs dérivable, de dérivée continue, défini sur un domaine Ω . Une condition nécessaire pour que \vec{V} soit un champ de gradient est que

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \text{ pour tous } i \neq j. \quad (\text{C.1.2})$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction f définie sur \mathcal{D} telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ c'est à dire $V_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour tout $i = 1, \dots, N$. Par le Théorème de Schwarz, on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

ce qui même directement à (C.1.2). □

Nous verrons par la suite que, si le domaine est sans trou, alors la condition (C.1.2) est aussi une condition suffisante, c'est à dire tout champ de vecteurs qui vérifie (C.1.2) est un champ de gradient.

Remarque C.1.2. Si on a $\vec{V} = \vec{\nabla} f$, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ on a aussi $\vec{V} = \vec{\nabla} (f + c)$, de sorte qu'il n'y a pas unicité de la fonction f . Par ailleurs, on vérifie, au vu du résultat de la Proposition B.1.3, que *toutes les solutions* ont la forme $f + c$, $c \in \mathbb{R}$. En effet, si f_1 et f_2 sont deux fonctions données telles que $\vec{V} = \vec{\nabla} f_1 = \vec{\nabla} f_2$, alors leur différence $g = f_2 - f_1$ est telle que $\vec{\nabla} g = 0$. La proposition B.1.3 montre alors que la fonction g est constante, ce qui donne le résultat.

Exemple 15. Considérons un champ de vecteur \vec{V} *linéaire*, c'est à dire de la forme

$${}^t\vec{V}(\vec{X}) = A \cdot {}^t\vec{X},$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice $N \times N$. On vérifie que

$$V_1(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N a_{1,j} x_j \text{ de sorte que } \frac{\partial V_1}{\partial x_j} = a_{1,j},$$

Le champ V est donc un champ de gradient si et seulement $a_{1,2} = a_{2,1}$, c'est à dire si et seulement si la *matrice* A est *symétrique*.

Invariance du gradient par changement de repère orthonormé.

La définition (C.1.1) qui associe à une fonction f sur \mathbb{R}^N le champ de vecteur $\vec{\nabla} f$ repose sur l'expression dans un repère donné de la fonction f et de ses dérivées partielles, elle donc a priori relative à un choix de repère orthonormé $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N)$, qui détermine les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) . Elle s'exprime donc, pour une fonction f donnée sur un domaine \mathcal{D} par la relation

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \vec{e}_N.$$

Introduisons un nouveau repère orthonormé $\epsilon' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_N)$ et des coordonnées x'_1, \dots, x'_N correspondantes de sorte que

$$x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_N \vec{e}_N = x'_1 \vec{e}'_1 + \dots + x'_N \vec{e}'_N.$$

Cherchons l'expression du gradient dans cette nouvelle base. Posons

$$\tilde{f}(x'_1, \dots, x'_N) = f(x_1, \dots, x_N) = f(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_N \vec{e}_N) = f(x'_1 \vec{e}'_1 + \dots + x'_N \vec{e}'_N).$$

Proposition C.1.3. On a pour tout $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{D}$

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_1} \vec{e}'_1 + \dots + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_N} \vec{e}'_N,$$

ses coordonnées dans la base $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_N)$ sont donc $\tilde{f}'_{x'_1}, \dots, \tilde{f}'_{x'_N}$.

Le calcul du gradient dans la nouvelle base est donc identique à celle dans l'ancienne base.

Preuve. On a $\tilde{f} = f \circ \Phi$ où Φ désigne l'application de \mathbb{R}^N dans lui-même qui aux nouvelles coordonnées associe les anciennes : $(x'_1, \dots, x'_N) \mapsto \Phi(x'_1, \dots, x'_N) = (x_1, \dots, x_N)$. Il s'agit d'une application linéaire, associée à une matrice P carrée 2×2 . Posons $\vec{X} = (x_1, \dots, x_N)$ et $\vec{X}' = (x'_1, \dots, x'_N)$. On a

$${}^t\vec{X} = \Phi(\vec{X}') = P^t X',$$

où A désigne la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne. Comme Φ est linéaire, on a $D_\Phi = P$, et donc

$$\vec{\nabla} \tilde{f}(x'_1, \dots, x'_N) = \vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_N) \circ P$$

Comme A est *orthonormée*, on a $P^{-1} = {}^t P$, et donc $\vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_N) = \vec{\nabla} \tilde{f}(x'_1, \dots, x'_N) \circ {}^t P$, soit, en transposant ${}^t \vec{\nabla} f(x_1, \dots, x_N) = P \circ {}^t \vec{\nabla} \tilde{f}(x'_1, \dots, x'_N)$. Ceci montre que les coordonnées du gradient se transforment comme celles des vecteurs, et donne la relation désirée. \square

Remarque C.1.3. Attention, l'énoncé n'est valable que pour des changements de bases *orthonormées*, le gradient n'est pas invariant par un changement de base qui ne serait pas orthonormé.

