Optimisation en nombres entiers :

Méthode de Benders

Hacène Ouzia

MAIN (5 ème année)
Université Pierre et Marie Curie

2020

TABLE DES MATIÈRES

AGENDA

Principe

Problème à résoudre

Considérons le problème :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) \\ s.c. & \\ & g_i(x,y) \leq 0, i \in I, \\ & h_j(x,y) = 0, j \in J, \\ & x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \\ & y \in \mathcal{Y} \cap \mathbb{Z}^m \end{array} \tag{1}$$

Hypothèses

- Les fonctions f,$\{g_i : i \in I\}$ et $\{h_j : j \in J\}$ sont régulières (au moins de classe $\mathcal{C}^2$) et convexes ;
- Les fonctions $\{h_j : j \in J\}$ sont linéaires ;
- L'ensemble des solutions réalisables de (1) est *régulier* et $\mathcal{X}$ est *compact* ;
- L'ensemble $\mathcal{Y}$ est fini (donc, $\mathbf{conv}(\mathcal{Y})$ est borné).

Principe

Relaxation continue

La relaxation continue du problème (1) est, par définition :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) \\ s.c. & \\ & g_i(x,y) \le 0, i \in I, \\ & h_j(x,y) = 0, j \in J, \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n, \\ & y \in \mathcal{Y} \cap \mathbb{R}^m \end{array} \qquad (2)$$

Remarques

- La relaxation continue est un problème non linéaire, sans doute aussi difficile à résoudre ;
- Pour la résoudre, on utilisera des méthodes de l'optimisation non linéaire continue (méthodes adhoc, méthodes itératives, méthodes par approximation ...)

Principe

Relaxation continue

La relaxation continue du problème (1) est, par définition :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) \\ s.c. & \\ & g_i(x,y) \leq 0, i \in I, \\ & h_j(x,y) = 0, j \in J, \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n, \\ & y \in \mathcal{Y} \cap \mathbb{R}^m \end{array} \tag{2}$$

Remarques

- La relaxation continue est un problème non linéaire, sans doute aussi difficile à résoudre ;
- Pour la résoudre, on utilisera des méthodes de l'optimisation non linéaire continue (méthodes adhoc, méthodes itératives, méthodes par approximation ...)

Exemple

Considérons l'exemple suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\min & 5y - 2\ln(x+1) \\
s.c. & \\
& e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{y} - 1 \leq 0, \\
& -2\ln(x+1) - y + \frac{5}{2} \leq 0, \\
& x + y - 4 \leq 0, \\
& x \in [0;2], y \in \{1,2,3\}.
\end{array}
\tag{3}
$$

Exemple

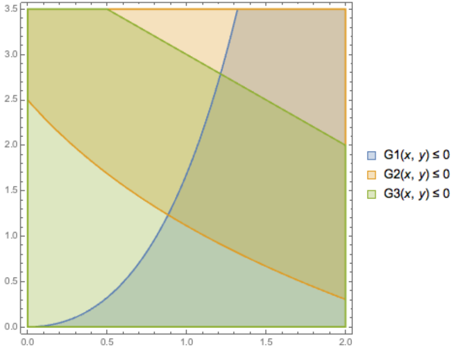

FIGURE – Relaxation continue.

☞ L'ensemble des solutions réalisables de (1) n'est pas *connexe* !

Exemple

Solution

1. Solution de la relaxation continue :

$$\boxed{(\hat{x}, \hat{y}) = (0.88, 1.23)\,,}$$

de valeur 4.9027. Donc, deux nœuds sont à générer ! Valeurs des bornes :

$$\mathbf{LB} = 4.9027;\ \mathbf{UB} = +\infty.$$

2. Nœud $y \leq 1$: la relaxation continue n'est pas réalisable (cf. figure). Donc, le nœud est élagué ! les valeurs des bornes ne changent pas.
3. Nœud $y \geq 2$: solution de la relaxation continue :

$$\boxed{(\hat{x}, \hat{y}) = (1.07, 2)\,,}$$

Solution réalisable ! D'où :

$$\mathbf{LB} = 8.5453;\ \mathbf{UB} = 8.5453.$$

Le nœud est élagué (par réalisabilité) ! Solution optimale.

Exercice

Exercice Application

Résoudre par séparation et évaluation le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 \\ s.c. & \\ & y - 7\sqrt{x} \leq 0, \\ & y - 3x^2 \geq 0, \\ & x \in [0, 2], \\ & y \in \{0, \ldots, 3\}. \end{array}$$

AGENDA

Principe

Problème à résoudre

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x + f^T y \\
s.c. & \\
 & Ax + By = b, \\
 & x \geq 0, \\
 & y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^m.
\end{array} \qquad (4)
$$

Hypothèses

- Le vecteur x appartient à $\mathbb{R}^n$ et le vecteur y à $\mathbb{R}^m$.
- Les matrice A, B et D sont de dimensions appropriées.
- Les vecteurs b et d sont de dimensions appropriées.
- Le problème (4) est un problème d'optimisation en *variables mixtes*.
- Plus l'ensemble Ω est *compliqué* plus le problème *principal* le sera !

Principe

Le problème (4) est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T y + \min \left\{ c^T x : Ax = b - By, x \geq 0 \right\} \\ s.c. & \\ & y \in \Omega \cap \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^m, \end{array}$$

avec :

$$\mathcal{C} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b - By \right\}.$$

TERMINOLOGIE SOUS-PROBLÈME

Pour y **fixé**, le problème :

$$\begin{array}{ll} \min & w^T (b - By) \\ s.c. & \\ & w^T A \leq c^T \end{array} \qquad \text{(SP(y))}$$

sera qualifié de *sous-problème*.

Principe

Le problème (4) est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T y + \min\left\{c^T x : Ax = b - By, x \geq 0\right\} \\ s.c. & \\ & y \in \Omega \cap \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^m, \end{array}$$

avec :

$$\mathcal{C} = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b - By\right\}.$$

Terminologie Sous-Problème

Pour y **fixé**, le problème :

$$\begin{array}{ll} \min & w^T(b - By) \\ s.c. & \\ & w^T A \leq c^T \end{array} \qquad \text{(SP(y))}$$

sera qualifié de *sous-problème*.

