MAIN5 - Maillage et Éléments Finis

Bertrand Thierry

20/11/2020

CNRS - Laboratoire Jacques-Louis Lions

Organisation du Cours

Organisation

Moi

- B. Thierry
- Chargé de Recherche CNRS

Distanciel

- Matériel : Ordinateur, connexion, ...: ok ?
- Au moindre problème ou question : me contacter !

Notation

- 50% : Contrôle(s) Continue(s) : 1 ou 2
- 50% : Projet

Organisation

Cours

- Site du cours :
  https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/teaching/mef_main5
  Les slides y seront accessibles
- "Ancienne" version du cours en ligne :
  https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/course/fem

Cette année : Réécriture du polycopié

- Commence par la pratique pour finir sur la théorie
- Focus plus important sur l'implémentation
- Fortement inspiré du polycopié de F.-J. Sayas
  https://team-pancho.github.io/documents/anIntro2FEM_2015.pdf

Introduction à la Simulation Numérique

Simulation Numérique

Définition (Wikipédia)

L'exécution d'un programme informatique sur un ordinateur ou réseau en vue de simuler un phénomène physique réel et complexe (par exemple : chute d'un corps sur un support mou, résistance d'une plateforme pétrolière à la houle, fatigue d'un matériau sous sollicitation vibratoire, usure d'un roulement à billes ...)

Historique (Wikipédia)

- Militaire : Projet Manhattan (2nde Guerre mondiale)
- Civil : Expérience de Fermi-Pasta-Ulam (1953)
- Évolue en parallèle à l'informatique

Simulation Numérique

Pourquoi faire ?

- Résolution manuelle impossible (pour l'instant ?)
- Complexification des modèles
- Permet d'obtenir la valeur de quantités dans des zones inaccessibles en pratique
- Aide les expérimentateurs

Pourquoi pas faire ?

- Ne remplace pas une expérimentation "réelle". C'est un complément.

Warning
Ce n'est parce que l'ordi[1] le dit que c'est vrai !

[1] ou Facebook/Twitter/TikTok/...

Schéma

1. Problème Physique
2. Modélisation (= Équations, Simplifications, Approximations, ...)
3. Méthode de Résolution adaptée (Éléments Finis, Différences Finies, ...)
4. Implémentation ou Choix du logiciel
5. Interprétation des résultats

Dans ce cours : le modèle (= le système d'équations) est donné. On suppose qu'il est suffisamment précis pour le problème considéré (not our business) !

Simulation Numérique : quelques exemples

- Site du cours
- Cerfacs Avbp7x
- Imagerie du cerveau
- FreeFem Gallery

Simulation Numérique : Nous

Ce que vous saurez faire

- Mailler un domaine like a boss
- Prouver que certaines EDP (Équation aux Dérivées Partielles) elliptiques d'ordre 2 admettent une unique solution
- Écrire un programme Python qui résout numériquement et en dimension 2 de telles EDP

Ce que vous saurez faire

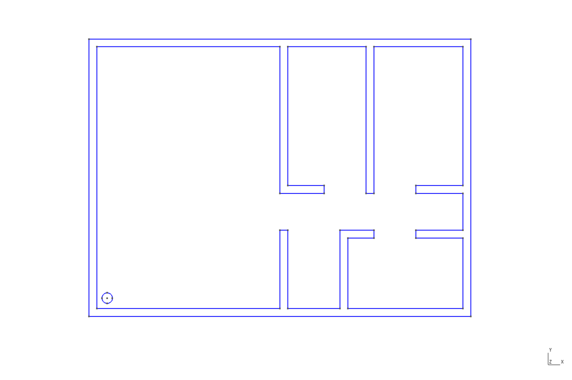
- Mailler un domaine like a boss
- Prouver que certaines EDP (Équation aux Dérivées Partielles) elliptiques d'ordre 2 admettent une unique solution
- Écrire un programme Python qui résout numériquement et en dimension 2 de telles EDP

