Optimisation en nombres entiers :

Méthode simplexe graphique pour le problème de flot à coût minimum

Hacène Ouzia

MAIN (5 ème année)
Sorbonne Université

2020

TABLE DES MATIÈRES

AGENDA

Modèle général

Modèle général — Problème sous forme standard

Soit à résoudre :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & c^t x & \\
\text{s.c.} & & \\
 & Ax & = b \\
 & x & \geq 0
\end{array}
\qquad (1)
$$

$x_{ij} \geq 0$

Pour une base B donnée posons :

4,1

1,4

$$A = (B, N)$$
$$c = (c_B, c_N)$$
$$x = (x_B, x_N)$$

Modèle général

Modèle général — Formulation équivalente

Soit à résoudre :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z \\ \text{s.c.} & \\ & \begin{array}{ll} z & = c^t x \\ Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{lllllllll} \text{Min} & z & & & & & & & \\ \text{s.c.} & & & & & & & & \\ & z & + & 0x_B & + & (c_B B^{-1} N - c_N) x_N & = & c_B B^{-1} b \\ & 0z & + & x_B & + & B^{-1} N x_N & = & B^{-1} b \\ & & & x_B & , & x_N & \geq & 0 \end{array}$$

Modèle général

Modèle général — Formulation équivalente

Soit à résoudre :

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z & \\ \text{s.c.} & & \\ & z & = c^t x \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

D'où :

$$\begin{array}{llcccccc} \text{Min} & z & & & & & & \\ \text{s.c.} & & & & & & & \\ & z & + & 0x_B & + & (c_B B^{-1} N - c_N) x_N & = & c_B B^{-1} b \\ & 0z & + & x_B & + & B^{-1} N x_N & = & B^{-1} b \\ & & & x_B & , & x_N & \geq & 0 \end{array}$$

Tableau simplexe

Tableau simplexe

Ci-dessous le *tableau simplexe* associé au problème 1 :

	x_N	x_B	z
	$c_B B^{-1} N - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

où B est la base courante.

Notation

- $\mathcal{N}$ ensemble des indices des variables hors base
- $\zeta = c_B B^{-1} N$, i.e, $\zeta_j = (c_B B^{-1} N)_j, j \in \mathcal{N}$.
- $w = c_B B^{-1}$ multiplicateurs simplexes.

Tableau simplexe

Tableau simplexe

Ci-dessous le *tableau simplexe* associé au problème 1 :

	x_N	x_B	z
	$c_B B^{-1} N - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$

où B est la base courante.

Notation

- $\mathcal{N}$ ensemble des indices des variables hors base
- $\zeta = c_B B^{-1} N$, i.e, $\zeta_j = (c_B B^{-1} N)_j, j \in \mathcal{N}$.
- $w = c_B B^{-1}$ multiplicateurs simplexes.

Critère d'optimalité

Critère d'optimalité

La base courante du tableau simplexe suivant :

	x_N	x_B	z
	$\zeta - c_N$	0	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1}N$	I	$B^{-1}b$

est optimale *si et seulement si*

$$\zeta_j - c_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{N}.$$

Méthode simplexe

Algorithme 1 : Simplexe

Entrée : $\mathcal{B}^0$ :: Base réalisable initialle

Sortie : $\mathcal{B}$ :: Base réalisable optimale

Début
- $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}^0$
- **BaseOptimale** $\leftarrow \mathcal{B}$.`estOptimale`()
- **Tant que non *BaseOptimale* faire**
  - $k \leftarrow \mathcal{B}$.`regleDantzig()`
  - $r \leftarrow \mathcal{B}$.`critereRatio()`
  - $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}$.`pivot`$(k, r)$
  - **BaseOptimale** $\leftarrow \mathcal{B}$.`estOptimale`()
- **Fin tant que**
- **return** $\mathcal{B}$

Fin

Méthode simplexe

■ **RÈGLE DE DANTZIG** La variable hors base x_k entre en base si

$$k = argmax\{\zeta_j - c_j : j \in \mathcal{N}\}$$

■ **RÈGLE DU RATIO MINIMUM** La variable x_r sort de la base si

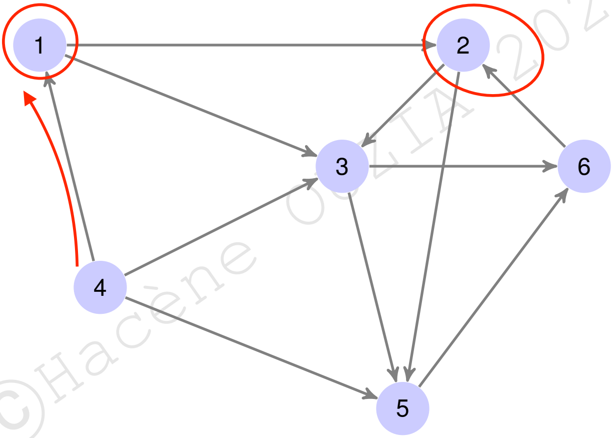
$$r = argmin_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ik}} : (B^{-1}N)_{ik} > 0 \right\},$$

où :

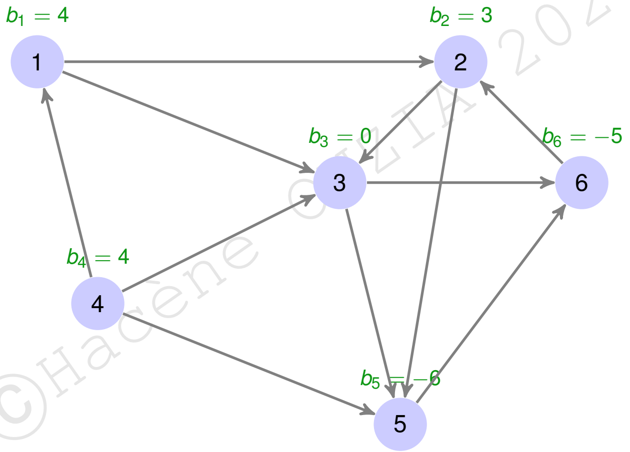
- $B^{-1}b$ est la dernière colonne du tableau simplexe
- $\left(B^{-1}N\right)_k$ est la colonne sous la variable hors base x_k

