OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS :

MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DANTZIG-WOLF

Hacène Ouzia

MAIN (5 ème année)
Université Pierre et Marie Curie

2020

TABLE DES MATIÈRES

©Hacène OUZIA 2020

AGENDA

1. Méthode simplexe révisée
   - Exemple
   - Tableau simplexe forme révisée
   - Application
2. Méthode de décomposition de Dantzig-Wolf

Tableau simplexe

DONNÉE Soit à résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

FAIT

Par le théorème de la fonction implicite, le problème (1) est équivalent à

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z \\ \text{s.c.} \quad & \\ & z + (c_B^t B^{-1} N - c_N^t) x_N + 0 x_B && = c_B^t B^{-1} b \\ & 0z + x_B + B^{-1} N x_N && = B^{-1} b \\ & x_B, x_N && \geq 0 \end{aligned}$$

OUZIA 2020

Tableau simplexe

OUZIA 2020

DONNÉE Soit à résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

FAIT

Par le théorème de la fonction implicite, le problème (1) est équivalent à

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z & \\ \text{s.c.} & & \\ & z + (c_B^t B^{-1} N - c_N^t) x_N + 0 x_B & = c_B^t B^{-1} b \\ & 0z + x_B + B^{-1} N x_N & = B^{-1} b \\ & x_B, x_N & \geq 0 \end{array}$$

Tableau simplexe

Notation

- $\mathcal{N}$ ensemble des indices des variables hors base
- Multiplicateurs simplexe $w = c_B^t B^{-1}$
- $\zeta = wN$, i.e,

$$\zeta_j = wa_j, j \in \mathcal{N}.$$

Tableau simplexe

	x_N	x_B	z
	$\zeta - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1}N$	I_m	$B^{-1}b$

©Hacène OUZIA 2020

©Hacène OUZIA 2020

EXEMPLE Soit à résoudre le problème suivant

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\text{Min} & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
 & 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
 & x_1 & & & \leq & 3 \\
 & & x_2 & & \leq & 5 \\
 & & & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Méthode du simplexe

©Hacène OUZIA 2020

▶ TABLEAU INITIAL

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	4	2	3	0	0	0	0	0
x_4	25	-9	15	1	0	0	0	75
x_5	-5	9	15	0	1	0	0	75
x_6	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

▶ Itération 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	4	2	3	0	0	0	0	0
x_4	25	-9	15	1	0	0	0	75
x_5	-5	9	15	0	1	0	0	75
x_6	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^1 = \{4,5,6,7\}$ et $B^{-1} = I$
- $c_B = (c_4, c_5, c_6, c_7) = (0,0,0,0)$
- $c_N = (c_1, c_2, c_3) = (-4, -2, -3)$
- $w = c_B B^{-1} = (0,0,0,0)$

- $z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = -c_1 = 4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = -c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = -c_3 = 3$

- Variable entrant en base : x_1
- Variable sortante x_6 car $\mathcal{I}_0 = \{4,6\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{6\}$

© Hacène OUZIA 2020

- Itération 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	4	2	3	0	0	0	0	0
x_4	25	-9	15	1	0	0	0	75
x_5	-5	9	15	0	1	0	0	75
x_6	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^1 = \{4, 5, 6, 7\}$ et $B^{-1} = I$
- $c_B = (c_4, c_5, c_6, c_7) = (0, 0, 0, 0)$
- $c_N = (c_1, c_2, c_3) = (-4, -2, -3)$
- $w = c_B B^{-1} = (0, 0, 0, 0)$

- $z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = -c_1 = 4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = -c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = -c_3 = 3$

- Variable entrant en base : x_1
- Variable sortante x_6 car $\mathcal{I}_0 = \{4, 6\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{6\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	2	3	0	0	-4	0	-12
x_4	0	-9	15	1	0	-25	0	0
x_5	0	9	15	0	1	5	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^2 = \{4, 5, 1, 7\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_4, c_5, c_1, c_7) = (0, 0, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_2, c_3) = (0, -2, -3)$
- $w = c_B B^{-1} = (0, 0, -4, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = 3$

- Variable entrant en base : x_3
- Variable sortante x_4 car $\mathcal{I}_0 = \{4\}$

© Hacène OUZIA 2020

- Itération 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	2	3	0	0	-4	0	-12
x_4	0	-9	15	1	0	-25	0	0
x_5	0	9	15	0	1	5	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^2 = \{4, 5, 1, 7\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_4, c_5, c_1, c_7) = (0, 0, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_2, c_3) = (0, -2, -3)$
- $w = c_B B^{-1} = (0, 0, -4, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = 3$

