

Maillage et Éléments Finis  
*De la pratique à la théorie*

B. THIERRY

January 7, 2021



## Introduction



# Éléments Finis Triangulaires

# 1

And the word was death  
And the word was without light  
The new beatitude  
“Good luck, you’re on your own”

---

A Perfect Circle - *The Doomed*

## 1.1 Problème modèle

### 1.1.1 Domaine Physique

Dans ce cours, nous considérons un ouvert polygonal  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Sur chaque segment du bord  $\Gamma := \partial\Omega$  du domaine, on définit le vecteur unitaire normale  $\mathbf{n}$  sortant à  $\Omega$ . Nous noterons que ce vecteur n’existe pas aux intersections. Le domaine  $\Omega$  est supposé ne pas comporter de fissure ni de point de rebroussement. Son bord est divisé en deux parties distinctes:  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ , potentiellement non connexe mais d’intersection vide:  $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$  et  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Selon la partie du bord, une condition sera imposée à la solution :

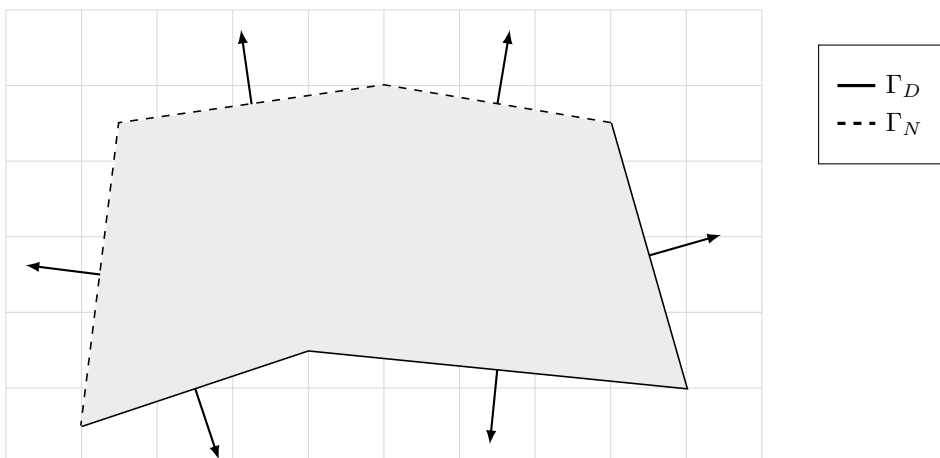


Figure 1.1: Exemple de domaine de calcul avec sa normal unitaire sortante

- Sur  $\Gamma_D$  : *condition de Dirichlet*, c'est à dire que la valeur de la solution  $y$  est imposée (e.g.  $u = 0$ ). En mécanique on parlerait du déplacement.
- Sur  $\Gamma_N$  : *condition de Neumann*, c'est à dire que le flux de la solution  $y$  est imposée (e.g.  $\partial_{\mathbf{n}}u = 0$ ). En mécanique on parlerait de la force normale.

**Remarque 1.1.** *En général, on préfère travailler dans un premier temps avec des ouverts réguliers, de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ . Un tel ouvert présente l'avantage de pouvoir clairement définir le vecteur unitaire normale  $\mathbf{n}$  sortant à  $\Omega$  cependant, après maillage, on se retrouve avec ...un polygone ! Alors plutôt que de travailler dans un domaine régulier pour après le casser en (petits) morceaux, nous préférons ici mettre l'accent sur les algorithmes et la mise en oeuvre de la méthode que les spécificités mathématiques.*

### 1.1.2 EDP (problème fort)

Ce cours se concentre sur les équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques du second ordre, qui font appel à l'opérateur de Laplace (ou *Laplacien*)<sup>1</sup>

$$\Delta := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Nous considérons le problème générique suivant, appelé aussi *problème de réaction-diffusion*:

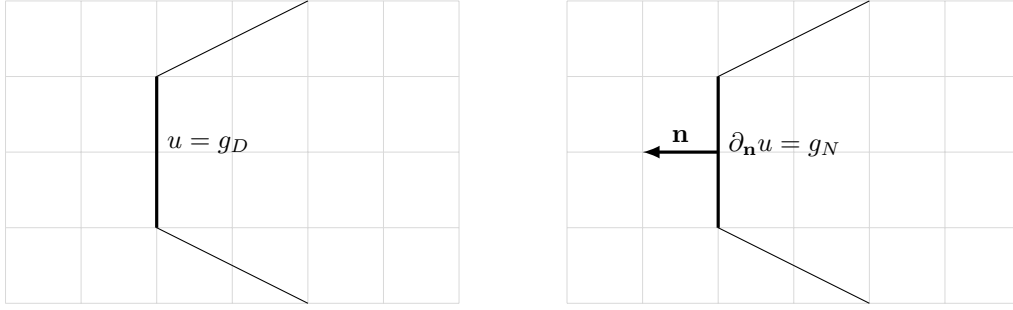
$$\begin{cases} -\Delta u + cu &= f & (\Omega), \\ u &= g_D & (\Gamma_D), \\ \partial_{\mathbf{n}}u &= g_N & (\Gamma_N), \end{cases} \quad (1.1)$$

où nous avons défini :

- le terme  $\partial_{\mathbf{n}}u$  désigne la *dérivée normale* de  $u$  sur le bord, c'est à dire la dérivée dans la direction  $\mathbf{n} : (\nabla u) \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\nabla u = [\partial_{x_1}u, \dots, \partial_{x_d}u]^T$ . Vous aurez sans doute remarqué que, entre deux arêtes, le vecteur normale  $\mathbf{n}$  n'est pas défini et donc la dérivée normale non plus. Ce "problème" n'en est pas vraiment un et pour l'instant mettez cela de côté, nous y reviendrons !.
- $-\Delta u$  : Terme de diffusion (notez le signe négatif)
- $c \geq 0$  : Paramètre artificiel positif. Principalement, nous lui imposerons de valoir 1 ou 0, ce qui nous permet de supprimer (ou non) le terme en  $u$ , appelé terme de *Réaction*
- $u = g_D$  : **Condition de Dirichlet**
- $u = g_N$  : **Condition de Neumann**
- $f$  : une fonction donnée définie sur  $\Omega$ . Elle joue le rôle de *terme source*, c'est à dire d'apport (positif ou négatif), par exemple de chaleur ou de force surfacique.

---

<sup>1</sup>Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)



(a) Condition de Dirichlet : la valeur est imposée. (b) Condition de Neumann : le flux est imposé.

Figure 1.2: Conditions de Neumann et de Dirichlet

Pour le moment, nous ne nous intéressons pas à la régularité de la solution ni même à l'existence et l'unicité de celle-ci : nous supposons que le problème (1.1) est bien posé. Une fois la méthode des éléments finis appréhendée, nous nous intéresserons à ces questions. Cela va à l'encontre de l'habitude en mathématiques où l'on démontre le caractère bien posé avant de s'y attaquer. Faites moi confiance et tout s'éclairera !

### 1.1.3 Théorème de Green

Pour une géométrie arbitraire, nous ne savons pas, en général, obtenir *la solution forte* (ou classique) du problème (1.1). La méthode des éléments finis se base sur l'approximation numérique de *la solution au sens faible* du problème (1.1). Nous verrons qu'une solution *faible* est, en fait et en général, *forte*. Commençons par réécrire le problème d'origine sous sa formulation faible ou formulation variationnelle.

Un théorème central dans l'analyse des EDP et qui permet d'obtenir ces formulations faibles est celui de Green<sup>2</sup>

$$\forall u, v, \quad \int_{\Omega} (\Delta u) v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} (\partial_{\mathbf{n}} u) v.$$

Ce résultat est valable en dimension 3 pour des domaines polygonaux (ouf). Le produit  $\nabla u \cdot \nabla v$  est le produit scalaire euclidien standard. La quantité  $v$  est ici laissée non définie, c'est normal : supposez que c'est une fonction de même régularité que  $u$ .

**Remarque 1.2.** Ce résultat est en quelque sorte une extension multi-dimensionnel de l'intégration par partie sur un segment 1D  $\Omega = [a, b]$ . En effet, en dimension 1, l'opérateur  $\Delta$  devient la dérivée seconde. La normale sortante au segment devient un scalaire valant  $\pm 1$  ( $-1$  à gauche et  $1$  à droite) et la dérivée normale devient  $\partial_{\mathbf{n}} u = \pm u'$  :

$$\int_a^b u'' v = - \int_a^b u' v' + u'(b) v(b) - u'(a) v(a) = - \int_a^b u' v' + \partial_{\mathbf{n}} u(b) v(b) + \partial_{\mathbf{n}} u(a) v(a).$$

<sup>2</sup>George Green (1793 - 1841). Mathématicien britannique (quasi) auto-didacte.

