SORBONNE UNIVERSITÉ PIERRE | POLYTECH' PARIS MAIN 4
ANNÉE 2018-2019 | FOURIER, CONVOLUTION

Test 1 du 16 octobre 2018

Durée : 1h45, Polycopié autorisé.

Exercice 1. On considère les fonctions 2π-périodiques suivantes, définies par :
-a) $f_1(t) = (\cos(2t-3))^3$ pour $t \in \mathbb{R}$
-b) $f_2(t) = |\cos t|$ pour $t \in [-\pi, \pi[$
-c) $f_3(t) = \exp t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$.
1) représenter l'allure des graphes de f_1, f_2 et f_3.
2) Parmi les fonctions f_1, f_2, f_3, quelles sont les fonctions continues sur $\mathbb{R}$? Quelles sont les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe C^2 sur $\mathbb{R}$?
3) Calculer les coefficients de Fourier de f_1.
4) Calculer les coefficients de Fourier de f_2.
5) Calculer les coefficients de Fourier de f_3.
6) Calculer les coefficients de Fourier de $f_1 \underset{\text{per}}{\star} f_3$.

Exercice 2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g_k(t) = \sin \pi k t, \text{ pour } t \in [-1, 1], \\ g_k(t) = 0 \text{ pour } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases} \tag{1}$$

A1) représenter les graphes des fonctions g_1 et g_2.
A1) la fonction g_k est-elle périodique ? Vérifier qu'elle est impaire.
A2) La fonction g_k est-elle continue ? De classe $C^1(\mathbb{R})$? De classe $C^2(\mathbb{R})$?
A3) Calculer la norme $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
A4) Calculer $\|g_1\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

B) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathbf{1}_I$ la fonction indicatrice de I, c'est à dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \mathbf{1}_I(t) = 1 \text{ si } t \in I \\ \mathbf{1}_I(t) = 0 \text{ si } t \notin I. \end{cases} \tag{2}$$

B1) Représenter le graphe de la fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$.
B2) La fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ est-elle continue ? Est-elle paire ?
B3) La fonction $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ appartient-elle à $L^\infty(\mathbb{R})$? Appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer sa norme dans chacun de ces espaces de fonctions.

B) On considère le produit de convolution $f_k \equiv \mathbf{1}_{[-1,1]} \star g_k$.
B1) Justifier le fait que le produit de convolution est bien défini et qu'il s'agit

d'une fonction paire.
B2) Montrer, sans faire de calcul, que la fonction f_k s'annule en dehors de l'intervalle $[-2, 2]$.
B3) Déterminer explicitement la fonction f_k.
B4) Représenter le graphe de f_1. S'agit-il d'une fonction continue ? De classe $C^1(\mathbb{R})$?
B5) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f_1(t)\mathrm{d}t$.

C) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \exp(-|t|)$.
C1) Donner l'allure du graphe de h. La fonction h a t-elle des propriétés de parité ?
C2) Vérifier que le produit de convolution $w \equiv g_1 \star h$ est bien défini, est une fonction impaire et positive.
C3) déterminer explicitement w.
C4) La fonction w est-elle continue ? de classe C^1 ? de classe C^2 ?