  - Variable entrant en base : x_3
  - Variable sortante x_4 car $\mathcal{I}_0 = \{4\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	19/5	0	-1/5	0	1	0	-12
x_3	0	-3/5	1	1/15	0	-5/3	0	0
x_5	0	18	0	-1	1	30	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^3 = \{3, 5, 1, 7\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_3, c_5, c_1, c_7) = (-3, 0, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_2, c_4) = (0, -2, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (-1/5, 0, 1, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = 1$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 19/5$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = -1/5$

- Variable entrant en base : x_2
- Variable sortante x_5 car $\mathcal{I}_0 = \{5, 7\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{5\}$

© Hacène OUZIA 2020

▶ Itération 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	19/5	0	-1/5	0	1	0	-12
x_3	0	-3/5	1	1/15	0	-5/3	0	0
x_5	0	18	0	-1	1	30	0	90
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	1	0	0	0	0	1	5

- $\mathcal{B}^3 = \{3, 5, 1, 7\}$ et $B^{-1} \to ?$
- $c_B = (c_3, c_5, c_1, c_7) = (-3, 0, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_2, c_4) = (0, -2, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (-1/5, 0, 1, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = 1$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 19/5$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = -1/5$

- Variable entrant en base : x_2
- Variable sortante x_5 car $\mathcal{I}_0 = \{5, 7\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{5\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	1/90	-19/90	-16/3	0	-31
x_3	0	0	1	1/30	1/30	-2/3	0	3
x_2	0	1	0	-1/18	1/18	10/9	0	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1/18	-1/18	-10/9	1	0

- $\mathcal{B}^4 = \{3, 2, 1, 7\}$ et $B^{-1} \to ?$
- $c_B = (c_3, c_2, c_1, c_7) = (-3, -2, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_5, c_4) = (0, 0, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (1/90, -19/90, -16/3, 0)$
- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -16/3$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -19/90$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = 1/90$

  - Variable entrant en base : x_4
  - Variable sortante x_7 car $\mathcal{I}_0 = \{7\}$

© Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	1/90	-19/90	-16/3	0	-31
x_3	0	0	1	1/30	1/30	-2/3	0	3
x_2	0	1	0	-1/18	1/18	10/9	0	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1/18	-1/18	-10/9	1	0

- $\mathcal{B}^4 = \{3, 2, 1, 7\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_3, c_2, c_1, c_7) = (-3, -2, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_5, c_4) = (0, 0, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (1/90, -19/90, -16/3, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -16/3$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -19/90$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = 1/90$

  - Variable entrant en base : x_4
  - Variable sortante x_7 car $\mathcal{I}_0 = \{7\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	0	-1/5	-5	-1/5	-31
x_3	0	0	1	0	1/15	1/3	-3/5	3
x_2	0	1	0	0	0	0	1	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_4	0	0	0	1	-1	-30	18	0

- $\mathcal{B}^5 = \{3, 2, 1, 4\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_3, c_2, c_1, c_4) = (-3, -2, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_5, c_7) = (0, 0, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (0, -1/5, -5, -1/5)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -5$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -1/5$
- $z_7 - c_7 = wa_7 - c_7 = -1/5$

  - Solution optimale $(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 3)$
  - Sa valeur est égale à -31

© Hacène OUZIA 2020

▶ Itération 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z
	0	0	0	0	-1/5	-5	-1/5	-31
x_3	0	0	1	0	1/15	1/3	-3/5	3
x_2	0	1	0	0	0	0	1	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	3
x_4	0	0	0	1	-1	-30	18	0

- $\mathcal{B}^5 = \{3, 2, 1, 4\}$ et $B^{-1} \rightarrow ?$
- $c_B = (c_3, c_2, c_1, c_4) = (-3, -2, -4, 0)$
- $c_N = (c_6, c_5, c_7) = (0, 0, 0)$
- $w = c_B B^{-1} = (0, -1/5, -5, -1/5)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -5$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -1/5$
- $z_7 - c_7 = wa_7 - c_7 = -1/5$

  - Solution optimale $(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 3)$
  - Sa valeur est égale à -31