Exemple

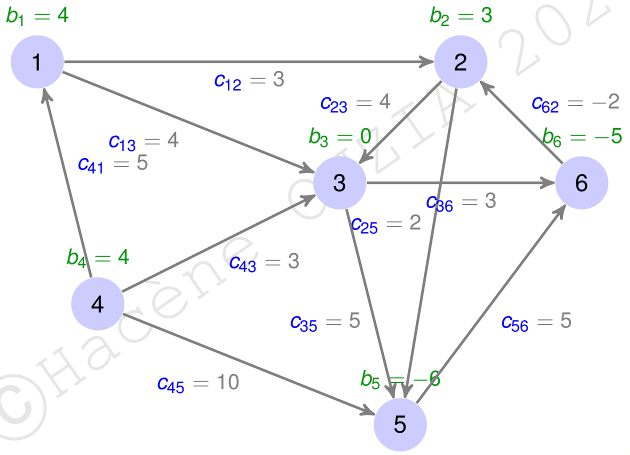
$\forall i \in t_b$



Exemple



Exemple


$b_1 = 4$
$b_2 = 3$
$b_3 = 0$
$b_4 = 4$
$b_5 = -6$
$b_6 = -5$
1
2
3
4
5
6
$c_{12} = 3$
$c_{23} = 4$
$c_{62} = -2$
$c_{13} = 4$
$c_{41} = 5$
$c_{36} = 3$
$c_{25} = 2$
$c_{43} = 3$
$c_{35} = 5$
$c_{56} = 5$
$c_{45} = 10$

Formulation

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \\
& \sum_{j\in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j\in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i, \quad i \in V, \qquad (2) \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

où

- $G = (V, \mathcal{A})$ un graphe orienté,
- b_i demande ($b_i < 0$) ou disponibilité ($b_i > 0$) au noeud $i \in V$,
- c_{ij} coût d'une unité de flux entre le noeud i vers le noeud j.
- x_{ij} flux du noeud i vers le noeud j.

HYPOTHÈSE 1 : le problème est *équilibré*, i.e., $\sum_{i\in V} b_i = 0$

Formulation

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V : (i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \\
& \sum_{j \in V : (i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V : (j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} = b_i, \qquad i \in V, \qquad (2) \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

où

- $G = (V, \mathcal{A})$ un graphe orienté,
- b_i demande ($b_i < 0$) ou disponibilité ($b_i > 0$) au noeud $i \in V$,
- c_{ij} coût d'une unité de flux entre le noeud i vers le noeud j.
- x_{ij} flux du noeud i vers le noeud j.

■ HYPOTHÈSE 1 : le problème est *équilibré*, i.e., $\sum_{i \in V} b_i = 0$

Généralités

Matrice des contraintes

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 23 & 25 & 35 & 36 & 41 & 43 & 45 & 56 & 62 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Nombre de noeuds $m = 6$
- Rang $A \leq m - 1$

Généralités

1, 4

Matrice des contraintes

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 23 & 25 & 35 & 36 & 41 & 43 & 45 & 56 & 62 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- ☞ Nombre de noeuds $m = 6$
- ☞ Rang $A \leq m - 1$

Rang de la matrice des contraintes

Proposition Rang de la matrice des contraintes

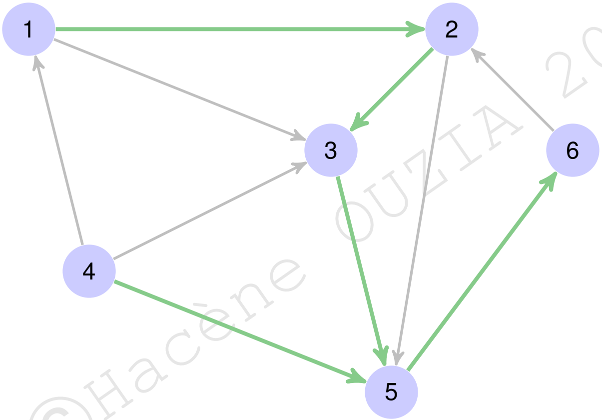
Soit $G = \langle V, \mathcal{A} \rangle$ un graphe orienté. Le rang de la matrice des contraintes du problème du flot à coût minimum dans le graphe G est :

$$|V| - 1.$$

Cas de l'exemple

$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 12 & 23 & 35 & \cancel{45} & 56 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rang de la matrice des contraintes



☞ A quoi correspondrait une base B ?

Le problème dual

PROPOSITION PROBLÈME DUAL Le dual du problème (4) s'écrit :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{i \in V} b_i w_i & \\
\text{s.c.} & & \\
& w_i - w_j \leq c_{ij}, & \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\
& w_i \in \mathbb{R}, & i \in V,
\end{array}
$$

où, w_i est le multiplicateur dual associé à la contrainte (conservation du flot au noeud i) :

$$\sum_{j \in V:(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V:(j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} = b_i.$$

4j1 = 4

Le problème dual

■ PROPOSITION CARACTÉRISATION D'UNE SOLUTION OPTIMALE Soit x un flot réalisable pour le problème (4) et w une solution réalisable pour le problème dual associé.
Le couple (x, w) satisfait les *conditions des écarts complémentaires*, c.-à-d., :

$$x_{ij}\,(w_i - w_j - c_{ij}) = 0,\ \forall\,(i,j) \in \mathcal{A}$$

$$w_i \left(\sum_{j \in V : (i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V : (j,i) \in \mathcal{A}} x_{ji} - b_i \right) = 0,\ \forall i \in V.$$

si et seulement si x est un flot optimal et w une solution duale optimale.

Caractérisation des solutions de base

Théorème Caractérisation des solutions de base

Soit $G = \langle V, \mathcal{A} \rangle$ un graphe orienté possédant une *racine*. La matrice B est une solution de *base* si et seulement si B est la matrice d'incidence *sommets-arcs* d'une arborescence couvrante et enracinée du graphe G.

Cas de l'exemple

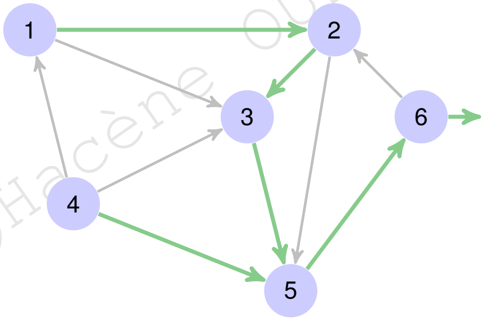
$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 23 & 35 & 45 & 56 & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Caractérisation des solutions de base

Théorème Caractérisation des solutions de base

Soit $G = \langle V, \mathcal{A} \rangle$ un graphe orienté possédant une *racine*. La matrice B est une solution de *base* si et seulement si B est la matrice d'incidence *sommets-arcs* d'une arborescence couvrante et enracinée du graphe G.

Cas de l'exemple



Autres propriétés

■ THÉORÈME TRIANGULARITÉ ET TOTAL-UNIMODULARITÉ

Soit B une solution de base pour le problème (4). Alors la matrice B est *triangulaire* et *totalement unimodulaire*, c.-à-d. :

$$det\left(B_k\right) \in \{0, \pm 1\}\,,\ \forall B_k \text{ sous-matrice carrée de } B.$$

Autres propriétés

PROPOSITION PROPRIÉTÉ D'INTÉGRALITÉ

Si dans (4) le vecteur b est entier alors l'ensemble des solutions réalisables du problème :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} \quad & \\ & \sum_{j\in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j\in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i, \quad i \in V, \qquad (3) \\ & x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

possède des *points extrêmes* entiers.