Ce que vous ne saurez pas faire

- Le reste : inventer un vaccin contre le COVID-19, …

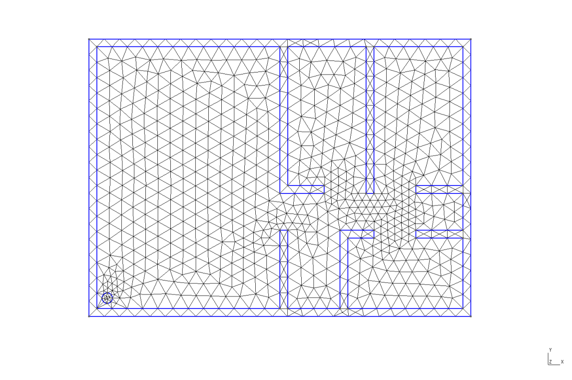
Éléments Finis Triangulaires

Principe Général



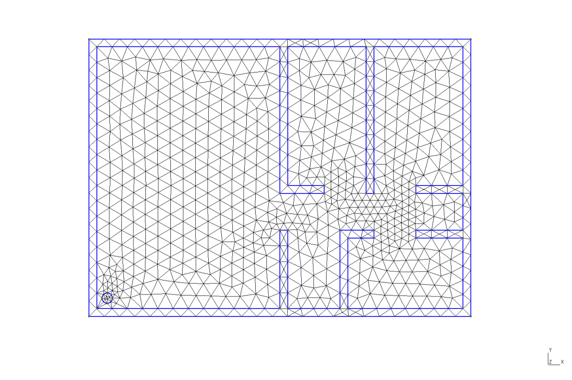
1. CAO

Principe Général



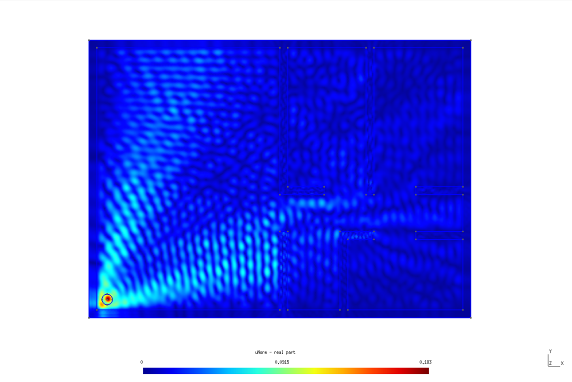
1. CAO
2. Maillage du domaine

Principe Général



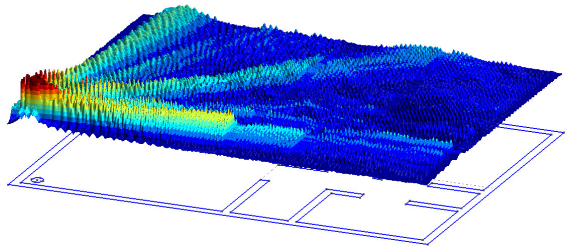
1. CAO
2. Maillage du domaine
3. Calcul des coefficients du système linéaire $AU = b$

Principe Général



1. CAO
2. Maillage du domaine
3. Calcul des coefficients du système linéaire $AU = b$
4. Résolution du système (=calcul de la solution)

Principe Général



1. CAO
2. Maillage du domaine
3. Calcul des coefficients du système linéaire $AU = b$
4. Résolution du système (=calcul de la solution)
5. Post-processing (Extraction des données d'intérêt)

TODO:image

Notations

- Ω : domaine de calcul : un ouvert borné polygonal
- $\mathbf{n}$: normale unitaire sortante à Ω, vivant sur son bord[2]
- $\Gamma := \partial\Omega$: bord de Ω. Un gentil polygone.
- Γ_D et Γ_N : 2 parties complémentaires de Γ sans chevauchement mais non nécessairement connexes : $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$

[2] Problème ?

Problème Modèle : EDP 2e ordre

TODO:image

$$\begin{cases} -\Delta u + cu &= f & (\Omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= g_N & \Gamma_N \\ u &= g_D & \Gamma_D \end{cases}$$

Nom	Désignation	Nom	Désignation
Ω	Domaine	$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	Laplacien
$\Gamma := \partial\Omega$	Bord de Ω	$\nabla u := [\partial_x u, \partial_y u]^T$	Gradient
Γ_D	Condition Dirichlet	$\partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$	Dérivée normale
Γ_N	Condition Neumann	f	Terme source
$\mathbf{n}$	Normale unit. sort.	g_N, g_D	Données
		$c \in \{1, 0\}$	Quantité artificielle

- $-\Delta u$: Terme de diffusion ; $\partial_{\mathbf{n}} u$: Flux ; cu : Terme de Réaction
- On suppose le problème bien posé, on le montrera plus tard !

Théorème de (Georges) Green

Theorem (de Green)

$$\forall u, v, \qquad \int_\Omega (\Delta u) v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma (\partial_{\mathsf{n}} u) v$$

Remarque

- *Extension multi-dim. de l'intégration par partie (IPP) sur* $[a, b]$*:*

$$\int_a^b u'' v = -\int_a^b u' v' + u'(b) v(b) - u'(a) v(a)$$

- $\Gamma = \{a, b\}$, $\mathsf{n} = \pm 1$ *:* $\mathsf{n}(b) = +1$, $\mathsf{n}(a) = -1$
- $\partial_{\mathsf{n}} u = \mathsf{n} u' \implies \partial_{\mathsf{n}} u(b) = u'(b)$ *et* $\partial_{\mathsf{n}} u(a) = -u'(a)$

$$\implies \int_a^b u'' v = -\int_a^b u' v' + \partial_{\mathsf{n}} u(b) v(b) + \partial_{\mathsf{n}} u(a) v(a)$$

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f$$

Principe "comme un cochon mais ça fonctionne"

[3] pourquoi pas hein !

[4] C'est la recette "comme un cochon", je vous ai prévenu !