© Hacène OUZIA 2020

Initialisation

- Une base réalisable B

Itération 0

- Calculer B^{-1}
- Calculer $w = c_B B^{-1}$
- Calculer $B^{-1}b$
- Former le tableau suivant

	w	$c_B B^{-1} b$
x_B	B^{-1}	$B^{-1}b$

Itération principale

- Calculer $wa_j - c_j, \forall j \in \mathcal{N}$
- Déterminer

$$k = argmax_{j \in \mathcal{N}} \{wa_j - c_j\}$$

- Si $wa_k - c_k \leq 0$ alors
  - Stop, solution optimale
- Sinon
  - Calculer $y_k = B^{-1} a_k$
  - Si $y_k \leq 0$, alors
    - Stop, PL non borné
  - Sinon, former le tableau

	w	$c_B B^{-1} b$	$wa_k - c_k$
x_B	B^{-1}	$B^{-1}b$	y_k

- Faire un pivot

©Hacène OUZIA 2020

■ **Exemple** Résoudre avec la méthode simplexe révisée :

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\text{Min} & -4x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.c.} & & & & & \\
& 25x_1 & -9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
& -5x_1 & +9x_2 & +15x_3 & \leq & 75 \\
& x_1 & & & \leq & 3 \\
& & x_2 & & \leq & 5 \\
& & & & & \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

©Hacène OUZIA 2020

Tableau forme révisée

- TABLEAU FORME RÉVISÉE INITIAL

	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	75
x_5	0	1	0	0	75
x_6	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1	5

- $c_N = (c_1, c_2, c_3) = (-4, -2, -3)$

- $z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = -c_1 = 4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = -c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = -c_3 = 3$

- Variable entrant en base : x_1
- La nouvelle colonne $y_1 = B^{-1}a_1 = (25, -5, 1, 0)^t$

© Hacène OUZIA 2020

Tableau forme révisée

- TABLEAU FORME RÉVISÉE INITIAL

	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	75
x_5	0	1	0	0	75
x_6	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1	5

- $c_N = (c_1, c_2, c_3) = (-4, -2, -3)$

- $z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = -c_1 = 4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = -c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = -c_3 = 3$

- Variable entrant en base : x_1
- La nouvelle colonne $y_1 = B^{-1}a_1 = (25, -5, 1, 0)^t$

©Hacène OUZIA 2020

Tableau forme révisée

- TABLEAU FORME RÉVISÉE mettre à jour la base courante

	0	0	0	0	0	4
x_4	1	0	0	0	75	25
x_5	0	1	0	0	75	-5
x_6	0	0	1	0	3	1
x_7	0	0	0	1	5	0

- Quelle variable doit sortir de la base ?

©Hacène OUZIA 2020

Tableau forme révisée

- **TABLEAU FORME RÉVISÉE** mettre à jour la base courante

	0	0	0	0	0	4
x_4	1	0	0	0	75	25
x_5	0	1	0	0	75	-5
x_6	0	0	1	0	3	1
x_7	0	0	0	1	5	0

- Variable sortante x_6 car $\mathcal{I}_0 = \{4, 6\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{6\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 2

	0	0	-4	0	-12
x_4	1	0	-25	0	0
x_5	0	1	5	0	90
x_1	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1	5

- $c_N = (c_6, c_2, c_3) = (0, -2, -3)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -4$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 2$
- $z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = 3$

  - Variable entrant en base : x_3
  - La nouvelle colonne $y_3 = B^{-1} a_3 = (15, 15, 0, 0)^t$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 2

	0	0	-4	0	-12	3
x_4	1	0	-25	0	0	15
x_5	0	1	5	0	90	15
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	0	0	0	1	5	0

- Quelle variable doit sortir de la base ?

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 2

	0	0	-4	0	-12	3
x_4	1	0	-25	0	0	15
x_5	0	1	5	0	90	15
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	0	0	0	1	5	0

- Variable sortante x_4 car $\mathcal{I}_0 = \{4\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 3

	-1/5	0	1	0	-12
x_3	1/15	0	-5/3	0	0
x_5	-1	1	30	0	90
x_1	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1	5

- $c_N = (c_6, c_2, c_4) = (0, -2, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = 1$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 19/5$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = -1/5$

  - Variable entrant en base : x_2
  - La nouvelle colonne $y_2 = B^{-1}a_2 = (-3/5, 18, 0, 1)^t$

© Hacène Ouzia 2020

- Itération 3

	-1/5	0	1	0	-12
x_3	1/15	0	-5/3	0	0
x_5	-1	1	30	0	90
x_1	0	0	1	0	3
x_7	0	0	0	1	5

- $c_N = (c_6, c_2, c_4) = (0, -2, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = 1$
- $z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 19/5$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = -1/5$

- Variable entrant en base : x_2
- La nouvelle colonne $y_2 = B^{-1}a_2 = (-3/5, 18, 0, 1)^t$

©Hacène Ouzia 2020

- Itération 3

	-1/5	0	1	0	-12	19/5
x_3	1/15	0	-5/3	0	0	-3/5
x_5	-1	1	30	0	90	18
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	0	0	0	1	5	1

- Quelle variable doit sortir de la base ?