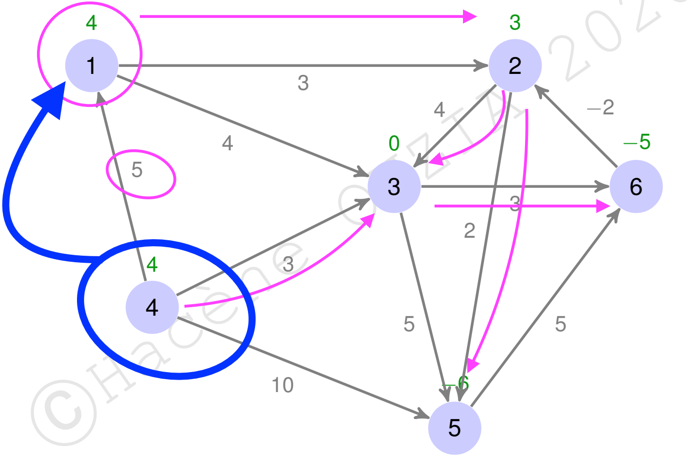
Résumons ...

☞ Nous allons résoudre avec la méthode *simplexe* le problème :

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i,j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \\
& \sum_{j \in V:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j \in V:(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i, \qquad i \in V, \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in \mathcal{A},
\end{aligned} \tag{4}
$$

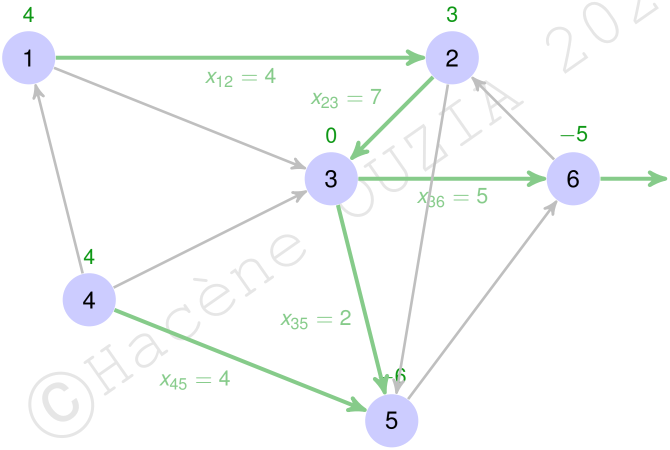
■ HYPOTHÈSE 2 : Nous disposons d'une solution de base réalisable (le problème d'initialisation sera traité en TD).

Exemple



Exemple

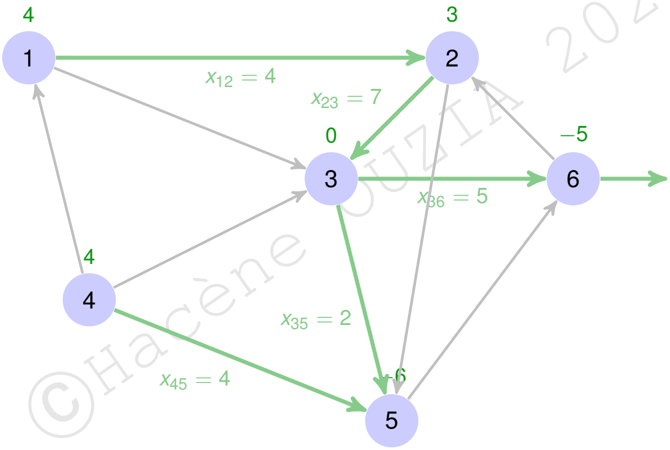
■ ITÉRATION 1 Calculer une solution de base réalisable



☞ Coût 105.

Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer une solution de base réalisable

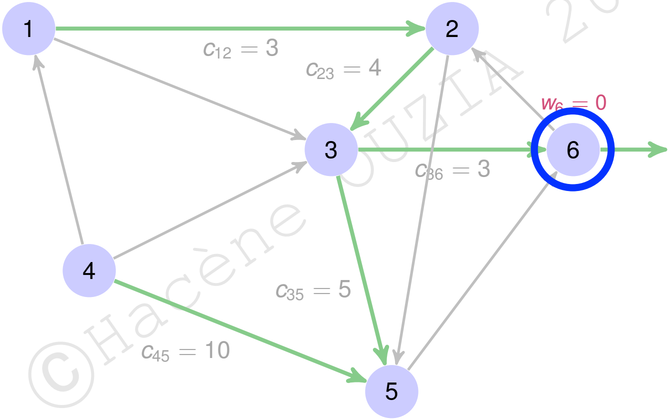


☞ Coût 105.

Exemple

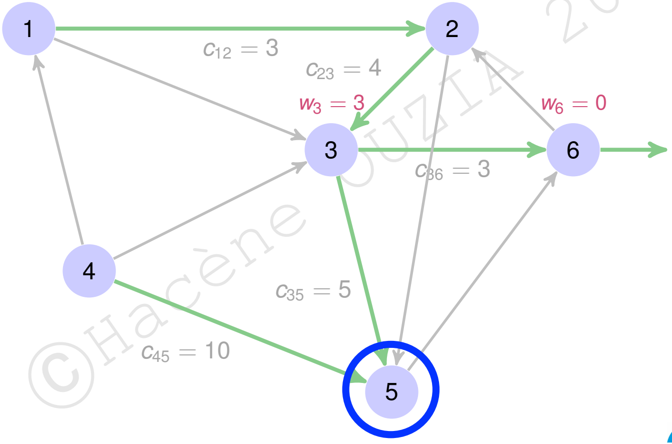
Z_i = w_i - w_j - c_i,j

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



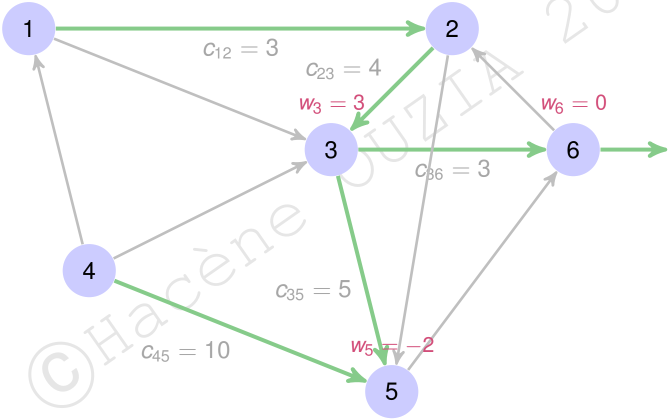
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



