OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS :

MÉTHODE DE COUPE

Hacène Ouzia

MAIN (5 ème année)
Sorbonne Université

2020

TABLE DES MATIÈRES

AGENDA

Instance

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x - 2y \\
s.c. & \\
 & -2x + 2y \leq 3 \quad +x_3 \\
 & 2x + 2y \leq 9 \quad +x_4 \\
 & 9x - 4y \leq 21 \quad +x_5 \\
 & x, y \in \mathbb{N}.
\end{array}
\tag{1}
$$

Question 1

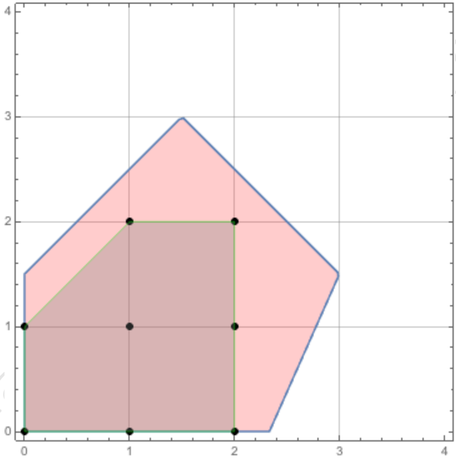

FIGURE – Ensembles P et Ω.

Question 2 - I

L'ensemble P_0 est définit par :

$$P_0 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : -2x + 2y \leq 3, 2x + 2y \leq 9, 9x - 4y \leq 2\right\}. \qquad (2)$$

Voici les itérations de la méthode simplexe :

1. Tableau initial :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-1	-2	0	0	0
x_3	3	-2	2	1	0	0
x_4	9	2	2	0	1	0
x_5	21	9	-4	0	0	1

Le point extrême initial est : $(0, 0)$ de valeur 0.

2. Itération 1 :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	3	-3	0	1	0	0
x_2	3/2	-1	1	1/2	0	0
x_4	6	4	0	-1	1	0
x_5	27	5	0	2	0	1

Le nouveau point extrême est : $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ de valeur -3.

3. Itération 2 :

POLYTECH SORBONNE

Question 2 - II

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	15/2	0	0	1/4	3/4	0
x_2	3	0	1	1/4	1/4	0
x_1	3/2	1	0	-1/4	1/4	0
x_5	39/2	0	0	13/4	-5/4	1

Le point extrême optimal est : $\hat{x}_1 = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ de valeur $-\frac{15}{2}$.

Question 4

La nouvelle coupe s'écrit donc :

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Pour exprimer celle-ci dans l'espace des variables (x, y) il suffit de se référer aux équations initiales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} -2x + 2y + x_3 &= 3, \\ 2x + 2y + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

D'où la contrainte :

$$y \leq \frac{11}{4}.$$

Question 4

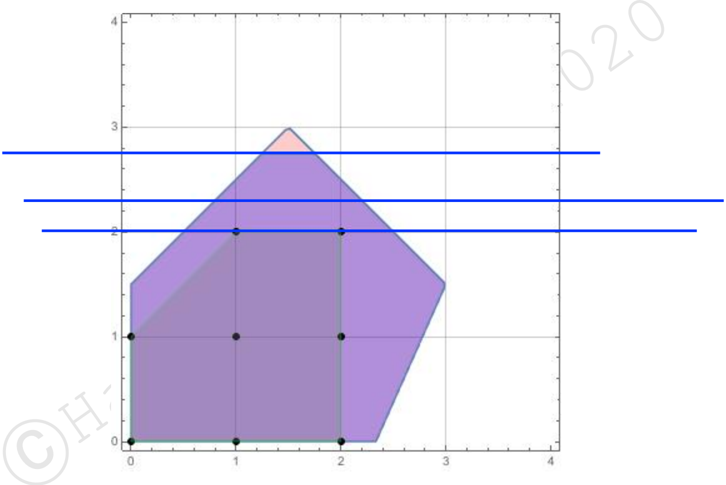

FIGURE – Région de la nouvelle relaxation de Ω.