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 3

	-1/5	0	1	0	-12	19/5
x_3	1/15	0	-5/3	0	0	-3/5
x_5	-1	1	30	0	90	18
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	0	0	0	1	5	1

- Variable sortante x_5 car $\mathcal{I}_0 = \{5, 7\}$ et $\mathcal{I}_1 = \{5\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	1/90	-19/90	-16/3	0	-31
x_3	1/30	1/30	-2/3	0	3
x_2	-1/18	1/18	10/9	0	5
x_1	0	0	1	0	3
x_7	1/18	-1/18	-10/9	1	0

- $c_N = (c_6, c_5, c_4) = (0, 0, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -16/3$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -19/90$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = 1/90$

- Variable entrant en base : x_4
- La nouvelle colonne $y_4 = B^{-1}a_4 = (1/30, -1/18, 0, 1/18)^t$

© Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	1/90	-19/90	-16/3	0	-31
x_3	1/30	1/30	-2/3	0	3
x_2	-1/18	1/18	10/9	0	5
x_1	0	0	1	0	3
x_7	1/18	-1/18	-10/9	1	0

- $c_N = (c_6, c_5, c_4) = (0, 0, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -16/3$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -19/90$
- $z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = 1/90$

- Variable entrant en base : x_4
- La nouvelle colonne $y_4 = B^{-1}a_4 = (1/30, -1/18, 0, 1/18)^t$

© Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	1/90	-19/90	-16/3	0	-31	1/90
x_3	1/30	1/30	-2/3	0	3	1/30
x_2	-1/18	1/18	10/9	0	5	-1/18
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	1/18	-1/18	-10/9	1	0	1/18

- Quelle variable doit sortir de la base ?

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 4

	1/90	-19/90	-16/3	0	-31	1/90
x_3	1/30	1/30	-2/3	0	3	1/30
x_2	-1/18	1/18	10/9	0	5	-1/18
x_1	0	0	1	0	3	0
x_7	1/18	-1/18	-10/9	1	0	1/18

- Variable sortante x_7 car $\mathcal{I}_0 = \{7\}$

©Hacène OUZIA 2020

- Itération 5

	0	-1/5	-5	-1/5	-31
x_3	0	1/15	1/3	-3/5	3
x_2	0	0	0	1	5
x_1	0	0	1	0	3
x_4	1	-1	-30	18	0

- $c_N = (c_6, c_5, c_7) = (0, 0, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -5$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -1/5$
- $z_7 - c_7 = wa_7 - c_7 = -1/5$

- Solution optimale $(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 3)$
- Sa valeur est égale à -31

©Hacène Ouzia 2020

- Itération 5

	0	-1/5	-5	-1/5	-31
x_3	0	1/15	1/3	-3/5	3
x_2	0	0	0	1	5
x_1	0	0	1	0	3
x_4	1	-1	-30	18	0

- $c_N = (c_6, c_5, c_7) = (0, 0, 0)$

- $z_6 - c_6 = wa_6 - c_6 = -5$
- $z_5 - c_5 = wa_5 - c_5 = -1/5$
- $z_7 - c_7 = wa_7 - c_7 = -1/5$

- Solution optimale $(x_1, x_2, x_3) = (3, 5, 3)$
- Sa valeur est égale à -31

©Hacène Ouzia 2020

Application

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lrrrrcr}
\text{Min} & 2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -5x_4 & & \\
\text{s.c.} & & & & & & \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -4x_4 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq & 11 \\
 & x_1 & & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (2)
$$

Identifier une solution réalisable associée à la base formée des colonnes x_1, x_2 et x_4. *Indication*, l'inverse de la matrice

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est } \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 14 \\ -1 & 5 & -9 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.
$$

©Hacène OUZIA 2020

Solution application I

1. Notons de prime abord que la matrice B_0 formée des trois premières colonnes de la matrice A est inversible et que son inverse est la matrice

$$B_0^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 14 \\ -1 & 5 & -9 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, la solution réalisable associée à la base B_0 est la suivante :

$$x_{\mathcal{B}_0} = (x_1, x_2, x_4) = \left(\frac{21}{13}, \frac{32}{13}, \frac{5}{13}\right). \text{ et } x_{\mathcal{N}_0} = (x_3, x_5, x_6, x_7) = 0_{\mathbb{R}^4}. \quad (3)$$

2. Le vecteur des multiplicateurs simplexe associé à la base B_0 est $w = \left(\frac{24}{13}, -\frac{29}{13}, \frac{60}{13}\right)$.