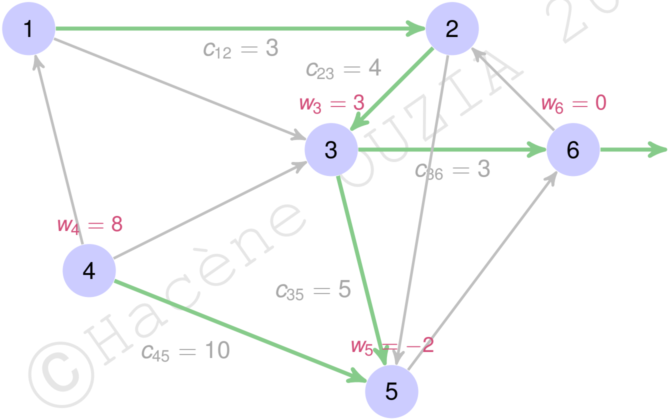
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



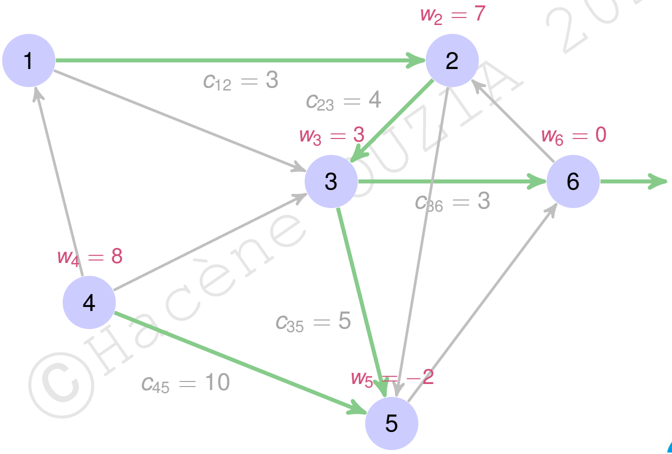
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



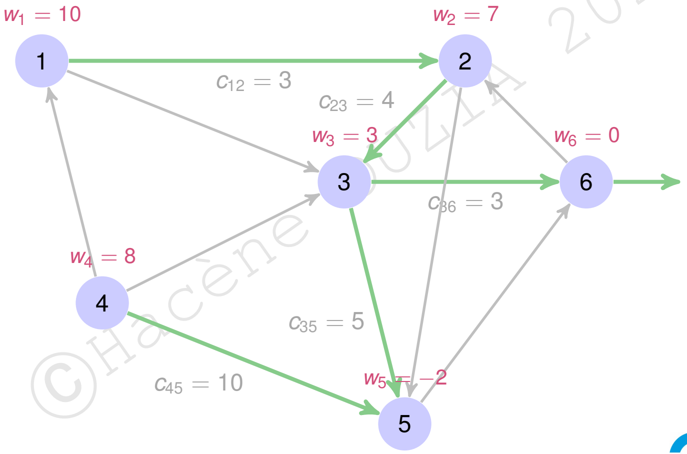
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



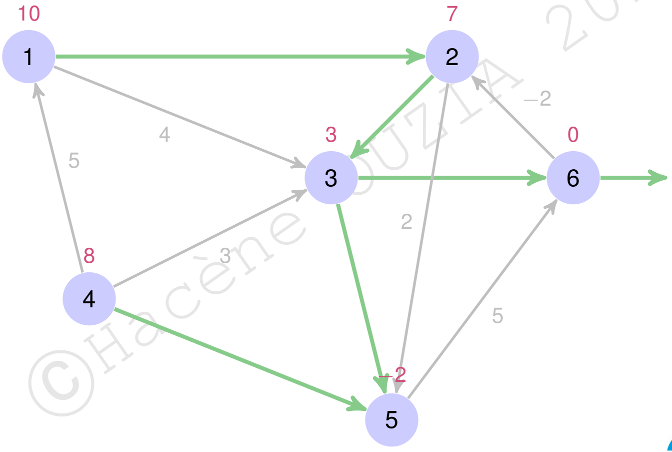
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



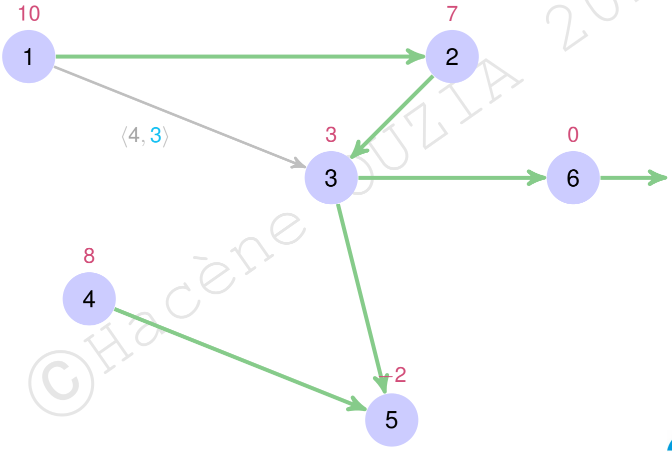
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



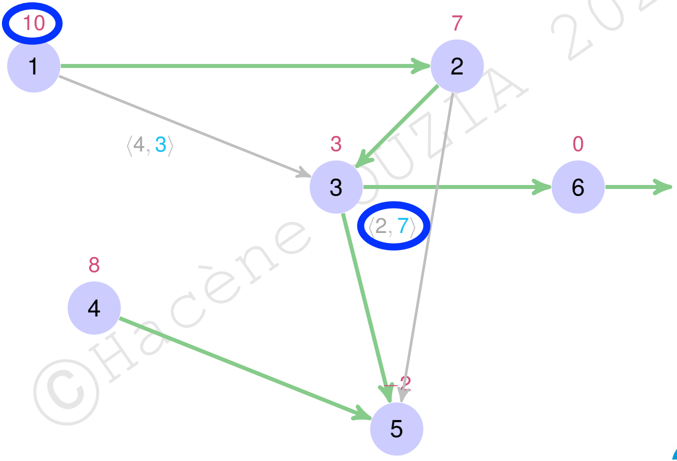
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



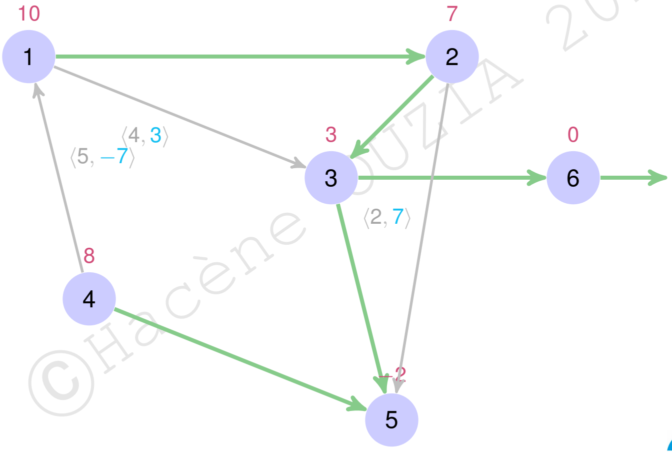
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