AGENDA

Questions a,b et c

Le tableaux simplexe optimal est le suivant :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	15/2	0	0	1/4	3/4	0
x_2	3	0	1	1/4	1/4	0
x_1	3/2	1	0	-1/4	1/4	0
x_5	39/2	0	0	13/4	-5/4	1

Question e

La nouvelle coupe de Gomory :

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

D'où la nouvelle relaxation :

$$\begin{array}{ll} \min & -x - 2y \\ s.c. & \\ & \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \\ & (x, y) \in P_0, \end{array}$$

où P_0 est la relaxation continue de P.

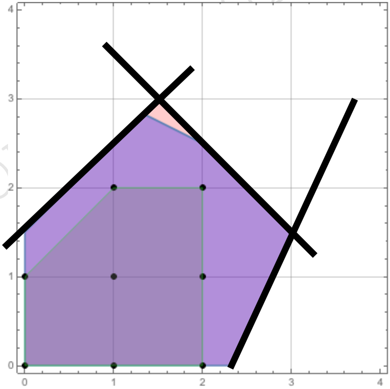

FIGURE – Première coupe de Gomory.

Question e

Comment résoudre le problème suivant ?

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x-2y \\
s.c. & \\
 & -2x+2y \leq 3 \\
 & 2x+2y \leq 9 \\
 & 9x-4y \leq 21 \\
 & \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \\
 & x, y, x_3, x_4 \geq 0.
\end{array}
$$

Question e

Tableau simplexe optimal de la relaxation continue du problème :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	15/2	0	0	1/4	3/4	0
x_2	3	0	1	1/4	1/4	0
x_1	3/2	1	0	-1/4	1/4	0
x_5	39/2	0	0	13/4	-5/4	1

Question e

Tableau simplexe initial pour résoudre la **nouvelle** relaxation continue :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	15/2	0	0	1/4	3/4	0	0
x_2	3	0	1	1/4	1/4	0	0
x_1	3/2	1	0	-1/4	1/4	0	0
x_5	39/2	0	0	13/4	-5/4	1	0
x_6	-1/2	0	0	-1/4	-3/4	0	1

- Notez ce tableau est dual réalisable mais non primal réalisable.
- Colonne entrant en base

$$j \in \mathtt{argmax}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{-1}{4}}, \frac{\frac{3}{4}}{\frac{-3}{4}},\right\}.$$

Question e

Après pivot :

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	7	0	0	0	0	0	1
x_2	5/2	0	1	0	-1/2	0	1
x_1	2	1	0	0	1	0	-1
x_5	13	0	0	0	-11	1	13
x_3	2	0	0	1	3	0	-4

✍ On peut générer, à partir de la première ligne, la coupe de Gomory suivante :

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Qui s'écrit dans l'espace des variables (x, y) comme suit :

$$x + y \leq 4.$$

Partie B : Question e

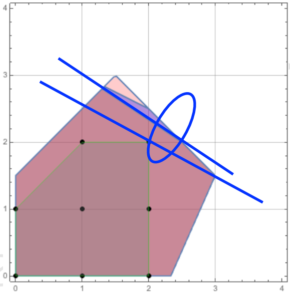

FIGURE – Deuxième coupe de Gomory.

Question 1

Considérant une ligne k du dernier tableau simplexe optimal :

$$x_k + \sum_{j \in \mathcal{N}} y_{kj} x_j = \hat{b}_k, \tag{3}$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des variables hors base. Nous avons :

- Par non négativité des variables hors bas x_j, nous avons :

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in \mathcal{N}} y_{kj} x_j. \tag{4}$$

  D'où :

$$x_k + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j \leq \hat{b}_k.$$

- Par argument d'intégrité, nous avons :

$$x_k + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor y_{kj} \rfloor x_j \leq \lfloor \hat{b}_k \rfloor. \tag{5}$$

  En soustrayant de (3) cette dernière inégalité nous obtenons :

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \left(y_{kj} - \lfloor y_{kj} \rfloor \right) x_j \geq \hat{b}_k - \lfloor \hat{b}_k \rfloor. \tag{6}$$

Question 2

Fonction CoupesGomory(Prob)