3. Pour décider de l'optimalité de la solution de base réalisable courante il faut calculer les coûts réduits de toutes les variables hors base, c.-à-d.,

$$z_3 - c_3 = \frac{146}{13}, \quad z_5 - c_5 = \frac{24}{13}, \quad z_6 - c_6 = -\frac{29}{13}, \text{ et } \quad z_7 - c_7 = \frac{60}{13}.$$

On constate alors que certains coûts réduits sont positifs. Par conséquent, la solution courante n'est pas optimale. Ci-dessous les itérations de la méthode simplexe révisée.

Itération 0 Le tableau initial est le suivant :

	24/13	-29/13	60/13	-79/13
x_1	3/13	-2/13	14/13	21/13
x_2	-1/13	5/13	-9/13	32/13
x_4	-3/13	2/13	-1/13	5/13

Solution application II

La variable x_3 entre en base. Pour déterminer la variable sortant, en adjoint au tableau ci-dessus la colonne $B_0^{-1}a_3$ (a_3 étant la quatrième colonne de la matrice A). D'où le tableau :

	24/13	-29/13	60/13	-79/13	$\frac{146}{16}$
x_1	3/13	-2/13	14/13	21/13	$\frac{28}{13}$
x_2	-1/13	5/13	-9/13	32/13	$-\frac{18}{13}$
x_4	-3/13	2/13	-1/13	5/13	$-\frac{15}{13}$

La variable x_1 sort de la base (on a utilisé le critère du ratio).

Itération 1 Après l'opération de pivot, on obtient le tableau suivant :

	9/14	-10/7	-1	-29/2
x_3	3/28	-1/14	1/2	5/4
x_2	1/14	2/7	0	7/2
x_4	3/28	1/14	1/2	3/4

Les coûts réduits des variables hors base sont les suivants :

$$z_1 - c_1 = -\frac{73}{14}, \quad z_5 - c_5 = \frac{9}{14}, \quad z_6 - c_6 = -\frac{10}{7}, \text{ et } \quad z_7 - c_7 = -1.$$

La variable x_5 entre en base. D'où la tableau :

	9/14	-7/10	-1	-29/2	$\frac{9}{14}$
x_3	3/28	-1/14	1/2	5/4	$\frac{3}{28}$
x_2	1/14	2/7	0	7/2	$\frac{1}{14}$
x_4	3/28	1/14	1/2	3/4	$-\frac{3}{28}$

La variable x_3 sort de la base.

Solution application III

Itération 3 Après l'opération de pivot, on obtient le tableau suivant :

	0	-1	-4	-19
x_5	1	-2/3	14/3	7
x_2	0	1/3	-1/3	3
x_4	0	0	1	2

Les coûts réduits des variables hors base sont les suivants :

$$z_1 - c_1 = -8, \quad z_3 - c_3 = -6, \quad z_6 - c_6 = -1, \text{ et } \quad z_7 - c_7 = -4.$$

On en déduit que la solution $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (0, 3, 0, 2)$ est optimale de valeur -19.

AGENDA

1. Méthode simplexe révisée

2. Méthode de décomposition de Dantzig-Wolf
   - Motivation
   - Cas borné
   - Exemple
   - Cas non borné
   - Exemple

Flot à coût minimum

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \\
& \sum_{j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i, \quad i \in V, \qquad (4) \\
& x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

où

- $G = (V, \mathcal{A})$ un graphe orienté,
- b_i demande ($b_i < 0$) ou disponibilité ($b_i > 0$) au noeud $i \in V$,
- c_{ij} coût d'une unité de flux entre le noeud i vers le noeud j.
- x_{ij} flux du noeud i vers le noeud j.

■ HYPOTHÈSE 1 : le problème est *équilibré*, i.e., $\sum_{i \in V} b_i = 0$

© Hacène OUZIA 2020

Flot à coût minimum

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.c.} \quad & & & \\
& \sum_{j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i, & i \in V, & \\
& x_{ij} \geq 0, & (i,j) \in \mathcal{A}, &
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

où

- $G = (V, \mathcal{A})$ un graphe orienté,
- b_i demande ($b_i < 0$) ou disponibilité ($b_i > 0$) au noeud $i \in V$,
- c_{ij} coût d'une unité de flux entre le noeud i vers le noeud j.
- x_{ij} flux du noeud i vers le noeud j.