### 1.1.4 Problème faible

Le point de départ de notre analyse est la réécriture sous forme faible du problème (1.1). Pour cela, la méthode consiste à multiplier l'EDP par une fonction  $v$ , intégrer le tout sur  $\Omega$  puis à appliquer le Théorème de Green<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}\Delta u + cu = f &\implies - \int_{\Omega} \Delta uv + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v \\ &\implies \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma} (\partial_{\mathbf{n}} u) v\end{aligned}$$

Comme toujours en mathématiques (et dans la vraie vie), commençons par faire ce que nous savons faire. Autrement dit, utilisons nos (maigres) connaissances sur  $u$  : les **conditions aux bords**. Pour cela séparons l'intégrale sur  $\Gamma$  en deux:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_D} (\partial_{\mathbf{n}} u) v + \int_{\Gamma_N} (\partial_{\mathbf{n}} u) v$$

Sur  $\Gamma_N$ , nous savons que  $\partial_{\mathbf{n}} = g_N$  tandis que sur  $\Gamma_D$  nous ne savons rien de  $\partial_{\mathbf{n}} u$  mais nous savons que  $u = g_D$ <sup>4</sup>. Autrement dit, nous connaissons déjà la valeur de  $u$  sur  $\Gamma_D$ , ce n'est pas la peine de la calculer. Supprimons donc ce terme gênant en imposant à  $v$ , qui est arbitraire, d'être nul sur  $\Gamma_D$  :

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D.$$

Nous obtenons alors :

$$\Delta u + cu = f \implies \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \text{ tel que } v|_{\Gamma_D} = 0. \quad (1.2)$$

Ainsi, et toujours sans regarder la régularité de  $u$  (ni de  $v$ ), nous avons que : si  $u$  est solution de l'EDP (1.1) alors  $u$  est aussi solution de la formulation faible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que} \\ u = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \text{ tel que } v|_{\Gamma_D} = 0. \end{array} \right.$$

À gauche du signe  $=$  se trouve l'inconnue  $u$  et à droite les données ( $f$  et  $g_N$ ), c'est une convention et plus tard cette équation s'écrira sous la forme d'un système linéaire  $AU = B$  où le vecteur  $B$  correspondra au membre de droite de (1.2) et la matrice  $A$  à la partie de gauche.

Nous pouvons maintenant définir plus proprement la quantité  $v$ . Appelée *fonction test* elle n'a d'autre rôle que de “tester” la solution. L'idée de la formulation faible est de chercher une solution qui vérifie l'EDP, non pas point à point (au sens fort, donc) mais “en moyenne”, via l'intégrale. En mécanique,  $v$  est appelé “travaux virtuels” (avec la méthode éponyme qui est, en fait, la formulation faible) : cette quantité est arbitraire et n'est utile que pour écrire le problème faible (1.2).

<sup>3</sup>Ne vous posez pas trop de questions pour le moment, dites vous juste : hey pourquoi pas  $\nabla \cdot (\nabla u) = f$  ! Après tout, 2020 a déjà apporté son lot d'étrangetés !

<sup>4</sup>Attention,  $u = g_D \not\Rightarrow \partial_{\mathbf{n}} u = \partial_{\mathbf{n}} g_D$  !



Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont imposées différemment : la condition de Neumann apparait naturellement dans la formulation faible, en remplaçant simplement  $\partial_{\mathbf{n}}u$  par sa valeur, c'est pourquoi on parle de *condition naturelle*. À l'inverse, la condition de Dirichlet est dite *condition essentielle* et est imposée à la solution ou plutôt, à l'espace fonctionnel contenant la solution.

### 1.1.5 Espace Fonctionnel

Délimitons maintenant et avec plus de précisions les espaces fonctionnels auxquels  $u$  et  $v$  appartiennent. Comme nous cherchons  $u$  sous la forme d'une solution faible, nous n'avons pas besoin d'imposer à  $u$  d'être continu, ni même de posséder une valeur en chaque point de l'espace. C'est pour cela que nous travaillerons avec des fonctions de carré intégrable et l'espace  $L^2(\Omega)$  :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\},$$

avec son produit scalaire usuel et sa norme qui en dérive

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \quad \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2.$$

Cet espace n'est pas suffisant car nous avons besoin de dériver  $u$  et  $v$  dans la formulation faible. Nous introduisons alors l'espace de Sobolev<sup>5,6</sup>

$$H^1(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} f \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, d \},$$

et lui associons son produit scalaire et sa norme dérivée<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v & \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \\ &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^d} & &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \end{aligned}$$

Il nous reste un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  à introduire :

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0 \}$$

Les fonctions de cet espace sont à valeur nul sur le bord  $\Gamma_D$ , c'est ce que nous voulions précédemment. Notez que  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  est bien un espace vectoriel.

**Remarques.** Si vous n'avez encore jamais rencontré ces espace de Sobolev, comme  $H^1(\Omega)$ , il doivent vous sembler contradictoires avec tout ce que vous avez appris jusque là, notamment par la présence de la dérivée  $\partial_{x_i} f \in L^2(\Omega)$ . Une fonction de  $L^2(\Omega)$  n'est déjà pas forcément continue ni même définie en tout point, alors comment peut-elle être dérivable ? Prendre la restriction d'une fonction  $H^1(\Omega)$  sur  $\Gamma_D$ , une partie du bord, n'a pas non plus de sens à ce niveau de lecture

<sup>5</sup>Les espaces de Sobolev sont aussi appelés espace d'énergie : les quantités qui le composent sont *d'énergie finie* et ont plus de liberté que les fonctions continues, elles peuvent par exemple (et sous conditions) être singulière en certains points, comme l'énergie.

<sup>6</sup>Du nom de son découvreur, Sergei SOBOLEV (1908 – 1989), mathématicien Russe.

<sup>7</sup>Le produit scalaire  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_i \alpha_i \beta_i$  est le produit scalaire euclidien standard.

*du cours.* En effet, nous savons qu'un élément de  $L^2(\Omega)$  est en fait une classe de fonction et en prendre sa valeur sur un point ou une ligne n'a pas de sens a priori.

Mathématiquement, la dérivée qui apparait ici n'est pas la dérivée *au sens classique* mais *au sens faible*, que nous définirons plus tard. Cependant, si les dérivées au sens classique et au sens faible existe, alors elles sont identiques. De plus et en pratique, toutes les fonctions que nous verrons seront (très) régulières c'est pourquoi, pour le moment, vous pouvez faire "comme si" ce sont des dérivées classiques et accepter que les espace  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$  "ressemblent" aux espaces  $C^0(\Omega)$  et  $C^1(\Omega)$ .

Nous détaillerons tout cela plus loin, cependant, en attendant, vous pouvez vraiment faire *comme si* vous aviez compris et *comme si* nous travaillions dans  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  plutôt que dans  $H^1(\Omega)$ .

### 1.1.6 Formulation Variationnelle dans les Sobolev

Nous écrivons maintenant la formulation faible dans les bons espaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ u = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Nous remarquons que dans cette formulation faible,  $v$  et  $u$  satisfont tous deux une conditions de Dirichlet mais différentes : hétérogène pour  $u$  et homogène pour  $v$ , mais tous deux appartiennent à  $H^1(\Omega)$ . Les données doivent, de leur côté, appartenir aux espaces suivants :

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_N \in L^2(\Gamma_N), \quad g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D).$$

L'espace  $L^2(\Gamma_N)$  est l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\Gamma_N$  (intégrale 1D). Le dernier espace est assez particulier. Il s'agit de l'espace des restrictions sur  $\Gamma_D$  des fonctions de  $H^1(\Omega)$ . Autrement dit, si  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ , alors il existe  $v_0 \in H^1(\Omega)$  telle que  $v_0|_{\Gamma_D} = g_0$ .

## 1.2 Espace $\mathbb{P}^1$ –Lagrange

La méthode des éléments finis est basée sur la méthode de Galerkin, ou d'approximation interne. L'idée est d'approcher l'espace fonctionnel  $H^1(\Omega)$  par un espace de dimension finie.

Nous introduisons maintenant notre premier espace éléments finis :  $\mathbb{P}^1$ –Lagrange ou plus simplement  $\mathbb{P}^1$ , composés des fonctions linéaires par triangles. Nous restons en dimension 2, l'extension à la dimension 3 est relativement directe.

