Objectifs

- Théorie de la dualité
- Méthode simplexe duale

Problème [Dualité en optimisation linéaire]

Le concept de dualité, quand il est possible de le définir, est un concept très fécond en mathématique. Dans ce problème, il sera question de la dualité en optimisation linéaire. Plus précisément, dans la partie A il sera défini la notion de dual d'un problème d'optimisation linéaire. Ce problème dual est lui aussi un problème d'optimisation linéaire. Dans la partie B, les théorèmes de dualité faible et forte seront abordés. Le théorème des écarts complémentaires sera quant à lui abordé dans la partie C. Enfin, dans la dernière partie (la partie D) une application de la dualité sera présentée. Il s'agira de la méthode simplexe duale.

Soit le problème d'optimisation linéaire (sous forme canonique) suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.c. & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

L'équivalent en notation matricielle du problème (P) sera noté

$$\begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.c. & \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad (P)$$

où :

- la matrice des contraintes A est la matrice à m lignes et n colonnes (a_{ij}),
- le second membre b est le vecteur $(b_1, \ldots, b_m)^t$,
- le vecteur c contient les coefficients de la fonction objectif et est égal à $(c_1, \ldots, c_n)^t$.

Partie A : Définition

Le *problème dual* du problème (P) est le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{lll} Max & w^t b & \\ s.c. & & \\ & w^t A & \leq c^t, \\ & w & \geq 0. \end{array} \qquad (D)$$

Le problème originel (P) sera appelée *problème primal*.

Vous noterez que le nombre de variables dans le problème dual est égal au nombre de contraintes dans le problème primal. Et bien sûr, le nombre de contraintes dans le problème dual est égal au nombre de variables dans le problème primal (c'est un peu ça la dualité !).

1. Quel est le problème dual associé à chacun des problèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} Min & c^t x & \\ s.c. & & \\ & Ax & \leq b \ ' \\ & x & \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Max & c^t x & \\ s.c. & & \\ & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0 \end{cases}$$

2. Quel est le problème dual associé à chacun des problèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} Min & c^t x & \\ s.c. & & \\ & Ax & = b \ ' \\ & x & \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Max & c^t x & \\ s.c. & & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{cases}$$

3. Démontrer que le dual du problème dual (D) est identique au problème primal (P).
4. Quel est le problème dual du problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{lllll} Min & \alpha^t x & +\beta^t y & +\gamma^t z & \\ s.c. & & & & \\ & A_1 x & +B_1 y & +D_1 z & \leq f \\ & A_2 x & +B_2 y & +D_2 z & \geq g \\ & A_3 x & +B_3 y & +D_3 z & = h \\ & x \geq 0 & y \leq 0 & z & \end{array} \tag{1}$$

Partie B : Théorèmes de dualité

Soit x_0 (resp. w_0) une solution réalisable du problème primal (P) (resp. du problème dual (D) associé.).

1. Démonter que

$$w_0^t b \leq c^t x_0. \tag{2}$$

   Cette propriété est qualifiée de *théorème de dualité faible*. Elle stipule que, pour un problème de minimisation, la valeur du problème dual minore toujours celle du problème primal. Quid de la maximisation ?
2. En déduire que :
   (a) si le problème primal est non borné alors le problème dual est non réalisable .
   (b) si le problème dual est non borné alors le problème primal est non réalisable.
3. Démontrer que si les deux solutions x_0 et w_0 vérifient l'égalité

$$w_0^t b = c^t x_0,$$

   alors
   (a) le vecteur x_0 est une solution optimale du problème (P).
   (b) le vecteur w_0 est une solution optimale du problème dual (D).
4. Démontrer que
   - ✍ Si le problème primal possède une solution optimale x_0 de valeur finie alors le problème dual possède une solution optimale w_0 de valeur finie et il est vrai que :

$$w_0^t b = c^t x_0.$$

   - ✍ Si le problème dual possède une solution optimale w_0 de valeur finie alors le problème primal possède une solution optimale x_0 de valeur finie et il est vrai que :

$$w_0^t b = c^t x_0.$$

En démontrant les deux dernières questions vous avez démontré le *théorème de dualité forte*. Nous verrons plus loin dans le cours qu'il existe un cadre un peu plus général ou un tel théorème reste vrai (égalité à l'optimum de la valeur du primal et de la valeur du dual). Enfin, contrairement au théorème de dualité faible, le théorème de dualité forte n'est pas toujours valide en général !

Partie C : Théorème des écarts complémentaires

Soient x_* (resp. w_*) une solution réalisable du problème primal (P) (resp. du problème dual (D) associé.).

1. Démontrer que les deux vecteurs x^* et w^* sont des solutions optimales pour les problèmes (P) et (D) respectivement **si et seulement si** :
$$(c_j - w^* a_j)x_j^* = 0, \forall j = 1, \ldots, n$$
et
$$w_i^*(a^j x^* - b_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, m$$

2. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} Min & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & -4x_5 & +3x_6 & & \\ s.c. & & & & & & & & \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & -x_2 & -1x_3 & +x_4 & & & \leq & 4 \\ & & & & & & & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq & 0 \end{array} \qquad (3)$$

Partie D : Méthode simplexe duale

Pour rappel, à chaque itération de l'algorithme simplexe la réalisabilité de la solution primale est toujours assurée. C'est-à-dire, sauf erreur de calcul, les composantes de la solution courante sont toutes non négatives. C'est pour cette raison que cet algorithme est qualifié de *primal*.

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{lrrrcl} Min & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & & \\ s.c. & & & & & \\ & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq & 4 \\ & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \geq & 3 \\ & & & & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad (4)$$

1. Décrire, en mimant les étapes de l'algorithme simplexe, un algorithme permettant de résoudre le problème (P) et assurant à chaque itération la réalisabilité de la solution duale (et non de la solution primale !). Déroulez votre algorithme sur le problème (4).