

- Contrôle - 24/10/2017 - 1h

Le barème est donné à titre indicatif. Bon courage !

Exercice 1 (sur 5 points)

Entre le premier et le second tour des élections présidentielles, un candidat C commande à un institut de sondage une évaluation de ses chances de gagner. Sur 1000 personnes interrogées et ayant l'intention d'exprimer leur suffrage, 516 déclarent avoir l'intention de voter pour C.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion de votes pour C le jour de l'élection.
2. Donner puis un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% de cette proportion de votant pour C. Vous donnerez l'expression (ce n'est pas nécessaire de me justifier la construction de l'intervalle de confiance), puis vous effectuerez l'application numérique. Commenter.
3. Que vaut ici la marge d'erreur pour un niveau de confiance de 95%. L'interpréter.
4. Déterminer le nombre de personnes que doit interroger l'institut de sondage pour être sûre d'avoir une marge d'erreur de 1%. Commenter.

Exercice 2 (sur 5 points)

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par :

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta^4} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$ paramètre inconnu. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d de densité f_{θ} , avec θ paramètre inconnu. On cherche à estimer θ à partir de l'échantillon.

1. Donner un estimateur de θ par la méthode des moments en utilisant le moment d'ordre 1 (i.e. l'espérance).
2. Cet estimateur est-il sans biais ? Calculer son risque quadratique.
3. Donner un autre estimateur des moments θ en utilisant le moment d'ordre 2.
4. Sans faire de calcul, expliquer comment choisir entre ces deux estimateurs.

Exercice 3 (sur 10 points)

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de variables aléatoires i.i.d de densité

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^3} e^{-\frac{x^2}{\theta^3}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

On donne $\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta^{3/2}$, $\mathbb{E}(X^2) = \theta^3$ et $\mathbb{E}(X^4) = 2\theta^6$.

1. Calculer l'estimateur des moments (en utilisant le premier moment).
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
3. Ces estimateurs sont-ils consistants ? Asymptotiquement normaux ? Lequel préférer ?
4. En utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance, construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 99% pour le paramètre θ .