■ HYPOTHÈSE 1 : le problème est *équilibré*, i.e., $\sum_{i \in V} b_i = 0$

© Hacène OUZIA 2020

Multi-flot à coût minimum

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{q=1}^{Q} \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}^q x_{ij}^q & \\
\text{s.c.} & & \\
& \displaystyle\sum_{q=1}^{Q} x_{ij}^q \leq u_{ij}, & (i,j) \in \mathcal{A}, \\
& \displaystyle\sum_{j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij}^q - \sum_{j \in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji}^q = b_i^q, & i \in V, q = 1,\dots,Q, \\
& x_{ij}^q \geq 0, & (i,j) \in \mathcal{A}, q = 1,\dots,Q,
\end{array} \tag{5}
$$

©Hacène OUZIA 2020

Multi-flot à coût minimum : formulation matricielle

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q=1}^{Q} c_q^T x^q \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{q=1}^{Q} A_q x^q = b, \\
& B_q x^q \leq b^q, q = 1, \ldots, Q, \\
& x^q \in \mathbb{R}_+^{n_q}
\end{aligned} \tag{6}
$$

©Hacène OUZIA 2020

✍ Comment résoudre (6) pour des valeurs Q assez grandes ?

Multi-flot à coût minimum : formulation matricielle

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q=1}^{Q} c_q^T x^q \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{q=1}^{Q} A_q x^q = b, \\
& B_q x^q \leq b^q, q = 1, \ldots, Q, \\
& x^q \in \mathbb{R}_+^{n_q}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

✍ Comment résoudre (6) pour des valeurs Q assez grandes ?

©Hacène OUZIA 2020

Cas d'un problème borné

Problème à résoudre

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
s.c. & \\
 & Ax = b, \\
 & x \in \Omega,
\end{array}
\tag{7}
$$

Hypothèses

- La matrice A appartient à $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,
- Le vecteur b appartient à $\mathbb{R}^m$,
- L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un polyèdre borné et non vidé et possède une structure particulière.

©Hacène 2020

Principe

Théorème Décomposition de Carathéodory

Soit Ω un polyèdre borne. Nous avons :

$$x \in \Omega \Leftrightarrow \exists \lambda : \begin{cases} x = \sum_{j \in J} x_j \lambda_j, \\ \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geq 0, j \in J \end{cases}$$

x^1 x^2 $\vdots$ x^m

où, pour tout indice j appartenant à J, x_j est un point extrême de Ω.

©Hacène

☞ Ce théorème traduit le fait que :

$$\Omega = \mathbf{conv}\left(x_j : x_j \in \mathbf{Pext}\left(\Omega\right)\right),$$

$\mathbf{Pext}\,(\Omega)$ étant l'ensemble des points extrêmes de Ω. Sa cardinalité est exponentielle en la dimension du polyèdre !

POLYTECH SORBONNE

Principe

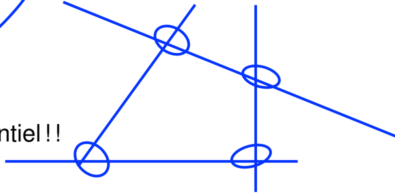
D'où, le problème (7) est équivalent à :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j\in J} (c^T x_j)\,\lambda_j \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{j\in J} (A x_j)\,\lambda_j = b, \\
& \sum_{j\in J} \lambda_j = 1, \\
& \lambda \geq 0.
\end{aligned}
$$

$c^T x$

ω

$Ax =$



- La variable d'optimisation est λ,
- Le nombre de points extrêmes est exponentiel ! !

✍ Comment le résoudre ?

©Hacène OUZIA 2020

Principe

- soit B une base initiale et considérons le tableau simplexe révisée :

$$
\begin{array}{ccc}
\hline
 & (w, \alpha) & \hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \\
\hline
\lambda_B & B^{-1} & B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \\
\hline
\end{array}
$$

  - Le vecteur $\hat{c}$ est défini :

$$\hat{c} = \left(c^T x_j\right)_{j \in J}.$$

  - Notons

$$\texttt{valPP} = \hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Le sous-problème :

$$\texttt{valSP} = \begin{array}{ll} \max & w^T A x_j + \alpha - c^T x_j \\ s.c. & \\ & j \in J. \end{array}$$

pivot

©Hacène OUZIA 2020

Principe

- Le sous-problèmes est équivalent à :

$$\begin{array}{ll} \max & \left(w^T A - c^T\right) x + \cancel{\alpha} \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

