Objectif

- ☞ Méthode de coupe

Problème **[Méthode de coupe]**

L'objectif de ce problème est d'introduire la méthode dite de *coupe* pour résoudre des problème d'optimisation linéaire en nombres entiers. Nous ne considérerons que le cas où toutes les variables sont entières. Nous verrons, dans la suite du cours, l'application de cette méthode dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires et à variables entières (ou mixtes).

Dans la suite de ce problème, nous considérerons des problèmes d'optimisation en variables entières de la forme standard suivante :

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{array} \tag{1}$$

où :

- ☞ les vecteurs c et b appartiennent à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Z}^m$, respectivement ;
- ☞ la matrice A appartient à $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$;

Nous noterons par P le polyèdre suivant :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0.\} \tag{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réalisables du problème (1) s'écrit :

$$\Omega = P \cap \mathbb{Z}^n.$$

Une inégalité $\alpha^T x \leq \beta$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}$) est dite *valide* pour l'ensemble Ω si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall x \in \Omega : \alpha^T x \leq \beta.$$

Partie A : Exemple de coupes : coupes de Dantzig

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & -x - 2y \\ s.c. & \\ & -2x + 2y \leq 3 \\ & 2x + 2y \leq 9 \\ & 9x - 4y \leq 21 \\ & x, y \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{3}$$

1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des solutions réalisables du problème (3).
2. Quelle est la relaxation continue du problème (3) ? Résoudre cette dernière à l'aide de la méthode *simplexe*. Nous noterons P_0 l'ensemble des solutions réalisables de la relaxation continue.

3. Quelles sont les variables hors base correspondant à la solution de base optimale ? Expliquer pourquoi la contrainte suivante est valide pour l'ensemble des solutions entières du problème (3) :

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \geq 1, \tag{4}$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des indices des variables hors base associée à la solution de base optimale courante.

4. Exprimer et dessiner dans l'espace des variable (x, y) la contrainte (4). Que remarquez-vous ?
5. En vous aidant du graphique quelle serait la solution optimale de la nouvelle relaxation continue obtenue en considérant la contrainte (4). Que remarquez-vous ?
6. En déduire le principe d'un algorithme pouvant résoudre des problèmes du type (1).

Les inégalités (4) sont dites *coupes de Dantzig*. Nous verrons dans la seconde partie de ce problème un autre moyen de générer des coupes.

Partie B : Exemple de coupes : coupes de Gomory

Pour générer une coupe de Gomory il faut utiliser, d'une part, le tableau simplexe optimal de la relaxation continue et, d'autre part, exploiter l'intégralité des variables du problème. Nous en détaillerons la dérivation dans cette section.

Chaque ligne du tableau simplexe peut donner lieu à une inégalité de Gomory (elle n'est pas nécessairement pertinente). Nous dirons que cette inégalité a pour *source* la ligne dont elle est dérivée.

Considérons toujours l'exemple (3) de la première partie.

1. Dérivation à partir d'une ligne autre que la ligne des coûts réduits du tableau simplexe.
   (a) En considérant le tableau simplexe optimale de la première relaxation continue du problème (3), vérifier que nous avons bien :

   $$x_5 + \frac{13}{4} x_3 + \frac{-5}{4} x_4 = \frac{39}{2}. \tag{5}$$

   (b) En utilisant la positivité des variables figurant dans (5), en déduire que l'inégalité suivante est valide pour l'ensemble Ω.

   $$x_5 + 3x_3 - 2x_4 \leq \frac{39}{2}. \tag{6}$$

   (c) Cette fois, en utilisant l'intégrité des variables figurant dans (6) en déduire que l'inégalité :

   $$x_5 + 3x_3 - 2x_4 \leq 19, \tag{7}$$

   est valide prou l'ensemble Ω.

   (d) En déduire, que l'inégalité :

   $$\frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 \geq \frac{1}{2} \tag{8}$$

   est valide pour l'ensemble Ω. Exprimer-là en fonction des variables x_1 et x_2. Et, vérifier que la solution optimale de la relaxation continue ne satisfait pas cette inégalité (nous dirons alors que cette inégalité est *coupante* !)

   (e) Quelle méthode simplexe est plus appropriée pour résoudre le nouveau problème

   $$\begin{array}{ll} \min & -x - 2y \\ s.c. & \\ & \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \\ & (x, y) \in P_0. \end{array} \tag{9}$$

   Résoudre le problème (9). Que remarquez-vous ?

2. Dérivation à partir de la ligne des coûts réduits du tableau simplexe.
   (a) En considérant le tableau de la première relaxation continue du problème (3), Quelle est l'expression de la fonction objectif à l'aide des variables hors base associées à la solution de base optimale.
   (b) En utilisant l'intégrité des variables x_1 et x_2, expliquer pourquoi l'inégalité suivante :

   $$\frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

   est valide pour l'ensemble Ω. Que remarquez-vous ?

Partie C : Cas général

Dans cette dernière partie nous considérerons le problème général (1).

1. En vous inspirant des exemples de la partie précédente, formaliser la dérivation d'une coupe de Gomory pour le problème (1).
2. En déduire un algorithme générique pour résoudre le problème (1) et basé sur l'utilisation des coupes de Gomory. Nous appellerons un tel algorithme un *algorithme de coupe*.
3. Convergence de l'algorithme de coupe de Gomory. Pour étudier la convergence de l'algorithme de coupe de Gomory nous admettrons le théorème suivant garantissant la convergence finie de la méthode simplexe duale.

> **Théorème**
>
> Supposons que toutes les colonnes $\{c_j : j = 1, \dots, n\}$ du tableau simplexe dual sont **`lex-positives`**. Le choix de la colonne sortante s, dans la méthode simplexe duale, suivant :
>
> $$s \in \texttt{arg-lexmax} \left\{ \frac{1}{c_{rj}} c_j : c_{rj} < 0 \right\},$$
>
> où r est l'indice de la ligne sortante, garanti, après l'opération de pivot :
>
> ✍ La colonne 0 est strictement décroissante suivant l'ordre lexicographique.
>
> ✍ Toutes les colonnes restent **`lex-positives`**.

4. Établir la convergence de l'algorithme de coupe de Gomory.