Corrigé du Test 1 du 22 octobre 2019

Exercice 1. A2) La fonction f_0 n'est pas continue au point 1, puisque sa limite à gauche en ce point vaut 1, alors que la limite à droite vaut 0. En revanche elle est C^1 par morceaux.
A3)La fonction f_0 appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$ car elle est bornée. On a $\|f_0\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\} = 1$. Comme f_0 est bornée, et s'annule en dehors de $[0,1]$, elle est intégrable et donc dans $L^1(\mathbb{R})$. On a $\|f_0\|_1 = \int_\mathbb{R} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |t|\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$.
B1) la fonction f_0 est intégrable. Comme on peut convoler deux fonctions intégrables, le produit de convolution est bien défini.
B2) On sait déja que $h_0(t) = 0$ si $t \not\in [0,2]$. On a $h_0(t) = f_0 \star f_0(t) = \int_\mathbb{R} f_0(s) f_0(t-s)\mathrm{d}s = \int_0^1 s(s-t)\mathbf{1}_{[0,1]}(t-s)\mathrm{d}s$, par définition du produit de convolution. Or $t-s \in [0,1[$ ssi $-1+t < s \leq t$, ce qui nous amène à distinguer deux cas : si $0 \leq t \leq 1$, on a $h_0(t) = \displaystyle\int_0^t s(t-s)\mathrm{d}s = \left[\frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}$. Si $1 \leq t \leq 2$, alors
$h_0(t) = \displaystyle\int_{-1+t}^1 ts(t-s)\mathrm{d}s = \left[\frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_{-1+t}^1 = \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^2 t}{2} + \frac{t}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{t^3}{6} + t - \frac{2}{3}$.
B3) La fonction h_0 est C^1 (car polynômiale) sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,+\infty[$. On vérifie qu'aux points $0,1,2$ les limites à gauche et à droite coincident. on obtient respectivement comme limites 0, $1/6$, et 0. h_0 est dérivable sur chacun des intervalles cités. On a $h_0'(t) = 0$ sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, $h_0'(t) = 1/2t^2$ sur $]0,1[$, et $h_0(t) = -1/2t^2 + 1$ sur $]1,2[$. les limites à gauche et à droite de ces dérivées coincident aux points 0 et 1, mais pas au point 2 (-1 à gauche et 0 à droite).La fonction h_0 n'est donc pas C^1.
B4) On a, comme dans le cours $\int_R h_0(t)\mathrm{d}t = (\int_\mathbb{R} f(t)\mathrm{d}t)^2 = \frac{1}{4}$.

C1) On a, pour $t \in \mathbb{R}$ $\tau_b(\tau_a(f)(t) = \tau_b(f(t-a)) = f(t-a-b) = \tau_{a+b}(f)(t)$.
C2) Pour $t \in \mathbb{R}$, $g \star \tau_a(f)(t) = \int_\mathbb{R} g(s)\tau_a(f)(t-s)\mathrm{d}s = \int_\mathbb{R} g(s) f(t-a-s)\mathrm{d}s = g \star f(t-a) = \tau_a(g \star f)(t)$.
C3) Pour $t \in \mathbb{R}$,on a ,en faisant le changement de variable $u = -s$, $S(g) \star S(f)(t) = \int_\mathbb{R} g(-s) f(s-t)\mathrm{d}s = \int_\mathbb{R} g(u) f(-t-u)\mathrm{d}s = f \star g(-t) = S(f \star g)(t)$.
C4) La fonction $f_1 = S(f_0)$ est définie par $f(t) = -t$ si $t \in]-1,0]$, $f(t) = 0$ sinon. La fonction $f_2 = \tau_1(f_1)$ est définie par $f_2(t) = 1-t$ si $t \in]0,1]$, $f(t) = 0$ sinon. La fonction $f_3 = \tau_{-1}(f_0)$ est définie par $f_3(t) = 1+t$ si $t \in [-1,0[$, $f_3(t) = 0$ sinon. La fonction f_4 est définie par $f_4(t) = 1+t$, si $t \in [-1,0[$, $f_4(t) = 1-t$, si $t \in]0,1[$, $f(t) = 0$ dans les autres cas. Aucune de ces fonctions n'est continue, mais f_4 le devient si on pose $f_4(0) = 1$. La fonction f_4 est paire, les autres n'ont aucune propriété de parité.
C5) On a $h_1(t) = \int_\mathbb{R} f_0(s) f_1(t-s)\mathrm{d}s = \int_0^1 s(s-t)\mathbf{1}_{]-1,0]}(t-s)\mathrm{d}s$. Comme $t-s \in]-1,0]$ ssi $s \in [t, 1+t[$,nous distinguons plusieurs cas. Si $t \leq -1$ alors $1+t \leq 0$ et $[t,1+t[\cap[0,1] = \emptyset$, de sorte que $h_1(t) = 0$. De même, si $t \geq 1$, alors $[t,1+t[\cap[0,1] = \emptyset$, et ainsi $h_1(t) = 0$. Lorsque $-1 \leq t \leq 0$, alors $h_1(t) = \int_0^{1+t} s(s-t)\mathrm{d}s = \left[\frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_0^{1+t} = \frac{(1+t)^3}{6}$. Enfin si $t \in [0,1]$, alors $h_1(t) = \int_t^1 s(s-t)\mathrm{d}s = \left[\frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_t^1 = \frac{1-t^3}{6}$.
C6) On a $h_2(t) = f_1 \star f_1(t) = S(f_0) \star S(f_0)(t) = S(f_0 \star f_0)(t) = S(h_0)(t) = h_0(-t)$ de sorte que $h_2(t) = 0$ si $t \not\in [-2,0]$, $h_2(t) = -t^3/6$, si $t \in [-1,0]$et $h_2(t) = t^3/6 - t - 2/3$ si $t \in [-2,-1]$. On a $h_3(t) = \tau_1(f_1) \star \tau_1(f_1)(t) = \tau_2(f_1 \star f_1)(t) = h_2(t-2)$. Ainsi $h_3(t) = 0$