Principe

Donc, le problème (4) est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T y + \max \left\{ w^T (b - By) : w^T A \leq c^T \right\} \\ s.c. & \\ & y \in \Omega \cap \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^m \end{array}$$

- L'ensemble des solutions réalisables, noté F, du *sous-problème* ne dépend pas de la variable y.
- Si F est non réalisable alors le problème primal est soit non borné, soit non réalisable (donc, sans intérêt particulier !).
- En revanche, si F est réalisable alors deux cas sont possibles : soit le *sous-problème* est borné, soit le *sous-problème* est non borné.

Principe

ANALYSE DU SOUS-PROBLÈME

① *Sous-problème* non borné implique :

$$\exists r \; : r^T (b - By) > 0.$$

Le vecteur r *est un rayon extrême de* F. Que peut-on en conclure ?

➠ Notons $\texttt{Rext}\,(F)$ l'ensemble des rayons extrêmes de l'ensemble F.

② *Sous-problème* borné implique :

$$\exists e \; : \texttt{val}\,(\texttt{SP}\,(\texttt{y})) = e^T (b - By)$$

Le vecteur e est un point extrême de l'ensemble F.

➠ Notons $\texttt{Pext}\,(F)$ l'ensemble des points extrêmes de l'ensemble F.

Principe

Analyse du sous-problème

① *Sous-problème* non borné implique :

$$\exists r \; : r^T (b - By) > 0.$$

Le vecteur r *est un rayon extrême de* F. Que peut-on en conclure ?

➟ Notons $\texttt{Rext}\,(F)$ l'ensemble des rayons extrêmes de l'ensemble F.

② *Sous-problème* borné implique :

$$\exists e \; : \texttt{val(SP(y))} = e^T (b - By)$$

Le vecteur e est un point extrême de l'ensemble F.

➟ Notons $\texttt{Pext}\,(F)$ l'ensemble des points extrêmes de l'ensemble F.

Principe

Ainsi, le problème (4) est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \min & f^T y + \max \left\{ e^T (b - By) : e \in \texttt{Pext}(F) \right\} \\ s.c. & \\ & r^T (b - By) \le 0, \forall r \in \texttt{Rext}(F), \\ & y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^m. \end{array}$$

Ce dernier problème est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \min & \zeta \\ s.c. & \\ & \zeta \ge f^T y + e^T (b - By), \forall e \in \texttt{Pext}(F), \\ & 0 \ge r^T (b - By), \forall r \in \texttt{Rext}(F), \\ & y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^m. \end{array}$$

Principe

■ TERMINOLOGIE PROBLÈME PRINCIPAL (OU MAITRE)

Le problème principal dans la méthode de *Benders* est le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & \zeta \\ s.c. & \\ & \zeta \geq f^T y + e^T (b - By), \forall e \in \texttt{Pext}(F), \\ & 0 \geq r^T (b - By), \forall r \in \texttt{Rext}(F), \\ & y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^m. \end{array} \qquad \text{(PP)}$$

- Le problème principal est en les variables (ζ, y).
- Le problème principal contient un nombre potentiellement exponentiel (en les dimensions du problème) de contraintes !
- Comment le résoudre ?

Principe

1. Résoudre un *problème principal restreint* :

$$\begin{aligned}
\min\quad & \zeta \\
s.c.\quad & \\
& \zeta \geq f^T y + e_k^T (b - By), e_k \in \texttt{Pext}(F), k = 1, \ldots, \kappa, \\
& 0 \geq r_j^T (b - By), r_j \in \texttt{Rext}(F), j = 1, \ldots, J, \\
& y \in \Omega \cap \mathbb{Z}^m.
\end{aligned} \qquad \text{(PPR)}$$

2. Tester l'optimalité en s'aidant du $\texttt{SP}$: soit $\left(\hat{\zeta}, \hat{y}\right)$ une solution optimale de $\texttt{PPR}$.
   - Sous-problème $\texttt{SP}(\hat{y})$ non borné : générer la coupe (*coupe de réalisabilité*) :
   $$\hat{r}^T (b - By) \leq 0.$$
   - Sous-problème $\texttt{SP}(\hat{y})$ borné :
     - Solution optimal du problème si :
     $$\hat{\zeta} - f^T \hat{y} \geq \texttt{valSP}(\hat{y}).$$
     - Sinon, générer la coupe (*coupe d'optimalité*) :
     $$\zeta \geq f^T y + \hat{e}^T (b - By).$$

Exemple 1

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & 8x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 42y_1 - 18y_2 - 33y_3 \\ s.c. & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - 10y_1 - 8y_2 \geq -4, \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 5y_1 - 8y_3 \geq -3, \\ & x \geq 0, y \in \{0,1\}^3 . \end{array}$$

Solution I

Initial. Posons $\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right) = (1.00, 1.00, 1.00)$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Iter. 1. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & +14.00\lambda_1 + 10.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \\ s.c. & \\ & +2.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -8.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -6.00 \\ & -1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (-2.00, -4.00, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 25.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 0.00, 0.00, 20.00), d'où :

$$\mathbf{LB} = 20.00, \mathbf{UB} = 25.00$$

Solution II

Iter. 2. ➟ **Sous-problème :** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & -4.00\lambda_1 - 3.00\lambda_2 + 1.00\lambda_3 + 1.00\lambda_4 + 1.00\lambda_5 \\ s.c. & \\ & +2.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -8.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -6.00 \\ & -1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \end{array}$$