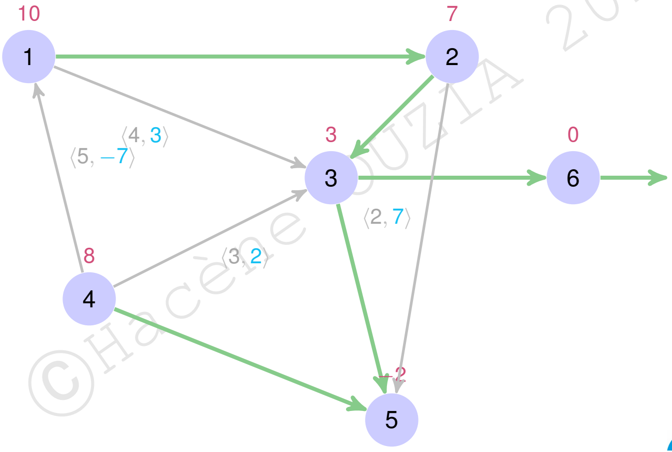
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



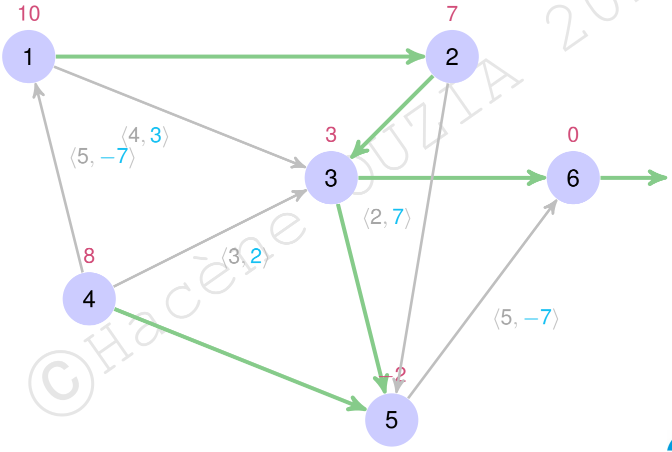
Exemple

ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



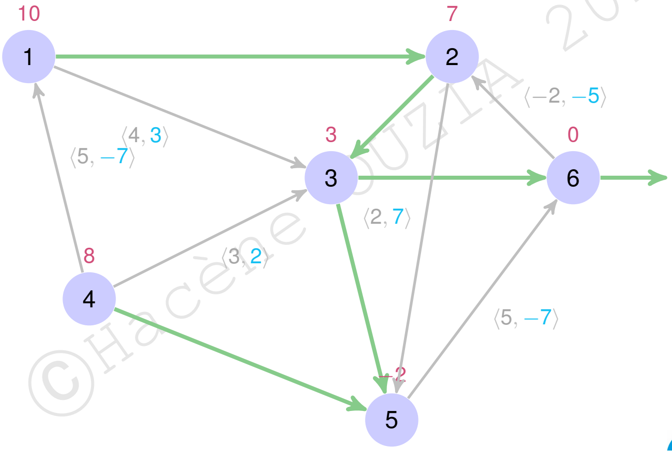
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



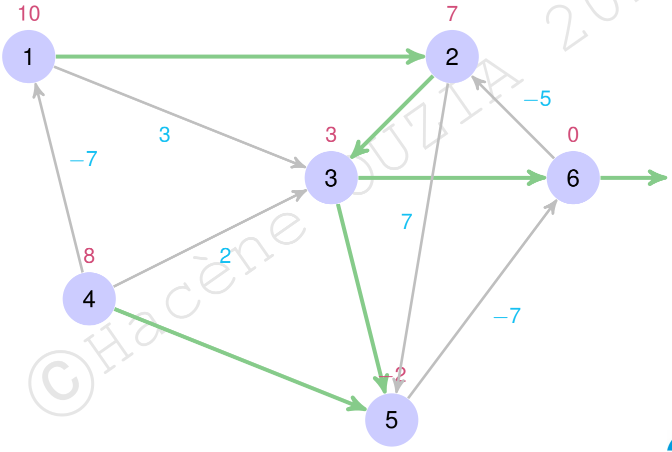
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



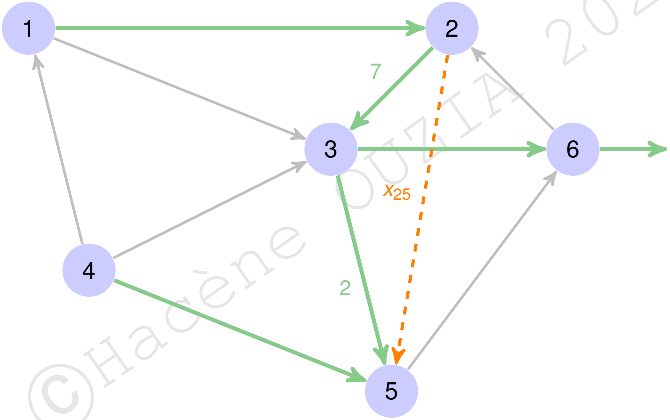
Exemple

■ ITÉRATION 1 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



Exemple

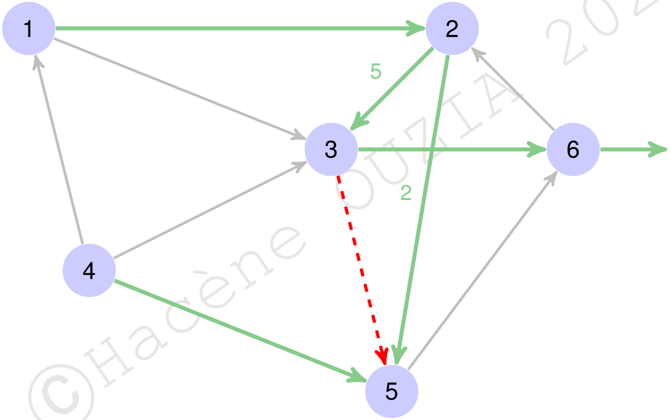
■ ITÉRATION 1 Déterminer la nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc entrant : $(2, 5)$.