Remarque C.1.4. La proposition C.1.3 peut aussi s'interpréter en revenant à la formule du développement limité (B.1.2)

$$f(M + \vec{h}) - f(M) \simeq \vec{h} \cdot \vec{\nabla} f(M).$$

la conservation du produit scalaire par *changement de repère orthonormé* comme celle du membre de gauche explique alors que la forme du gradient reste elle-même inchangée.

C.1.2 Courbes intégrales

Considérons un champ de vecteurs \vec{V} défini sur un domaine \mathcal{D} , et \mathbb{C} une courbe tracée dans le domaine \mathcal{D} .

Définition 1. On dira que \mathbb{C} est une *ligne de champ* ou *une courbe intégrale* du champ de vecteurs \vec{V} si et seulement si \vec{V} est tangent à \mathbb{C} en tout point de \mathbb{C} .

Proposition C.1.1. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable de dérivées continues sur un domaine \mathcal{D} , et soit M_0 un point de \mathcal{D} . Alors il existe une ligne de champ \mathbb{C} et une seule qui passe par M_0 .

Idée de la démonstration. Pour construire la ligne de champ, on introduit l'équation différentielle avec condition initiale

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = \vec{V}(M(t)), & t \in I \\ M(0) = M_0, \end{cases} \quad (\text{C.1.3})$$

où I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et où l'inconnue est la fonction $t \mapsto M(t) \in \mathcal{D}$. Notons que l'équation (C.1.3) est en fait un système de deux équations différentielles lorsqu'on l'exprime en coordonnées. Les méthodes de résolution des équations différentielles, et en particulier le Théorème de Cauchy-Lipschitz montrent alors que l'équation (C.1.3) possède toujours une solution, qui existe tant que $M(t)$ ne sort pas d'un voisinage de M_0 . La fonction $t \mapsto M(t) \in \mathcal{D}$ fournit alors le paramétrage d'une courbe \mathcal{C} , dont un vecteur tangent n'en a autre que $\frac{dM}{dt}(t)$ en $M(t)$ c'est à dire, au vu de (C.1.3), le vecteur $\vec{V}(M(t))$.

Dérivée particulière.

L'équation (C.1.3) modélise de nombreux phénomènes, en particulier en mécanique des fluides. Considérons un fluide, qui pourra être un liquide comme l'eau ou un gaz, comme l'air occupant un domaine Ω (de \mathbb{R}^3). Supposons que le champ de vecteurs \vec{V} représente le champ des vitesses du fluide, c'est à dire qu'on chaque point M du domaine, $\vec{V}(M)$ désigne la vitesse des particules élémentaires, par exemple les molécules, constituant ce fluide au point M . Les lignes de champ ou *courbes intégrales* de \vec{V} correspondent alors aux trajectoires suivies par les particules élémentaires : plus précisément, les particules présentes au temps 0 en M_0 seront transportées par le fluide au point $M(t)$ au temps t . La donnée du champ de vecteurs \vec{V} permet donc de reconstituer entièrement les trajectoires des particules du fluide.

Voyons maintenant comment les quantités physiques sont transportées par le champ de vecteurs. Soit f une quantité *scalaire* physique que l'on peut mesurer dans le fluide : $f(M, t)$ représente donc la quantité mesurée au point M , au temps t . La température du fluide peut être un

exemple d'une telle quantité. Considérons une particule située au temps $t = 0$ en M_0 et essayons de voir comment varie la quantité f mesurée sur la particule : nous noterons \tilde{f} cette quantité qui dépend uniquement du temps. On a par définition

$$\tilde{f}(t) = f(M(t), t)$$

et donc

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}f(M(t), t).$$

Si on applique donc la règle de dérivation des fonctions composées, il vient, si $\vec{\nabla}$ désigne uniquement les dérivées par rapport aux variables spatiales

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{dM}{dt}(t) \cdot \vec{\nabla}_M f(M(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(M(t), t),$$

soit finalement

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(M(t), t) + \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{\nabla} f(M(t), t). \quad (\text{C.1.4})$$

On parle alors de *dérivée particulaire*.

Définition 2. On appelle dérivée particulaire, la fonction définie sur $\Omega \times [0, +\infty[$ par

$$\frac{Df}{Dt}(M, t) \equiv \frac{\partial f}{\partial t}(M, t) + \vec{V}(M, t) \cdot \vec{\nabla} f(M, t).$$

Cette quantité mesure la dérivée au temps t de la quantité f mesurée sur une particule donnée, présente en M au temps t .

Remarque C.1.1. La notion de dérivée particulaire nous renvoie aux deux points de vues développés en mécanique des fluides :

- la description *Eulerienne*
- la description *Lagrangienne*.