Sous-problème non réalisable, rayon extrême (dual) :

$$\left(\hat{\lambda},\right) = (0.00, -1.00, 0.00, 0.00, 0.00,)$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\ & 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 0.00, 1.00, −12.00), d'où :

$$\textbf{LB} = 21.00, \textbf{UB} = 25.00$$

Solution III

Iter. 3. ➟ **Sous-problème :** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & -4.00\lambda_1 + 5.00\lambda_2 + 1.00\lambda_3 + 1.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \\ s.c. & \\ & +2.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -8.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -6.00 \\ & -1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (-4.00, -2.00, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 25.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\ & 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \\ & z \geq +22.00 - 50.00y_1 - 32.00y_2 - 16.00y_3 \end{array}$$

Solution optimale $(1.00, 0.00, 0.00, -20.00)$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 22.00, \mathbf{UB} = 25.00}$$

Solution IV

Iter. 4. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
\textit{max} & +6.00\lambda_1 + 2.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 1.00\lambda_4 + 1.00\lambda_5 \\
\textit{s.c.} & \\
& +2.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -8.00 \\
& +1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq -6.00 \\
& -1.00\lambda_1 + 1.00\lambda_2 + 0.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00
\end{array}
$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (0.00, -8.00, 0.00, 0.00, 0.00,)\,,\ \mathbf{UB} = 25.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
\textit{min} & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\
\textit{s.c.} & \\
& z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\
& 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \\
& z \geq +22.00 - 50.00y_1 - 32.00y_2 - 16.00y_3 \\
& z \geq +24.00 - 40.00y_1 - 0.00y_2 - 64.00y_3
\end{array}
$$

Solution optimale (0.00, 1.00, 1.00, −26.00), d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 25.00,\ \mathbf{UB} = 25.00}$$

Évolution des bornes LB et UB

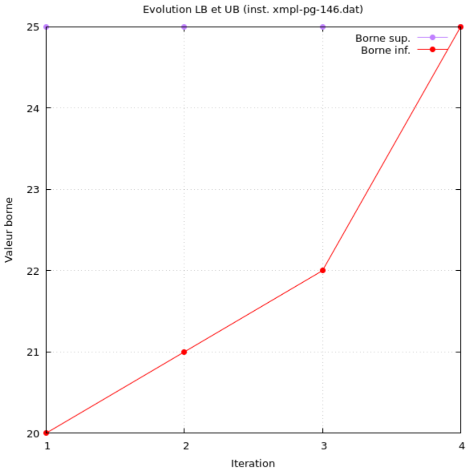

FIGURE – Évoluation des bornes **LB** et **UB**.

Solution I

Initial. Posons $\left(y_1^0, y_2^0, y_3^0\right) = (1.00, 1.00, 1.00)$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Iter. 1. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & -8.00x_1 - 6.00x_2 + 2.00x_3 \\ s.c. & \\ & +2.00x_1 + 1.00x_2 - 1.00x_3 \leq 14.00 \\ & +1.00x_1 + 1.00x_2 + 1.00x_3 \leq 10.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 0.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 0.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 0.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (4.00, 6.00, 0.00, -2.00, -4.00, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 25.00$$

Solution II

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 0.00, 0.00, 20.00), d'où :

$$\mathbf{LB} = 20.00, \mathbf{UB} = 25.00$$

Iter. 2. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & -8.00x_1 - 6.00x_2 + 2.00x_3 \\ s.c. & \\ & +2.00x_1 + 1.00x_2 - 1.00x_3 \leq -4.00 \\ & +1.00x_1 + 1.00x_2 + 1.00x_3 \leq -3.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \end{array}$$

Sous-problème non réalisable, rayon extrême (dual) :

$$\left(\hat{\lambda}, \right) = (0.00, -1.00, 0.00, 0.00, 0.00,)$$

Solution III

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\ & 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \end{array}$$

Solution optimale $(0.00, 0.00, 1.00, -12.00)$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 21.00, \mathbf{UB} = 25.00}$$

Iter. 3. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & -8.00x_1 - 6.00x_2 + 2.00x_3 \\ s.c. & \\ & +2.00x_1 + 1.00x_2 - 1.00x_3 \leq -4.00 \\ & +1.00x_1 + 1.00x_2 + 1.00x_3 \leq 5.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \\ & +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 0.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (0.00, 0.50, 4.50, -4.00, -2.00, 0.00, 0.00, 0.00,) \text{ , } \mathbf{UB} = 25.00$$

Solution IV

➟ **Problème principal :** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\
s.c. & \\
& z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\
& 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \\
& z \geq +22.00 - 50.00y_1 - 32.00y_2 - 16.00y_3
\end{array}
$$

Solution optimale $(1.00, 0.00, 0.00, -20.00)$, d'où :

$$\mathbf{LB} = 22.00, \mathbf{UB} = 25.00$$

Iter. 4. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
min & -8.00x_1 - 6.00x_2 + 2.00x_3 \\
s.c. & \\
& +2.00x_1 + 1.00x_2 - 1.00x_3 \leq 6.00 \\
& +1.00x_1 + 1.00x_2 + 1.00x_3 \leq 2.00 \\
& +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 0.00 \\
& +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00 \\
& +0.00x_1 + 0.00x_2 + 0.00x_3 \leq 1.00
\end{array}
$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (2.00, 0.00, 0.00, 0.00, -8.00, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 25.00$$

Solution V

➟ **Problème principal :** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
\min & +42.00y_1 + 18.00y_2 + 33.00y_3 + z \\
s.c. & \\
 & z \geq +20.00 - 40.00y_1 - 16.00y_2 - 32.00y_3 \\
 & 0 \geq +3.00 - 5.00y_1 - 0.00y_2 - 8.00y_3 \\
 & z \geq +22.00 - 50.00y_1 - 32.00y_2 - 16.00y_3 \\
 & z \geq +24.00 - 40.00y_1 - 0.00y_2 - 64.00y_3
\end{array}
$$

Solution optimale $(0.00, 1.00, 1.00, -26.00)$, d'où :

$$\mathtt{LB} = 25.00, \mathtt{UB} = 25.00$$

Évolution des bornes LB et UB

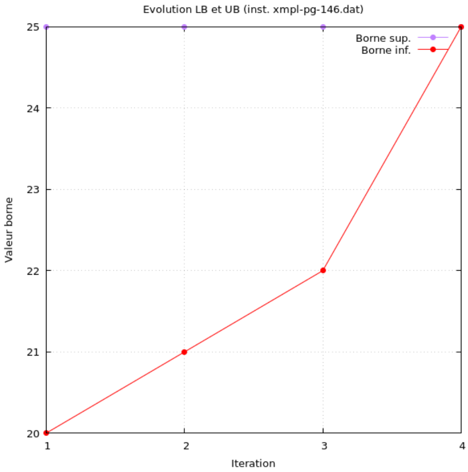

FIGURE – Évoluation des bornes **LB** et **UB**.