### 1.2.1 Maillage triangulaire (ou triangulation)

Nous découpons maintenant le domaine en triangles pour obtenir un maillage triangulaire (ou triangulation) conforme de  $\Omega$ . Un maillage est conforme s'il suit les quelques règles simples suivantes :

- L'union des triangles doit couvrir  $\Omega$  sans le dépasser :  $\Omega = \bigcup_{i=0}^{N_t} K_i$ .
- L'intersection de deux triangles est soit vide, soit une arête commune complète à chacun des deux triangles, soit un sommet de chacun des deux triangles.

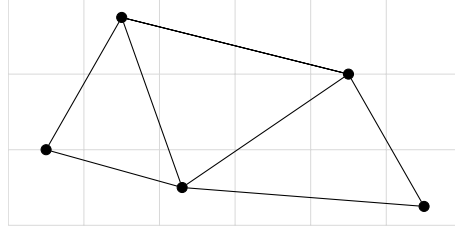
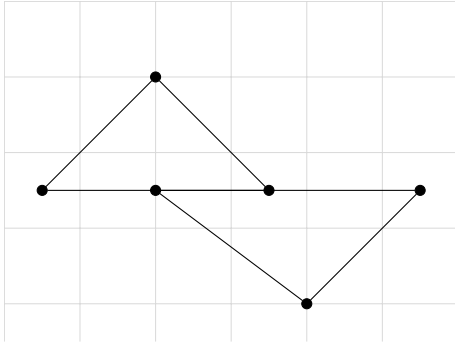
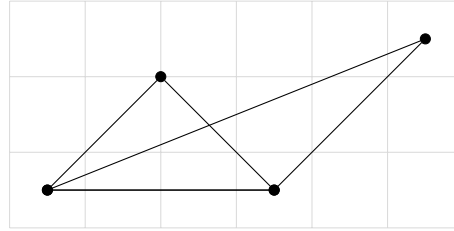


Figure 1.3: Exemple de maillage conforme.



(a) L'intersection n'est pas une arête complète.



(b) Chevauchement des triangles.

Figure 1.4: Exemples de maillages non conforme

- Une arête d'un triangle est soit une arête (complète) d'un autre triangle, soit une partie de  $\Gamma$ , auquel cas ce segment est complètement inclus soit dans  $\Gamma_D$  soit dans  $\Gamma_N$  (il n'y a pas d'arête appartenant à la fois à  $\Gamma_D$  et à  $\Gamma_N$ ).

La deuxième contrainte impose notamment que deux triangles ne peuvent pas se chevaucher. La figure 1.3 montre un exemple de maillage conforme et les figures 1.4a et 1.4b des situations non conformes. La troisième condition implique qu'à l'intersection entre  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ , il existe un sommet qui appartient à plusieurs triangles (si  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  se touchent).

Une telle triangulation sera noté  $\mathcal{T}_h = \{K_i, i = 0, \dots, N_t - 1\}$ , l'indice  $h$  faisant référence à la **finesse de maillage**, que l'on définit par le grand diamètre des triangles :

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\text{diam}(K)) = \max_{i=0, \dots, N_t-1} (\text{diam}(K_i)).$$

Le diamètre d'un triangle est la distance maximale entre deux points du triangle. Nous notons de plus  $\mathcal{S}_h$  et  $\mathcal{A}_h$  les ensembles respectivement des sommets et des arêtes de  $\mathcal{T}_h$ . Pour un triangle  $K$  arbitraire, nous noterons  $[s_0, s_1, s_2]$  ses sommets ordonnés, et le triangle  $K_i$  aura pour sommet  $[s_0^{K_i}, s_1^{K_i}, s_2^{K_i}]$ .

Il existe aujourd'hui des mailleurs automatiques open-source, un des plus connu et que nous utiliserons est GMSH<sup>8</sup>. Le maillage automatique reste un métier à part entière tant la complexité est importante notamment en 3D et avec des géométries complexes, non forcément polygonales.

<sup>8</sup><https://gmsh.info>

Et un tuto par votre serviteur : <https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/tutorial/gmsh>

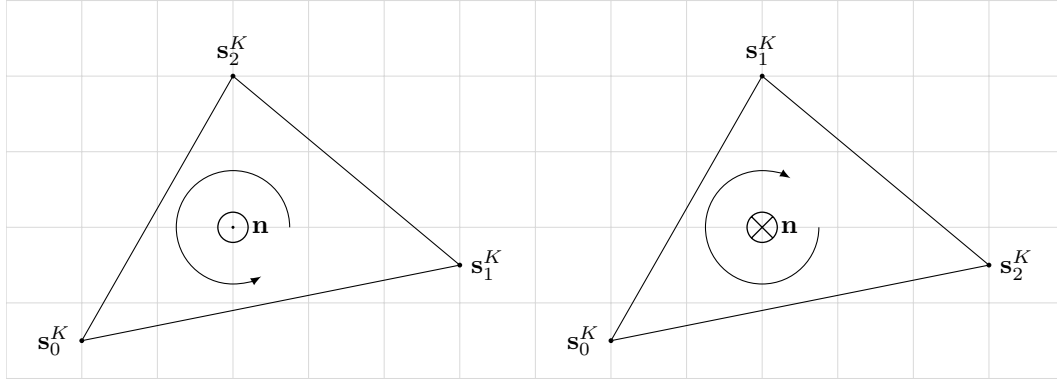


Figure 1.5: Deux orientations possibles pour un triangle. Dans les maillages considérés, tous les triangles ont la même orientation.

D'autres parts, de nombreuses questions sont encore ouvertes aujourd'hui dans ce domaine comme la construction automatique d'un maillage composé de quadrangles. Nous n'entrerons pas dans les détails dans ce sujet, nous serons de simple "utilisateurs et utilisatrices".

### 1.2.2 Fonction linéaire sur un triangle

**Cas du segment (1D).** Regardons tout d'abord le cas 1D d'un segment  $[\alpha, \beta]$  et d'une fonction  $p$  linéaire sur ce segment :  $p(x) = ax + b$ . Les coefficients  $a$  et  $b$  caractérisent la fonction  $p$  et sont, de plus, définis de manière unique dès lors que l'on connaît la valeur de  $p$  en  $\alpha$  et en  $\beta$  (2 équations à 2 inconnues, linéairement indépendantes). Cette propriété reste naturellement vraie pour un segment  $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}]$  "plongé" en dimension 2. Un point  $\mathbf{x}$  de ce segment est décrit par ses coordonnées curvilignes :  $\mathbf{x}(s) = (1-s)\vec{\alpha} + s\vec{\beta}$ , pour  $s \in [0, 1]$ , et un polynôme  $p$  de degré 1 sur  $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}]$  s'écrit alors  $p(\mathbf{x}(s)) = (1-s)p(\vec{\alpha}) + sp(\vec{\beta})$  pour  $s \in [0, 1]$ . On voit clairement qu'un polynôme de degré 1 sur un segment est défini de manière unique par ses valeurs aux extrémités<sup>9</sup>.

**Cas du triangle (2D).** Revenons maintenant dans un triangle  $K$  non plat et notons  $\mathbb{P}^1$  l'espace des polynômes réels de degré 1 sur  $\mathbb{R}^2$ , qui est de dimension 3. L'espace  $\mathbb{P}^1(K)$  des fonctions linéaires (ou des polynômes de degré 1) sur  $K$  est lui aussi de dimension 3 :

$$\mathbb{P}^1(K) = \{p \mid \exists! a, b, c \text{ tels que } \forall (x, y) \in K, p(x, y) = a + bx + cy\}$$

Une fonction  $p$  de  $\mathbb{P}^1(K)$  est définie de manière unique par ses 3 coefficients  $a, b, c$ . Inversement, ces trois coefficients sont calculables dès lors que l'on connaît la valeur de  $p$  sur trois points non alignés, comme les 3 sommets du triangle, comme le montre le lemme suivant. Une fonction  $p \in \mathbb{P}^1(K)$  est donc définie de manière unique soit par la connaissance des coefficients, soit par la connaissance de sa valeur sur les trois sommets du triangle.

**Proposition 1.3.** Soit  $K$  un triangle non dégénéré de  $\mathbb{R}^2$  de sommets  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ . Alors, pour tout jeu de données  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ , il existe un unique polynôme de  $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}^2)$  tels que  $p(\mathbf{s}_i) = \alpha_i$ .

