Corrigé du Test 1 du 16 octobre 2018

Exercice 1. 1) -La fonction f_1 est un polynôme trigonométrique sur $[-\pi,\pi[$. Par périodisation sur $\mathbb{R}$ elle est donc donnée par la même formule sur $\mathbb{R}$ tout entier, à savoir $f_1(t) = (\cos(2t-3))^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{R}$, donc d'une fonction C^∞.
- La fonction f_2 est, sur $[-\pi,\pi[$, la composée de la fonction $h : t \mapsto \cos t$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $w : s \mapsto |s|$, qui est continue, mais qui n'est pas dérivable en 0. On a donc $f_2(t) = w(h(t)) = w \circ h(t)$, pour $t \in [-\pi,\pi[$. Comme la fonction h est 2π-périodique, la périodisation de f_2 est donnée par la même formule, à savoir $f_2(t) = |\cos t| = w \circ h(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction f_2 est continue, comme composée de fonctions continues. En revanche, comme h n'est pas dérivable en zéro, on ne peut pas affirmer [1] que f_2 est C^1. On s'aperçoit alors que f_2 n'est pas dérivable en $\pi/2$. En effet, on a $f_2(t) = \cos t$ pour $t \in]0,\pi/2]$, de sorte que f_2 est dérivable sur $]0,\pi/2[$, avec $f_2'(t) = -\sin t$. De même $f_2(t) = -\cos t$ pour $t \in]\pi/2,\pi[$, de sorte que f_2 est dérivable sur $]\pi/2,\pi[$, avec $f_2'(t) = \sin t$. On a donc :

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} f_2'(t) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \text{ et } \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} f_2'(t) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

En $\pi/2$, il y a donc des dérivées à gauche et à droite, mais elles ne coïncident pas, de sorte que f_2 n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$. La fonction n'est donc pas C^1, a fortiori pas C^2.
-La fonction f_3 n'est pas continue en π. En effet, par périodicité, on a $f_3(t) = \exp(t-2\pi)$, pour $t \in [\pi, 3\pi[$. On a donc

$$\lim_{t\to\pi^-} f_3(t) = \exp\pi \text{ et } \lim_{t\to\pi^+} f_3(t) = \exp(-\pi).$$

Les deux limite ne coïncident pas, donc la fonction n'est pas continue en π.A fortiori, elle n'est ni C^1, ni C^2.

3) Comme f_1 est un polynôme trigonométrique, on calcule ses coefficients dans la base $\{\exp(ik\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en dévellopant le "cube". On a ainsi

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{8}\left(\exp(i(2t-3)) + \exp-i(2t-3)\right)^3 = \frac{1}{8}(\exp(6it-9i) + 3\exp(2it-3i) + \\ &+ 3\exp(-2it+3i) + \exp(-i6t+9i)) = \frac{1}{8}\exp(-9i).\exp(6it) + \frac{3}{8}\exp(-3i).\exp(2it) + \\ &\frac{3}{8}\exp(3i).\exp(-2it) + \frac{1}{8}\exp(9i).\exp(-6it). \end{aligned} \tag{1}$$

1. ni le contraire non plus, d'ailleurs.

On a donc $\widehat{f}(k) = 0$ si $k \not\in \{-6,-2,2,6\}$, et $\widehat{f}(-6) = \frac{1}{8}\exp(9i)$, $\widehat{f}(-2) = \frac{3}{8}\exp(3i)$, $\widehat{f}(2) = \frac{3}{8}\exp(-3i)$ et $\widehat{f}(6) = \frac{1}{8}\exp(-9i)$.

4) Pour simplifier un peu les calculs, on peut utiliser comme intervalle de taille 2π l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi//2]$. On obtient, comme $f_2(s) = \cos s$ pour $s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f_2(s) = -\cos s$ pour $s \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos s| \exp(-iks)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \exp(-iks)\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos s \exp(-iks)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On a, si $k \neq \pm 1$, comme $\exp(\frac{i\pi}{2}) = i$ et $\exp(-\frac{i\pi}{2}) = -i$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \exp(-iks)\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\exp(is) + \exp(-is)\big)\exp(-iks)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\exp(i(1-k)s) + \exp(-i(k+1)s)\big)\,\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{\exp(i(1-k)s)}{2i(1-k)} - \frac{\exp(-i(1+k)s)}{2i(1+k)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{i^{1-k} - (-i)^{1-k}}{2i(1-k)} - \frac{(-i)^{k+1} - i^{k+1}}{2i(1+k)}.\end{aligned}$$

