Test 1 du 27 février 2019

Durée : 1h50, Polycopié autorisé.

Exercice 1. Trouver les solutions $t \to y(t)$ des équations différentielles suivantes, en précisant le domaine de définition :

a) $y'(t) = \dfrac{3y(t)}{1+t}$, avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.

b) $y'(t) = 4y(t) + \cos t$, avec pour donnée intiale $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = t - \dfrac{2ty(t)}{1+t^2}$, avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.

Exercice 2. On pose $\mathscr{D} =]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, et on considère l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{t}{4x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathscr{D}. \\ u(x,0) = x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1}$$

A1) Vérifier qu'il s'agit d'une équation de transport linéaire.

A2) Préciser la courbe caractéristique $\mathscr{C}^\star$ qui passe par un point $(x^\star, t^\star)$ donné, avec $x^\star > 0$, $t^\star \geq 0$.

A3) Donner l'expression de la solution qui vérifie $u(x,0) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

B) On considère l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t}{4x^3}v\right)(x,t) = 0 \text{ pour } (x,t) \in \mathscr{D}. \\ v(x,0) = x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2}$$

B1) De quel type cette équation est-elle ?

B2) Donner l'expression de $u(x^\star, t^\star)$ pour $x^\star > 0$, $t^\star \geq 0$.

Exercice 3. 1) Montrer que le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ sur } [0,1] \times [0,+\infty[\\ u(x,0) = \sin(\dfrac{\pi}{2}x) + 1 \text{ pour } x \in [0,1] \\ u(0,t) = 1 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0,+\infty[\end{cases} \tag{3}$$

possède au plus une solution.

2) On cherche à construire une solution de la forme $u(x,t) = f(t)g(x) + C$, où

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$. Montrer que nécessairement, on a alors $g(x) + C = \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$, $\forall x \in [0,1]$.
3) Montrer que $g(0) = 0$ en utilisant la condition en $x = 0$.
4) En déduire les expressions de g et C.
5) De quelle équation différentielle f doit-elle être la solution ? déterminer f.
6) Conclure.

Exercice 4. Soit u_0 une foncion 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} + u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

1) Montrer que si une solution 2π-périodique par rapport à x existe, alors elle est unique.
2) Trouver la solution du problème pour $u_0(x) = \exp ikx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ donné. *[Indication : On pourra chercher la solution sous la forme $u(x,t) = f(t)\exp ikx$, pour $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, et trouver une équation différentielle pour f].*
3) Trouver la solution du problème pour $u_0 = (\sin x)^2(\cos x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4*) Trouver la solution v, 2π-périodique par rapport à x, du problème

$$\begin{cases} v_t - 3v_{xx} + v = t(\sin x)^2(\cos x), \text{ sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ v(x,0) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$