Entrée : `Prob` :: Problème *! Implémentation du problème à résoudre.*

Sortie : `Xopt` :: Solution optimale *! Implémentation d'une solution.*

```
Début
    Xopt.init() ! Intialisation de la solution.
    Realisable ← Oui
    R ← Prob.relax() ! Extraction de la relaxation continue du
      problème
    Xopt ← resoudre(Q)
    Tant que Xopt.fractionnaire() et Realisable faire
        Coupe ← GomoryGenerer(R) ! Coupe est la coupe générée à
          partir de R
        R.ajouter(Coupe)
        Xopt ← R.simplexeDuale()
        Si R.dualNonBorne() alors Realisable ← Non
    Fin tant que
    return Xopt
Fin
```

AGENDA

Formulation DFJ

La formulation de Dantzig, Fulkerson et Johnson du ATSP est la suivante :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{u \in S, v \notin S : uv \in E} x_{vu} \geq 1, \ \forall S \subsetneq V, \ |S| \geq 2, \\
& x_{uv} \in \{0, 1\}, \ \forall uv \in E.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

✍ Les contraintes :

$$\sum_{u \in S, v \notin S : uv \in E} x_{vu} \geq 1, \ \forall S \subsetneq V, \ |S| \geq 2,$$

sont celles des sous-tours. Pourquoi ?

Relaxation DFJ

La relaxation DFJ est la suivante :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{u \in S, v \notin S : uv \in E} x_{vu} \geq 1, \; \forall S \subsetneq V, \; |S| \geq 2, \\
& x_{uv} \in [0, 1], \; \forall uv \in E.
\end{aligned} \tag{8}$$

☞ Problème d'optimisation linéaire avec un nombre exponentiel de contraintes !

Résoudre la relaxation DFJ

① Ignorer les contraintes de sous-tours :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\ s.c. \quad & \\ & \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\ & \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\ & x_{uv} \in [0,1], \ \forall uv \in E. \end{aligned} \tag{9}$$

② Si une contrainte sous-tour n'est pas satisfaite l'ajouter.

☞ PROBLÈME DE SÉPARATION

Un premier exemple

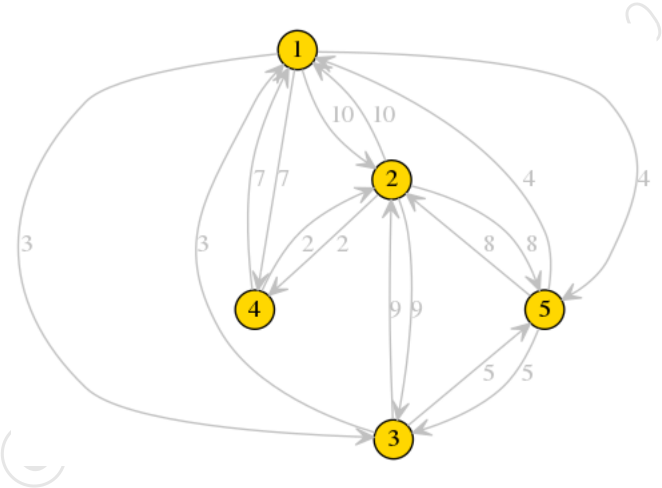

FIGURE – Première instance ATSP.

Exemple 1

$$\min \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

s.c.

$$\sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V,$$

$$\sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V,$$

$$x_{uv} \in [0, 1], \ \forall uv \in E.$$

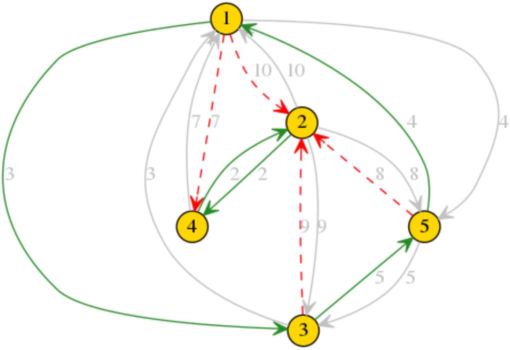

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ initiale.