Exemple 2

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 4y_1 + y_2 \\ s.c. & \\ & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq 9.5, \\ & x_1 + 2x_2 + y_1 \geq 3.5, \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 1.5, \\ & x_2 + y_1 \geq 0.5, \\ & x_2 \geq 0.5, \\ & x \geq 0, y \in \mathbb{N}^2. \end{array}$$

Solution I

Initial. Posons $\left(y_1^0, y_2^0\right) = (20.00, 20.00)$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Iter. 1. ➟ **Sous-problème :** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & +30.50\lambda_1 + 16.50\lambda_2 - 1.50\lambda_3 + 19.50\lambda_4 - 0.50\lambda_5 \\ s.c. & \\ & -1.00\lambda_1 - 1.00\lambda_2 - 3.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \\ & -1.00\lambda_1 - 2.00\lambda_2 - 2.00\lambda_3 - 1.00\lambda_4 - 1.00\lambda_5 \leq 3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (0.00, 0.00, -0.67, 0.00, -1.67,), \mathbf{UB} = 101.83$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale $(0.00, 0.00, 1.83)$, d'où :

$$\mathbf{LB} = 1.83, \mathbf{UB} = 101.83$$

Solution II

Iter. 2. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} \max & -9.50\lambda_1 - 3.50\lambda_2 - 1.50\lambda_3 - 0.50\lambda_4 - 0.50\lambda_5 \\ s.c. & \\ & -1.00\lambda_1 - 1.00\lambda_2 - 3.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \\ & -1.00\lambda_1 - 2.00\lambda_2 - 2.00\lambda_3 - 1.00\lambda_4 - 1.00\lambda_5 \leq 3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (-2.00, 0.00, 0.00, 0.00, -1.00,), \mathbf{UB} = 19.50$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 9.00, 1.83), d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 10.83, \mathbf{UB} = 19.50}$$

Solution III

Iter. 3. ➟ **Sous-problème :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \max & -0.50\lambda_1 - 3.50\lambda_2 - 1.50\lambda_3 - 0.50\lambda_4 - 0.50\lambda_5 \\ s.c. & \\ & -1.00\lambda_1 - 1.00\lambda_2 - 3.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \\ & -1.00\lambda_1 - 2.00\lambda_2 - 2.00\lambda_3 - 1.00\lambda_4 - 1.00\lambda_5 \leq 3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (0.00, -1.50, 0.00, 0.00, 0.00,)\,, \mathbf{UB} = 14.25$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \\ & z \geq +5.25 - 1.50y_1 - 0.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 7.00, 5.50), d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 12.50, \mathbf{UB} = 14.25}$$

Solution IV

Iter. 4. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & -2.50\lambda_1 - 3.50\lambda_2 - 1.50\lambda_3 - 0.50\lambda_4 - 0.50\lambda_5 \\ s.c. & \\ & -1.00\lambda_1 - 1.00\lambda_2 - 3.00\lambda_3 + 0.00\lambda_4 + 0.00\lambda_5 \leq 2.00 \\ & -1.00\lambda_1 - 2.00\lambda_2 - 2.00\lambda_3 - 1.00\lambda_4 - 1.00\lambda_5 \leq 3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}\right) = (-1.00, -1.00, 0.00, 0.00, 0.00,) \,, \mathbf{UB} = 13.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \\ & z \geq +5.25 - 1.50y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq +13.00 - 2.00y_1 - 1.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 7.00, 6.00), d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 13.00, \mathbf{UB} = 13.00}$$

Évolution des bornes **LB** et **UB**

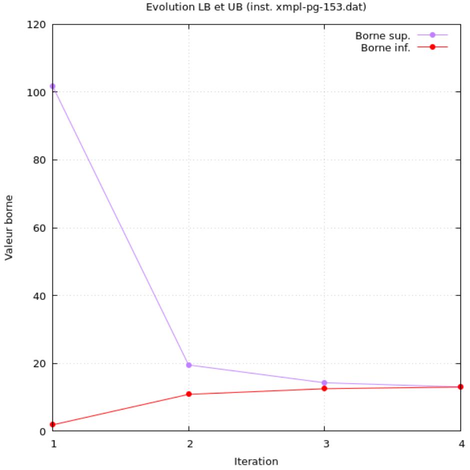

FIGURE – Évoluation des bornes **LB** et **UB**.

Solution I

Initial. Posons $\left(y_1^0, y_2^0\right) = (20.00, 20.00)$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Iter. 1. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +2.00x_1 + 3.00x_2 \\ s.c. & \\ & -1.00x_1 - 1.00x_2 \leq 30.50 \\ & -1.00x_1 - 2.00x_2 \leq 16.50 \\ & -3.00x_1 - 2.00x_2 \leq -1.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq 19.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (0.17, 0.50, 0.00, 0.00, -0.67, 0.00, -1.67,), \mathbf{UB} = 101.83$$

Solution II

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 0.00, 1.83), d'où :

$$\mathbf{LB} = 1.83, \mathbf{UB} = 101.83$$

Iter. 2. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +2.00x_1 + 3.00x_2 \\ s.c. & \\ & -1.00x_1 - 1.00x_2 \leq -9.50 \\ & -1.00x_1 - 2.00x_2 \leq -3.50 \\ & -3.00x_1 - 2.00x_2 \leq -1.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (9.00, 0.50, -2.00, 0.00, 0.00, 0.00, -1.00,) \, , \mathbf{UB} = 19.50$$