De même, comme $\exp(\frac{i\pi}{2}) = i$ et $\exp(\frac{3i\pi}{2}) = -i$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos s \exp(-iks)\mathrm{d}s = \left[\frac{\exp(i(1-k)s)}{2i(1-k)} - \frac{\exp(-i(1+k)s)}{2i(1+k)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{i^{1-k} - (-i)^{1-k}}{2i(1-k)} + \frac{(-i)^{k+1} - i^{k+1}}{2i(1+k)}.$$

En regroupant, on trouve, pour $k \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(k) &= \frac{i^{1-k} - (-i)^{1-k}}{2\pi i(1-k)} - \frac{(-i)^{k+1} - i^{k+1}}{2\pi i(1+k)} = \frac{i^{1-k}(1-(-1)^{k-1})}{2\pi i(1-k)} + \frac{i^{k+1}(1-(-1)^{k+1})}{2\pi i(1+k)} \\ &= \left(1-(-1)^{k-1}\right)\left[\frac{(-i)^k}{2\pi(1-k)} + \frac{i^k}{2\pi(k+1)}\right] = \left(1-(-1)^{k-1}\right)\frac{i^k}{2\pi}\left[\frac{(-1)^k}{(1-k)} + \frac{1}{(k+1)}\right].\end{aligned}$$

On calcule de même

$$\widehat{f_2}(1) = \frac{((-i)^2 - i^2)}{4\pi i} = 0, \widehat{f}(-1) = 0,$$

5) On a, comme $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi) = -1$,

$$\begin{aligned}\widehat{f_3}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp s \exp(-iks)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp((1-ik)s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp((1-ik)s)}{1-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\exp((1-ik)\pi) - \exp((-1+ik)\pi)}{2\pi(1-ik)} = \frac{(-1)^k(\exp\pi - \exp(-\pi))}{2\pi(1-ik)}.\end{aligned}$$

6) On utilise la formule $\widehat{f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3}(k) = 2\pi \widehat{f_1}(k)\widehat{f_3}(k)$ et on utilise les formules des questions 3) et 5).

Exercice 2. A1) La fonction g_k n'est pas périodique, car elle est non nulle à support compact (la seule fonction périodique à support compact étant la fonction nulle). On vérifie que $g_k(-t) = -g_k(t)$ sur la formule qui définie g_k.
A2) La fonction g_k est continue sur chacun des ensembles $]-1,1[$ et $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Pour vérifier qu'elle est continue, il suffit de vérifier qu'elle est continue en $+1$, et -1 , et par imparité, il suffit de le faire en $+1$. Or on a

$$\lim_{t\to 1^-} g_k(t) = \lim_{t\to 1^-} \sin(k\pi t) = \sin k\pi = 0 \text{ et } \lim_{t\to 1^+} g_k(t) = 0.$$

La fonction g_k est donc continue. La fonction g_k est dérivable sur chacun des ensembles $]-1,1[$ et $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Pour qu'elle soit C^1 sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que les dérivées à gauche et à droite en $+1$ et en -1 coïncident. Par imparité, il suffit de le faire en $+1$. Or on a

$$\lim_{t\to 1^-} g_k'(t) = \lim_{t\to 1^-} k\cos(k\pi t) = kcosk\pi = k(-1)^k \text{ et } \lim_{t\to 1^+} g_k'(t) = 0.$$

La fonction n'est donc pas C^1 et a fortiori pas C^2.
A3) La fonction g_k est continue, donc on $\|g_k\|_\infty = \sup\{|g_k(t)|, t \in \mathbb{R}\}$. On a toujours $|g_k(t)| \le 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et $|g_k(\pi/2)| = 1$. Donc, $\|g_k\|_\infty = 1$.
A4) On a

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |g_1(s)| \mathrm{d}s = \int_1^1 |\sin(\pi s)| \mathrm{d}s = \int_0^1 \sin(\pi s) \mathrm{d}s - \int_{-1}^0 \sin(\pi s) \mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^1 \sin(\pi s)\mathrm{d}s = 2\left[\frac{\cos(\pi s)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}. \end{aligned} \tag{2}$$

B2) La fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ n'est pas continue en -1 et en $+1$, les limites à gauche et à droite en chacun de ces points étant différentes. Elle est paire.
B3) La fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, car elle est bornée. On a en effet $|\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)| \le 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $|\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)| = 1$ pour $t \in]-1,1[$, c'est à dire sur un ensemble de mesure non nulle, de sorte que sa norme dans L^∞ est égale à 1. Elle appartient à $L^1(\mathbb{R})$ puisqu'elle est intégrable. En effet $\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)| \mathrm{d}t = \int_{-1}^1 1 \mathrm{d}t = 2$, de sorte que sa norme dans L^1 est égale à 2.