Exemple

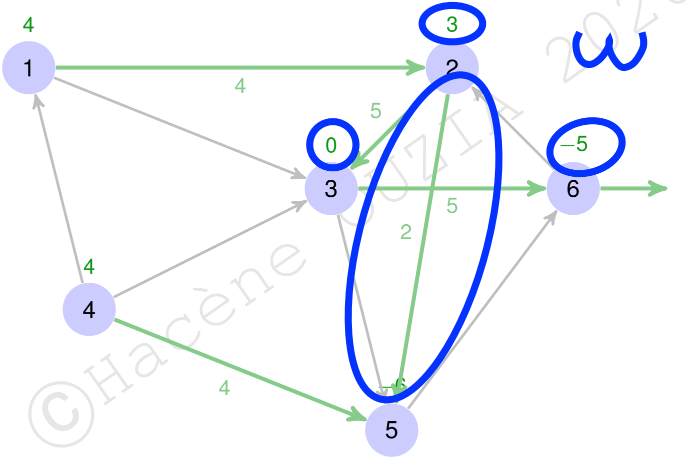
■ ITÉRATION 1 Déterminer la nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc sortant : $(3, 5)$.

Exemple

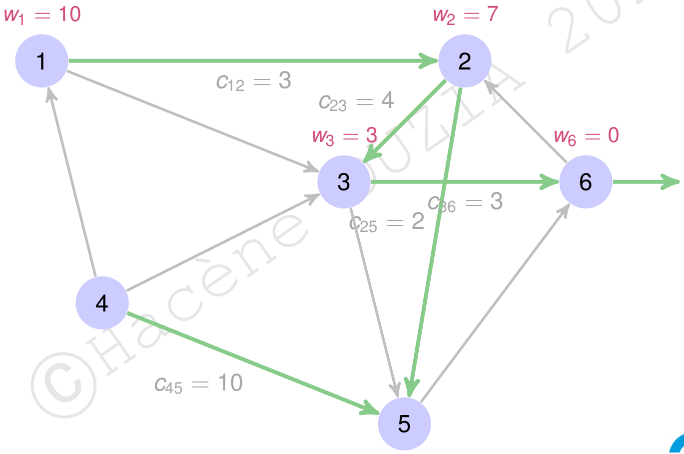
ITÉRATION 2 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Coût 91.

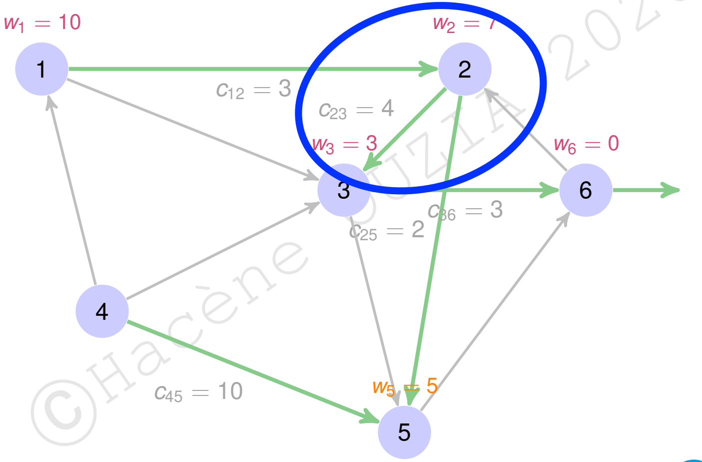
Exemple

■ ITÉRATION 2 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



Exemple

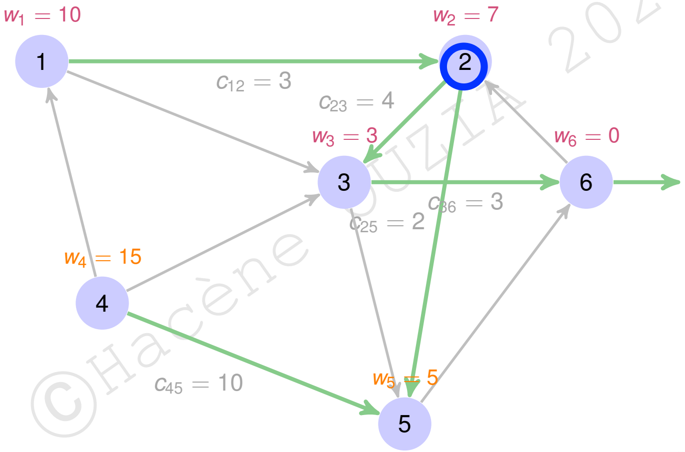
■ ITÉRATION 2 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



✍ Doit-on recalculer tous les multiplicateurs duaux ?

Exemple

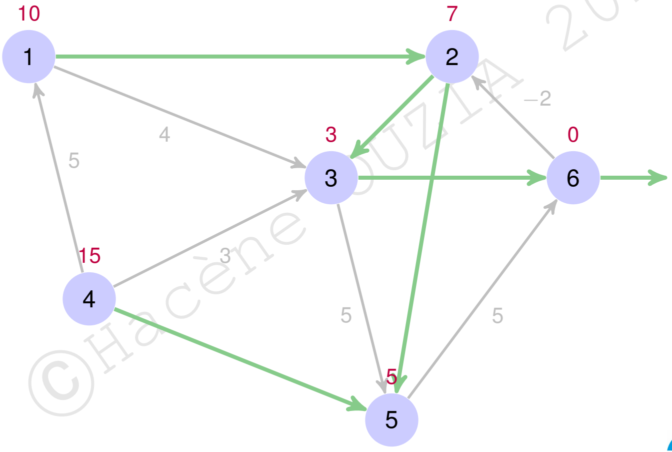
■ ITÉRATION 2 Calculer les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



✍ Doit-on recalculer tous les multiplicateurs duaux ?

