Objectif

- Méthode simplexe

Exercice 1 [Méthode simplexe : méthode algébrique]

Résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant en utilisant la méthode simplexe sous forme algébrique :

$$
\begin{array}{rrrcl}
\text{Min} & -x_1 & -x_2 & & \\
\text{s.c.} & & & & \\
& x_1 & +5x_2 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\tag{1}
$$

Exercice 2 [Complexité de la méthode simplexe]

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant

$$
\begin{array}{rlcll}
Max & \sum_{j=1}^{n} x_j & & & \\
s.c. & & & & \\
& x_j + 2\sum_{k=1}^{j-1} x_j & \leq & 3^{(j-1)}, & j = 2, \ldots, n \\
& x_1 & \leq & 1 & \\
& x & \geq & 0 &
\end{array}
\tag{2}
$$

1. Tracer l'ensemble des solutions réalisables du problème (2) dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.
2. Résoudre le problème (2) dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 3 [Méthode simplexe]

Résoudre, à l'aide de la méthode du simplexe, le problème linéaire (3) suivant :

$$
\begin{array}{rrrrcl}
Min & 3x_1 & -5x_2 & -7x_3 & & \\
s.c. & & & & & \\
& -2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & \leq & 5 \\
& x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq & 3 \\
& x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\
& x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\tag{3}
$$

Indication : *La solution optimale est* $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{3}{2}, 0)$

Exercice 4 [Méthode simplexe]

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrrcr} Min & x_1 & +2x_2 & & \\ s.c. & & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{4}$$

1. Dessiner l'ensemble des solutions réalisables du problème (4)
2. Résoudre graphiquement le problème (4)
3. Résoudre le problème (4) à l'aide de la méthode du simplexe. A chaque itération mettre en correspondance la solution de base réalisable courante avec le point extrême correspondant.

Indication : *La solution optimale est* $(x_1, x_2) = (3, 0)$

Idem avec le problème (5) ci-dessous :

$$\begin{array}{lrrcr} Min & 3x_1 & +5x_2 & & \\ s.c. & & & & \\ & 7x_1 & +3x_2 & \geq & 11 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq & 5 \\ & x_1 & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{5}$$

Indication : *La solution optimale est* $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, 0)$

Exercice 5 [Méthode simplexe]

Soit le problème linéaire (6) suivant :

$$\begin{array}{lrrrrcr} Min & 2x_1 & +x_2 & +6x_3 & -4x_4 & & \\ s.c. & & & & & & \\ & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -4x_4 & \leq & 6 \\ & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 12 \\ & x_1 & & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \geq & 0 \end{array} \tag{6}$$

1. Identifier une solution réalisable associée à la base formée des colonnes x_1, x_2 et x_4.
2. Est-ce que cette base est optimale ? Si non, utiliser cette base réalisable comme base de départ pour la méthode du simplexe pour résoudre le programme (6).

Indication : *La solution optimale est* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 2)$

Exercice 6 [Méthode simplexe : cas non borné]

Résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant en utilisant la méthode simplexe :

$$\begin{array}{lrrcl} \text{Min} & -x_1 & -3x_2 & & \\ \text{s.c.} & & & & \\ & x_1 & -2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{7}$$

1. Résoudre par la méthode simplexe le problème (7).
2. Résoudre algébriquement le problème (7).

Exercice 7 [Règle lexicographique pour la méthode simplexe]

Considérons le problème d'optimisation continue linéaire :

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & \\ & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{R}^n_+, \end{array} \tag{P}$$

où : $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m_+$ et $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Soit $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des tableaux simplexes obtenus en résolvant le (P) à l'aide de la méthode simplexe. Nous supposerons que la première colonne (la colonne 0) de n'importe quel tableau correspondant à la solution de base réalisable. Notons par T_i^k la i-ème ligne du tableau simplexe T^k.

Supposons que

$$T_i^0 \succ_{lex} 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}\,. \tag{H}$$

Considérons la règle suivante : à chaque itération k de la méthode simplexe :

☞ choisir l'indice q d'une colonne entrant en base telle que :

$$T_{0q}^k < 0.$$

☞ choisir l'indice d'une ligne sortante r telle que :

$$r = \texttt{arg-lexmin}\left\{\frac{1}{T_{iq}^k} T_i^k : i, T_{iq}^k > 0\right\}$$

1. Démontrer que les lignes du tableau T^{k+1} restent *lex-strictement-positives* ;
2. Démontrer que la suite $\left(T_0^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est *lex-strictement-croissante* ;
3. En déduire que l'algorithme simplexe termine en un nombre fini d'itérations.