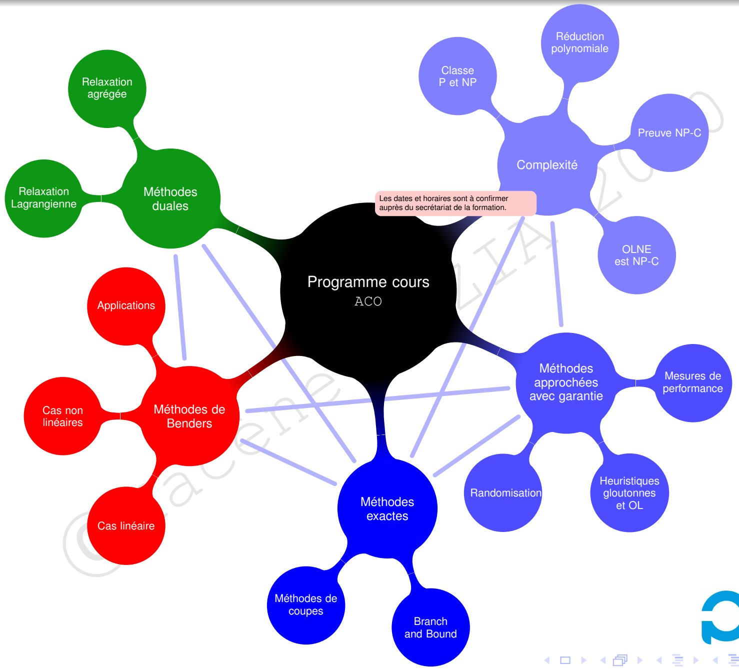
OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS :

COMPLEXITÉ

Hacène Ouzia

MAIN (5 ème année)
Sorbonne Université

2020


Programme cours
ACO
Les dates et horaires sont à confirmer auprès du secrétariat de la formation.
Méthodes duales
Relaxation agrégée
Relaxation Lagrangienne
Complexité
Classe P et NP
Réduction polynomiale
Preuve NP-C
OLNE est NP-C
Méthodes de Benders
Applications
Cas non linéaires
Cas linéaire
Méthodes approchées avec garantie
Mesures de performance
Randomisation
Heuristiques gloutonnes et OL
Méthodes exactes
Méthodes de coupes
Branch and Bound

Objectif du cours

Objectif

✍ Démontrer que l'optimisation en variables entières est un problème *NP-difficile*, en général.

AGENDA

1. Généralités
   - Modèle de calcul
   - Problème de décision
   - Classe P et NP
   - Réductions polynomiales
2. NP-Complétude
3. L'optimisation linéaire en nombres entiers est NP-C

Généralités

Modèle de calcul Machine de Turing

FIGURE – Réalisation d'une machine de Turing.

- Toute autre modèle équivalent conviendrait !
- Attention, une machine de Turing est une machine conceptuelle !

Définition

DÉFINTION PROBLÈMES DE DÉCISION

Un problème de décision est la donnée d'une description de la classe des instances du problème et d'une question.

Nous adopterons la convention suivante :

ID-PROBLÈME

- INSTANCE : Description informelle mais précise de la classe des instances ;
- QUESTION : Énoncer de la question.

Définition

Défintion Problèmes de Décision

Un problème de décision est la donnée d'une description de la classe des instances du problème et d'une question.

Nous adopterons la convention suivante :

ID-Problème

- Instance : Description informelle mais précise de la classe des instances ;
- Question : Énoncer de la question.

Exemples

VERTEX-COVER

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *couverture* de taille k ?

Exemples

SUBSET-SUM

- INSTANCE : Un ensemble fini E de $\mathbb{N}^{\star}$; Un entier non nul k.
- QUESTION : Existe-il un sous-ensemble E' de E tel que :

$$\sum_{e \in E'} e = k.$$

La classe P

Définition La classe P

La classe P est celles des problèmes de décision pour lesquels il existe un *algorithme* en temps *polynomial* en la taille de l'instance.