<sup>9</sup>Au lycée on disait "entre deux points ne passe qu'une et une seule droite"

*Proof.* En notant  $\mathbf{s}_i = (x_i, y_i)$  et  $p(x, y) = ax + by + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , alors le problème revient à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = \alpha_1 \\ ax_2 + by_2 + c = \alpha_2 \\ ax_3 + by_3 + c = \alpha_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'un tel système n'est autre que deux fois l'aire du triangle  $K$  qui n'est pas dégénéré:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\text{Aire}(K) \neq 0$$

Le système est donc bien inversible et admet une unique solution  $(a, b, c)$ .  $\square$

**Remarque 1.4.** Soit une fonction  $v \in \mathbb{P}^1(K)$ , linéaire sur le triangle  $K$ . Sa restriction  $v|_\sigma$  à une arête  $\sigma$  de  $K$  est elle même une fonction linéaire sur  $\sigma$ . Elle est donc complètement caractérisée par sa valeur aux sommets de l'arête, qui sont aussi des sommets de  $K$ .

### 1.2.3 Fonctions linéaires par morceaux (= par triangles)

Nous pouvons maintenant introduire l'espace fonctionnel  $\mathbb{P}^1$ -Lagrange<sup>10</sup>. Cet espace, noté  $V_h$  contient les fonctions **continues** sur  $\overline{\Omega}$  et **linéaires sur chaque triangle** :

$$V_h := \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}^1(K)\}.$$

Caractérisons maintenant les fonctions de cet espace. Le premier résultat montre que deux fonctions de  $V_h$  sont égales si et seulement si elles coïncident sur tous les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

**Lemme 1.5.** Si  $u_h, v_h \in V_h$  vérifient  $u_h(\mathbf{s}) = v_h(\mathbf{s})$  pour tout sommet  $\mathbf{s}$  de  $\mathcal{T}_h$ , alors  $u_h = v_h$  sur  $\Omega$ .

*Proof.* En se plaçant sur le triangle  $K = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  de  $\mathcal{T}_h$ , nous avons  $u_h(\mathbf{s}_i) = v_h(\mathbf{s}_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . La proposition 1.3 implique que  $u_h|_K = v_h|_K$ . Le triangle  $K$  étant arbitraire, cette relation vaut sur tous les éléments de la triangulation. Le même raisonnement peut être effectué sur chaque arête pour obtenir que  $u_h - v_h$  est nulle sur  $\Omega$  tout entier.  $\square$

**Proposition 1.6.** Pour tout jeu de données réelles  $(\alpha_i)_{i=0, \dots, N_s-1}$ , il existe une unique fonction  $v_h \in V_h$  vérifiant  $v_h(\mathbf{s}_i) = \alpha_i$  pour tout  $i = 0, \dots, N_s - 1$ .

*Proof.* L'unicité est démontrée par le lemme 1.5 précédent, il manque donc l'existence. Quitte à renuméroter, prenons un triangle  $K = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$  de  $\mathcal{T}_h$  et le jeu de valeurs associé  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}$ . La proposition 1.3 montre qu'il existe un (unique) polynôme  $p_K$  de  $\mathbb{P}^1(K)$  tel que  $p_K(\mathbf{s}_i) = \alpha_i$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Nous pouvons répéter cette opération pour tous les triangles  $K$  et nous introduisons  $u_h$  tel que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad u_h|_K = p_K.$$

---

<sup>10</sup>souvent abrégé  $\mathbb{P}^1$ . Lagrange TODO:

La fonction  $v_h$  est affine sur chaque triangle, il nous faut montrer que  $u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  pour conclure sur son appartenance à  $V_h$ . Comme  $v_h$  est continue en chaque sommet  $\mathbf{s}$ , il reste à montrer la continuité sur les arêtes.

Prenons 2 triangles  $K_i$  et  $K_j$  de  $\mathcal{T}_h$  ayant une arête  $\Sigma$  en commun. Quitte à renuméroter, notons  $\mathbf{s}_1 = (x_1, y_1)$  et  $\mathbf{s}_2 = (x_2, y_2)$  les deux sommets de l'arête  $\Sigma$  et notons

$$\sigma(t) = \mathbf{s}_1 + t(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$$

une paramétrisation de  $\Sigma$ . Si  $p_{K_i}(x, y) = ax + by + c$ , nous avons alors, pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} p_{K_i}(\sigma(t)) &= a(x_1 + t(x_2 - x_1)) + b(y_1 + t(y_2 - y_1)) + c \\ &= a(x_1 + t(x_2 - x_1)) + b(y_1 + t(y_2 - y_1)) + c + t(c - c) \\ &= [ax_1 + by_1 + c] + t([ax_2 + by_2 + c] - [ax_1 + by_1 + c]) \\ &= p_{K_i}(\mathbf{s}_1) + t(p_{K_i}(\mathbf{s}_2) - p_{K_i}(\mathbf{s}_1)) \\ &= p_{K_j}(\mathbf{s}_1) + t(p_{K_j}(\mathbf{s}_2) - p_{K_j}(\mathbf{s}_1)) \\ &= p_{K_j}(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Autrement dit, les deux polynômes  $p_{K_i}$  et  $p_{K_j}$  sont égaux sur l'arête  $\Sigma$  et  $v_h$  est bien continue sur toutes les arêtes de  $\mathcal{T}_h$  en plus de l'être sur tous les triangles et tous les sommets :  $v_h$  est donc bien **continue** sur tout  $\overline{\Omega}$ .  $\square$

### 1.2.4 Base de $V_h$ : les fonctions de forme

Au vu de ce qui précède, deux fonctions de  $V_h$  sont identiques si et seulement si elles possèdent la même valeur sur chaque sommet de  $\mathcal{T}_h$ . En notant  $N_s = \text{card}(\mathcal{T}_h)$ , introduisons l'ensemble des **fonctions de forme**  $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N_s-1}$  de  $V_h$ , qui sont **nulles sur chaque sommet sauf un** :

$$\forall i, j = 0, \dots, N_s - 1, \quad \varphi_j(\mathbf{s}_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont la généralisation en 2D des *fonctions chapeau* unidimensionnelles (elles ressemblent d'ailleurs encore plus à un "chapeau" !).

**Proposition 1.7.** *La famille  $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq N_s-1}$  est une base de  $V_h$ , qui est alors de dimension  $N_s$ , le nombre de sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .*

*Proof.* Montrons que la famille des fonctions de forme est une base de  $V_h$ . Commençons par le caractère libre de cette famille en prenant  $N_s$  données  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq N_s-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_s-1} \alpha_i \varphi_i &= 0 \implies \forall j = 0, \dots, N_s - 1, \quad \sum_{i=0}^{N_s-1} \alpha_i \varphi_i(\mathbf{s}_j) = 0 \\ &\implies \forall j = 0, \dots, N_s - 1, \quad \alpha_j \times 1 + \sum_{i=0, i \neq j}^{N_s-1} (\alpha_i \times 0) = 0 \\ &\implies \forall j = 0, \dots, N_s - 1, \quad \alpha_j = 0 \end{aligned}$$

La famille de fonctions  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq N_s-1}$  est libre. Pour montrer qu'elle est génératrice, prenons une fonction  $u_h \in V_h$  et plaçons nous sur le triangle  $K = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  (quitte à renuméroter).

Le polynôme  $\left(\sum_{i=0}^2 u_h(\mathbf{s}_i)\varphi_i\right)\Big|_K$  coïncide avec le polynôme  $u_h|_K$  sur les sommets du triangle  $K$ . Les deux étant de degré 1, nous avons alors l'égalité de ces polynômes sur tout le triangle : La famille de fonctions  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq N_s-1}$  est libre. Pour montrer qu'elle est génératrice, prenons une fonction  $u_h \in V_h$  et plaçons nous sur le triangle  $K = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  (quitte à renuméroter). Le polynôme  $\left(\sum_{i=0}^2 u_h(\mathbf{s}_i)\varphi_i\right)\Big|_K$  coïncide avec le polynôme  $u_h|_K$  sur les sommets du triangle  $K$ . Les deux étant de degré 1, nous avons alors l'égalité de ces polynômes sur tout le triangle :

$$u_h|_K = \left(\sum_{i=0}^2 u_h(\mathbf{s}_i)\varphi_i\right)\Big|_K.$$

Cette relation étant valable sur un triangle arbitraire, elle est vraie sur  $\Omega$ . La famille de fonctions  $(\varphi_i)_i$  est donc une base de  $V_h$ .  $\square$

**Proposition 1.8** (Admis pour le moment). *L'espace  $V_h$  est inclus dans  $H^1(\Omega)$ .*

**Lemme 1.9.** *Le support d'une fonction de forme  $\varphi_j$  est l'union des triangles ayant pour sommet  $\mathbf{s}_j$  :*

$$\text{supp}(\varphi_j) = \{T \in \mathcal{T}_h \mid \mathbf{s}_j \text{ est un sommet de } T\}.$$