- Si **`valSP`** est nulle alors la solution de base courante est *optimale*.
- Sinon alors une variable λ_k entrera en base :

	(w, α)	$\hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$\alpha + \left(w^T a_k - c_k^T\right)$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$

©Hacène OUZIA 2020

Principe

Initialisation

- Une base réalisable B

Itération 0

- Calculer B^{-1}
- Calculer $(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
- Calculer $B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
- Former le tableau suivant

	(w, α)	$\hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$

Itération principale

- Résoudre le sous-problème :

$$\texttt{valSP} - \alpha = \boxed{\begin{array}{ll} \max & \left(w^T A - c^T\right) x \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}}$$

- Si $\texttt{valSP} = 0$ alors
  - Stop, solution optimale
- Sinon
  - Calculer $y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$
  - Former le tableau :

	(w, α)	$\hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$\texttt{valSP}$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$

- Faire un pivot

©Hacène OUZIA 2020

POLYTECH SORBONNE

Principe

©Hacène OUZIA 2020

REMARQUES

- La valeur du problème principal est une *borne supérieure* de la valeur optimale du problème (why ?).
- Nous avons :

$$\mathbf{valPP} - \mathbf{valSP} \leq \mathbf{Opt} \leq \mathbf{valPP}.$$

En effet, pour $x \in \Omega$ tel que $Ax = b$:

$$c^T x \geq w^T b + \alpha - \mathbf{valSP}.$$

Exemple

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ s.c. & \\ & x_1 + x_3 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 3, \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

où :

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^4_+ : x_1 \leq 2, x_1 + 2x_2 \leq 5, -x_3 + x_4 \leq 2, 2x_3 + x_4 \leq 6 \right\}$$

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

©Hacène OUZIA 2020

Exemple I

Initialisation Une base initiale est formée des variables d'écart et de la variable λ_1 (correspond au point extrême 0). Ainsi,

- La base initiale :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Cette base correspond au point extrême x_0 égal à $(0, 0, 0, 0)$.
- Le vecteur (w, α) vaut $(0, 0, 0)$.
- La solution de base courante est :

$$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- D'où le tableau simplexe révisée suivant :

	0	0	0	0
e_1	1	0	0	2
e_2	0	1	0	3
λ_1	0	0	1	1

Itération 1

- Le premier sous-problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

Exemple II

- Solution optimale

$$x_1 = \left(2, \frac{3}{2}, 3, 0\right),$$

de valeur $\frac{17}{2}$.

- La nouvelle colonne :

$$B^{-1}\begin{bmatrix} Ax_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Le nouveau tableau simplexe :

	0	0	0	0	17/2
e_1	1	0	0	2	5
e_2	0	1	0	3	7/2
λ_1	0	0	1	1	1

La variable e_1 sort de la base. Après pivot, on obtient :

	-17/10	0	0	-17/5
λ_2	1/5	0	0	2/5
e_2	-7/10	1	0	8/5
λ_1	-1/5	0	1	3/5

Exemple III

Itération 2

- Le deuxième sous-problème à résoudre est :

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{3}{10}x_1 + x_2 - \frac{7}{10}x_3 - x_4 \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

- Solution optimale

$$x_2 = \left(0, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$$

de valeur $\frac{5}{2}$.

- La nouvelle colonne :

$$B^{-1}\begin{bmatrix} Ax_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Le nouveau tableau simplexe :

	-17/10	0	0	-17/2	5/2
λ_2	1/5	0	0	2/5	0
e_2	-7/10	1	0	8/5	5/2
λ_1	-1/5	0	1	3/5	1

La variable λ_1 sort de la base. Après pivot, on obtient :

	-6/5	0	-5/2	-49/10
λ_2	1/5	0	0	2/5
e_2	-1/5	1	-5/2	1/10
λ_3	-1/5	0	1	3/5

POLYTECH SORBONNE

Exemple IV

Itération 3 Le troisième sous-problème à résoudre est :

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{4}{5}x_1 + x_2 - \frac{1}{5}x_3 - x_4 - \frac{5}{2} \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

✍ Solution optimale

$$x_3 = \left(2, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$$

de valeur $\frac{3}{5}$.

