SORBONNE UNIVERSITÉ PIERRE
ANNÉE 2018-2019

POLYTECH' PARIS MAIN 4
FOURIER, CONVOLUTION

Test 2 du 27 Novembre 2018

Durée : 1h50, Polycopié autorisé.

Exercice 1. A) On considère les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(t) = t\exp(-t^2) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, \\ h(t) = 1 \text{ pour } t \in]-1,1[\text{ et } h(t) = 0 \text{ pour } |t| \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

A1) Ces fonctions sont-elles paires ? impaires ?
A2) Représenter l'allure des graphes des fonctions f et h.
A3) Vérifier que h et f appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^\infty(\mathbb{R})$.
A4) Calculer les normes de h et f dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$.

B1) Justifier le fait que le produit de convolution $w = h \star f$ est bien défini.
B2)Déterminer w explicitement.
B3) La fonction w est-elle continue sur $\mathbb{R}$? de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
B4) Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h \star f(t)\mathrm{d}t$.

C) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = |t|\exp(-t^2)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction $w_2 = h \star g$.

Exercice 2. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(t) = \sup\{\sin t, 0\}, \text{ pour } t \in \mathbb{R} \\ g(t) = \sup\left\{\sin^3 t, 0\right\}, \text{ pour } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

A1)Vérifier que f et g sont positives, et 2π-périodiques.
A2)Tracer l'allure des graphes de f et g. Préciser les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sur lesquelles ces fonctions s'annulent.
A3) Les fonctions f et g sont-elles continues ? de classe C^1 ? De classe C^2 ?

B1) Calculer les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Préciser $\widehat{f}(1)$.
B2)Vérifier que $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
B3) Vérifier que si k est impair, alors $\widehat{f}(k) = 0$.
B4) Vérifier que $|\widehat{f}(k)| \leq \dfrac{1}{\pi|k^2-1|}$ pour tout $k \notin \{-1,1\}$.
B5) En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

C1) Montrer que la série de Fourier $S_N(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f lorsque $N \to +\infty$.

C2) Montrer que $\|f - S_N(f)\|_\infty \leq \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n \geq N+1} \dfrac{1}{n^2-1} \leq \dfrac{1}{\pi} \sum_{n \geq N} \dfrac{1}{n^2}$.

C3) En déduire que $\|f - S_N(f)\|_\infty \leq \dfrac{1}{\pi(N-1)}$, pour $N \geq 2$.

C4) Trouver un nombre N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, on ait $\|f - S_N(f)\|_\infty \leq 10^{-6}$.

D1) En utilisant le théorème de convergence de Dirichlet ou la question C1), calculer la somme $\mathscr{S}_1 = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}, n \neq 1} \dfrac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1}$.

D2) En déduire la valeur de la somme $\Sigma_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

D3) Calculer de même, en utilisant le Théorème de Dirichlet la somme $\Sigma_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

D4) Calculer, en utilisant le théorème de Parseval, la somme $\Sigma_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$.

D5) Majorer la différence $\|f - S_N(f)\|_2$ en fonction de N.

D6) Trouver un nombre N_1 tel que pour tout $N \geq N_1$, on ait $\|f - S_N(f)\|_2 \leq 10^{-6}$.

E1) Calculer les coefficients de Fourier $\widehat{g}(k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

E2) Vérifier que $|\widehat{g}(k)| \leq \dfrac{6}{\pi|k^2-9||k^2-1|}$ pour tout $k \not\in \{-3,-1,1,3\}$.

E3) Montrer que la série de Fourier $S_N\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}$ lorsque $N \to +\infty$.

E4) Calculer $\widehat{f \underset{\text{per}}{\star} g}(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

E5) Montrer que $f \underset{\text{per}}{\star} g \in C^4_{2\pi}(\mathbb{R})$.