Exemple 1

$$\min \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

s.c.

$$\sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V,$$
$$\sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V,$$
$$x_{uv} \in [0, 1], \ \forall uv \in E.$$

✍ Il faut prendre au moins un arc rouge ! Donc, ajouter l'inégalité :

$$x_{12} + x_{14} + x_{32} + x_{52} \geq 1.$$

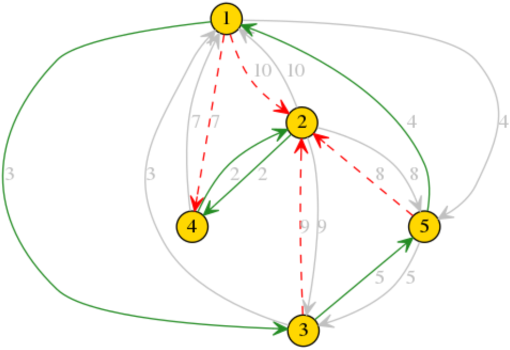

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ initiale.

Exemple 1

$$\min \quad \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

s.c.

$$\sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V,$$
$$\sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V,$$
$$x_{12} + x_{14} + x_{32} + x_{52} \geq 1,$$
$$x_{uv} \in [0, 1], \ \forall uv \in E.$$

✍ Solution optimale !

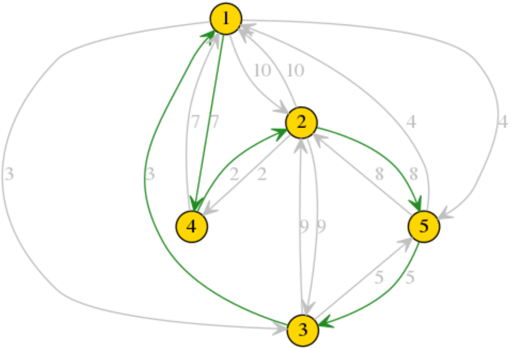

FIGURE – Solution de la nouvelle relaxation DFJ initiale.

Un deuxième exemple

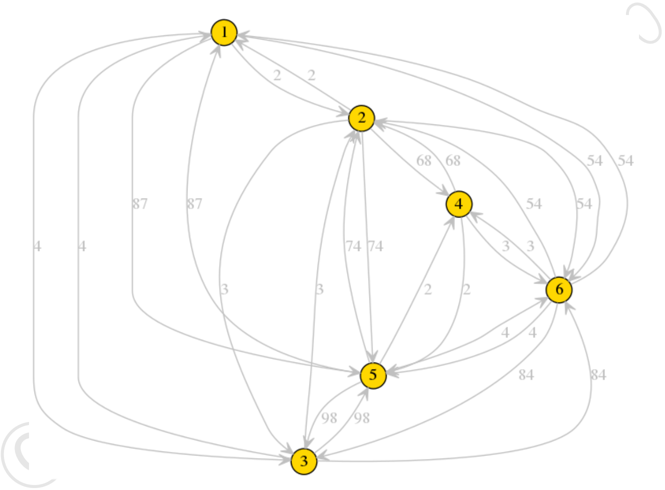

FIGURE – Deuxième instance ATSP.

Exemple 2

$$\min \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

$s.c.$

$$\sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V,$$

$$\sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V,$$

$$x_{uv} \in [0, 1], \ \forall uv \in E.$$

✍ Ajouter l'inégalité :

$$\sum_{uv \in \delta^+(\{1,2,3\})} x_{uv} \geq 1.$$

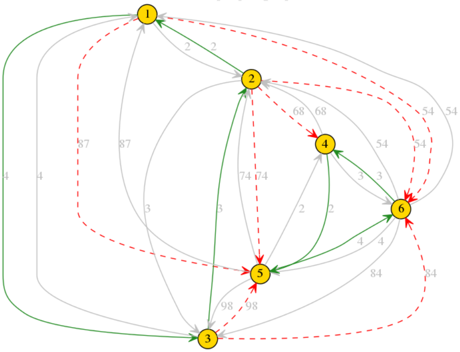

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ initiale.