Dans la description Eulerienne, on se place dans le repère fixe, et on mesure les quantités au fil de l'eau, alors que dans la description Lagrangienne, on suit les particules au cours de leur mouvement. Si l'écriture des équations se fait en général en description Eulerienne, le formalisme lagrangien est souvent bien utile et pratique pour établir les équations.

C.1.3 La divergence

La divergence est un opérateur qui associe à un champ de vecteur \vec{V} donnée un champ scalaire, noté $\text{div } \vec{V}$.

Définition 3. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable sur un domaine Ω , de dérivées continues. On appelle *divergence* du champ de vecteurs \vec{V} la fonction définie sur Ω par

$$\text{div } \vec{V}(M) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(M) + \dots + \frac{\partial V_N}{\partial x_N}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(M)$$

Exemple 1. Si $\vec{V}(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_N)$ alors $\text{div } \vec{V} = N$, alors que si $N = 2$ et $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, alors $\text{div } \vec{V} = 0$. De manière plus générale, si \vec{V} est un champ linéaire, c'est à dire de la forme

$${}^t\vec{V}(\vec{X}) = A.{}^t\vec{X},$$

où A est une matrice $N \times N$, alors on vérifie (exercice) que $\text{div } \vec{V}$ est une fonction scalaire constante, et que

$$\text{div } \vec{V} = \text{Tr } A.$$

ainsi, si A est antisymétrique, alors $\text{div } \vec{V} = 0$.

Notons que la trace d'une application linéaire est indépendante de la base considérée. Il en est de même de la divergence.

Proposition C.1.2. *Le calcul de la divergence d'un champ de vecteurs ne dépend pas de la base choisie sur \mathbb{R}^N .*

La divergence en coordonnées polaires

Supposons $N = 2$. Comme nous l'avons déjà vu, la base de référence pour faire des calculs en coordonnées polaire, c'est la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Il s'agit d'un repère mobile, puisqu'il dépend du point où il est considéré. Supposons donc que le champ de vecteurs considéré \vec{V} soit exprimé en coordonnées polaires au point $M = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\vec{V}(M) = V_r(r, \theta)\vec{e}_r(M) + V_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta(M).$$

où $\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Si on écrit maintenant $\vec{V} = (V_1, V_2)$ en coordonnées cartésiennes, on obtient $V_1 = V_r(r, \theta) \cos \theta - V_\theta(r, \theta) \sin \theta$ et $V_2 = V_r(r, \theta) \sin \theta + V_\theta(r, \theta) \cos \theta$. Il vient alors, par la règle des fonctions composées,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \sin \theta \right] \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \cos \theta - V_r \sin \theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - V_\theta \cos \theta \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \left[r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_\theta \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial V_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \\ &= \sin \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \cos \theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \sin \theta + V_r \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \cos \theta - V_\theta \sin \theta \right] \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \left[r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_\theta \right] \end{aligned}$$

En faisant la somme, on trouve finalement

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

ou encore

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}. \quad (\text{C.1.5})$$

La divergence de champs radiaux

Considérons maintenant le cas où Ω est une boule ouverte ou l'espace \mathbb{R}^N tout entier et le champ \vec{V} un champ radial, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}(x) = \vec{f}(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}.$$

On montre alors (exercice) que

$$\operatorname{div} V(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} (r^{n-1} f)(\|x\|).$$

La divergence du gradient

Considère ici un champ de gradient $\vec{V} = \vec{\nabla} f$, où f est deux fois dérivable de dérivées continues, c'est à dire $\vec{V} = (f_{x_1}, \dots, f_{x_N})$. On a alors

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} f) = \sum_{i=1}^N f_{x_i x_i} = \Delta f.$$

La divergence du gradient de f est donc identique au laplacien de f .

Autres formules

Proposition C.1.3. Soit f une fonction et \vec{V} un champ de vecteurs définis, dérivables et de dérivées continues sur Ω . Le champ de vecteurs $f\vec{V}$ défini par $f\vec{V}(M) = f(M)\vec{V}(m)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$ est un champ de vecteurs dérivable sur \mathcal{D} dont la divergence est la fonction qui s'écrit

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div} V + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f. \quad (\text{C.1.6})$$

Si f et g sont des fonctions deux fois dérivables alors

$$g\Delta f = \operatorname{div}(g \cdot \vec{\nabla} f) - \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} f. \quad (\text{C.1.7})$$

C.1.4 Divergence, flux et intégration par partie

On peut reformuler la proposition B.1.3 de l'Annexe B en utilisant l'opérateur divergence.