Solution III

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 9.00, 1.83), d'où :

$\mathbf{LB} = 10.83, \mathbf{UB} = 19.50$

Iter. 3. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +2.00x_1 + 3.00x_2 \\ s.c. & \\ & -1.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \\ & -1.00x_1 - 2.00x_2 \leq -3.50 \\ & -3.00x_1 - 2.00x_2 \leq -1.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \\ & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (0.00, 1.75, 0.00, -1.50, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 14.25$$

Solution IV

➟ **Problème principal :** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\
s.c. & \\
 & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\
 & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \\
 & z \geq +5.25 - 1.50y_1 - 0.00y_2
\end{array}
$$

Solution optimale (0.00, 7.00, 5.50), d'où :

$$\mathbf{LB} = 12.50, \mathbf{UB} = 14.25$$

Iter. 4. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
min & +2.00x_1 + 3.00x_2 \\
s.c. & \\
 & -1.00x_1 - 1.00x_2 \leq -2.50 \\
 & -1.00x_1 - 2.00x_2 \leq -3.50 \\
 & -3.00x_1 - 2.00x_2 \leq -1.50 \\
 & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50 \\
 & +0.00x_1 - 1.00x_2 \leq -0.50
\end{array}
$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (1.50, 1.00, -1.00, -1.00, 0.00, 0.00, 0.00,), \mathbf{UB} = 13.00$$

Solution V

➟ **Problème principal :** résoudre

$$
\begin{array}{ll}
min & +4.00y_1 + 1.00y_2 + z \\
s.c. & \\
 & z \geq +1.83 + 0.00y_1 - 0.00y_2 \\
 & z \geq +19.50 - 2.00y_1 - 2.00y_2 \\
 & z \geq +5.25 - 1.50y_1 - 0.00y_2 \\
 & z \geq +13.00 - 2.00y_1 - 1.00y_2
\end{array}
$$

Solution optimale (0.00, 7.00, 6.00), d'où :

$$\mathtt{LB} = 13.00, \mathtt{UB} = 13.00$$

Évolution des bornes **LB** et **UB**

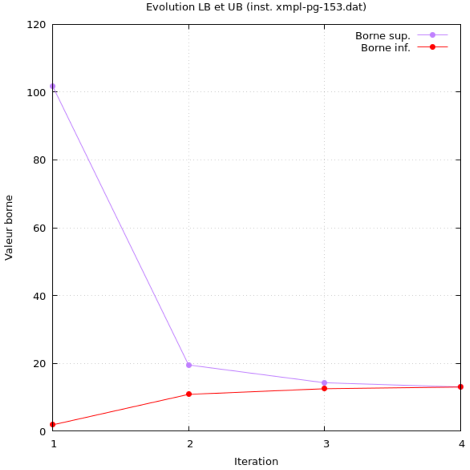

FIGURE – Évoluation des bornes **LB** et **UB**.

Exemple 3

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll}\min & -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \\ s.c. & \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_3 + 2x_4 \leq 6, \\ & -x_3 + x_4 \leq 3, \\ & x \geq 0.\end{array}$$

Solution I

Initial. Posons $\left(y_1^0, y_2^0\right) = (20.00, 20.00)$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Iter. 1. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} max & -33.00\lambda_1 + 5.00\mu_1 \\ s.c. & \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -1.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -3.00 \end{array}$$

Sous-problème non réalisable, rayon extrême (dual) :

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\mu}\right) = (-1.00, 0.00,)$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} min & +3.00y_1 - 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & +1.00y_1 + 2.00y_2 \leq 6.00 \\ & -1.00y_1 + 1.00y_2 \leq 3.00 \\ & 0 \geq -7.00 + 1.00y_1 + 1.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale (0.00, 0.00, 0.00), d'où :

$$\mathbf{LB} = 0.00, \mathbf{UB} = +\infty$$

Solution II

Iter. 2. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} \max & +7.00\lambda_1 + 5.00\mu_1 \\ s.c. & \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -1.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\mu}\right) = (0.00, -3.00,), \mathbf{UB} = -15.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & +3.00y_1 - 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & +1.00y_1 + 2.00y_2 \leq 6.00 \\ & -1.00y_1 + 1.00y_2 \leq 3.00 \\ & 0 \geq -7.00 + 1.00y_1 + 1.00y_2 \\ & z \geq -15.00 - 0.00y_1 - 0.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale $(0.00, 3.00, -15.00)$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = -18.00, \mathbf{UB} = -15.00}$$

Solution III

Iter. 3. ➟ **Sous-problème :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \max & +4.00\lambda_1 + 5.00\mu_1 \\ s.c. & \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -1.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\mu}\right) = (-3.00, 0.00,),\ \mathbf{UB} = -15.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & +3.00y_1 - 1.00y_2 + z \\ s.c. & \\ & +1.00y_1 + 2.00y_2 \leq 6.00 \\ & -1.00y_1 + 1.00y_2 \leq 3.00 \\ & 0 \geq -7.00 + 1.00y_1 + 1.00y_2 \\ & z \geq -15.00 - 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq -21.00 + 3.00y_1 + 3.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale $(0.00, 2.00, -15.00)$, d'où :

$$\mathbf{LB} = -17.00,\ \mathbf{UB} = -15.00$$

Solution IV

Iter. 4. ➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} \textit{max} & +5.00\lambda_1 + 5.00\mu_1 \\ \textit{s.c.} & \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -1.00 \\ & +1.00\lambda_1 + 1.00\mu_1 \leq -3.00 \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{\lambda}, \hat{\mu}\right) = (-3.00, 0.00,) \text{ , } \mathbf{UB} = -17.00$$

➟ **Problème principal :** résoudre

$$\begin{array}{ll} \textit{min} & +3.00y_1 - 1.00y_2 + z \\ \textit{s.c.} & \\ & +1.00y_1 + 2.00y_2 \leq 6.00 \\ & -1.00y_1 + 1.00y_2 \leq 3.00 \\ & 0 \geq -7.00 + 1.00y_1 + 1.00y_2 \\ & z \geq -15.00 - 0.00y_1 - 0.00y_2 \\ & z \geq -21.00 + 3.00y_1 + 3.00y_2 \\ & z \geq -21.00 + 3.00y_1 + 3.00y_2 \end{array}$$