si $t \not\in [0,2]$, $h_3(t) = (2-t)^3/6$, si $t \in [1,2]$et $h_3(t) = (t-2)^3/6 - (t-2) - 2/3$ si $t \in [0,1]$. De même, $h_4(t) = \tau_{-2}(h_0)(t) = h_0(t+2)$, de sorte que $h_4(t) = 0$ si $t \not\in [-2,0]$, $h_4(t) = (t+2)^3/6$ si $h \in [-2,-1]$, et $h_4(t) = -(t+2)^3/6 + t + 2 - 2/3$. Enfin, on a $h_5 = \tau_1(f_1) \star \tau_{-1}(f_0) = \tau_0(f_1 \star f_0) = h_1$.
C7) La fonction f_4 est paire car convolée de fonctions paires. On décompose $h_6 = (f_2 + f_3) \star (f_2 + f_2) = f_2 \star f_2 + f_2 \star f_2 \star f_3 + f_3 \star f_3 = h_3 + 2h_5 + h_4$. Pour $t \geq 0$, on a donc, comme $h_4(t) = 0$ et $h_5 = h_1$ $h_6(t) = h_3(t) + 2h_1(t)$. On a donc $h_6(t) = (1-t^3)/3 + (t-2)^3/6 - (t-2) - 2/3$ pour $t \in [0,1]$, $h_6(t) = (2-t)^3/6$, si $t \in [1,2]$.