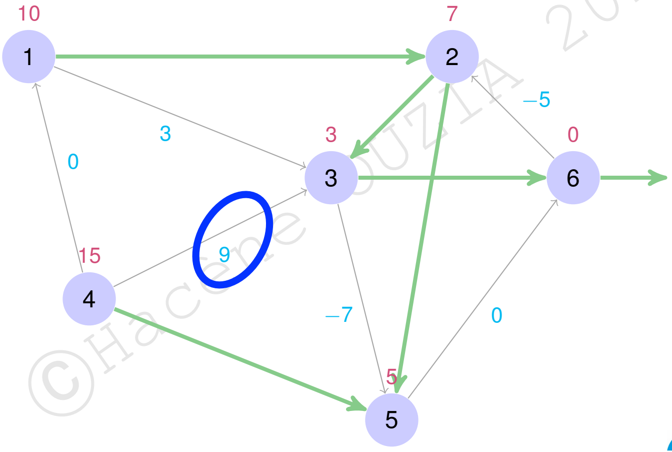
Exemple

■ ITÉRATION 2 Calculer les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



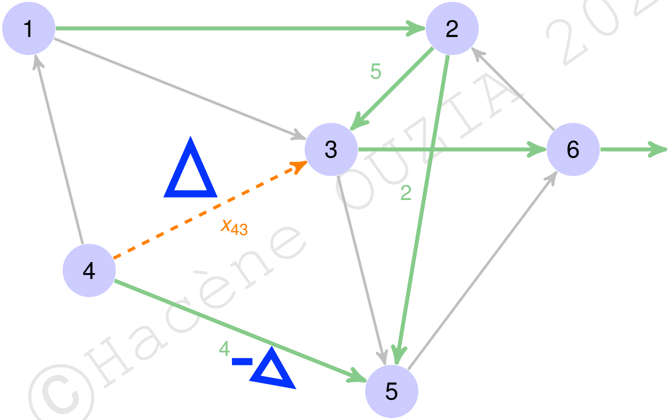
Exemple

■ ITÉRATION 2 Les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



Exemple

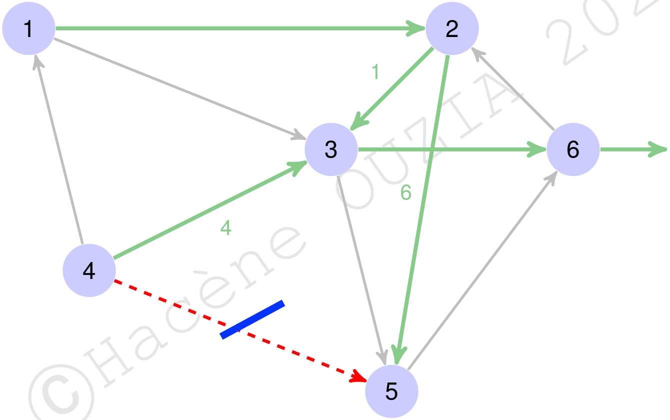
■ ITÉRATION 2 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc entrant : $(4, 3)$.

Exemple

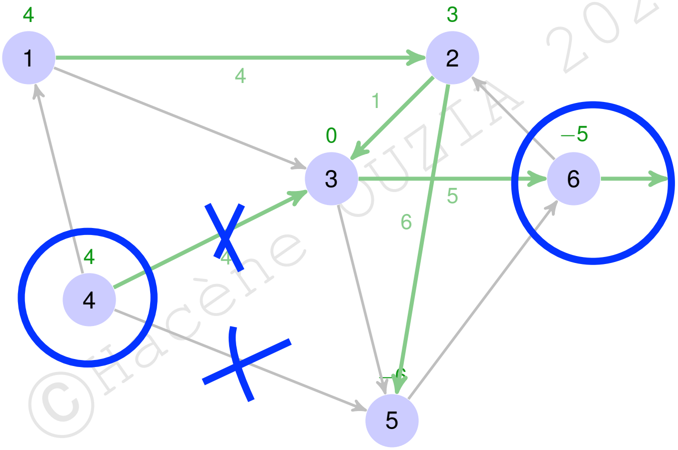
ITÉRATION 2 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc sortant : $(4, 5)$.

Exemple

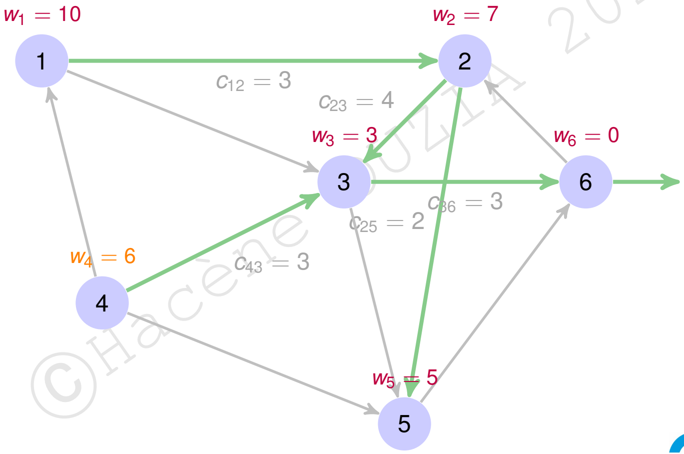
ITÉRATION 3 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Coût 52.

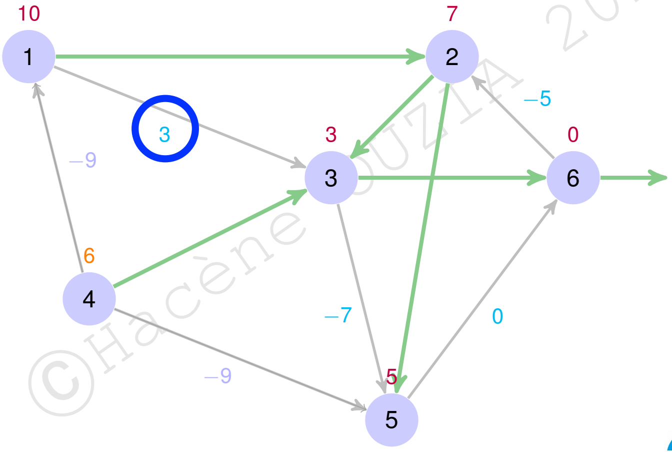
Exemple

■ ITÉRATION 3 Les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



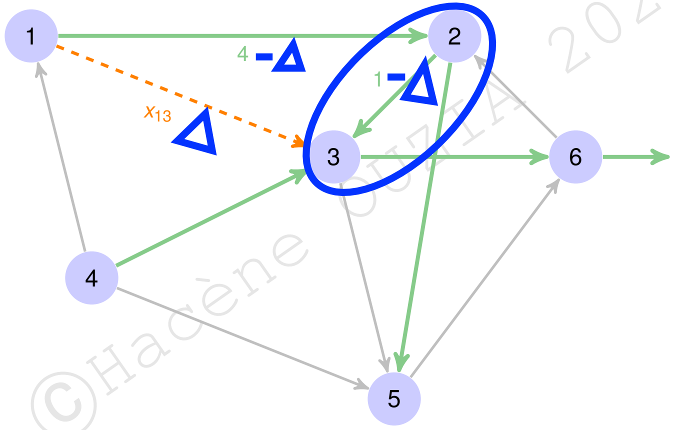
Exemple

■ ITÉRATION 3 Les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



Exemple

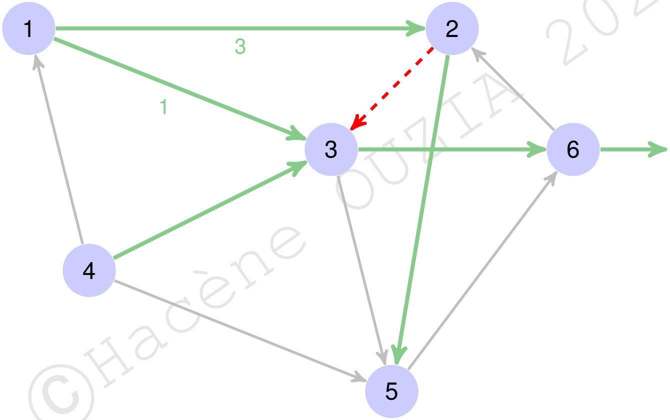
■ ITÉRATION 3 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc entrant : $(1, 3)$.