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv$$

Principe "comme un cochon mais ça fonctionne"

1. Multipliez l'EDP par une fonction[3] v

[3] pourquoi pas hein !
[4] C'est la recette "comme un cochon", je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv \implies \int_\Omega (-\Delta u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv$$

Principe "comme un cochon mais ça fonctionne"

1. Multipliez l'EDP par une fonction[3] v
2. Intégrez sur Ω

[3] pourquoi pas hein !
[4] C'est la recette "comme un cochon", je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv \implies \int_\Omega (-\Delta u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv$$

$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_{\mathbf{n}} u)v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Principe “comme un cochon mais ça fonctionne”

1. Multipliez l’EDP par une fonction[3] v
2. Intégrez sur Ω
3. Appliquez le Théorème de Green

[3] pourquoi pas hein !

[4] C’est la recette “comme un cochon”, je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv \implies \int_\Omega (-\Delta u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv$$
$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_{\mathbf{n}} u)v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$
$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_N} (\partial_{\mathbf{n}} u)v - \int_{\Gamma_D} (\partial_{\mathbf{n}} u)v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Principe “comme un cochon mais ça fonctionne”

1. Multipliez l’EDP par une fonction[3] v
2. Intégrez sur Ω
3. Appliquez le Théorème de Green
4. Appliquez les conditions aux limites de Neumann

[3] pourquoi pas hein !

[4] C’est la recette “comme un cochon”, je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv \implies \int_\Omega (-\Delta u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv$$

$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_{\mathbf{n}} u)v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_N} \underbrace{\cancel{(\partial_{\mathbf{n}} u)}}_{g_N} v - \cancel{\int_{\Gamma_D} (\partial_{\mathbf{n}} u)v} + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Principe “comme un cochon mais ça fonctionne”

1. Multipliez l’EDP par une fonction[3] v
2. Intégrez sur Ω
3. Appliquez le Théorème de Green
4. Appliquez les conditions aux limites de Neumann
5. Supprimez chaque intégrales portant sur une condition de Dirichlet[4] en imposant $v|_{\Gamma_D} = 0$

[3] pourquoi pas hein !

[4] C’est la recette “comme un cochon”, je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$-\Delta u + cu = f \implies (-\Delta u)v + cuv = fv \implies \int_\Omega (-\Delta u)v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv$$

$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_{\mathbf{n}} u)v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

$$\implies \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_N} \cancelto{g_N}{(\partial_{\mathbf{n}} u)} v - \cancel{\int_{\Gamma_D} (\partial_{\mathbf{n}} u)v} + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Principe “comme un cochon mais ça fonctionne”

1. Multipliez l’EDP par une fonction[3] v
2. Intégrez sur Ω
3. Appliquez le Théorème de Green
4. Appliquez les conditions aux limites de Neumann
5. Supprimez chaque intégrales portant sur une condition de Dirichlet[4] en imposant $v|_{\Gamma_D} = 0$
6. Ajoutez la condition de Dirichlet

[3] pourquoi pas hein !

[4] C’est la recette “comme un cochon”, je vous ai prévenu !

Formulation Variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v\end{array}\right.$$

Remarques

- v est une fonction test

Formulation Variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v\end{array}\right.$$

Remarques

- v est une fonction test
- Solution de FV = solution faible

Formulation Variationnelle

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\
\forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v
\end{array}
\right.
$$

Remarques

- v est une fonction test
- Solution de FV = solution faible
- Solution faible $\implies$ Solution forte (= solution de l'EDP) ?

Formulation Variationnelle

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et}\\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v\end{array}\right.$$

Remarques

- v est une fonction test
- Solution de FV = solution faible
- Solution faible $\implies$ Solution forte (= solution de l'EDP) ?
- FV admet une solution ? unique ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v \end{array} \right.$$

Remarques

- v est une fonction test
- Solution de FV = solution faible
- Solution faible $\Longrightarrow$ Solution forte (= solution de l'EDP) ?
- FV admet une solution ? unique ?
- Espace fonctionnel pour u et v ?

Exercice

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & (\Omega) \\ \partial_{\mathsf{n}} u + \alpha u & = & g & (\Gamma) \end{array} \right.$$

Espaces Fonctionnels

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v \end{cases}$$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \qquad\qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \qquad\qquad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} =$$

Espaces Fonctionnels

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et}\\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v\end{array}\right.$$

- Fonctions continues ?

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \qquad\qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \qquad\qquad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} =$$

Espaces Fonctionnels

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et}\\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c\int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v\end{array}\right.$$

- Fonctions continues ?
- Fonctions L^2 ?

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f|^2 < +\infty\right\}$$

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \qquad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} =$$

Espaces Fonctionnels

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que, } u|_{\Gamma_D} = g_D \text{ et} \\ \forall v \text{ avec } v|_{\Gamma_D} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_N v \end{cases}$$

- Fonctions continues ?
- Fonctions L^2 ?

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f|^2 < +\infty \right\}$$

- Espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); \partial_x f \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial_y f \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \qquad \qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} =$$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \qquad \qquad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} =$$