Exercice 2. A2)-La fonction f_1 est un polynôme trigonométrique sur $[-\pi,\pi[$. Par périodisation sur $\mathbb{R}$ elle est donc donnée par la même formule sur $\mathbb{R}$ tout entier, à savoir $f_1(t) = (\sin(t-4))^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc d'un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{R}$, donc d'une fonction C^∞.
-La fonction f_2 est continue sur $[-\pi,\pi[$, car elle est continue sur chacun des intervalles $[0,\pi[$ et $]0,\pi[$. Elle est continue en 0, puisque les limite à gauche et à droite valent 0 et coincident donc. En revanche, elle n'est pas continue en π, car par la limite à gauche vaut π, alors que la limite à droite, vaut, par périodicité 0. Elle n'est donc pas à fortiori C^1, mais elle est C^1 par morceaux.
-La fonction f_3 elle continue, C^1 sur $[-\pi,\pi[$ comme produit de fonctions C^1 : dérivée vaut $f_3'(t) = \sin t + t\cos t$. Elle est continue en sur $\mathbb{R}$, car les limites à gauche et à droite en π coïncident, et sont égale à 0. En revanche elle n'est pas dérivable en π, car la la limite à gauche vaut π, celle à droite $-\pi$. En revanche, elle est C^1 par morceaux.
A3) La fonction f_3 est paire, les autres n'ont pas de propriétés de parité.
B1) Comme f_1 est un polynôme trigonométrique, on calcule ses coefficients dans la base $\{\exp(ik\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en développant le "cube". On a ainsi
$f_1(t) = \dfrac{1}{8i^3}\left(\exp(i(t-4)) - \exp -i(t-4)\right)^3 = \dfrac{-i}{8}(\exp(3it - 12i) - 3\exp(i(t-4)) + 3\exp(-it + 4i)$
$-\exp(-3it - 12i)) = \dfrac{-i}{8}\exp(-12i).\exp(3it) + \dfrac{3i}{8}\exp(-4i).\exp(it) - \dfrac{3i}{8}\exp(4i).\exp(-it)$
$+\dfrac{i}{8}\exp(12i).\exp(-3it)$. On a donc $\widehat{f_1}(k) = 0$ si $k \not\in \{-3,-1,1,3\}$, $\widehat{f_1}(-3) = \frac{-i}{8}\exp(-12i)$,
$\widehat{f_1}(-1) = \frac{-3i}{8}\exp(4i)$, $\widehat{f_1}(1) = \frac{3i}{8}\exp(-4i)$ et $\widehat{f_1}(3) = \frac{i}{8}\exp(12i)$.
B2) On a, pour $k \neq 0$, $\widehat{f_2}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\exp(-ikt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left([\frac{t\exp(-ikt)}{-ik}]_0^\pi + \frac{1}{ik}\int_0^\pi \exp(-ikt)\mathrm{d}t\right)$,
soit $\widehat{f_2}(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi ik} + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1)$. Par ailleurs $\widehat{f_2}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}[\frac{t^2}{2}]_0^\pi = \frac{\pi}{4}$.
B3) On a : $t\sin t\exp(-ikt) = \frac{t}{2i}[\exp(it) - \exp(-it)]\exp(-ikt) = \frac{t}{2i}\left(\exp(i(1-k)t) - \exp(-i(1+k)t)\right)$.
En intégrant sur $[-\pi,\pi]$, il vient, pour $k \neq 1$, $\int_{-\pi}^\pi t\exp(i(1-k)t)\mathrm{d}t = [\frac{t\exp i(1-k)t}{i(1-k)}]_{-\pi}^\pi - \frac{1}{i(1-k)}\int_{-\pi}^\pi \exp(i(1-k)t)\mathrm{d}t = \frac{2\pi(-1)^{k-1}}{i(1-k)}$. De même, pour $k \neq -1$, on a $\int_{-\pi}^\pi t\exp(-i(1+k)t)\mathrm{d}t = [\frac{t\exp(-i(1+k)t)}{-i(1+k)}]_{-\pi}^\pi + \frac{1}{i(1+k)}\int_{-\pi}^\pi \exp(-i(1+k)t)\mathrm{d}t = \frac{-2\pi(-1)^{k+1}}{i(1+k)}$. Il vient donc, pour $|k| \neq 1$, $\int_{-\pi}^\pi t\sin t\exp(-ikt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\left[\frac{2\pi(-1)^{k-1}}{i(1-k)} + \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{i(1+k)}\right] = \pi(-1)^k(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k}) = \frac{2\pi(-1)^k}{1-k^2}$. Ainsi $\widehat{f_3}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi t\sin t\exp(-ikt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{1-k^2}$, pour $|k| \neq 1$. Par des calculs similaires, on trouve $\widehat{f_3}(1) = \widehat{f_3}(-1) = -\frac{1}{2}$.
B4) On a $\widehat{f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3}(k) = 2\pi\widehat{f_1}(k)\widehat{f_3}(k)$ de sorte que $\widehat{f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3}(k) = 0$ si $k \not\in \{-3,-1,1,3\}$,
$\widehat{f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3}(\pm 1) = \mp\frac{-3i}{16}\exp(\mp 4i)$ et $\widehat{f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3}(\pm 3) = \mp\frac{i}{16}\exp(\mp 12i)$.

C1) On applique le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_3 qui est continue, C^1 par morceaux, au point $t = 0$. Comme la somme des coefficients de

Fourier converge normalement, on peut écrire $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f_3}(k) \to f_3(0) = 0$. Ceci donne $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|\neq 1} \frac{(-1)^k}{1-k^2} = -\widehat{f_3}(1) - \widehat{f_3}(-1) = 1$, ou encore $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-n^2} = 1/2$.
C2) On applique le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_3 au point $t = \pi$, cette fois.

D) On sait, d'après le cours, Proposition 3.6, inégalité (3.43) que, pour $N \geq 1$, $\|S_N(f) - f\|_\infty \leq \sum_{|k|\geq N+1} |\widehat{f}(k)| = 2\sum_{n\geq N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \leq 4\sum_{n\geq N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{N}$. Ici On a utilisé le fait que pour $n \geq 2$ $n^2 - 1 \geq \frac{1}{2} n^2$.