*Autrement dit, en dehors de ces triangles, la fonction  $\varphi_j$  est nulle.*

*Proof.* Prenons une fonction de forme  $\varphi_j$  associée au sommet  $\mathbf{s}_j$ , et un triangle  $K$  dont aucun sommet n'est  $\mathbf{s}_j$ . Alors dans ce cas,  $\varphi_j$  est nulle sur les trois sommets de  $K$ , et est donc nulle sur le triangle tout entier.  $\square$

Au final, pour une fonction  $u_h$  de  $V_h$ , retenons que :

- $u_h$  est (par définition) continue et linéaire sur chaque triangle
- La dimension de  $V_h$  est égale au nombre de sommets  $N_s$  du maillage. Plus le maillage est fin, plus la dimension est grande.
- La famille  $(\varphi_I)_I$  des fonctions de forme est une base de  $V_h$ . Autrement dit, il existe  $N_s$  uniques coefficients  $(u_I)_I$ , tels que

$$u_h = \sum_{I=0}^{N_s-1} u_I \varphi_I$$

- Une fonction  $u_h$  de  $V_h$  est caractérisée par sa valeur aux  $N_s$  sommets
- Les coefficients sont en fait la valeur de  $u_h$  aux sommets :  $u_I = u_h(\mathbf{s}_I)$  :

$$\sum_{I=0}^{N_s-1} u_h(\mathbf{s}_I)\varphi_I(\mathbf{s}_J) = u_h(\mathbf{s}_J)\varphi_J(\mathbf{s}_J) = u_h(\mathbf{s}_J).$$

- Le support d'une fonction de forme  $\varphi_I$  est l'union des triangles ayant pour sommets  $\mathbf{s}_I$ . Il est donc très petit par rapport à  $\Omega$ .





# Mise en œuvre

La dictature s'épanouit sur le  
terreau de l'ignorance

---

G. Orwell - 1984

## 2.1 Principe

### 2.1.1 Discrétisation de la formulation variationnelle

Pour le moment, nous supposons  $\Gamma_D = \emptyset$  et  $g_N = 0$ . Autrement dit, la formulation faible s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \underbrace{\int_{\Gamma_N} g_N v}_{=0}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Nous la réécrivons sous la forme compacte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v) \end{array} \right.$$

où les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et linéaires  $\ell(\cdot)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv \\ \ell: H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \ell(v) = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Le principe de la méthode est d'approcher l'espace  $H^1(\Omega)$  par  $V_h$ . Cette méthode est appelé *Méthode de Galerkin* ou *Approximation interne*. Pour cela, modifions, dans la formulation faible,  $H^1(\Omega)$  par  $V_h$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h). \end{array} \right.$$

*Pourquoi diable remplacer  $H^1(\Omega)$  par  $V_h$  ?* La réponse juste après !

### 2.1.2 Système linéaire

L'espace  $V_h$  est de dimension finie et dispose d'une base : les fonctions de forme  $(\varphi_I)_{I=0,\dots,N_s-1}$ . Autrement dit, la formulation faible discrétisée est équivalente à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall I = 0, \dots, N_s - 1, \quad a(u_h, \varphi_I) = \ell(\varphi_I). \end{cases}$$

D'un autre côté, nous pouvons aussi écrire  $u_h$  dans la base des fonctions de forme :

$$u_h = \sum_{J=0}^{N_s-1} u_J \varphi_J,$$

avec  $u_J = u_h(\mathbf{s}_J)$  et la formulation faible se réécrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_J)_{J=0,\dots,N_s-1} \text{ tel que} \\ \forall I = 0, \dots, N_s - 1, \quad a\left(\sum_{J=0}^{N_s-1} u_J \varphi_J, \varphi_I\right) = \ell(\varphi_I). \end{cases}$$

Comme  $a(\cdot, \cdot)$  est bilinéaire<sup>1</sup>, nous avons

$$a\left(\sum_{J=0}^{N_s-1} u_J \varphi_J, \varphi_I\right) = \sum_{J=0}^{N_s-1} u_J a(\varphi_J, \varphi_I).$$

Notons maintenant  $U^h = [u_0, \dots, u_{N_s-1}]^T$  les coefficients recherchés, alors ce problème peut se réécrire tout simplement sous la forme d'un système linéaire :

$$A^h U^h = B^h, \tag{2.1}$$

où nous avons

$$\begin{aligned} A^h &= (A_{I,J}^h)_{0 \leq I, J \leq N_s-1} = (a(\varphi_J, \varphi_I))_{0 \leq I, J \leq N_s-1} \\ U^h &= (u_I)_{0 \leq I \leq N_s-1} \\ B^h &= (B_I^h)_{0 \leq I \leq N_s-1} = (\ell(\varphi_I))_{0 \leq I \leq N_s-1} \end{aligned}$$

Ce système linéaire est de dimension  $N_s$ , le nombre de sommets du maillage. Dans la suite et pour simplifier, nous nous affranchirons de l'indice  $h$  sur les termes du système linéaire (2.1).

## 2.2 Assemblage des Matrices

Nous devons maintenant calculer effectivement les coefficients  $A_{I,J}^h$  de la matrice  $A$  et  $B_I^h$  du vecteur  $B$ . Nous nous intéressons pour l'instant uniquement à la matrice  $A$ .

### 2.2.1 Algorithme “brut-force”

Prenons deux indices de sommets  $I$  et  $J$  et rappelons la valeur du coefficient  $A_{I,J}^h$  :

$$A_{I,J}^h = a(\varphi_J, \varphi_I) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I + c \int_{\Omega} \varphi_J \varphi_I$$

---

<sup>1</sup>Vous pouvez le vérifier aisément

Chaque intégrale sur  $\Omega$  peut être décomposée comme une somme sur les triangles  $K_p$  :

$$\begin{aligned} A_{I,J}^h &= \sum_{p=0}^{N_t-1} \int_{K_p} \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I + c \sum_{p=0}^{N_t-1} \int_{K_p} \varphi_J \varphi_I \\ B_I^h &= \sum_{p=0}^{N_t-1} \int_{K_p} f(x) \varphi_I(x) dx. \end{aligned}$$

Pour deux sommets  $\mathbf{s}_I$  et  $\mathbf{s}_J$  n'appartenant pas un même triangle, alors  $\text{supp}(\varphi_I) \cap \text{supp}(\varphi_J) = \emptyset$  et donc le coefficient  $A_{I,J}^h$  est nul ! En moyenne de manière empirique, un nœud (ou sommet) est connecté au maximum à 6 à 8 autres nœuds (en 2D). Une conséquence directe est que **la matrice  $A^h$  est creuse**, c'est-à-dire qu'un nombre important de ses coefficients sont nuls. Une stratégie de stockage creux est donc à utiliser, ce que nous verrons plus loin.

Nous devons bien entendu construire cette matrice : calculer chacun de ses coefficients et les stocker. Un algorithme naïf ou brut-force (mais naturel) pour calculer chaque coefficient est de boucler sur les sommets et de remplir la matrice au fur et à mesure, c'est-à-dire de remplir les coefficients les uns après les autres. Il est présenté dans l'Algorithm 2.

Il est à noter que la boucle sur les triangles pourraient être simplifiée en ne bouclant que sur les triangles ayant pour sommet  $\mathbf{s}_I$  et  $\mathbf{s}_J$ . Cependant, cet algorithme a tout de même un coût en  $O(N_s^2)$  ce qui est trop important pour être utilisable en pratique.