C1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(s) g_k(t-s)$ est bornée, et nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$ de sorte qu'elle est intégrable. On peut donc définir $f_k(t)$ pour tout t. Comme on a un produit de convolution d'une fonction paire avec une fonction impaire, f_k est impaire (cf TD1).
C2) Chacune des deux fonctions $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ et g_k est à support dans $[-1,1]$, de sorte que le produit de convolution f_k des deux fonctions est à support dans $[-1,1] + [-1,1) = [-2,2]$, et s'annule donc en dehors de cet intervalle (cf cours).

C3) Il suffit de considérer le cas $t \geq 0$, le cas $t < 0$ s'en déduit par imparité. On a, pour $t \geq 0$, $f_k(t) = \int_{\mathbb{R}} g_k(s)\mathbf{1}_{[-1,1]}(s)\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \sin(\pi ks)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t-s)\mathrm{d}s$. Or $\mathbf{1}_{[-1,1]}(t-s) = 1$ si $s \in [-1+t, 1+t]$, 0 sinon. Si $0 \leq t \leq 2$ alors $-1 \leq -1+t \leq 1 \leq 1+t$, et on obtient pour $0 \leq t \leq 2$

$$f_k(t) = \int_{-1+t}^{1} \sin(\pi ks)\mathrm{d}s = \left[\frac{\cos(\pi ks)}{\pi k}\right]_{-1+t}^{1} = \frac{1}{\pi k}\left[\cos(\pi k(t-1) - (\cos\pi k)\right]. \quad (3)$$

Par imparité, on en déduit que $f_k(t) = \dfrac{1}{\pi k}\left[(\cos\pi k) - \cos(\pi k(t+1)\right]$ pour $-2 \leq t \leq 0$, et $f_k(t) = 0$ dans tous les autres cas.
C4) La formule (3) montre que f_k est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Par imparité, il suffit d'étudier le cas $t = 2$. Comme les limites à gauche et à droite en 0 et +2 de f_k sont identiques, égales à 0, on en déduit que f_k est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la dérivée de f_k est donnée sur $]0,2[$ par $f_k'(t) = -\sin(\pi k(t-1))$, qui tend vers 0 lorsque $t \to 2^-$. La fonction f est donc dérivable en 2, et on vérifie de même qu'elle l'est en 0. Elle est donc C^1.
B5) Par imparité, on a $\int_{\mathbb{R}} f_1(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f_1(t)\mathrm{d}t = 0$.

C1) La fonction h est paire, puisque la fonction $t \mapsto |t|$ est paire.
C2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto g_1(s)h(t-s)$ est bornée, et nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$ de sorte qu'elle est intégrable. Le produit de convolution $w \equiv g_1 \star h$ est donc bien défini. Comme on a un produit de convolution d'une fonction paire et d'une fonction impaire, w est impaire (cf TD1).
C3) On a, pour $t \geq 0$, $w(t) = \int_{-1}^{1} \sin(\pi s)\exp -|t-s|\mathrm{d}s$. Si $t \geq 1$, on a alors $|t-s| = t-s$ pour tout $s \in [-1,1]$, et donc

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-1}^{1} \sin(\pi s)\exp -(t-s)\mathrm{d}s = \operatorname{Im}\left[\int_{-1}^{1} \exp(i\pi s)\exp -(t-s)|\mathrm{d}s\right] \\ &= \operatorname{Im}\left[\int_{-1}^{1} \exp((i\pi+1)s - t)\mathrm{d}s\right] = \exp(-t)\operatorname{Im}\left[\frac{\exp(i\pi+1) - \exp(-i\pi-1)}{i\pi+1}\right]. \end{aligned}$$

Si $0 \leq t \leq 1$, on a $|t-s| = t-s$ pour tout $s \in [t,1]$, $|t-s| = s-t$ pour $s \in [-1,t]$, et donc $w(t) = \int_{-1}^{t} \sin(\pi s)\exp(t-s)\mathrm{d}s + \int_{t}^{1} \sin(\pi s)\exp -(t-s)\mathrm{d}s$, soit

$$\begin{aligned} w(t) &= \operatorname{Im}\left[\int_{-1}^{t} \exp(i\pi-1)s + t)\mathrm{d}s + \int_{t}^{1} \exp((i\pi+1)s - t)\mathrm{d}s\right] \\ &= \exp(t)\operatorname{Im}\left[\frac{\exp((i\pi-1)t) - \exp(-i\pi+1)}{i\pi-1}\right] - \exp(-t)\operatorname{Im}\left[\frac{\exp((i\pi+1)t) - \exp(i\pi+1)}{i\pi+1}\right]. \end{aligned}$$

C4) Les formules données en C3) montrent que w est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. On vérifie qu'elle est continue en 0, 1 et -1 en étudiant les limites à gauche et à droite en ces points.