Objectif

☞ Optimisation sous contraintes

Exercice 1

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & -xy - xz - yz \\ s.c. & \\ & x + y + z = 3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1}$$

1. Résoudre le système traduisant les conditions suffisantes d'optimalité.
2. Déterminer la nature des points stationnaires trouvés.

Exercice 2

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \\ s.c. & \\ & x + y + z \leq -3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \tag{2}$$

1. Résoudre le système traduisant les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (2).
2. Déterminer la nature des points stationnaires trouvés.

Exercice 3

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & -x^2 + y^2 \\ s.c. & \\ & x \leq 0 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array} \tag{3}$$

1. Résoudre le système traduisant les conditions *KKT* à l'ordre 1 pour le problème (3).
2. Démontrer que la solution trouvée n'est pas une solution optimale du problème (3).
3. Vérifier que les conditions suffisantes d'optimalité ne sont pas satisfaites.

Exercice 4 [Conditions KKT]

Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \langle c, x\rangle \\ \text{s.c.} & \\ & \|x\|^2 \leq 1, \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{4}$$

où c est un vecteur non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le point $\hat{x} = -\frac{c}{\|c\|}$ satisfait les conditions KKT.
2. Montrer que $\hat{x}$ est unique.
3. En déduire que la direction de descente d'une fonction f au un point x est donnée par $-\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ (on suppose que $\nabla f(x) \neq 0$).

Exercice 5 [Conditions KKT]

Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} Max & xyz \\ \text{s.c.} & \\ & 3x + y + 2z \leq 1 \\ & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \end{array} \tag{5}$$

1. L'hypothèse de régularité des contraintes est-elle vérifiée en toute solution réalisable du problème (5)
2. Les conditions KKT, pour le problème (5), sont-elles nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes ?
3. Montrer qu'en toute solution optimale du problème (5), on a nécessairement $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ - \{(0, 0, 0)\}$
4. Résoudre le système KKT en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ - \{(0, 0, 0)\}$.
5. En déduire la solution optimale du problème (5)