Exemple

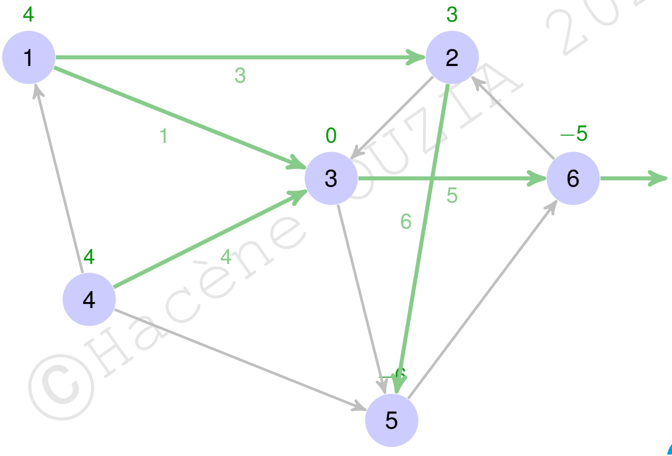
■ ITÉRATION 3 La nouvelle solution de base réalisable



☞ Arc sortant : $(2, 3)$.

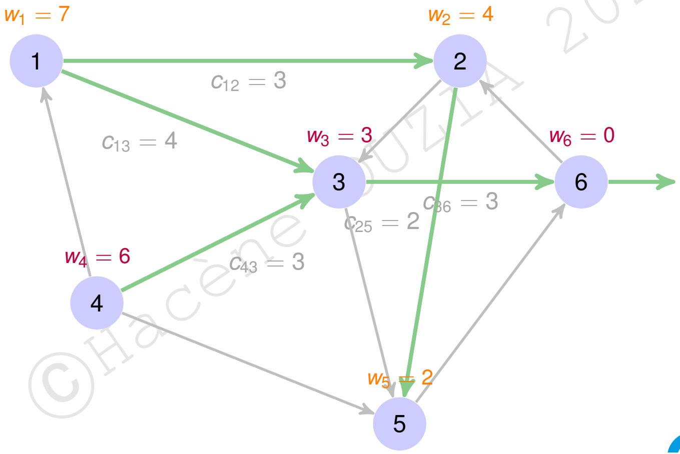
Exemple

■ ITÉRATION 4 La nouvelle solution de base réalisable



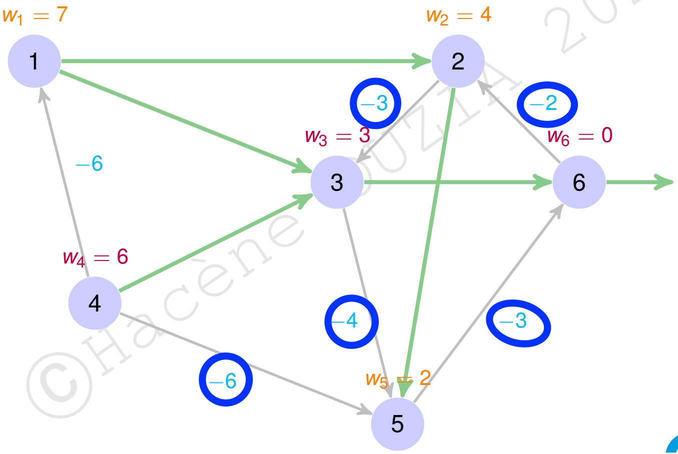
Exemple

■ ITÉRATION 4 Les multiplicateurs $w = (w_1, \ldots, w_6)$



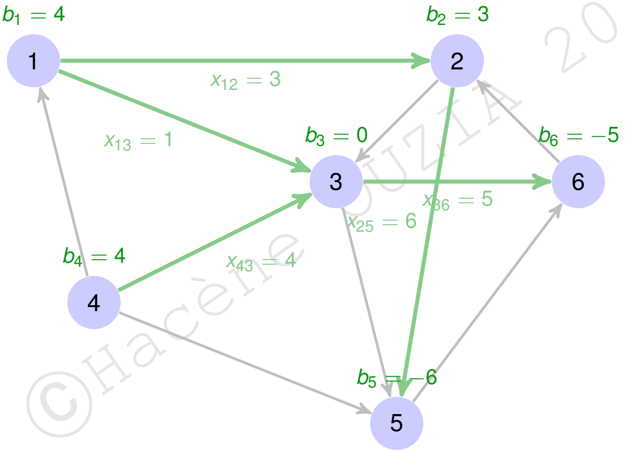
Exemple

■ ITÉRATION 4 Les coûts réduits $z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$



Exemple

■ **ITÉRATION 4** Solution optimale

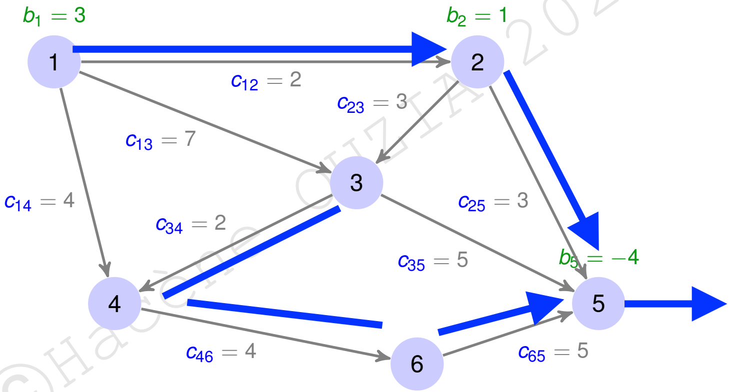


☞ Coût optimale 52.

Résumons

- Une solution de base réalisable correspond à une arborescence couvrante enracinée dans le graphe G.
- Pour calculer la solution de base initiale, il faut faire les calculs des feuilles de l'arborescence vers sa racine.
- Pour calculer la solution de base courant, il faut rerouter le flot dans la chaîne fermée créée en ajoutant l'arc entrant.
- Pour calculer la solution dual (multiplicateurs simplexes), il faut faire les calculs de la racine vers les feuilles. Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ les deux composantes obtenues en supprimant l'arc sortant. Supposons que la racine appartient à $\mathcal{R}$. Seuls les multiplicateurs des sommets de $\mathcal{T}$ changent.

Exemple



✍ Déterminer le plan de transport optimal dans le réseau ci-dessus.

Bibliographie

- D. G. Luenberger and Yinyu Ye (2008),
  Linear and Nonlinear Programming,
  Springer
- G.B. Dantzig and N.T. Mukund (1997),
  Linear Programming,
  Springer
- R. J Venderbei (2008),
  Linear programming, Fondations and extensions,
  Springer