---

**Algorithm 1** “Brut-force”

---

```

for  $I = 0 : N_s - 1$  do
  for  $J = 0 : N_s - 1$  do
     $A_{I,J}^h = 0$ 
    for  $p = 0 : N_t - 1$  do
       $A_{I,J}^h += \int_{K_p} \nabla \varphi_J(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{K_p} \varphi_J(\mathbf{x}) \varphi_I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ 
    end for
  end for
   $B_I^h = 0$ 
  for  $p = 0 : N_t - 1$  do
     $B_I^h += \int_{K_p} f(\mathbf{x}) \varphi_I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ 
  end for
end for

```

---

### 2.2.2 Algorithme d'assemblage

Une autre manière de procéder, que l'on appelle **assemblage**, se base sur une boucle sur les triangles plutôt que sur les sommets. Le principe est de parcourir les triangles et de calculer des **contributions élémentaires**, qui vont s'ajouter petit à petit dans la matrice  $A^h$ . Reprenons

l'expression du coefficient  $A_{I,J}^h$ :

$$A_{I,J}^h = \sum_{p=0}^{N_t-1} \underbrace{\int_{K_p} \nabla \varphi_J \cdot \nabla \varphi_I}_{\text{Contrib. élémentaire}} + c \sum_{p=0}^{N_t-1} \underbrace{\int_{K_p} \varphi_J \varphi_I}_{\text{Contrib. élémentaire}}$$

Introduisons  $a_p(\cdot, \cdot)$  la famille de forme bilinéaire suivante, pour  $p = 0, \dots, N_t - 1$  :

$$a_p(\varphi_J, \varphi_I) = \int_{K_p} \nabla \varphi_J(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi_I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + c \int_{K_p} \varphi_J(\mathbf{x}) \varphi_I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Ensuite, nous réécrivons la matrice  $A^h$  sous la forme suivante

$$A^h = \sum_{I=0}^{N_s-1} \sum_{j=0}^{N_s-1} a(\varphi_J, \varphi_I) \mathbf{e}_I^T \mathbf{e}_J,$$

où  $\mathbf{e}_I$  est le vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{N_s}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{I=0}^{N_s-1} \sum_{J=0}^{N_s-1} a(\varphi_J, \varphi_I) \mathbf{e}_I^T \mathbf{e}_J \\ &= \sum_{I=0}^{N_s-1} \sum_{J=0}^{N_s-1} \sum_{p=0}^{N_t-1} a_p(\varphi_J, \varphi_I) \mathbf{e}_I^T \mathbf{e}_J \\ &= \sum_{p=0}^{N_t-1} \sum_{I=0}^{N_s-1} \sum_{J=0}^{N_s-1} a_p(\varphi_J, \varphi_I) \mathbf{e}_I^T \mathbf{e}_J \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous remarquons maintenant que  $a_p(\varphi_J, \varphi_I)$  est nul dès lors que  $\mathbf{s}_I$  ou  $\mathbf{s}_J$  ne sont pas des sommets de  $K_p$ . Finalement, la somme sur tous les sommets du maillage se réduit alors une somme sur les 3 sommets du triangle  $K_p$  considéré.

Nous comprenons que nous devons maintenant travailler localement dans chaque triangle. Pour cela, nous avons besoin d'introduire une **numérotation locale** de chaque sommet une fonction **loc2glob** permettant de basculer du local vers le global une fonction telle que, pour  $p = 0, \dots, N_t - 1$  et  $i = 0, 1, 2$  :

$$\text{loc2glob}(p, i) = I \iff \mathbf{s}_i^{K_p} = \mathbf{s}_I$$

Ainsi, pour un triangle  $K_p$ , ses sommets sont numérotés  $[\mathbf{s}_0^{K_p}, \mathbf{s}_1^{K_p}, \mathbf{s}_2^{K_p}]$  en numérotation locale ou  $[\mathbf{s}_{\text{loc2glob}(0,p)}, \mathbf{s}_{\text{loc2glob}(1,p)}, \mathbf{s}_{\text{loc2glob}(2,p)}]$  en numérotation globale, comme le montre la figure ???. Nous distinguerons la numérotation globale par des lettres capitales ( $I, J$ ) et la numérotation locale par des minuscules ( $i, j$ ). Nous introduisons aussi les fonctions de forme locales :

$$\varphi_i^p = \varphi_{\text{loc2glob}(p,i)}|_{K_p}.$$

Utilisons ces nouvelles notations dans l'équation 2.2, en ramenant la somme sur les sommets à uniquement les sommets du triangle considéré :

$$A = \sum_{p=0}^{N_t-1} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_p(\varphi_j^p, \varphi_i^p) \mathbf{e}_{\text{loc2glob}(i,p)}^T \mathbf{e}_{\text{loc2glob}(j,p)}$$

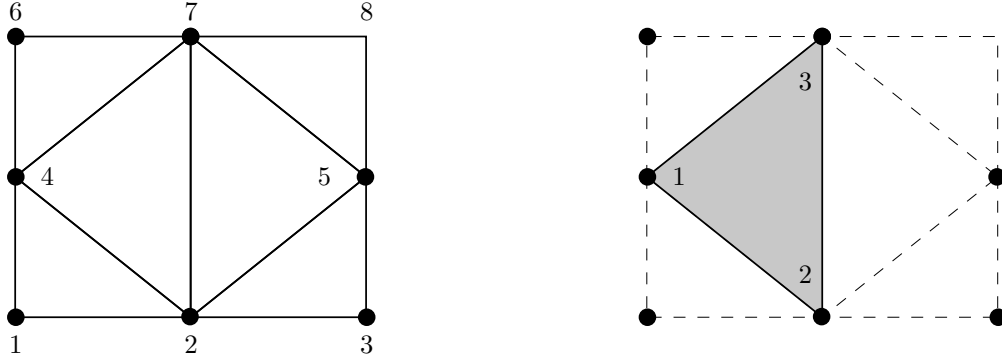


Figure 2.1: Numérotation locale et globale

**Algorithm 2** Assemblage

---

```

 $A^h = 0$ 
 $B^h = 0$ 
for  $p = 0 : N_t - 1$  do
  for  $i = 0 : 2$  do
     $I = \text{loc2glob}(p, i)$ 
    for  $j = 0 : 2$  do
       $J = \text{loc2glob}(p, j)$ 
       $A_{I,J}^h += a_p(\varphi_j^p, \varphi_i^p)$ 
    end for
     $B_I^h += \ell_p(\varphi_i^p)$ 
  end for
end for

```

---

L'algorithme d'assemblage est alors complet ! Une version pseudo-code est présentée par l'Algorithme 2. Sa complexité est en  $O(N_t) \ll O(N_s^2)$ . Comme le premier algorithme 2, il possède en plus l'avantage d'être parallélisable.

**Remarque 2.1.** Pour mieux comprendre la différence entre numérotation locale et globale, une application est disponible en ligne : [https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/course/fem/implementation\\_maillage/](https://bthierry.pages.math.cnrs.fr/course/fem/implementation_maillage/)

**Remarque 2.2.** Cet algorithme n'est pas encore utilisable, nous devons calculer la valeur de  $a_p(\varphi_j^p, \varphi_i^p)$  et  $\ell_p(\varphi_i^p)$ . De plus, il manque encore les conditions de Dirichlet.

## 2.3 Calcul des Matrices Élémentaires

### 2.3.1 Matrices de Masse et de Rigidité

La matrice  $A^h$  peut être décomposée en deux matrices : la masse et la rigidité :

$$A^h = D + cM,$$

- $M$  : la matrice de masse (ou de volume), de coefficient

$$M_{I,J} = \int_{\Omega} \varphi_J \varphi_I.$$

- $D$  : la matrice de rigidité, de coefficient

$$D(I, J) = \int_{\omega} \nabla \varphi_J \nabla \varphi_I.$$

Dans la littérature, cette matrice est souvent notée  $K$ , mais nous l'appelons  $D$  pour éviter toute confusion avec les triangles, nommés  $K$  également.

**Remarque 2.3.** La matrice de masse  $M$  représente l'opérateur Identité dans la base des fonctions de forme (qui n'est pas orthogonale ni normée !). Pour s'en convaincre, il faut regarder "l'équation"  $u = f$  (ou  $Id.u = f$ ) et appliquer la méthode des éléments finis pour obtenir la "formulation faible"

$$\forall v_h, \quad \int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h,$$

qui aboutit au système linéaire suivant :  $MU^h = B^h$ . L'opérateur Identité, appliqué à  $u$ , est bien discrétisé en  $M$ .

Les **contributions élémentaires**, c'est à dire les quantités  $a_p(\varphi_j^p, \varphi_i^p)$  et  $\ell_p(\varphi_i^p)$  peuvent elles aussi être décomposées en deux parties. Pour rappel, les sommets d'un triangle  $K_p$  seront notés  $[s_0^{K_p}, s_1^{K_p}, s_2^{K_p}]$  et ordonnés dans le sens trigonométrique. Nous noterons  $s_i^{K_p} = (x_i^{K_p}, y_i^{K_p})$  et  $\varphi_j^p$  une fonction de forme du triangle  $K_p$  sans la supposer linéaire. Nous notons  $M_p^e$  et  $D_p^e$  les matrices de masse et de rigidité élémentaire du triangle  $K_p$ , de coefficient respectif  $M_p^e(i, j)$  et  $D_p^e(i, j)$  donné par

$$M_p^e(i, j) = \int_{K_p} \varphi_j^p \varphi_i^p \quad \text{et} \quad D_p^e(i, j) = \int_{K_p} \nabla \varphi_j^p \nabla \varphi_i^p.$$

### 2.3.2 Matrice de masse élémentaire

Nous nous focalisons sur la matrice de masse, le principe est similaire pour la matrice  $K$  et est détaillé juste après.