Solution optimale $(0.00, 2.00, -15.00)$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = -17.00, \mathbf{UB} = -17.00}$$

Évolution des bornes LB et UB

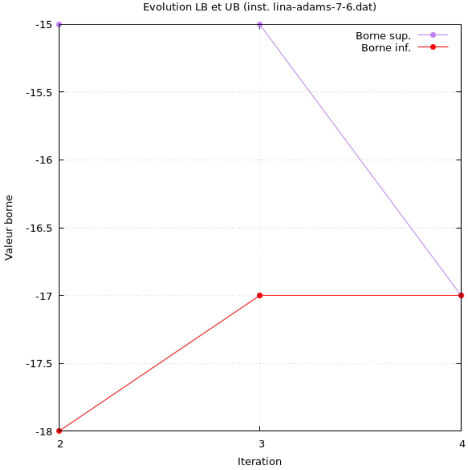

FIGURE – Évoluation des bornes **LB** et **UB**.

Lien avec la méthode de Dantzig-Wolf I

Considérons le problème :

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & \\ & Ax = b, \\ & Dx \geq d, \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{5}$$

Nous supposerons que :

- l'ensemble

$$\Omega = \{x : Dx \geq d, x \geq 0\}$$

  est borné.

1. Considérons le dual du problème (5) :

$$\begin{array}{ll} \max & w^T b + v^T d \\ s.c. & \\ & w^T A + v^T D \leq c^T, \\ & v \geq 0, w. \end{array}$$

2. Ce dernier problème est équivalent au problème :

$$\begin{array}{ll} \max & w^T b + \max \left\{ v^T d : v^T D \leq c^T - w^T A, v \geq 0 \right\} \\ s.c. & \\ & w. \end{array}$$

Lien avec la méthode de Dantzig-Wolf II

③ En prenant le dual du problème interne, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \max & w^T d + \min\left\{\left(c^T - w^T A\right) x : Dx \geq d, x \geq 0\right\} \\ s.c. & \\ & w. \end{array}$$

D'où, le problème (5) est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \max & w^T d + \min\left\{\left(c^T - w^T A\right) x : x \in \Omega\right\} \\ s.c. & \\ & w. \end{array}$$

④ Puisque Ω est borné alors on a :

$$\begin{array}{ll} \max & w^T d + \min\left\{\left(c^T - w^T A\right) x_j : x_j \in \mathbf{Pext}\left(\Omega\right)\right\} \\ s.c. & \\ & w. \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{ll} \max & \zeta \\ s.c. & \\ & \zeta \leq w^T b + \left(c^T - w^T A\right) x_j, x_j \in \mathbf{Pext}\left(\Omega\right), \\ & \zeta, w. \end{array}$$

AGENDA

Problème

Problème à résoudre Le primal

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) \\ s.c. & \\ & g_i(x,y) \leq 0, i = 1,\ldots,m, \\ & x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, \end{array} \qquad (\mathcal{P})$$

Hypothèses

- Les fonctions f et $\{g_i : i \in I\}$ sont régulières (au moins de classe $\mathcal{C}^2$) et convexes ;
- L'ensemble $\mathcal{Y}$ peut être un ensemble combinatoire !
- Nous noterons par

$$G(x,y) = (g_1(x,y), \ldots, g_m(x,y)), \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

Dérivation

Proposition Étape 1

Le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème suivant :

$$\begin{array}{lll} \underset{y \in F}{Min} & Min & f(x,y) \\ & & G(x,y) \leq 0, \\ & & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{6}$$

où :

$$F = \{y \in \mathcal{Y} : \exists x \in \mathcal{X} : G(x,y) \leq 0\}.$$

- ✍ Il suffit de montrer que les deux problèmes $(\mathcal{P})$ et (6) possèdent le même ensemble de solutions optimales.
- ☞ Nous désignerons le problème (6) par $(\mathcal{P})$

Dérivation

■ **Proposition ... Étape 2**

Le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème :

$$\begin{array}{llll} Min & Max & Min & f(x,y)+\lambda^T G(x,y) \\ y\in F & \lambda\geq 0 & x\in\mathcal{X} & \end{array}$$

où :

$$F=\{y\in\mathcal{Y}:\exists x\in\mathcal{X}:G(x,y)\leq 0\}.$$

Dérivation

PROPOSITION ... ÉTAPE 3

Le problème $(\mathcal{P})$ est donc équivalent au problème :

$$\begin{array}{ll} Min & z \\ s.c. & \\ & z \geq \min\left\{f(x,y) + \lambda^T G(x,y) : x \in \mathcal{X}\right\}, \forall \lambda \geq 0, \\ & y \in F \end{array} \qquad (\mathcal{M})$$

- ✍ Vous noterez que le problème $(\mathcal{M})$ est implicite !
- ✍ Le problème $(\mathcal{M})$ est le problème *maitre* de la décomposition de Benders généralisée.

Dérivation

Pour $\hat{y}$ appartenant à F notons $\mathcal{P}(\hat{y})$ le problème :

$$\begin{array}{ll} Min & f(x,\hat{y}) \\ s.c. & \\ & G(x,\hat{y}) \leq 0, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{P}(\hat{y}))$$

Et, par $\mathcal{R}(\hat{y})$ le problème :

$$\begin{array}{ll} Min & Max\{g_1(x,\hat{y}),\ldots,g_m(x,\hat{y})\} \\ s.c. & \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{R}(\hat{y}))$$

✍ L'ensemble F est non vide si et seulement si la valeur de $(\mathcal{R}(\hat{y}))$ est inférieure ou égale à 0.