Exemple 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{uv \in \delta^+(\{1,2,3\})} x_{uv} \geq 1, \\
& x_{uv} \in [0,1], \ \forall uv \in E.
\end{aligned}
$$

✍ Ajouter l'inégalité :

$$\sum_{uv \in \delta^+(\{1,4,5,6\})} x_{uv} \geq 1.$$

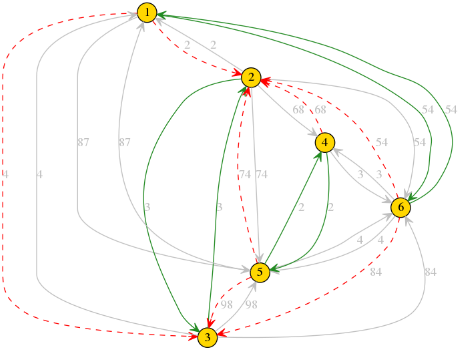

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ.

POLYTECH SORBONNE

Exemple 2

$$\min \quad \sum_{uv\in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

s.c.

$$\sum_{v\in V:uv\in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V,$$

$$\sum_{v\in V:vu\in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V,$$

$$\sum_{uv\in\delta^+(\{1,2,3\})} x_{uv} \geq 1,$$

$$\sum_{uv\in\delta^+(\{1,4,5,6\})} x_{uv} \geq 1,$$

$$x_{uv} \in [0,1], \ \forall uv \in E.$$

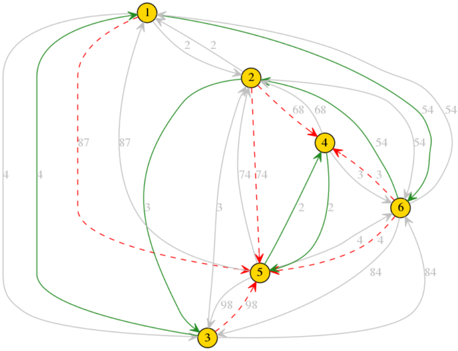

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ.

✍ Ajouter l'inégalité :

$$\sum_{uv\in\delta^+(\{1,2,3,6\})} x_{uv} \geq 1.$$

Exemple 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{uv \in \delta^+(\{1,2,3\})} x_{uv} \geq 1, \\
& \sum_{uv \in \delta^+(\{1,4,5,6\})} x_{uv} \geq 1, \\
& \sum_{uv \in \delta^+(\{1,2,3,6\})} x_{uv} \geq 1, \\
& x_{uv} \in [0,1], \ \forall uv \in E.
\end{aligned}
$$

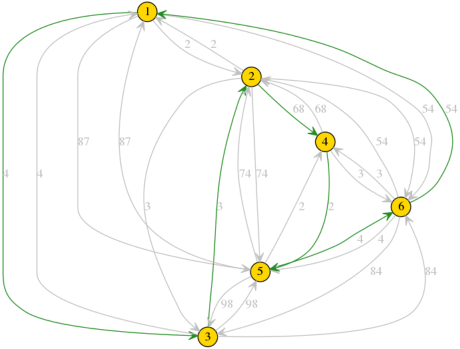

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ.

☞ Encore la solution optimale !
Est-ce toujours le cas ?

Dernier exemple

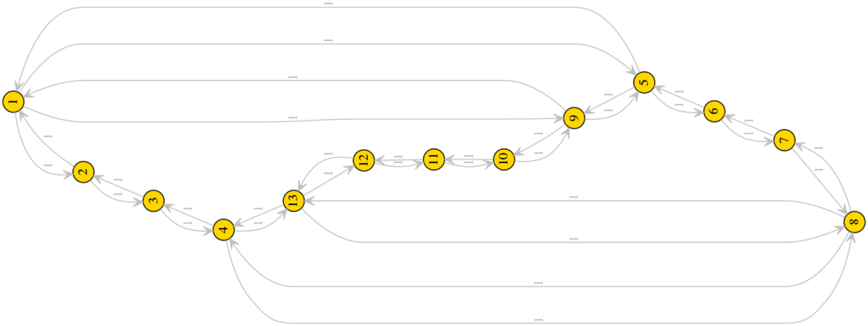

FIGURE – Dernière instance ATSP.