Pour construire la matrice  $M$ , nous avons vu qu'il était préférable de parcourir les triangles plutôt que les sommets, autrement dit, plutôt que de calculer  $M_{I,J}$  directement, mieux vaut calculer, pour tout triangle  $p$ , la **contribution élémentaire**  $M_p^e(i, j)$  pour  $i, j = 1, 2, 3$ , définie par :

$$M_p^e(i, j) = \int_{K_p} \varphi_j^p(\mathbf{x}) \overline{\varphi_i^p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Chaque contribution élémentaire  $M_p^e(i, j)$  est ensuite ajoutée à  $M_{I,J}$ , avec  $I = \text{loc2glob}(p, i)$  et  $J = \text{loc2glob}(p, j)$ .

Les coefficients  $M_p^e(i, j)$ , pour  $i, j = 1, 2, 3$  peuvent être regroupés pour former la **matrice de masse élémentaire**  $M_p^e$  de taille  $3 \times 3$  et du triangle  $K_p$ .

### Triangle de référence

Pour calculer la quantité élémentaire (2.3), plaçons nous tout d'abord dans un triangle “simple”  $\widehat{K}$ , appelé **triangle de référence**. Celui-ci est souvent choisi comme étant le triangle rectangle de sommets  $\widehat{\mathbf{s}}_0 = (0, 0)$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_1 = (1, 0)$  et  $\widehat{\mathbf{s}}_2 = (0, 1)$ , ordonnés dans le sens trigonométrique. Pour différencier ce triangle d'un triangle du maillage, nous lui adjoignons un repère  $(\xi, \eta)$  dit **repère paramétrique**.

Plutôt que d'indicer par  $p$ , nous notons  $\widehat{\varphi}_i \in \mathbb{P}^1(\widehat{K})$  les trois fonctions de forme associées aux sommets  $\widehat{\mathbf{s}}_i$ , pour  $i = 0, 1, 2$ , définies par  $\widehat{\varphi}_i(\widehat{\mathbf{s}}_j) = \delta_{ij}$ . Ces fonctions  $\widehat{\varphi}_i$  étant des polynômes de degré un, nous pouvons même les calculer analytiquement :

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}_0(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ \widehat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \xi \\ \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \eta \end{cases}$$

**Lemme 2.4.** Dans le triangle  $\widehat{K}$ , la matrice de masse élémentaire  $\widehat{M}^e = (\widehat{M}^e_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2}$  de coefficient

$$\widehat{M}^e_{i,j} = \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_i(\xi) \widehat{\varphi}_j(\eta) d(\xi, \eta),$$

est donnée par

$$\widehat{M}^e = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Proof.* Prenons tout d'abord le cas  $i = j = 1$ , soit  $\widehat{\varphi}_i = \widehat{\varphi}_j = \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \xi$ . Dans ce cas :

$$\int_{\widehat{K}} \xi^2 d(\xi, \eta) = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi^2 d\eta d\xi = \int_0^1 (1-\xi) \xi^2 d\xi = \left[ \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Les calculs sont similaires pour  $i = 0$  et  $i = 2$ . Prenons maintenant  $i \neq j$ , par exemple  $i = 2$  et  $j = 1$  :

$$\int_{\widehat{K}} \xi \eta d(\xi, \eta) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-\xi} \eta d\eta \right) \xi d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi d\xi = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{24}.$$

Les calculs sont similaires pour les autres combinaisons. □

### Triangle quelconque

**Changement de coordonnées.** Soit un triangle  $K_p$  du maillage et supposons que nous disposions d'une transformation bijective et linéaire  $T^{K_p}$  permettant de transformer le triangle de référence  $\widehat{K}$  en  $K_p$  avec en plus  $T^{K_p}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \mathbf{s}_i^{K_p}$ . Cette fonction  $T^{K_p}$  transforme les **coordonnées paramétriques**  $(\xi, \eta)$  en **coordonnées physiques**  $(x, y)$  avec  $(x, y) = T^{K_p}(\xi, \eta) \in K_p$ , et conserve “l'ordre des sommets”.

Nous avons  $\varphi_j^p(x, y) = \varphi_j^p(T^{K_p}(\xi, \eta))$  avec  $\varphi_j^p \circ T^{K_p} \in \mathbb{P}^1(\widehat{K})$  et  $\varphi_j^p \circ T^{K_p}(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \delta_{ij}$ . Par unicité, nous avons  $\varphi_j^p \circ T^{K_p} = \widehat{\varphi}_j$ .

En notant  $J_p$  la matrice Jacobienne de  $T^{K_p}$ , alors la quantité  $M_p^e(i, j)$  peut alors s'écrire, par changement de variables :

$$M_p^e(i, j) = \int_{K_p} \varphi_j^p(x, y) \overline{\varphi_i^p(x, y)} d(x, y) = |\det(J_p)| \underbrace{\int_{\hat{K}} \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta) \widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) d(\xi, \eta)}_{\text{Déjà calculé !}}$$

Ainsi, pour calculer la matrice élémentaire d'un triangle  $K_p$  quelconque, nous n'avons besoin que du déterminant de la Jacobienne :  $\det(J_p)$ .

**Expression et Jacobienne de la transformation.** La transformation que nous cherchons,  $T^{K_p}$ , est linéaire et “conserve” les sommets et leur ordre. Pour obtenir son expression, nous construisons des fonctions **d'interpolation géométrique**,  $(\widehat{\psi}_i)_{0 \leq i \leq 2}$ , linéaires sur  $\hat{K}$  et telles que :

$$\forall i, j = 0, 1, 2, \quad \widehat{\psi}_i(\widehat{\mathbf{s}}_j) = \delta_{ij}.$$

La transformation aura alors pour expression :

$$\begin{aligned} T^{K_p}: \quad \hat{K} &\rightarrow K_p \\ (\xi, \eta) &\mapsto T^{K_p}(\xi, \eta) = (x, y) = \widehat{\psi}_0(\xi, \eta) \mathbf{s}_0^{K_p} + \widehat{\psi}_1(\xi, \eta) \mathbf{s}_1^{K_p} + \widehat{\psi}_2(\xi, \eta) \mathbf{s}_2^{K_p}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, les fonctions d'interpolation géométrique  $\widehat{\psi}_i$  sont ici identiques aux fonctions de forme  $\widehat{\varphi}_i$  :

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_0(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ \widehat{\psi}_1(\xi, \eta) = \xi \\ \widehat{\psi}_2(\xi, \eta) = \eta \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de la transformation est alors donnée par

$$J_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{K_p} - x_0^{K_p} & x_2^{K_p} - x_0^{K_p} \\ y_1^{K_p} - y_0^{K_p} & y_2^{K_p} - y_0^{K_p} \end{pmatrix},$$

et son déterminant vaut

$$\begin{aligned} |\det(J_p)| &= \left| (x_1^{K_p} - x_0^{K_p})(y_2^{K_p} - y_0^{K_p}) - (x_2^{K_p} - x_0^{K_p})(y_1^{K_p} - y_0^{K_p}) \right| \\ &= 2|K_p| \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que le déterminant est non nul puisque le triangle n'est pas dégénéré : la transformation  $T^{K_p}$  est bien inversible.

**Remarque 2.5.** Quand  $\widehat{\psi}_i = \widehat{\varphi}_i$ , nous parlons d'éléments finis **isoparamétriques**. Il convient de retenir que ce choix n'est pas obligatoire et les fonctions  $\widehat{\psi}_i$  et  $\widehat{\varphi}_i$  sont **indépendantes**. En particulier, pour obtenir des éléments courbes, les fonctions  $\widehat{\psi}_i$  pourraient être quadratiques par exemple.