Dérivation

Pour $\hat{y}$ appartenant à F notons $\mathcal{P}(\hat{y})$ le problème :

$$\begin{array}{ll} Min & f(x,\hat{y}) \\ s.c. & \\ & G(x,\hat{y}) \leq 0, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{P}(\hat{y}))$$

Et, par $\mathcal{R}(\hat{y})$ le problème :

$$\begin{array}{ll} Min & Max\{g_1(x,\hat{y}),\ldots,g_m(x,\hat{y})\} \\ s.c. & \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{R}(\hat{y}))$$

✍ L'ensemble F est non vide si et seulement si la valeur de $(\mathcal{R}(\hat{y}))$ est inférieure ou égale à 0.

Dérivation

■ PROPOSITION ... ÉTAPE 4

Le problème $(\mathcal{R}(\hat{y}))$ est équivalent au problème :

$$\underset{u^T\mu = 1}{Max} \quad \underset{x \in \mathcal{X}}{Min} \quad \mu^T G(x, y)$$

où : u appartient à $\mathbb{R}^m$ et est égal à $(1, \ldots, 1)$.

☞ Notons par Λ l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^m_+ : u^T\mu = 1 \right\}$$

Dérivation

PROPOSITION ... ÉTAPE 4

Le problème $(\mathcal{R}(\hat{y}))$ est équivalent au problème :

$$\begin{array}{lll} \mathit{Max} & \mathit{Min} & \mu^T G(x,y) \\ u^T\mu = 1 & x \in \mathcal{X} & \end{array}$$

où : u appartient à $\mathbb{R}^m$ et est égal à $(1, \ldots, 1)$.

☞ Notons par Λ l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^m_+ : u^T\mu = 1 \right\}$$

Dérivation

Théorème Problème maitre

Le problème maitre $(\mathcal{M})$ est équivalent au problème suivant :

$$
\begin{array}{ll}
Min & z \\
s.c. & \\
& z \geq \min\left\{f(x,y) + \lambda^T G(x,y) : x \in \mathcal{X}\right\}, \forall \lambda \geq 0, \\
& 0 \geq \min\left\{\mu^T G(x,y) : x \in \mathcal{X}\right\}, \forall \mu \in \Lambda, \\
& y \in \mathcal{Y}
\end{array}
$$

☞ ... une infinité de contraintes dans le problème maitre !

Dérivation

Théorème Problème maitre

Le problème maitre $(\mathcal{M})$ est équivalent au problème suivant :

$$
\begin{array}{ll}
Min & z \\
s.c. & \\
 & z \geq \min\left\{f(x,y) + \lambda^T G(x,y) : x \in \mathcal{X}\right\}, \forall \lambda \geq 0, \\
 & 0 \geq \min\left\{\mu^T G(x,y) : x \in \mathcal{X}\right\}, \forall \mu \in \Lambda, \\
 & y \in \mathcal{Y}
\end{array}
$$

☞ ... une infinité de contraintes dans le problème maitre !

Algorithme

Considérons une **relaxation** du problème maitre :

$$\begin{array}{ll} Min & z \\ s.c. & \\ & z \geq L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right) + \nabla_y^T L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right)\left(y - y^i\right), i \in I^k \\ & 0 \geq \mu^{i^T}\left(G\left(x^i, y^i\right) + \nabla_y^T G\left(x^i, y^i\right)\left(y - y^i\right)\right), i \in J^k \\ & y \in \mathcal{Y} \end{array}$$

où, l'entier k désigne l'indice de l'itération courante et, pout tout indice i :

- Si le problème $(\mathcal{P}\left(y^i\right))$ est réalisable alors $\left(x^i, \lambda^i\right)$ est solution optimale de :

$$\begin{array}{ll} Min & f\left(x, y^i\right) \\ s.c. & \\ & G\left(x, y^i\right) \leq 0, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{P}\left(y^i\right))$$

- Sinon, la paire $\left(x^i, \mu^i\right)$ est solution du problème $(\mathcal{R}\left(y^i\right))$:

$$\begin{array}{ll} Min & \alpha \\ s.c. & \\ & \alpha \geq g_i\left(x, y^i\right), i = 1, \ldots m, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{R}\left(y^i\right))$$

- La valeur optimale du maitre restreint est une borne inférieure de la valeur optimale du problème maitre.

Algorithme

Initial. Soit $k \leftarrow 1$, $y^0 \in \mathcal{Y}$, $\mathtt{LB} \leftarrow -\infty$, $\mathtt{UB} = +\infty$, $I \leftarrow \emptyset$, $J \leftarrow \emptyset$.

Sous-problème Résoudre le problème $(\mathcal{P}\left(y^k\right))$:

$$Min \quad \left\{f\left(x, y^k\right) : G\left(x, y^k\right) \leq 0, x \in \mathcal{X}\right\} \qquad (\mathcal{P}\left(y^k\right))$$

- Si $(\mathcal{P}\left(y^k\right))$ est réalisable alors :

$$\mathtt{UB} \leftarrow \min\left\{\mathtt{UB}, f\left(x^k, y^k\right)\right\}, (\hat{x}, \hat{y}) \leftarrow \left(x^k, y^k\right), I \leftarrow I \cup \{k\}.$$

  Ajouter une *coupe d'optimalité* au maitre restreint.
- Sinon, résoudre :

$$\begin{array}{ll} Min & \alpha \\ s.c. & \\ & \alpha \geq g_i\left(x, y^k\right), i = 1, \ldots m, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad (\mathcal{R}\left(y^k\right))$$

  Poser $J \leftarrow J \cup \{k\}$, ajouter une *coupe de réalisabilité* au maitre restreint.

Maitre Résoudre :

$$\begin{array}{ll} Min & z \\ s.c. & z \geq L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right) + \nabla_y^T L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right)\left(y - y^i\right), i \in I \\ & 0 \geq {\mu^i}^T\left(G\left(x^i, y^i\right) + \nabla_y^T G\left(x^i, y^i\right)\left(y - y^i\right)\right), i \in J \\ & y \in \mathcal{Y} \end{array} \qquad (\mathcal{M}^k)$$

- Soit $(\hat{z}, \hat{y})$ la solution optimale du maitre restreint. Posons $\mathtt{LB} \leftarrow \hat{z}$, si $\mathtt{LB} \geq \mathtt{UB}$ alors **stop** solution optimale. Sinon, poser

$$k \leftarrow k + 1, y^k \leftarrow \hat{y},$$

  puis, résoudre le sous-problème.

