Objectifs

- Modélisation
- Méthode : séparation et évaluation

Exercice 1 [Arborescence couvrante de poids minimum]

Considérons un graphe orienté $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, où γ est une valuation des arcs du graphe G. Une *arborescence* de G est un sous-graphe enraciné en un noeud (nous supposerons que c'est le noeud 1) qui est à la fois *connexe* et *sans cycle*. Une arborescence $\mathcal{A}$ est *couvrant* si $V[\mathcal{A}]$ est égal à V.

Le problème de l'arborescence couvrante de poids minimum consiste à déterminer, si elle existe, une arborescence couvrante dont la somme des poids de ses arcs est minimale.

1. Modéliser le problème de l'arborescence couvrante de poids minimum à l'aide de l'optimisation linéaire en nombres entiers.

Exercice 2 [Plus courts chemins]

Considérons un graphe orienté $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, où γ est une valuation des arcs du graphe G. Un *chemin* dans le graphe G est une suite de sommets

$$\langle v_0, \ldots, v_k \rangle, \tag{1}$$

tel que : v_0 le sommet initial du chemin, v_k son sommet terminal et

$$\forall j \in \{1, \ldots, k-1\} : v_j v_{j+1} \in E.$$

Enfin, la longueur du chemin (1) est, par définition,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \gamma\left(v_j v_{j+1}\right).$$

1. Proposer un modèle pour le problème des plus courts chemins du sommet 1 vers tous les autres dans le graphe G.

Exercice 3 [Branch and Bound]

Résoudre par la méthode de séparation et évaluation le problème suivant :

$$\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 \\
&\quad s.c. \\
&\qquad 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 12, \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 [Problème du voyageur de commerce]

Considérons le graphe de la figure 1.

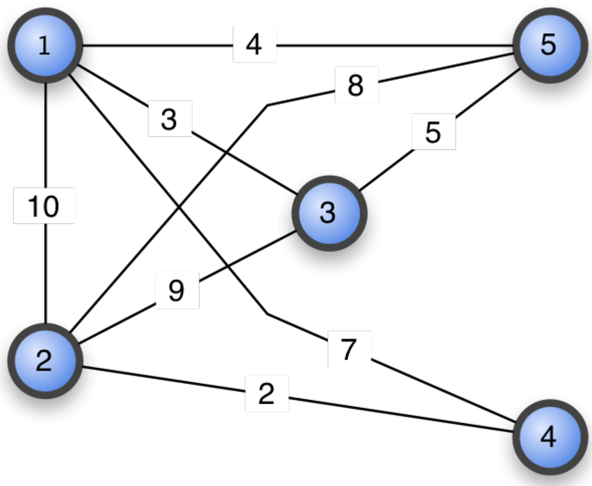

FIGURE 1 – Exemple de graphe.

L'objectif de cet exercice est de résoudre par *séparation et évaluation* une instance du problème du voyageur de commerce.

1. Déterminer l'arbre couvrant de poids minimum dans le graphe $G - \{13\}$. En déduire un minorant de la longueur du circuit Hamiltonien de longueur minimale dans G et passant par l'arête (13).
2. Idem avec les graphes $G - \{23\}$ et $G - \{53\}$. En déduire un minorant de la longueur du circuit Hamiltonien de longueur minimale.
3. En déduire un algorithme *exacte* pour déterminer le circuit Hamiltonien de longueur minimale dans le graphe de la figure 1.
4. Dérouler votre algorithme sur l'instance de la figure 1.