Théorème C.1.1. Si \vec{V} est un champ de vecteurs dérivable sur $\overline{\Omega}$ de dérivée continue, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(M) dx_1 \dots dx_N = \operatorname{Flux}(V, \partial\Omega) \equiv \int_{\partial\Omega} \vec{V}(M(\sigma)) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma.$$

La quantité $\text{Flux}(V, \partial\Omega)$ est appelé "flux de la divergence" à travers le bord de Ω . D'après cette proposition, il est donc égal à l'intégrale de la divergence donc égale au flux à travers le bord. On appelle parfois ce résultat le *théorème flux-divergence* ou encore le *théorème de Green-Ostrogradski*. Nous verrons plus loin une interprétation physique de cette relation.

Si on suppose de plus que f est une fonction dérivable sur $\overline{\Omega}$ de dérivée continue, alors on a

$$\int_{\Omega} f(M) \text{div } \vec{V}(M) dx_1 \dots dx_N = - \int_{\Omega} \nabla f(M) \cdot \vec{V}(M) dx_1 \dots dx_N + \int_{\partial\Omega} f \vec{V}(M(\sigma)) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma. \quad (\text{C.1.8})$$

On déduit des relations qui précèdent des formules d'intégration par parties pour le laplacien (en utilisant le fait que $\Delta = \text{div}(\vec{\nabla})$). Pour deux fonctions f et g , définies sur $\overline{\Omega}$, f est des dérivées continues et g des dérivées secondes continues, on a

$$\int_{\Omega} f \Delta g = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + \int_{\partial\Omega} f(\sigma) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(\sigma) d\sigma, \quad (\text{C.1.9})$$

où on a posé

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(\sigma) = \vec{n}(\sigma) \cdot \nabla g(\sigma). \quad (\text{C.1.10})$$

En faisant jouer à f et g des rôles plus symétriques, on élimine les termes d'ordre 1 et on obtient

$$\int_{\Omega} f \Delta g - \int_{\Omega} g \Delta f = \int_{\partial\Omega} f(\sigma) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(\sigma) d\sigma - \int_{\partial\Omega} g(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\sigma) d\sigma. \quad (\text{C.1.11})$$

C.2 Une interprétation du théorème flux-divergence : l'équation de continuité

Nous avons introduit l'opérateur "divergence" dans la Section C.1.3. Cet opérateur intervient dans de nombreuses modélisations, en physique, en mécanique, ou en biologie. Le but de cette section est d'éclairer un mécanisme dans lequel cet opérateur intervient de manière naturelle : *l'équation de conservation de la masse* appelée aussi *équation de continuité*, au coeur de nombreuses modélisations.

Considérons un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 , et un champ de vecteurs \vec{V} défini sur \mathcal{D} . Reprenons l'analogie avec le champs de vitesse d'un fluide, développée à la Section C.1.2, c'est à dire supposons que le champ de vecteurs \vec{V} représente le champ des vitesses du fluide : pour chaque point M du domaine, $\vec{V}(M)$ désigne la vitesse des particules élémentaires constituant ce fluide en ce point. Les particules du fluides sont donc régies par l'équation (C.1.3)

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = \vec{V}(M(t)), t \in I \\ M(0) = M_0, \end{cases} \quad (\text{C.2.1})$$

La particule localisée au temps 0 en M_0 se retrouve au temps t en $M(t)$. Soit \mathcal{U}_0 un domaine inclus dans Ω strictement, et soit \mathcal{U}_t le domaine occupé au temps t par les particules présentes au temps 0 dans \mathcal{U}_0 . La question que nous nous posons alors est la suivante :

Q : Comment le volume de \mathcal{U}_t notée $\text{Vol}(\mathcal{U}_t)$ évolue-t-elle au cours du temps?

Essayons de calculer en particulier la variation $\frac{d\text{Vol}(\mathcal{U}_t)}{dt} \Big|_{t=0}$. A cet effet, remarquons tout d'abord que

$$\text{Vol}(\mathcal{U}_t) = \int_{\mathcal{U}_t} dx_1 dx_2 dx_3,$$

intégrale dont le domaine change au cours du temps. Afin de nous ramener à un domaine fixe, nous allons *paramétrer* le domaine \mathcal{U}_t par le domaine au temps 0, à savoir Ω_0 . Notons Φ_t l'application qui au point M_0 associe sa position $M(t)$ au temps t , c'est à dire

$$\Phi_t(M_0) = M(t)$$

où $M(t)$ est la solution de l'équation différentielle (C.2.1). La formule du changement de variable nous donne alors

$$\int_{\mathcal{U}_t} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_0} |J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3)| dm_1 dm_2 dm_3,$$

ou on a posé

$$J_{\Phi_t} = \det(D\Phi_t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Vol}(\mathcal{U}_t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_0} J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3) dm_1 dm_2 dm_3 \right] \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3)] \Big|_{t=0} dm_1 dm_2 dm_3. \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

où nous nous sommes autorisés, sans le justifier, à dériver sous le signe somme. On a alors le résultat suivant

Proposition C.2.1. *On a*

$$\frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3)] \Big|_{t=0} = \text{div } \vec{V}(m_1, m_2, m_3).$$

Justification. Nous n'allons pas fournir de preuve rigoureuse de ce résultat, mais, en revanche, essayer d'en indiquer une justification intuitive. Au vu de (C.2.1) on a envie d'écrire pour t petit

$$\Phi_t(M_0) - M_0 \simeq t \vec{V}(M(t))$$

et donc

$$\begin{aligned} J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3) &\simeq \begin{vmatrix} 1 + t \frac{\partial V_1}{\partial m_1} & t \frac{\partial V_1}{\partial m_2} & t \frac{\partial V_1}{\partial m_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial m_1} & 1 + t \frac{\partial V_2}{\partial m_2} & t \frac{\partial V_2}{\partial m_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial m_1} & \frac{\partial V_3}{\partial m_2} & 1 + t \frac{\partial V_3}{\partial m_3} \end{vmatrix} \\ &= 1 + t \left(\frac{\partial V_1}{\partial m_1} + \frac{\partial V_2}{\partial m_2} + \frac{\partial V_3}{\partial m_3} \right) + O(t^2) \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. □

Revenons à (C.2.2), que nous pouvons maintenant écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\mathcal{U}_t) \Big|_{t=0} = \int_{\Omega_0} \text{div } \vec{V}(m_1, m_2, m_3) dm_1 dm_2 dm_3. \quad (\text{C.2.3})$$

On peut donc interpréter l'intégrale de la divergence comme la dérivée de l'aire occupée par les particules, lorsqu'elles sont transportées par le champ de vecteurs.

Remarque C.2.1. Notons que si la divergence du champ de vecteurs est nulle

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0,$$

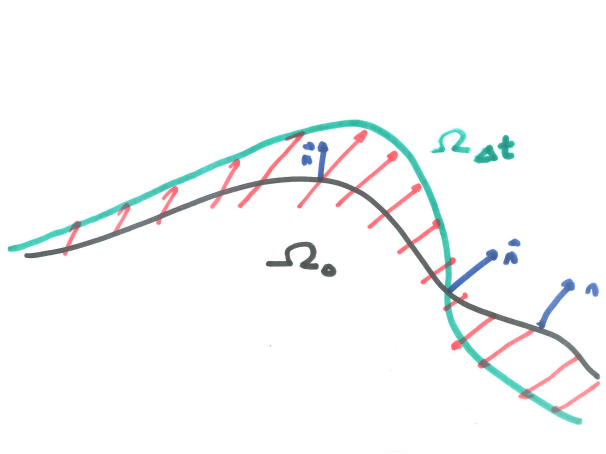
alors le volume occupé par les particules est *invariant* au cours du temps. C'est par exemple approximativement le cas pour des liquides comme l'eau. Les gaz, en revanche, sont compressibles.

Interprétation du flux

Considérons une variation de temps élémentaire Δt , qui fait passer le domaine \mathcal{U}_0 à $\mathcal{U}_{\Delta t}$. Si l'on compare le volume occupé par les deux domaines, on s'aperçoit que la différence entre les deux domaines est due, au premier ordre, aux particules près de la frontière, transportées par le champ de vecteurs \vec{V} . Une particule présente au temps 0 en M se retrouve au temps Δt au point $M + \vec{V}(M)\Delta t$. La différence entre les deux domaines, est représentée, en première approximation, par la courbe C que l'on munit d'une "épaisseur" en chaque point de l'ordre de $\vec{V} \cdot \vec{n} \Delta t$. La différence de volume est donc

$$\Delta t \int_C \vec{V} \cdot \vec{n}(s) ds.$$

qui est précisément le flux multiplié par Δt .



Equation de continuité

Supposons que le fluide ait une densité $\rho(t, M)$ par unité de volume au point M . La masse (ou le nombre de particules) contenue dans \mathcal{U}_t s'écrit donc

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\mathcal{U}_t} \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_0} \rho(t, \Phi_t(m)) J_{\Phi_t}(x) dm_1 dm_2 dm_3 \quad (\text{C.2.4})$$

la conservation de la masse (ou du nombre de particules) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t) = 0. \quad (\text{C.2.5})$$

En dérivant l'expression (C.2.10) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{M}(t)|_{t=0} &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m))] |_{t=0} J_{\Phi_0}(m_1, m_2, m_3) dm_1 dm_2 dm_3 \\ &+ \int_{\Omega_0} \rho(m_1, m_2, m_3) \frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2, m_3)] |_{t=0} dm_1 dm_2 dm_3. \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

Comme $\Phi_0 = \text{Id}$, on a $J_{\Phi_0}(m_1, m_2, m_3) = 1$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m_1, m_2, m_3))] &= \frac{\partial \rho}{\partial t}((t, \Phi_t(m))) + \frac{d}{dt}(\Phi_t(m) \cdot \vec{\nabla} \rho(t, \Phi_t(m))) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}((t, \Phi_t(m))) + \vec{V}(\Phi_t(m)) \cdot \vec{\nabla} \rho(t, \Phi_t(m)), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m_1, m_2, m_3))]_{|_{t=0}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}((0, m_1, m_2, m_3)) + \vec{V}(m_1, m_2) \cdot \vec{\nabla} \rho(0, m_1, m_2, m_3).$$

En reportant ces relations ainsi que (C.2.3) dans (C.2.6) on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t)_{|_{t=0}} = \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \cdot \text{div } V \right] (0, m_1, m_2) dm_1 dm_2 dm_3.$$

Comme

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \cdot \text{div } V = \text{div}(\rho \vec{V})$$

et en utilisant maintenant la conservation de la masse (C.2.5) on obtient

$$\int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] (m_1, m_2, m_3) dm_1 dm_2 dm_3 = 0.$$

Cette identité étant vraie pour tout domaine Ω_0 , on en déduit finalement l'équation locale de conservation de la masse ou *équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (\text{C.2.7})$$

Remarque C.2.2. Dans de nombreuses applications, le champ de vecteurs \vec{V} dépend également de t . Cependant, cela ne change pas le résultat des calculs précédents, et en particulier (C.2.7) reste valable.

Remarque C.2.3. Notons bien qu'ici la quantité ρ est une quantité volumique ! Une quantité non volumique (comme par exemple la température) T conservée le long des trajectoires obéit à l'équation de conservation

$$\frac{DT}{Dt} = 0. \quad (\text{C.2.8})$$

où $\frac{DT}{Dt}$ désigne la dérivée particulaire (voire (2)). L'équation (C.2.8) s'écrit, en formalisme Eulerien, comme l'*équation de transport* suivante

$$\frac{\partial T}{\partial t}(M, t) + \vec{V}(M, t) \cdot \vec{\nabla} T(M, t) = 0. \quad (\text{C.2.9})$$

Remarque C.2.4. dans le cas où

$$\text{div } \vec{V} = 0,$$

c'est à dire dans le cas des *écoulements incompressibles*, l'équation de continuité et l'équation de transport coïncident. En effet, on a alors

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div } \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = \vec{V} \cdot \nabla \rho.$$

Equation de continuité pour des quantités transportées

Considérons maintenant est une quantité f transporté par le flot, c'est à dire telle que

$$\frac{Df}{Dt}(M, t) = 0.$$

Si on pose

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(t, M) f(t, M) dM = \int_{\Omega_0} \rho f(t, \Phi_t(x)) J_{\Phi_t} dx. \quad (\text{C.2.10})$$

On a comme précédemment

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0.$$

et les mêmes calculs que si dessus (exercice) permettent alors d'aboutir à l'équation de continuité pour f qui s'écrit $\partial_t(\rho f) + \operatorname{div}(\rho f \vec{V}) = 0$. En développant et en soustrayant l'équation de continuité pour ρ on trouve finalement

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) = 0. \quad (\text{C.2.11})$$

Equation de continuité avec termes sources

On suppose ici que f n'est plus transporté, mais évolue par intégration le long des courbes intégrales, à savoir

$$\frac{Df}{Dt}(M, t) = g(M(t), t).$$

On obtient alors en intégrant

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_{\Omega_t} \rho(M, t) g(M, t) dm$$

et des calculs similaires à ceux qui précèdent permettent alors de montrer que

$$\partial_t(f) + \operatorname{div}(f \vec{V}) = g.$$

Equation d'Euler de la mécanique des fluides

Supposons de nouveau que le domaine Ω est rempli d'un fluide (un gaz ou un liquide) et notons comme auparavant ρ sa densité et $\vec{u}(x, t)$ la vitesse du fluide au point x et au temps t , de sorte que $\vec{V} = \vec{u}$. Dans ce contexte l'équation de continuité reste valable. Il reste à déterminer une nouvelle équation pour le champ de vitesse. A cet effet, nous allons invoquer la loi fondamentale de la dynamique, qui affirme que l'accélération multipliée par la masse (ou le dérivée de la quantité) est égale à la somme des forces appliquées. Nous allons appliquer cette identité au fluide présent au temps 0 dans le domaine Ω_0 . Notons $\mathfrak{Q}(t)$ la quantité de mouvement du fluide présent au temps t en Ω_t , c'est à dire

$$\mathfrak{Q}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \vec{u}(x, t) dx.$$

La loi fondamentale de la dynamique affirme donc que

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{Q}(t) = \sum \text{forces appliquées en } \Omega_t. \quad (\text{C.2.12})$$

En calculant comme dans les paragraphes précédents, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{Q}(t)|_{t=0} = \int_{\Omega_0} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}(x, 0) dx,$$

et en revenant à la relation (C.2.12), on obtient donc

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}(x, 0) dx = \sum \text{forces appliquées en } \Omega_0. \quad (\text{C.2.13})$$