Exemple

Résoudre à l'aide de la méthode Benders le problème suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\min & 5y - 2\ln(x+1) \\
s.c. & \\
 & e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{y} - 1 \leq 0; \\
 & -2\ln(x+1) - y + \frac{5}{2} \leq 0; \\
 & x + y - 4 \leq 0; \\
 & x \in [0;2], y \in \{1,2,3\}.
\end{array}
\tag{7}
$$

Solution I

Initial. Posons $y^0 = 3$ et :

$$\mathbf{LB} = -\infty, \mathbf{UB} = +\infty.$$

Itér. 1 .

➟ **Sous-problème:** résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & 15 - 2\ln(x+1) \\ s.c. & \\ & e^{\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \leq 0, \\ & -2\ln(x+1) - \frac{1}{2} \leq 0, \\ & x - 1 \leq 0, \\ & x \in [0, 2]. \end{array}$$

Sous-problème réalisable, solution optimale :

$$\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = (1, 0, 0, 1)\,, \mathbf{UB} = 13.62$$

Solution II

➟ **Maitre restreint :** résoudre :

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ s.c. & \\ & z \geq 15 - 2\ln(2) + 6(y-3), \\ & y \in \{1,2,3\}. \end{array}$$

Solution optimale (1.62, 1), d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 1.62, \mathbf{UB} = 13.62.}$$

Itér. 2 .

➟ **Sous-problème:** problème non réalisable ! Résoudre :

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha \\ s.c. & \\ & \alpha \geq e^{\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}, \\ & \alpha \geq -2\ln(x+1) + \frac{3}{2}, \\ & \alpha \geq x - 2, \\ & x \in [0,2]. \end{array}$$

Solution optimale $(\hat{x}, \hat{\mu}) = (0.9808, 0.553, 0.447, 0)$

Solution III

➟ **Maitre restreint** : résoudre :

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ s.c. & \\ & z \geq 15 - 2\ln(2) + 6(y-3), \\ & 0 \geq 0.553\,(0.3830 - 0.25y) + 0.4471\,(-11.997 - y), \\ & y \in \{1,2,3\}. \end{array}$$

Solution optimale $(7.6137, 2)$, d'où :

$$\boxed{\mathbf{LB} = 7.6137, \mathbf{UB} = 13.62.}$$

Itér. 3 .

➟ **Sous-problème:** Résoudre :

$$\begin{array}{ll} \min & 10 - 2\ln(x+1) \\ s.c. & \\ & e^{\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \leq 0, \\ & -2\ln(x+1) + \frac{1}{2} \leq 0, \\ & x - 2 \leq 0, \\ & x \in [0,2]. \end{array}$$

Solution optimale $(\hat{x}, \hat{\mu}) = (1.0696, 1.1322, 0, 0)$, $\mathbf{UB} = 8.5453$

Solution IV

➟ **Maitre restreint :** résoudre :

$$
\begin{array}{ll}
\min & z \\
s.c. & \\
& z \geq 15 - 2\ln(2) + 6(y-3), \\
& 0 \geq 0.553(0.3830 - 0.25y) + 0.4471(-11.997 - y), \\
& z \geq 10 - 2\ln(2.0696) + 4.7998(y-2), \\
& y \in \{1, 2, 3\}.
\end{array}
$$

Solution optimale (8.5453, 2), d'où :

$$\mathtt{LB} = 8.5453, \mathtt{UB} = 8.5453.$$

STOP.

➟ Solution optimale :

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (1.0696, 2), \mathtt{val} = 8.5453.$$

Convergence I

Théorème

L'algorithme de décomposition de Benders généralisée converge en un nombre fini d'itérations.

Preuve

- Si l'algorithme s'arrête à l'itération k alors : (i) on a bien la solution optimale et (ii) le nombre d'itérations est fini.
- Soit k l'indice d'une itération quelconque. Supposons que l'algorithme ne s'y arrête pas. Montrons que toutes les solution y^i pour $i < k$ sont toutes différentes de la solution y^k. Ainsi, la convergence finie découlerait du fait que $\mathcal{Y}$ est fini. Soit i un indice appartenant à $\{1, \ldots, k-1\}$. Deux cas :
  - Le sous-problème $\mathcal{P}\left(y^i\right)$ est réalisable. La solution $\left(x^i, \lambda^i\right)$ satisfait les conditions KKT, en particulier la condition de complémentarité. Donc,

$$L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right) = f\left(x^i, y^i\right) \geq \mathtt{UB} > z^k.$$

Or, si y^k égalée y^i alors :

$$z^k \geq L\left(x^i, y^i, \lambda^i\right).$$

Ce qui est absurde !

Convergence II

- Le sous-problème $\mathcal{P}\left(y^i\right)$ n'est pas réalisable. La solution optimale du problème $\mathcal{R}\left(y^i\right)$ satisfait :

$$\left(\mu^i\right)^T G\left(x^i, y^i\right) > 0.$$

Puisque y^k satisfait, entre autres, la contrainte :

$$0 \geq \mu^{i^T}\left(G\left(x^i, y^i\right) + \nabla_y^T L\left(x^i, y^i\right)\left(y - y^i\right)\right).$$

Donc, si y^k égalée y^i alors nous aurons :

$$0 \geq \mu^{i^T} G\left(x^i, y^i\right).$$

Ce qui est absurde !.

Conclusion, la solution y^k générée à l'itération k est différente de toutes celles générées avant. Puisque, $\mathcal{Y}$ est fini alors l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

Bibliographie

- D. G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer
- M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali (2006),
  Linear Programming and Network Flows
- G.B. Dantzig and N.T. Mukund (1997),
  Linear Programming,
  Springer
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer