Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Cours n^{o} 3

Stef Graillat

Sorbonne Université

Résumé du cours précédent

- ε-transitions : elles permettent d'étendre un AFN en autorisant un changement d'état en lisant une entrée vide (c'est-à-dire en ne lisant aucun symbole). Les ε-AFN peuvent être convertis en AFD acceptant le même langage.
- Expression régulière : notation algébrique décrivant exactement les mêmes langages que les automates finis. Les opérateurs sont l'union, la concaténation et la fermeture.
- Équivalence entre expressions régulières et automates finis : on peut convertir un AFN en ER. On peut aussi convertir une ER en un ε-AFN.

Applications

- ER sous UNIX :
  - . pour n'importe quel caractère
  - $[a_1 a_2 \cdots a_k]$ pour $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$
  - `[:digit:]` pour les 10 chiffres
    `[:alpha:]` pour les caractères de l'alphabet (aussi `[A-Z]`)
    `[:alnum:]` pour les chiffres et l'alphabet.
  - $|$ en lieu et place du $+$
    R^* pour R répété zéro ou plusieurs fois
    $R?$ pour $\varepsilon + R$
    $R+$ pour $RR^\star$
    $R\{n\}$ pour une copie de R n fois.
- `lex, flex`
- Recherche de motifs.

Lois algébriques pour les expressions régulières

Commutativité – Associativité :

- $L + M = M + L$
- $(L + M) + N = L + (M + N)$
- $(LM)N = L(MN)$

Identité – éléments neutres – annulateur :

- $\varnothing + L = L + \varnothing = L$
- $\varepsilon L = L\varepsilon = L$
- $\varnothing L = L\varnothing = \varnothing$

Distributivité :

- $L(M + N) = LM + LN$
- $(M + N)L = ML + NL$

Attention : en général $LM \neq ML$

Lois algébriques pour les expressions régulières (suite)

- $L + L = L$
- $(L^*)^* = L^*$
- $\varnothing^* = \varepsilon$
- $\varepsilon^* = \varepsilon$
- $L^+ = LL^* = L^*L$
- $L^* = \varepsilon + L^+$

Décider si une loi algébrique sur des ER est vraie

Tester la véracité de lois algébriques sur des ER.

Exemple : $(L + M)^* = (L^* M^*)^*$

Théorème 1

Soit E une ER avec les variables $L_1, L_2, \ldots, L_m$ et C l'ER formée en remplaçant chaque occurrence de L_i par a_i pour $i = 1, 2 \ldots, m$. Alors tout mot $w \in L(E)$ peut s'écrire sous la forme $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, où chaque w_i est dans un des langages, par exemple L_{j_i}, et le mot $a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k}$ est dans $L(C)$

Autrement dit, on peut construire $L(E)$ en partant de mots de $L(C)$, par exemple $a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k}$, et en remplaçant chaque a_{j_i} par n'importe quel mot de L_{j_i}.

Décider si une loi algébrique sur des ER est vraie

Tester $E = F$:

- Remplacer chaque variable par un symbole. On obtient $C = D$
- Tester si $L(C) = L(D)$

Prouver que $(L + M)^* = (L^* M^*)^*$ revient à prouver que $(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2})^* = (\mathbf{a_1^*} \mathbf{a_2^*})^*$

Propriétés des langages réguliers

- Le lemme de pompage : un outil pour prouver qu'un langage n'est pas régulier.
- Propriétés de fermeture des langages réguliers : construire des langages réguliers à partir d'autres langages réguliers.
- Propriétés de décision : algorithme décidant par exemple si deux automates reconnaissent le même langage.
- Minimisation des automates : construire un automate avec le moins d'états possibles

Intuition du lemme de pompage

Supposons que $L_{01} = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ soit régulier. Il est donc reconnu par un AFD A avec par exemple k états.
Quand A lit 0^k on a :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon & p_0 \\ 0 & p_1 \\ 00 & p_2 \\ \dots & \dots \\ 0^k & p_k \end{array}$$

$\Rightarrow \exists\ i < j$ tel que $p_i = p_j$. Appelons $q = p_i = p_j$

- Si $\widehat{\delta}(q, 1^i) \in F$ alors A accepte $0^j 1^i$
- Si $\widehat{\delta}(q, 1^i) \notin F$ alors A rejete $0^i 1^i$

Par conséquent L_{01} n'est pas régulier

Lemme de pompage

Lemme 1 (Lemme de pompage)

Soit L un langage régulier. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ (qui dépend de L) tel que pour tout $w \in L$ tel que $|w| \geq n$, w se décompose en $w = xyz$ avec

- $y \neq \varepsilon$,
- $|xy| \leq n$,
- *pour tout $k \geq 0$, on a $xy^kz \in L$.*

Preuve.

Comme L est régulier, il est reconnu par un AFD A avec n états.

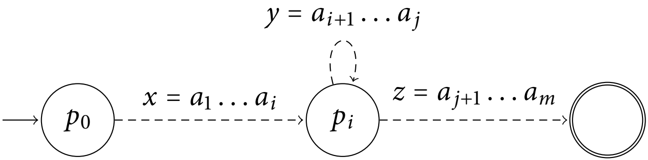
Posons $w = a_1a_2 \ldots a_m \in L$ avec $m \geq n$ et $p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1a_2 \ldots a_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots n$ (on remarque que $p_0 = q_0$).

$\Rightarrow \exists\ i, j$ vérifiant $0 \leq i < j \leq n$ tel que $p_i = p_j$ (principe des tiroirs)

Lemme de pompage (suite)

On sépare $w = xyz$ comme suit :

1. $x = a_1 a_2 \cdots a_i$
2. $y = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$
3. $z = a_{j+1} a_{j+2} \cdots a_m$



Il est alors clair que $xy^kz \in L$ pour tout $k \geq 0$. ■

Applications du lemme de pompage

Prouver que les langages suivants ne sont pas réguliers :

- Le langage L constitué des mots contenant autant de 0 que de 1 : considérons $w = 0^n1^n \in L$ pour le n correspondant à l'énoncé. D'après le lemme de pompage $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ et $xy^kz \in L$

$$w = \underbrace{000\cdots}_{x}\ \underbrace{\cdots 0}_{y}\ \underbrace{0111\ldots 11}_{z}$$

En particulier $xz \in L$, or xz a moins de 0 que de 1

Applications du lemme de pompage (suite)

- Le langage L des mots ne contenant que des 1 et dont la longueur est un nombre premier : considérons un premier $p \geq n+2$ et $w = 1^p$ pour n donné par le lemme de pompage

$$w = \overbrace{\underbrace{111\cdots}_{x} \quad \underbrace{\cdots 1}_{y, |y|=m} \quad \underbrace{1111\cdots 11}_{z}}^{p}$$

Alors $xy^{p-m}z \in L$.
Or $|xy^{p-m}z| = |xz| + (p-m)|y| = p - m + (p-m)m = (1+m)(p-m)$ qui n'est pas premier
En effet $y \neq \varepsilon \Rightarrow 1 + m > 1$ et $m = |y| \leq |xy| \leq n$, $p \geq n+2$
$\Rightarrow p - m \geq n + 2 - n = 2$

Propriétés de fermeture

Énoncés du type : si certains langages sont réguliers et un langage L est obtenu via certaines opérations sur ces langages réguliers, alors L est régulier.

- Opérations de nature ensembliste
- Concaténation, renversement, fermeture

Propriétés de fermeture (suite)

Soit L et M deux langages réguliers. Alors les langages suivants sont réguliers :

- Union : $L \cup M$
- Intersection : $L \cap M$
- Complémentaire : $\overline{L}$
- Différence : $L \setminus M$
- Renversement : $L^R = \{w^R : w \in L\}$
- Fermeture : L^*
- Concaténation : LM

Union, concaténation et fermeture

Théorème 2

Soit L et M deux langages réguliers. Alors $L \cup M$ est régulier.

Preuve : Soit $L = L(E)$ et $M = L(F)$ avec E et F des ER. On a alors $L \cup M = L(E) \cup L(F) = L(E + F)$ par définition. ■

Théorème 3

Soit L et M deux langages réguliers. Alors LM est régulier.

Preuve : Soit $L = L(E)$ et $M = L(F)$ avec E et F des ER. On a alors $LM = L(E).L(F) = L(EF)$ par définition. ■

Théorème 4

Soit L un langage régulier. Alors L^* est régulier.

Preuve : Soit $L = L(E)$ avec E une ER. On a alors $L^* = L(E)^* = L(E^*)$ par définition. ■

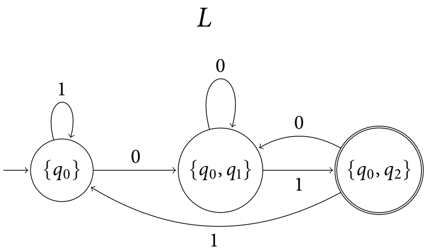
Complémentaire, intersection et différence

Théorème 5

Soit L un langage régulier. Alors le complémentaire de L dans $\Sigma^\star$ noté $\overline{L}$ est régulier.

Preuve : Convertir l'expression régulière en un ε-AFN, puis convertir cet ε-AFN en un AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Soit alors l'automate $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$. On a $\overline{L} = L(B)$. ■

Exemple : complémentaire du langage $L = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \mathbf{01}$



Intersection et différence

Théorème 6

Soit L et M deux langages réguliers. Alors $L \cap M$ est régulier.

Preuve : Par les lois de De Morgan, on a $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$. Par conséquent, $L \cap M$ est régulier comme complémentaire et l'union de langages régulier. ∎

Corollaire 1

Soit L et M deux langages réguliers. Alors $L \setminus M$ est régulier.

Preuve : Comme $L \setminus M = L \cap \overline{M}$, on en déduit que $L \setminus M$ est régulier. ∎

Retour sur l'intersection

Théorème 7

Soit L et M deux langages réguliers. Alors $L \cap M$ est régulier.

Preuve : Soit $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ et $B_L = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ deux automates déterministes reconnaissant respectivement L et M.

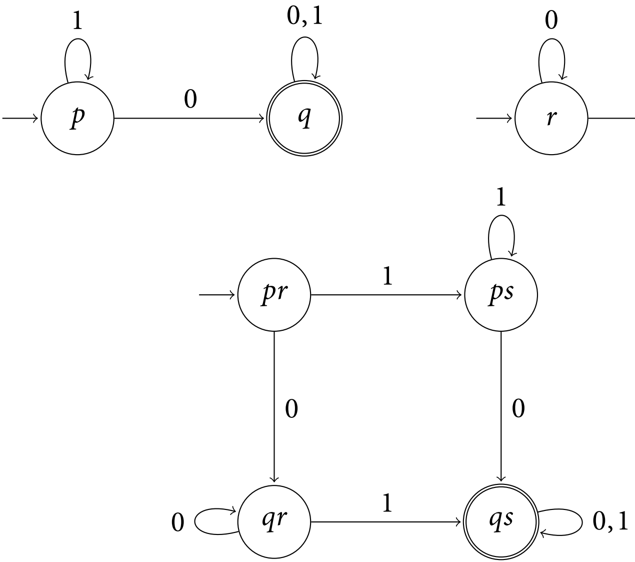
$\rightarrow$ on va construire un automate qui simule A_L et A_M en parallèle et qui accepte si et seulement si A_L et A_M acceptent.

Posons $A_{L\cap M} = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta_{L\cap M}, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$ avec

$$\delta_{L\cap M}((p,q),a) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$$

$\Rightarrow A_{L\cap M}$ reconnaît le langage $L \cap M$. ∎

Retour sur l'intersection (exemple)



Renversement

Renversement : $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \quad \rightarrow \quad a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$
Pour un mot w, on note w^R son miroir

$$\text{Étant donné un langage } L\text{, on note } L^R = \{w^R : w \in L\}$$

Théorème 8

Soit L un langage régulier. Alors L^R est régulier.

Preuve 1 : Si L est régulier, il existe un AFD A qui le reconnaît :

- Renverser toutes les flèches dans le diagramme de transition de A
- L'état de départ de A devient seul et unique état acceptant.
- Créer un nouvel état p_0 de départ avec ε-transitions sur chaque état acceptant de A.

L'automate ainsi construit reconnaît L^R. ■

Renversement (suite)

Théorème 9

Soit L un langage régulier. Alors L^R est régulier.

Preuve 2 : Si $L = L(E)$ avec E une ER, on va construire un ER E^R telle que $L(E^R) = L(E)^R$ par induction structurelle

Base : Si E est égale à ε, $\varnothing$ ou **a** alors $E^R = E$

Induction :

- si $E = F + G$ alors $E^R = F^R + G^R$
- si $E = F.G$ alors $E^R = G^R.F^R$
- si $E = F^*$ alors $E^R = (F^R)^*$

On vérifie que E^R ainsi construit satisfait $L(E^R) = (L(E))^R$. ∎

Exemple : si $L = (\mathbf{0} + \mathbf{1})\mathbf{0}^*$ alors $L^R = \mathbf{0}^*(\mathbf{0} + \mathbf{1})$

Propriétés de décision des langages réguliers

Représentation *finie* des langages réguliers :

- AFD
- AFN, ε-AFN
- Expressions régulières

Questions :

- Le langage décrit est-il vide ?
- Un mot donné appartient-il au langage décrit ?
- Deux descriptions différentes définissent-elles le même langage ?

Conversion entre représentations

On en a déjà vu quelques-unes... mais combien coûtent-elles ?