✍ Exemples de problèmes appartenant à la classe P ?

La classe P

DÉFINITION LA CLASSE P

La classe P est celles des problèmes de décision pour lesquels il existe un *algorithme* en temps *polynomial* en la taille de l'instance.

✍ Exemples de problèmes appartenant à la classe P ?

La classe NP

DÉFINITION LA CLASSE NP

La classe NP est celles des problèmes de décision pour lesquels il existe un *algorithme non déterministe* en temps *polynomial* en la taille de l'instance.

- $x \in \mathtt{Sol}(I)$ si :
  - → Il existe un *certificat* y de longueur polynomiale
  - → Il existe un *vérifieur polynomial* C tel que

$$\begin{cases} \mathtt{Ok} \leftarrow C(x, y), & \text{si } x \in \mathtt{Sol}(I), \\ \mathtt{Ko} \leftarrow C(x, y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Exemples de problèmes appartenant à la classe NP ?
- La classe NP est celle des problèmes *vérifiable* en temps polynomial. Donc, les preuves doivent être courtes !

La classe NP

DÉFINITION LA CLASSE NP

La classe NP est celles des problèmes de décision pour lesquels il existe un *algorithme non déterministe* en temps *polynomial* en la taille de l'instance.

- $x \in \mathtt{Sol}\,(I)$ si :
  - Il existe un *certificat* y de longueur polynomiale
  - Il existe un *vérifieur polynomial* C tel que

$$\begin{cases} \mathtt{Ok} \leftarrow C\,(x,y)\,, & \text{si } x \in \mathtt{Sol}\,(I)\,, \\ \mathtt{Ko} \leftarrow C\,(x,y)\,, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Exemples de problèmes appartenant à la classe NP ?
- La classe NP est celle des problèmes *vérifiable* en temps polynomial. Donc, les preuves doivent être courtes !

Réductions polynomiales

DÉFINITION RÉDUCTION POLYNOMIALE

Soit Q_1 et Q_2 deux problèmes de décision. On dit que le problème Q_1 *se réduit polynomialement* au problème Q_2, notée $Q_1 \propto Q_2$, s'il existe un algorithme A tel que :

- l'algorithme A est de complexité polynomiale ;
- l'algorithme A transforme toute instance de Q_1 en une instance de Q_2 ;
- pour une instance I de Q_1, $A(I)$ est une instance *oui* du problème Q_2 si et seulement si I est une instance *oui* de Q_1.

AGENDA

1 Généralités

2 NP-Complétude
- Le problème 3-SAT
- Le problème CLIQUE
- Le problème VERTEX-COVER est NPC
- Le problème SUBSET-SUM

3 L'optimisation linéaire en nombres entiers est NP-C

Problèmes NP-Complet

DÉFINITION PROBLÈME NP-C

Un problème de décision Q est dit NP-Complet (NP-C en bref) si :

① le problème Q appartient à la classe NP ;

② Tout problème Q' appartenant à NP se réduit polynomialement au problème Q, c.-à-d. :

$$\forall Q' \in NP : Q' \propto Q. \tag{1}$$

- Un problème est qualifié de *NP-difficile* si seule la condition 2 est vérifiée (l'autre étant très difficile à prouver !).
- Notons que, la condition (1) est équivalente à :

$$\exists Q' \in NP : Q' \propto Q.$$

Problèmes NP-Complet

DÉFINITION PROBLÈME NP-C

Un problème de décision Q est dit NP-Complet (NP-C en bref) si :

① le problème Q appartient à la classe NP ;

② Tout problème Q' appartenant à NP se réduit polynomialement au problème Q, c.-à-d. :

$$\forall Q' \in NP : Q' \propto Q. \tag{1}$$

- Un problème est qualifié de *NP-difficile* si seule la condition 2 est vérifiée (l'autre étant très difficile à prouver !).
- Notons que, la condition (1) est équivalente à :

$$\exists Q' \in NP : Q' \propto Q.$$

Technique de preuve

TECHNIQUE DE PREUVE

Pour montre qu'un problème Q appartient à la classe NP-C, il faut :

① Montrer que le problème Q appartient à la classe NP,

② Identifier un problème connu Q' appartenant à la classe NP-C,

③ Construire une *réduction polynomiale*

$$Q' \propto Q$$

Hypothèse

THÉORÈME COOK (GAREY)

Le problème **SAT** est **NP-C**.