Supposons maintenant que le fluide soit parfait, et que nous négligions toutes les forces extérieures, y compris les forces de pesanteur. dans une telle situation, les seules forces qui s'exercent sont les forces de pression. Si p désigne la pression, alors les forces sont données par l'expression

$$\text{forces de pression sur } \Omega_0 = - \int_{\partial\Omega_0} p(\sigma) \vec{n}(\sigma) d\sigma. \quad (\text{C.2.14})$$

on peut transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume grâce à la formule d'intégration par parties, ce qui donne

$$- \int_{\partial\Omega_0} p(\sigma) \vec{n}(\sigma) d\sigma = \int_{\Omega_0} \vec{\nabla} p dx. \quad (\text{C.2.15})$$

En combinant les relations (C.2.13), (C.2.14) et (C.2.15) on obtient

$$\int_{\Omega_0} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}(x, 0) dx = - \int_{\Omega_0} \vec{\nabla} p(x, 0) dx. \quad (\text{C.2.16})$$

Cette relation étant vraie pour tout sous-domaine Ω_0 de Ω et en tout temps $t \geq 0$, on en déduit la relation

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p \quad \text{où} \quad \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}. \quad (\text{C.2.17})$$

il s'agit de l'équation d'Euler des fluides parfaits.

C.3 Le rotationnel

Dans cette section nous nous plaçons en dimension $N = 3$. Un de nos buts est de répondre à la question suivante :

Q : A quelle condition un champ de vecteurs est-il un champ de gradient ?

Rappelons que le théorème de Schwarz impose des conditions nécessaires.

Proposition C.3.1. *Soit $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ un champ de vecteurs dérivable, de dérivées continues, défini sur un domaine \mathcal{D} . Une condition nécessaire pour que \vec{V} soit un champ de gradient est que*

$$\frac{\partial V_3}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2}. \quad (\text{C.3.1})$$

Nous verrons plus loin que (C.3.1) est aussi une condition suffisante, si on fait des hypothèses adéquates sur le domaine.

Définition 4. *Soit $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ un champ de vecteurs dérivable défini sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 . On appelle rotationnel de \vec{V} le champ de vecteur noté $\vec{\text{rot}} \vec{V}$ défini sur \mathcal{D} par*

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right).$$

Remarque C.3.1. Pour désigner le rotationnel, on utilise aussi souvent la notation $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$. Si on écrit les vecteurs sous forme colonne, cette notation a un avantage mnémotechnique appréciable, car on peut utiliser la même règle que pour le produit vectoriel

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Voyons deux propriétés importantes :

Proposition C.3.2. Soit f une fonction deux fois dérivable de dérivées secondes continues sur \mathcal{D} domaine de \mathbb{R}^3 . On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\nabla} f) = 0. \quad (\text{C.3.2})$$

Si \vec{V} est un champ de vecteurs deux fois dérivable sur \mathcal{D} de dérivées secondes continues, alors on a

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad (\text{C.3.3})$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = \vec{\nabla}(\text{div} \vec{V}) - \Delta V. \quad (\text{C.3.4})$$

Démonstration. La première identité, et une conséquence immédiate de la Proposition 4, c'est à dire le théorème de Schwarz. Un bref calcul permet de vérifier les deux autres formules.

Remarque C.3.2. la condition (C.3.3) fournit en particulier une condition nécessaire pour qu'un champ soit un rotationnel : seuls les *champs à divergence nulle* peuvent être des rotationnels. Par exemple si $\vec{V}(M) = (x_1, x_2, x_3)$ alors $\text{div} \vec{V} = 3$ et \vec{V} n'est donc pas un rotationnel.

Voyons maintenant d'autres propriétés élémentaires :

Proposition C.3.3. Soit f une fonction et V un champ de vecteurs dérivables de dérivée continues sur \mathcal{D} domaine de \mathbb{R}^3 . On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{V}.$$

C.3.1 Invariance du rotationnel par changement de repère orthonormé

Comme pour le gradient et la divergence, la forme du rotationnel est la même pour tous les repères orthonormés. Soit $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ une nouvelle base orthonormée, et des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 correspondantes de sorte que $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3$. Soit \vec{V} un champ de vecteur donné sur \mathcal{D} . Ce champ s'exprimera dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ comme

$$\vec{V}(M) = V_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_3$$

pour M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Son expression dans la nouvelle base sera alors

$$\vec{V}(M) = V'_1(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_1 + V'_2(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_2 + V'_3(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_3,$$

pour M de coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) dans $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. En posant $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{X}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ on a ${}^t \vec{X} = P {}^t \vec{X}'$, où P désigne la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne. De même, il vient ${}^t \vec{V}'(x'_1, x'_2, x'_3) = P {}^t \vec{V}(x_1, x_2, x_3)$. Quelle est l'expression du champ rotationnel dans la nouvelle base ?

