Objectif

- ☞ Complexité de problèmes d'optimisation en nombres entiers

Exercice 1 [3-SAT]

Soit $\mathbb{V}$ l'ensemble de variables propositionnelles $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Considérons le problème 3-**SAT** suivant :

> 3-**SAT**
>
> ☞ INSTANCE : Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :
>
> $$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$
>
> où, pour chaque j, C_j est une clause à 3 littéraux.
>
> ☞ QUESTION : Existe-il une affectation sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

1. Démontrer que le problème 3-**SAT** est **NP-COMPLET**.
2. En déduire la complexité de la variante suivante :

> **EXACT-3SAT**
>
> ☞ INSTANCE : Une formule propositionnelle ϕ sur $\mathbb{V}$ telle que :
>
> $$\phi = \bigwedge_{k=1}^{m} C_k$$
>
> où, pour chaque j, C_j est une clause à 3 littéraux exactement.
>
> ☞ QUESTION : Existe-il une affectation sur $\mathbb{V}$ telle que ϕ soit vraie ?

Exercice 2 [VERTEX-COVER]

Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble C de V est qualifié de *couverture* dans G si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall\, e = (uv) \in E : u \in C \text{ ou } v \in C.$$

Le problème de la couverture des arêtes du graphe G par ses sommets s'énonce comme suit :

> **VERTEX-COVER**
>
> ☞ INSTANCE : Un entier K ; Un graphe non orienté $G = \langle V, E \rangle$.
>
> ☞ QUESTION : Existe-il une Couverture C dans G de taille au plus K ?

1. Démontrer que le problème **VERTEX-COVER** est **NP-COMPLET**.
2. En déduire la complexité du problème **SET-COVERING** :

SET-COVERING

- ☞ INSTANCE : Un entier K ; Un sous-ensemble E ; Une famille finie $\mathcal{F} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ de sous-ensembles de E.
- ☞ QUESTION : Existe-il une sous-famille de $\mathcal{G} = \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}\}$ de $\mathcal{F}$ telle que :

$$s \leq K,$$
$$\bigcup_{j=1}^{s} E_{i_j} = E,$$

Exercice 3 [STABLE-SET]

Soit $G = \langle V, E\rangle$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble S de V est qualifié d'ensemble *stable* dans G si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall\, u, v \in S : (u, v) \notin E.$$

Le problème du stable s'énonce comme suit :

STABLE-SET

- ☞ INSTANCE : Un entier K ; Un graphe non orienté $G = \langle V, E\rangle$.
- ☞ QUESTION : Existe-il un stable S dans G de taille au moins K ?

1. Démontrer que le problème **STABLE-SET** est **NP-COMPLET**.
2. En déduire la complexité du problème, **SET-PACKING**, suivant :

SET-PACKING

- ☞ INSTANCE : Un entier K ; Un sous-ensemble E ; Une famille finie $\mathcal{F} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ de sous-ensembles de E.
- ☞ QUESTION : Existe-il une sous-famille de $\mathcal{G} = \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}\}$ de $\mathcal{F}$ telle que :

$$s \geq K,$$
$$\bigcup_{j=1}^{s} E_{i_j} = E,$$
$$\forall i, j \in \{i_1, \ldots, i_s\}\ i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset.$$

Exercice 4 [KNAPSACK]

Le problème du sac-à-dos, est le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} u_j x_j \\ s.c. & \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq B, \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{array} \tag{1}$$

Considérons la version *décision* suivante de (1), dite **KNAPSACK** :

KNAPSACK

- ☞ INSTANCE : Trois entiers n, B et K ; Deux vecteurs d'entiers $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$.
- ☞ QUESTION : Existe-il un vecteur x appartenant à $\{0,1\}^n$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \geq K,$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j = B.$$

1. Démontrer que le problème **KNAPSACK** est **NP-COMPLET**.
2. Que peut-on en déduire sur la complexité du problème d'optimisation (1) ?

Exercice 5 [QUADCONST-SAT]

Considérons le problème de satisfaction de contraintes quadratiques suivant :

0-1**QUADCONST-SAT**

- ☞ INSTANCE : Les contraintes suivantes :

$$x^T Q_j x + a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m,$$

  où Q_j sont des matrices symétriques, a_j des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^n$ et b_j des réels.
- ☞ QUESTION : Existe-il un vecteur x appartenant à $\{0,1\}^n$ satisfaisant toutes les contraintes ci-dessus ?

1. Démontrer que le problème **QUADCONST-SAT** est **NP-COMPLET**.
2. Qu'en est-il du problème

QUADCONST-SAT

- ☞ INSTANCE : Les contraintes suivantes :

$$x^T Q_j x + a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m,$$

  où Q_j sont des matrices symétriques, a_j des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^n$ et b_j des réels.
- ☞ QUESTION : Existe-il un vecteur x appartenant à $\mathbb{R}^n$ satisfaisant toutes les contraintes ci-dessus ?