SAT

- INSTANCE : Un ensemble V de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur V.
- QUESTION : Existe-il une affectation sur V telle que ϕ soit vraie ?

Hypothèse

THÉORÈME COOK (GAREY)

Le problème **SAT** est **NP-C**.

SAT

- INSTANCE : Un ensemble V de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur V.
- QUESTION : Existe-il une affectation sur V telle que ϕ soit vraie ?

Le problème 3-SAT

3-SAT

- Instance : Un ensemble $\mathbb{V}$ de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :

$$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$

où, pour chaque j, C_j est une clause à 3 littéraux.

- Question : Existe-il une affectation de vérité sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

Théorème ... en TD !

Le problème 3-SAT est NP-C.

Le problème 3-SAT

3-SAT

- INSTANCE : Un ensemble $\mathbb{V}$ de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :

$$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$

  où, pour chaque j, C_j est une clause à 3 littéraux.
- QUESTION : Existe-il une affectation de vérité sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

THÉORÈME ... EN TD !

Le problème **3-SAT** est **NP-C**.

Le problème 2-SAT

2-SAT

- INSTANCE : Un ensemble fini $\mathbb{V}$ de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :

$$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$

où, pour chaque j, C_j est une clause à 2 littéraux.

- QUESTION : Existe-il une affectation de vérité sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

- Le problème **2-SAT** appartient à la classe P !

Le problème 2-SAT

2-SAT

- INSTANCE : Un ensemble fini $\mathbb{V}$ de variables booléennes $\{x_1, \ldots, x_n\}$; Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :

$$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$

où, pour chaque j, C_j est une clause à 2 littéraux.

- QUESTION : Existe-il une affectation de vérité sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

- Le problème **2-SAT** appartient à la classe P !

Le problème CLIQUE

CLIQUE

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E\rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *clique* de taille k ?

- Un sous-ensemble C de V est une clique si :

$$\forall u, v \in C : uv \in E.$$

THÉORÈME

Le problème CLIQUE est NP-C.

Le problème CLIQUE

CLIQUE

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *clique* de taille k ?

- Un sous-ensemble C de V est une clique si :

$$\forall u, v \in C : uv \in E.$$

THÉORÈME

Le problème **CLIQUE** est **NP-C**.

Le problème CLIQUE

PREUVE CLIQUE EST NP-C

- Le problème clique appartient-il à la classe NP ?
- Exhiber une réduction ? Considérer la formule suivante :

$$\phi = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)\,.$$

- Cette réduction est-elle polynomiale ?

Le problème VERTEX-COVER

VERTEX-COVER

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *couverture* de taille k ?

- Un sous-ensemble C de V est une couverture si :

$$\forall (u, v) \in E : C \cap \{u, v\} \neq \emptyset.$$

THÉORÈME

Le problème VERTEX-COVER est NP-C.

Le problème VERTEX-COVER

VERTEX-COVER

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *couverture* de taille k ?

- Un sous-ensemble C de V est une couverture si :

$$\forall (u, v) \in E : C \cap \{u, v\} \neq \emptyset.$$

THÉORÈME

Le problème **VERTEX-COVER** est **NP-C**.

Le problème EDGE-COVER

EDGE-COVER

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *couverture* des sommets avec des arêtes de taille k ?

- Le problème EDGE-COVER appartient à la classe P !