Proposition C.3.4. . Soit $M \in \mathcal{D}$. Alors on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} V(M) = \left(\frac{\partial V'_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial V'_2}{\partial x'_3} \right) \vec{e}'_1 + \left(\frac{\partial V'_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial V'_3}{\partial x'_1} \right) \vec{e}'_2 + \left(\frac{\partial V'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial V'_1}{\partial x'_2} \right) \vec{e}'_3$$

La forme du rotationnel ne dépend donc pas de la base orthonormée choisie.

C.3.2 Champs à rotationnel nul

On admettra le résultat suivant :

Théorème C.3.1. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable de dérivées continues, sur un domaine Ω de \mathbb{R}^3 sans trou. Si

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0,$$

alors \vec{V} est un champ de gradient, c'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur Ω telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$.

Exemple 2. Considérons un champ de vecteur \vec{V} linéaire, c'est à dire de la forme

$${}^t \vec{V}(\vec{X}) = A \cdot {}^t \vec{X},$$

où A est une matrice 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On a donc $V_1(x_1, x_2, x_3) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3$, $V_2(x_1, x_2, x_3) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3$, et $V_3(x_1, x_2, x_3) = a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3$ de sorte que

$$\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = a_{3,2} - a_{2,3}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = a_{1,3} - a_{3,1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = a_{2,1} - a_{1,2}.$$

V est donc un champ de gradient si et seulement si $a_{2,1} = a_{1,2}$, $a_{1,3} = a_{3,1}$ et $a_{2,1} = a_{1,2}$ c'est à dire si et seulement si la matrice A est *symétrique*. Dans ce cas, on vérifie, que l'on a $\vec{V} = \vec{\nabla} f$, avec

$$f(X) = \frac{1}{2} A \cdot \vec{X} \cdot \vec{X},$$

la forme quadratique associée à la matrice symétrique A .

C.3.3 Champ à divergence nulle, potentiels vecteurs

Dans la remarque C.3.2 nous avons vu qu'une *condition nécessaire* pour être un champ de rotationnel était $\text{div} \vec{V} = 0$. Si le domaine n'a pas de trou, il s'avère alors que cette condition est également *suffisante*.

Théorème C.3.2. Soit \vec{V} un champ de vecteur dérivable sur un domaine Ω sans trou. On suppose que

$$\text{div} \vec{V}(M) = 0, \quad \forall M \in \Omega.$$

Alors il existe un champ de vecteur \vec{A} défini sur Ω tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} A$.

Le champ de vecteurs \vec{A} est appelé un *potentiel vecteur* dont dérive le champ de vecteurs \vec{V} .

Remarque C.3.3. Si $\text{div } V = 0$, alors il n'y a pas unicité du potentiel vecteur. En effet, si \vec{A} , est un tel potentiel vecteur, c'est à dire si $\vec{V} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, $\vec{A}_f = \vec{A} + \vec{\nabla} f$, pour toute fonction f , car $\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla} f) = 0$. De plus (exercice) tous les potentiels vecteurs dont dérive \vec{V} ont la cette forme.

C.3.4 Le cas N=2

Certains résultats pour $N = 3$ se transposent au cas $N = 2$ en introduisant des champs planaires.

Champs planaires. Soit \vec{V} un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 . On peut lui associer un champ W sur \mathbb{R}^3 en posant

$$\vec{W}(x_1, x_2, x_3) = (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2), 0). \quad (\text{C.3.5})$$

On obtient

$$\vec{\text{rot}} W(x_1, x_2, x_3) = \left(0, 0, \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2)\right) = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) \vec{e}_3.$$

Le rotationnel est donc orthogonal au plan $0x_1x_2$, parallèle au vecteur $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. On peut assimiler un tel champ à un scalaire Ceci nous amène à poser

$$\vec{\text{rot}} V = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2},$$

il s'agit donc d'une fonction et non d'un champ de vecteurs. On a comme en dimension 3

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla} \vec{V}) = 0. \quad (\text{C.3.6})$$

En appliquant le Théorème C.3.3 à \vec{W} , on obtient une réciproque :

Théorème C.3.3. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable de dérivées continues, sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 sans trou. Si

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = 0$$

alors \vec{V} est un champ de gradient, c'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur \mathcal{D} telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$.

Remarque C.3.4. En dimension 2, le rotationnel et la divergence sont deux quantités scalaires liées par la relation

$$\text{div } V = -\vec{\text{rot}} \vec{V}^\perp \text{ et } \text{div } \vec{V}^\perp = -\vec{\text{rot}} \vec{V}. \quad (\text{C.3.7})$$

où \vec{V}^\perp désigne le champ de vecteurs

$$V^\perp = (-V_2, V_1)$$