**Expression finale de la matrice élémentaire**

**Lemme 2.6.** *La matrice de masse élémentaire  $M_p^e = (M_p^e(i, j))_{0 \leq i, j \leq 2}$  du triangle  $K_p$  a pour expression*

$$M_p^e = \frac{|K_p|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.3.3 Matrice de rigidité élémentaire**

Nous appliquons la même procédure pour la matrice de rigidité  $D$ , autrement dit, nous calculons les matrices de rigidité élémentaire  $D_p^e$  définies par

$$D_p^e(i, j) = \int_{K_p} \nabla \varphi_j^p(x, y) \cdot \overline{\nabla \varphi_i^p(x, y)} \, d(x, y).$$

**Triangle de référence**

**Lemme 2.7.** *Dans le triangle de référence  $\widehat{K}$ , la matrice de rigidité élémentaire  $\widehat{K} = (\widehat{D}_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$  de coefficient*

$$\widehat{D}_{i,j} = \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) \, d(\xi, \eta),$$

à pour expression

$$\widehat{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Proof.* Les gradients des fonctions de forme  $\widehat{\varphi}_j$  sont donnés par :

$$\nabla_{\xi, \eta} \widehat{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\xi, \eta} \widehat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\xi, \eta} \widehat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant symétrique, nous pouvons limiter les calculs à la partie triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{1,1} &= \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_1 \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_1} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} (-1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \, d(\xi, \eta) = 2 \int_{\widehat{K}} d(\xi, \eta) &= 1 \\ \widehat{D}_{2,2} &= \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_2 \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_2} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} d(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} = \widehat{D}_{3,3} \\ \widehat{D}_{1,2} &= \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_1 \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_2} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} (-1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, d(\xi, \eta) = - \int_{\widehat{K}} d(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \\ \widehat{D}_{1,3} &= \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_1 \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_3} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} (-1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, d(\xi, \eta) = - \int_{\widehat{K}} d(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \\ \widehat{D}_{2,3} &= \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{\varphi}_2 \cdot \overline{\nabla \widehat{\varphi}_3} \, d(\xi, \eta) = \int_{\widehat{K}} (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, d(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned}$$

□

### Triangle quelconque

Pour calculer les dérivées partielles selon  $x$  et  $y$  de  $\widehat{\varphi}_j$ , nous utilisons la dérivée de fonction composée :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j^p}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j^p}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

En notant  $B_p$  la matrice de passage, nous avons

$$\nabla_{x,y} \varphi_j^p(x, y) = B_p \nabla_{\xi,\eta} \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta).$$

L'opération "inverse" nous donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j^p}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j^p}{\partial y} \end{pmatrix} \iff \nabla_{\xi,\eta} \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta) = (J_p)^T \nabla_{x,y} \varphi_j^p(x, y).$$

Nous en déduisons que  $B_p = (J_p^T)^{-1}$ , en particulier, dans le cas d'une transformation linéaire de triangle, nous obtenons :

$$B_p = \frac{1}{\det(J_p)} \begin{pmatrix} y_3^{K_p} - y_1^{K_p} & y_1^{K_p} - y_2^{K_p} \\ x_1^{K_p} - x_3^{K_p} & x_2^{K_p} - x_1^{K_p} \end{pmatrix}.$$

Au final, comme  $X \cdot Y = X^T Y$ , nous obtenons

$$\int_{K_p} (\nabla \varphi_j^p)^T \overline{\nabla \varphi_i^p} d(x, y) = |\det(J_p)| \int_{\widehat{K}} (\nabla \widehat{\varphi}_j)^T (B_p^T \overline{B_p}) \overline{\nabla \widehat{\varphi}_i} d(\xi, \eta). \quad (2.4)$$

La matrice  $B_p$  étant réelle, nous pouvons supprimer la conjugaison portant sur  $B_p$ .

**Lemme 2.8.** *Les coefficients a matrice de rigidité élémentaire  $D_p^e = (D_p^e(i, j))_{1 \leq i, j \leq 3}$  sont obtenus pas la relation suivante*

$$D_p^e(i, j) = \int_{K_p} \nabla \varphi_j^p(x, y) \cdot \overline{\nabla \varphi_i^p(x, y)} d(x, y), \quad (2.5)$$

$$= |K_p| (\nabla \widehat{\varphi}_j)^T (B_p^T \overline{B_p}) \overline{\nabla \widehat{\varphi}_i}. \quad (2.6)$$

*Proof.* Pour les éléments finis  $\mathbb{P}^1$ , les gradients  $\nabla \widehat{\varphi}_j$  sont constants et peuvent être sortis de l'intégrale. De plus, comme  $|\det(J_p)| = 2 |K_p|$  et  $|\widehat{K}| = \frac{1}{2}$ , nous avons

$$\int_{K_p} \nabla \varphi_j^p \cdot \overline{\nabla \varphi_i^p} d(x, y) = |K_p| (\nabla \widehat{\varphi}_j)^T (B_p^T \overline{B_p}) \overline{\nabla \widehat{\varphi}_i}.$$

□

### 2.3.4 Quadratures

#### Sur un triangle

Étudions maintenant les termes du membre de droite comme

$$\int_{K_p} f(\mathbf{x}) \overline{\varphi_i^p(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

Sauf pour certaines fonctions  $f$  particulières, nous ne pourrions certainement pas calculer explicitement ce terme, nous devons approcher cette intégrale à l'aide d'une formule de quadrature en passant à l'éléments de référence :

$$\begin{aligned} \int_{K_p} f(\mathbf{x}) \overline{\varphi_i^p(\mathbf{x})} d\mathbf{x} &= |\det(J_p)| \int_{\widehat{K}} f(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \overline{\widehat{\varphi}_i(\xi, \eta)} d(\xi, \eta) \\ &\simeq |\det(J_p)| \sum_{m=1}^M \omega_m f(\mathbf{x}(\xi_m, \eta_m)) \overline{\widehat{\varphi}(\xi_m, \eta_m)}. \end{aligned}$$

Les points  $(\xi_m, \eta_m)$  sont appelés **points de quadrature** (parfois **points de Gauss**, même si la règle de quadrature utilisée n'est pas de Gauss) et les quantités  $\omega_m \in \mathbb{R}$  les **pooids** associés. Notons que le point  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}(\xi_m, \eta_m)$  s'obtient par l'expression vue précédemment :

$$\mathbf{x}_m = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_i^{K_p} \widehat{\psi}_i(\xi_m, \eta_m).$$

Nous présentons ici deux règles de quadrature pour l'intégrale  $\int_{\widehat{K}} \widehat{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  sur  $\widehat{K}$  d'une fonction  $g$  quelconque. La première règle est exacte pour des polynômes de degré 1, la deuxième pour des polynômes de degré 2 (règles de Hammer) :

$\xi_m$	$\eta_m$	$\omega_m$	Degré de précision
1/3	1/3	1/6	1
1/6	1/6	1/6	2
4/6	1/6	1/6	
1/6	4/6	1/6	

#### Sur une arête

Voici quelques formules de quadrature sur un segment  $[\mathbf{s}_0^{K_p}, \mathbf{s}_1^{K_p}]$  avec le degré de précision, *i.e.* la formule est exacte si  $g$  est un polynôme de degré égal ou inférieur. Nous notons  $|\sigma| = \|\mathbf{s}_0^{K_p} - \mathbf{s}_1^{K_p}\|$  la taille du segment et  $\mathbf{s}_{01}^{K_p} = \frac{\mathbf{s}_0^{K_p} + \mathbf{s}_1^{K_p}}{2}$  le milieu du segment:

Nom	Degré de précision	$\int_{\mathbf{s}_0^{K_p}}^{\mathbf{s}_1^{K_p}} g(x) dx \simeq \dots$
Point du milieu	1	$g(\mathbf{s}_{01}^{K_p})$
Trapeze	1	$\frac{ \sigma }{2} (g(\mathbf{s}_0^{K_p}) + g(\mathbf{s}_1^{K_p}))$
1/3 Simpson	2	$\frac{ \sigma }{6} (g(\mathbf{s}_0^{K_p}) + 4g(\mathbf{s}_{01}^{K_p}) + g(\mathbf{s}_1^{K_p}))$

**Remarque 2.9.** *Les formules de quadrature ont évidemment un impact sur la qualité de l'approximation, toutefois, elles jouent un rôle relativement mineur par rapport aux autres approximations (et l'on peut choisir plus de points d'intégration !).*

## 2.4 Convergence

## 2.5 Contrainte de Dirichlet

## 2.6 Stockage creux

### 2.6.1 Format COO

### 2.6.2 Format CSR

## 2.7 Éléments finis P2

### 2.7.1 Local et Global (?)

### 2.7.2 Éléments de référence

### 2.7.3 Convergence

## 2.8 Éléments finis P3

### 2.8.1 Éléments finis P3

### 2.8.2 Condensation Statique

# La Méthode des Éléments Finis : Théorie



Les gens, dit Geralt en détournant la tête, aiment bien inventer des monstres et des monstruosités. Ça leur donne l'impression d'être moins monstrueux eux-mêmes

---

A. Sapkowski - La Saga du Sorcelleur

- 3.1 Formulation abstraite
- 3.2 Existence et Unicité de la solution
- 3.3 Méthode de Galerkin
- 3.4 Convergence