Des AFN aux AFD :
On part d'un ε-AFN à n états :

- Calcul des ε-fermetures : $\mathcal{O}(n^3)$
- Construction des sous-ensembles : il y en a 2^n mais il faut aussi obtenir le diagramme de transition ! Chaque transition coûte $\mathcal{O}(n^2)$.
- Cout global : $\mathcal{O}(n^3 2^n)$

Des AFD aux AFN :
C'est le plus simple et ça ne coûte que $\mathcal{O}(n)$ opérations.

Conversion entre représentations (suite)

Des automates aux expressions régulières :

À chaque étape, la longueur de l'expression peut quadrupler et il y a n étapes !
Écrire les n^3 expressions coûte $\mathcal{O}(n^3 4^n)$.
L'élimination d'états ne change pas la complexité (juste la constante).
Si l'entrée est un ε-AFN à n états, le coût de cette conversion est $\mathcal{O}(n^3 4^{2^n})$!

Des expressions régulières aux automates :

Conversion vers les ε-AFN linéaire en la longueur de l'expression.
Pour passer à un AFN : $\mathcal{O}(n^3)$

Tester si un langage régulier est vide

Représentation : un automate fini.

Reformulation de la question : existe-t-il un moyen de joindre un état acceptant à partir de l'état de départ (parcours de graphe) ?

Par induction :

Base : L'état de départ est atteignable par l'état de départ.

Induction : Si l'état q est atteignable par l'état de départ, tout état atteignable depuis q est atteignable par l'état de départ.

Coût total : $\mathcal{O}(n^2)$.

Tester si un langage régulier est vide (suite)

On peut aussi étudier une ER E et dire si $L(E) = \varnothing$.

On procède de manière récursive :

- $E = F + G$. Alors $L(E)$ est vide ssi $L(F)$ **et** $L(G)$ sont vides
- $E = F.G$. Alors $L(E)$ est vide ssi $L(F)$ **ou** $L(G)$ sont vides
- $E = F^*$. Alors $L(E)$ n'est jamais vide puisque $\varepsilon \in L(E)$
- $E = \varepsilon$. Alors $L(E)$ est non vide
- $E = \mathbf{a}$. Alors $L(E)$ est non vide
- $E = \varnothing$. Alors $L(E)$ est vide

Tester l'appartenance à un langage régulier

- Pour tester si $w \in L(A)$ avec A un AFD, on en simule le fonctionnement. Si $|w| = n$ alors cela coûte $\mathcal{O}(n)$.
- Si A est un AFN à s états, simuler A sur w coûte $\mathcal{O}(ns^2)$.
- Si A est un un ε-AFN à s états (il faut alors calculer les ε-fermetures), simuler A sur w coûte $\mathcal{O}(ns^3)$.
- Si $L = L(E)$ pour une ER E de longueur s, on convertit E en un ε-AFN avec $2s$ états. Simuler w sur cette machine coûte $\mathcal{O}(ns^3)$.

Tester si deux langages réguliers définissent le même langage.

Conséquence : Minimisation d’un AFD en un AFD unique.

Tester l'équivalence de deux états d'un AFD

Définition 1

Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *un AFD et* $p, q \in Q$. *On dit que* p *et* q *sont* ***équivalents*** *et on note* $p \equiv q$ *si pour* $w \in \Sigma^\star$,

$$\widehat{\delta}(p, w) \text{ est un état acceptant ssi } \widehat{\delta}(q, w) \text{ est un état acceptant.}$$

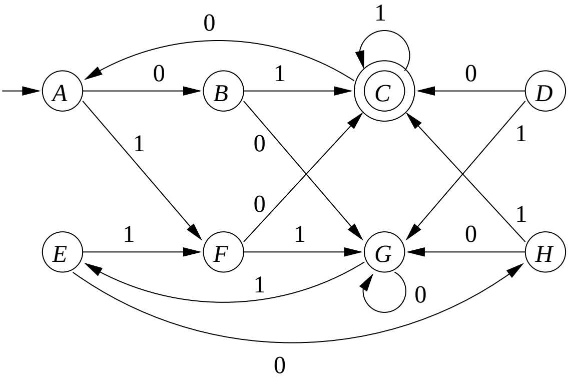
Si $p \not\equiv q$, on dit que p et q sont **distinguables**.

Autrement dit, $p \not\equiv q$ ssi il existe $w \in \Sigma^*$ tel que

- $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ et $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$
  ou
- $\widehat{\delta}(p, w) \notin F$ et $\widehat{\delta}(q, w) \in F$

Tester l'équivalence de deux états d'un AFD

Exemple :

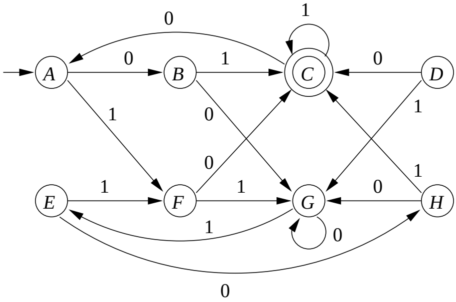


$$\widehat{\delta}(C,\varepsilon) \in F, \widehat{\delta}(G,\varepsilon) \notin F \quad \Rightarrow \quad C \not\equiv G$$

$$\widehat{\delta}(A,01) = C \in F, \widehat{\delta}(G,01) = E \notin F \quad \Rightarrow \quad A \not\equiv G$$

Tester l'équivalence de deux états d'un AFD (suite)

Que dire de A et E ?



$\widehat{\delta}(A,\varepsilon) = A \notin F$, $\widehat{\delta}(E,\varepsilon) = E \notin F$ et $\widehat{\delta}(A,1) = F = \widehat{\delta}(E,1)$

Ainsi $\widehat{\delta}(A,1x) = \widehat{\delta}(E,1x) = \widehat{\delta}(F,x)$ pour tout $x \in \{0,1\}^*$

De plus $\widehat{\delta}(A,00) = G = \widehat{\delta}(E,00)$ et $\widehat{\delta}(A,01) = C = \widehat{\delta}(E,01)$

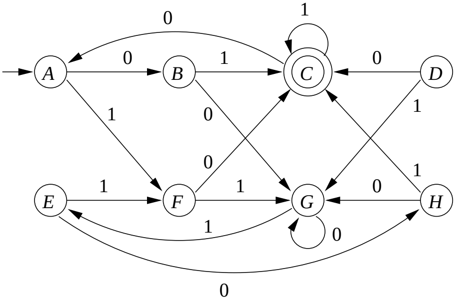
Par conséquent : $A \equiv E$

Algorithme de remplissage de table

Algorithme récursif :

Base : si $p \in F$ et $q \notin F$ alors $p \not\equiv q$

Induction : si pour un $a \in \Sigma$, $\delta(p, a) \not\equiv \delta(q, a)$ alors $p \not\equiv q$



	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

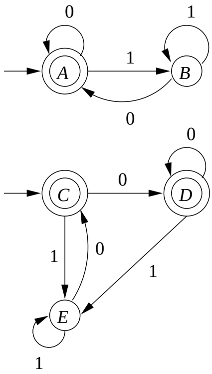
Tester l'équivalence de langages réguliers

Les langages L et M deux langages réguliers
Pour tester si $L = M$:

1. Convertir L et M en AFD A_1 et A_2
2. Imaginer l'AFD qui est l'union des deux AFD
3. Si les deux états de départ de A_1 et A_2 sont équivalents, alors $L = M$ autrement $L \neq M$

Complexité : $\mathcal{O}(n^4)$
On peut la faire chuter à $\mathcal{O}(n^2)$.

Tester l'équivalence de langages réguliers (exemple)



	A	B	C	D
B	x			
C		x		
D		x		
E	x		x	x

On voit bien que les 2 automates acceptent le langage $\varepsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$

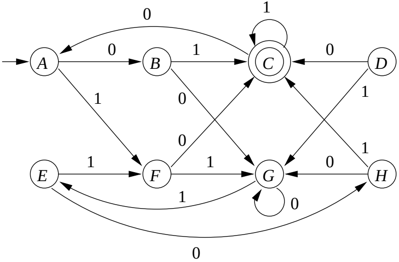
Minimisation d'AFD

Minimisation *unique* d'un AFD.

- Éliminer tout état ne pouvant pas être atteint par l'état de départ.
- Partitionner les états restants en blocs tels que tous les états se trouvant dans un même bloc sont équivalents.
- Les blocs deviennent des états.
- L'état de départ est le bloc contenant l'état de départ
- Les blocs acceptants sont ceux qui contiennent des états acceptants
- Si S est un bloc d'états équivalents et $a \in \Sigma$ alors $\delta(S, a)$ (réunion) est un bloc d'états équivalents.

Minimisation d'AFD (exemple)

Minimiser l'automate



B	*x*						
C	*x*	*x*					
D	*x*	*x*	*x*				
E		*x*	*x*	*x*			
F	*x*	*x*	*x*		*x*		
G	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	
H	*x*		*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*