Le problème EDGE-COVER

EDGE-COVER

- INSTANCE : Un graphe $G = \langle V, E \rangle$ non orienté ; Un entier k non nul.
- QUESTION : Existe-il dans G une *couverture* des sommets avec des arêtes de taille k ?

- Le problème **EDGE-COVER** appartient à la classe P !

Le problème SUBSET-SUM

SUBSET-SUM

- INSTANCE : Un ensemble fini E de $\mathbb{N}^\star$; Un entier non nul k.
- QUESTION : Existe-il un sous-ensemble E' de E tel que :

$$\sum_{e \in E'} e = k.$$

THÉORÈME

Le problème SUBSET-SUM est NP-C.

Le problème SUBSET-SUM

SUBSET-SUM

- INSTANCE : Un ensemble fini E de $\mathbb{N}^\star$; Un entier non nul k.
- QUESTION : Existe-il un sous-ensemble E' de E tel que :

$$\sum_{e \in E'} e = k.$$

THÉORÈME

Le problème **SUBSET-SUM** est **NP-C**.

Le problème SUBSET-SUM

PREUVE SUBSET-SUM EST NP-C

- Le problème SUBSET-SUM appartient-il à la classe NP ?
- Exhiber une réduction ? Considérer la formule suivante :

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) . \qquad (2)$$

- Cette réduction est-elle polynomiale ?

Le problème SUBSET-SUM : la réduction

	x_1	x_2	x_3	x_4	C_1	C_2	C_3	C_4
p_1	1	.	.	.	1	.	.	.
q_1	1	.	.	.	.	1	1	.
p_2	.	1	.	.	1	1	.	.
q_2	.	1	.	.	.	.	.	1
p_3	.	.	1	.	.	.	1	.
q_3	.	.	1	.	.	1	.	1
p_4	.	.	.	1	1	.	1	.
q_4	.	.	.	1	.	.	.	1
r_1	.	.	.	.	1	.	.	.
s_1	.	.	.	.	2	.	.	.
r_2	.	.	.	.	.	1	.	.
s_2	.	.	.	.	.	2	.	.
r_3	.	.	.	.	.	.	1	.
s_3	.	.	.	.	.	.	2	.
r_4	.	.	.	.	.	.	.	1
s_4	.	.	.	.	.	.	.	2
k	1	1	1	1	4	4	4	4

TABLE – Réduction associé à la formule (4).

AGENDA

1. Généralités
2. NP-Complétude
3. L'optimisation linéaire en nombres entiers est NP-C
   - L'optimisation linéaire en variables 0-1
   - L'optimisation quadratique en variables 0-1

POLYTECH SORBONNE

Le problème 0-1-LIN-OPTIM

0-1-LIN-OPTIM

- INSTANCE : Une matrice A $m \times n$; Deux vecteurs $b \in \mathbb{Q}^m$ et $c \in \mathbb{Q}^n$; Un entier K.
- QUESTION : Existe-il un vecteur $x \in \{0, 1\}^n$ tel que :

$$c^T x \leq K \text{ et } Ax \leq b.$$

THÉORÈME

Le problème 0-1-LIN-OPTIM est NP-C.

Le problème 0-1-LIN-OPTIM

0-1-LIN-OPTIM

- INSTANCE : Une matrice A $m \times n$; Deux vecteurs $b \in \mathbb{Q}^m$ et $c \in \mathbb{Q}^n$; Un entier K.
- QUESTION : Existe-il un vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tel que :

$$c^T x \leq K \text{ et } Ax \leq b.$$

THÉORÈME

Le problème **0-1-LIN-OPTIM** est **NP-C**.

Le problème 0-1-LIN-OPTIM

PREUVE 0-1-LIN-OPTIM EST NP-C

- Le problème 0-1-LIN-OPTIM appartient-il à la classe NP ?
- Exhiber une réduction ? Considérer la formule suivante :

$$\phi = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)\,. \tag{3}$$

- Cette réduction est-elle polynomiale ?