Dernier exemple

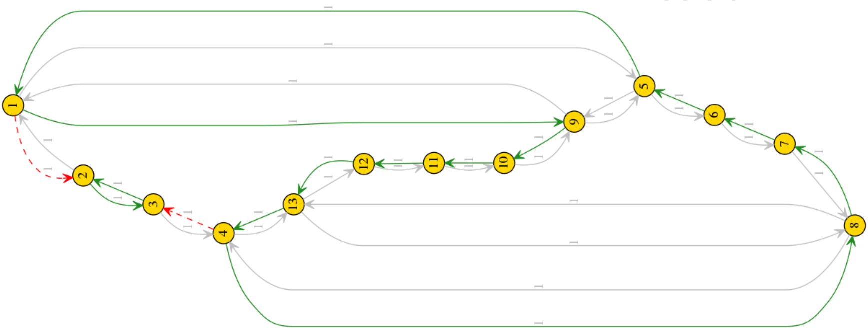

FIGURE – Solution de la relaxation DFJ.

✍ Ajouter l'inégalité :

$$\sum_{uv \in \delta^+(\{1,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\})} x_{uv} \geq 1.$$

Dernier exemple

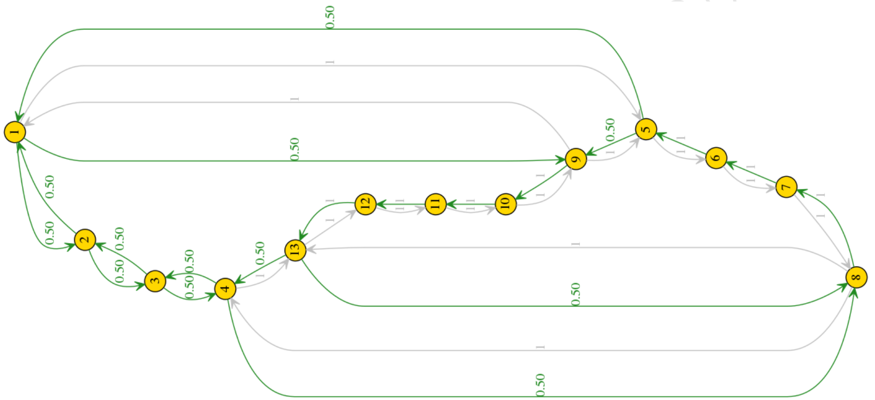

FIGURE – Solution optimale de la relaxation DFJ.

- Toutes les inégalités de sous-tours sont satisfaites.
- La solution n'est pas optimale !

AGENDA

Description linéaire

Considérons le problème :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{uv \in E} \gamma_{uv} x_{uv} \\
s.c. \quad & \\
& \sum_{v \in V : uv \in E} x_{uv} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{v \in V : vu \in E} x_{vu} = 1, \forall u \in V, \\
& \sum_{u \in S, v \notin S : uv \in E} x_{vu} \geq 1, \ \forall S \subsetneq V, \ |S| \geq 2, \\
& x_{uv} \in [0, 1], \ \forall uv \in E.
\end{aligned} \tag{10}$$

☞ Les contraintes définissant l'ensemble des solutions réalisables est une *description linéaire*.

✍ Ce problème est-il polynomial ?

Problème de séparation

DÉFINITION PROBLÈME DE SÉPARATION

Le problème de séparation associé au problème (10) est le suivant : Pour tout vecteur $\hat{x} \in \mathbb{Q}^E$,

- ✍ Est-ce que $\hat{x}$ est solution réalisable du problème (10) ?
- ✍ Sinon, exhiber un sous-ensemble $\hat{S}$ tel que :

$$\hat{x}\left(\delta^+\left(\hat{S}\right)\right) < 1.$$

Théorème de séparation

THÉORÈME GRÖTSCHEL, LOVASZ ET SCHRIJVER

Nous avons l'équivalence suivante :

$$\text{OPTIMISATION} \equiv \text{SÉPARATION}.$$