

Consignes

- Durée : 2 heures.
- Tout objet connecté est strictement interdit.
- Documents et questions non autorisés.

Exercice 1 [Distance orthogonale d'un point à une droite (2 points)]

Considérons \mathcal{H} l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation :

$$a^T x = b, \quad (1)$$

où a est le vecteur (appartenant à \mathbb{R}^n) normal de \mathcal{H} et b un réel positif non nul.

La *distance orthogonale* de l'origine (le point $(0, \dots, 0)$) à l'hyperplan \mathcal{H} est la distance euclidienne entre l'origine et sa projetée orthogonale sur \mathcal{H} .

1. [2pts] Calculer la distance orthogonale de l'origine à l'hyperplan \mathcal{H} .

Exercice 2 [Distribution d'entropie maximale (3 points)]

Soit $\pi = (p_1, \dots, p_n)$ une distribution de probabilités, c'est-à-dire :

$$p_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

L'*entropie* de la distribution π est définie comme suit :

$$H(\pi) = - \sum_{j=1}^n p_j \ln p_j. \quad (2)$$

1. [3pts] Déterminer la distribution de probabilités π d'entropie maximale.

Exercice 3

[Optimisation non linéaire (7 points)]

Considérons le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & (x-2)^2 + (y-3)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 2 \\ & x \leq 1 \\ & y \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

1. [1pt] Pour le problème (3) les conditions KKT sont-elles nécessaires, suffisantes ou nécessaires et suffisantes ? Justifiez votre réponse.
2. [2pts] Expliciter les conditions KKT pour le problème (3).
3. [2pts] Résoudre le problème (3).
4. [2pts] La solution obtenue est-elle unique ? Justifiez votre réponse.

② Exercice 4

[Méthode simplexe duale (3 points)]

Résoudre à l'aide de la méthode *simplexe duale* le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

③ Exercice 5

[Méthode simplexe et conditions KKT (5 points)]

Considérons le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

1. [3pts] Résoudre le problème (5) à l'aide de la méthode *simplexe*.
2. [1pt] Les conditions KKT sont-elles nécessaires, nécessaires et suffisantes ? Justifier votre réponse. Écrire le système des équations décrivant les conditions KKT.
3. [1pt] Résoudre le système KKT. Vous pouvez vous aider des informations obtenues à la première question.