✍ La nouvelle colonne :

$$B^{-1}\begin{bmatrix} Ax_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

✍ Le nouveau tableau simplexe :

	-6/5	0	-5/2	-49/10	3/5
λ_2	1/5	0	0	2/5	2/5
e_2	-1/5	1	-5/2	1/10	3/5
λ_3	-1/5	0	1	3/5	3/5

La variable e_1 sort de la base. Après pivot, on obtient :

Exemple V

	-1	-1	0	-5
λ_2	1/3	-2/3	5/3	1/3
λ_4	-1/3	5/3	-25/6	1/6
λ_3	0	-1	7/2	1/2

Itération 4 Le dernier sous-problème à résoudre est :

$$\begin{array}{ll} \max & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 0 + x_4 \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

✍ Solution optimale

$$x_4 = (0, 0, 0, 0) \,,$$

de valeur 0. D'où, la solution optimale du problème est :

$$\hat{x} = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$$

Cas d'un problème non borné

Problème à résoudre

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & \\ & Ax = b, \\ & x \in \Omega, \end{array} \tag{8}$$

Hypothèses

- La matrice A appartient à $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,
- Le vecteur b appartient à $\mathbb{R}^m$,
- L'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un polyèdre **non borné** et non vidé et possède une structure particulière.

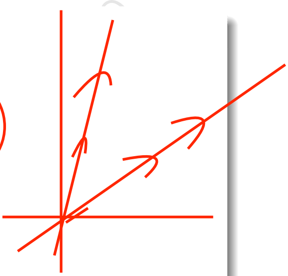
©Hacène 2020

Principe

Théorème Décomposition de Carathéodory

Soit Ω un polyèdre non borne. Nous avons :

$$x \in \Omega \Leftrightarrow \exists \lambda : \begin{cases} x = \sum_{j \in J} x_j \lambda_j + \sum_{k \in K} r_k \mu_k, \\ \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geq 0, j \in J, \\ \mu_k \geq 0, k \in K, \end{cases}$$



où, pour tout indice j appartenant à J, x_j est un point extrême de Ω et pour tout indice k appartenant à K, r_k est un rayon extrême de Ω.

☞ Ce théorème traduit le fait que :

$$\Omega = \mathbf{conv}\left(x_j : x_j \in \mathbf{Pext}(\Omega)\right) + \mathbf{cone}\left(r_k : r_k \in \mathbf{Rext}(\Omega)\right),$$

$\mathbf{Rext}(\Omega)$ étant l'ensemble des rayons extrêmes de Ω.

Principe

D'où, le problème (8) est équivalent à :

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j \in J} (c^T x_j)\, \lambda_j + \sum_{k \in K} (cTr_k)\, \mu_k \\
s.c. & \\
& \sum_{j \in J} (Ax_j)\, \lambda_j + \sum_{k \in K} (Ar_k)\, \mu_k = b, \\
& \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \\
& \lambda, \mu \geq 0.
\end{array}
$$

- Les variables d'optimisation sont λ et μ.
- Le nombre de points extrêmes et rayons extrêmes est exponentiel ! !

✍ Comment le résoudre ?

©Hacène OUZIA 2020

Principe

✍ soit B une base initiale et considérons le tableau simplexe révisée :

	(w,α)	$\hat{c}_B B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$

☞ Notons

$$\texttt{valPP} = \hat{c}_B B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$$

✍ Le sous-problème :

$$\texttt{valSP} = \begin{array}{ll} \max & \left(w^T A - c^T\right) x + \alpha \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

©Hacène OUZIA 2020

Principe

- **Initialisation**
  - Une base réalisable B
- **Itération 0**
  - Calculer B^{-1}
  - Calculer $(w, \alpha) = \hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
  - Calculer $B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
  - Former le tableau suivant

	(w, α)	$\hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Itération principale**
  - Résoudre le sous-problème :

$$\mathtt{valSP} - \alpha = \begin{array}{ll} \max & \left(w^T A - c^T\right) x \\ s.c. & \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

  - Si $\mathtt{valSP} = 0$ alors
    - Stop, solution optimale
  - Sinon
    - Calculer $y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $y_k = B^{-1} \begin{bmatrix} Ar_k \\ 0 \end{bmatrix}$
    - Former le tableau :

	(w, α)	$\hat{c}_B B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathtt{valSP}$
λ_B	B^{-1}	$B^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$	$B^{-1} \begin{bmatrix} Ax_k \\ 1 \end{bmatrix}$

- Faire un pivot

©Hacène OUZIA 2020

Exemple

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ s.c. & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \\ & x \in \Omega. \end{array}$$

où :

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3_+ : -1x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 8, x_3 \leq 3 \right\}$$

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}.$$

©Hacène OUZIA 2020

Bibliographie

- D. G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer
- G.B. Dantzig and N.T. Mukund (1997),
  Linear Programming,
  Springer
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer

©Hacène OUZIA 2020