Le problème 0-1-LIN-OPTIM : la réduction

- Considérons les variables :

$$y_i = 0 \textbf{ ssi } C_i \ \texttt{non SAT}$$

- Fonction objectif :

$$\sum_{i=1}^{m} (1 - y_i) .$$

- Les contraintes :

$$\begin{aligned} 1 - x_1 + x_2 + x_3 + y_1 &\geq 1 \\ 1 - x_3 + 1 - x_2 + x_1 + y_2 &\geq 1 \\ 1 - x_4 + x_1 + 1 - x_3 + y_3 &\geq 1 \\ x_j \in \{0, 1\} \ \forall j &= 1, \ldots, n, \\ y_i \in \{0, 1\} \ \forall i &= 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

- La valeur de K vaut m.

Le problème 0-1-QUAD-OPTIM

0-1-QUAD-OPTIM

- INSTANCE : Une matrice Q symétrique $n \times n$; Une matrice A $m \times n$; Deux vecteurs $b \in \mathbb{Q}^m$ et $c \in \mathbb{Q}^n$; Un entier K.
- QUESTION : Existe-il un vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tel que :

$$x^T Q x + c^T x \leq K \text{ et } Ax \leq b.$$

THÉORÈME

Le problème 0-1-QUAD-OPTIM est NP-C.

Le problème 0-1-QUAD-OPTIM

0-1-QUAD-OPTIM

- INSTANCE : Une matrice Q symétrique $n \times n$; Une matrice A $m \times n$; Deux vecteurs $b \in \mathbb{Q}^m$ et $c \in \mathbb{Q}^n$; Un entier K.
- QUESTION : Existe-il un vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tel que :

$$x^T Qx + c^T x \leq K \text{ et } Ax \leq b.$$

THÉORÈME

Le problème **0-1-QUAD-OPTIM** est **NP-C**.

Le problème 0-1-QUAD-OPTIM

PREUVE 0-1-QUAD-OPTIM EST NP-C

- Le problème 0-1-QUAD-OPTIM appartient-il à la classe NP ?
- Exhiber une réduction ? Considérer la formule suivante :

$$\phi = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)\,. \tag{4}$$

- Cette réduction est-elle polynomiale ?

Le problème 0-1-QUAD-OPTIM : la réduction

- Fonction objectif :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\,(1 - x_j).$$

- Les contraintes :

$$\begin{aligned} 1 - x_1 + x_2 + x_4 &\geq 1 \\ 1 - x_3 + 1 - x_2 + x_1 &\geq 1 \\ 1 - x_4 + x_1 + 1 - x_3 &\geq 1 \\ x_j \in \{0, 1\}\ \forall j &= 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- La valeur de K vaut 0.

... à suivre

Résumons

- Réduction polynomiale et preuve d'NP-C
- Exemples de preuves : **CLIQUE**, **SUBSET-SUM**, ...
- L'optimisation quadratique en variables 0-1 est NP-C, en général.
- L'optimisation en variables 0-1 est NP-C, en général.

- Prochainement : *méthodes approchées avec garantie de performance* !

... à suivre

Résumons

- Réduction polynomiale et preuve d'NP-C
- Exemples de preuves : **CLIQUE**, **SUBSET-SUM**, ...
- L'optimisation quadratique en variables 0-1 est NP-C, en général.
- L'optimisation en variables 0-1 est NP-C, en général.

- Prochainement : *méthodes approchées avec garantie de performance* !

Bibliographie

- M. R. Garey and D. S. Johnson (1979),
  Computers and Intractability,
  Freeman
- I. Wegener (2005),
  Complexity Theory (1997),
  Springer
- J. Kleinberg and E. Tardos (2006),
  Algorithm Design,
  Pearson International Edition
- S. Arora and B. Barak (2009),
  Computational Complexity : a modern approach,
  Cambridge University Press