27 mars

-1-

Exo1 TD5 :

2 $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^2(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ← compact.

Pas linéaire.

$\langle T, 2\varphi \rangle = (2\varphi(0))^2 = 4\varphi^2(0) = 4\langle T, \varphi \rangle$

Si $\varphi(0) \neq 0 \quad \langle T, 2\varphi \rangle \neq 2\langle T, \varphi \rangle$

$4\langle T, \varphi \rangle \neq 2\langle T, \varphi \rangle$

- Pas linéaire, donc ce n'est pas une distribution

* $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(1)$

- Bien linéaire.

$\langle T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \varphi_1'(1) + \lambda_2 \varphi_2'(1)$

$= \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$

- Continuité :

$|\langle T, \varphi \rangle| = |\varphi'(1)| \leq \|\varphi'\|_\infty$ continue.

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} (|\varphi'(x)|)$

Remarque : $T = -\delta_1'$

$\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(1)$

$\langle \delta_1, \varphi' \rangle = -\langle \delta_1', \varphi \rangle$.

Ce qui montre aussi que T est une distribution.

3 $\langle T, \varphi \rangle = \int_1^2 \varphi(x)\, dx$.

Linéarité

$\langle T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \int_1^2 [\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x)]\, dx$

$= \lambda_1 \int_1^2 \varphi_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_1^2 \varphi_2(x)\, dx$

$= \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$.

Continuité : $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$|\langle T, \varphi \rangle| = \left|\int_1^2 \varphi(x)\, dx\right| \leq \int_1^2 |\varphi(x)|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_1^2 dx \leq \|\varphi\|_\infty$

Ou :

Remarque :

$f = \mathbb{1}_{[1,2]} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ car $f \in L^\infty(\mathbb{R})$

$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in [1,2]. \\ \quad = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

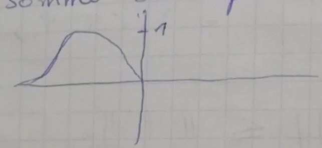
$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,2]}(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle f, \varphi' \rangle$

$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, dx$

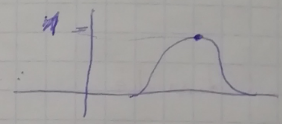
4) $\langle T, \varphi \rangle = \sup_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x)$

Pas linéaire : en général le sup de la somme n'est pas la somme de sup

Ex : φ_1



φ_2 :



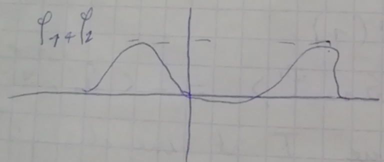
$\sup \varphi_1 = 1$

$\sup \varphi_2 = 1$

$\sup \varphi_1 + \varphi_2 = 1$

$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle \neq \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle = 2.$

$\varphi_1 + \varphi_2$



5) linéarité : ok

$\left| \varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0) \right| \leq \frac{1}{n} \|\varphi'\|_\infty.$

$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \|\varphi'\|_\infty \leq \left(\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \right) \|\varphi'\|_\infty \leq C_0 \|\varphi'\|_\infty$

$\forall K$ compact.

$\begin{cases} C_K = C_0 = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \\ d_K = 1 \end{cases}$

$\forall K$ compact $\exists C_K > 0$ $d_K \in \mathbb{N}$ t.q.

$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup \{ \|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty \dots \|\frac{d^{d_K} \varphi}{dx^{d_K}}\|_\infty \}$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} \varphi \subset$

6) Linéarité : ok.

On fait un DL

$\varphi(\frac{1}{n}) + \varphi(-\frac{1}{n}) - 2\varphi(0)$

DL à l'autre donc

$$\begin{cases} \varphi(\frac{1}{n}) = \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{1}{n^2}\varphi''(c_1) & \exists c_1 \in [0, \frac{1}{n}] \\ \varphi(-\frac{1}{n}) = \varphi(0) - \frac{1}{n}\varphi'(0) + \frac{2}{n^2}\varphi''(c_2) & \exists c_2 \in]-\frac{1}{n}, 0]. \end{cases}$$

$$\varphi(\tfrac{1}{n}) + \varphi(-\tfrac{1}{n}) - 2\varphi(0) = \frac{2}{n^2}\left(\varphi''(c_1) + \varphi''(c_2)\right)$$

$$\left|\varphi(\tfrac{1}{n}) + \varphi(-\tfrac{1}{n}) - 2\varphi(0)\right| \leq \frac{4}{n^2}\|\varphi''\|_\infty.$$

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(4\sum^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\|\varphi''\|_\infty.$$

Continuité avec $C_K = 4\sum^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $d_K = 2$.

Exo 2 :

1) $\underbrace{x}_{\in \mathcal{C}^\infty} \underbrace{vp\frac{1}{x}}_{\in \mathcal{D}'}$ On applique la définition.

$\langle x\, vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle vp\frac{1}{x}, x\varphi\rangle$

déf du produit d'une distribution avec une fct $\mathcal{C}^\infty$.

$\forall \varphi \in$ $= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,dx.$ $\quad \int_{\mathbb{R}} 1\cdot\varphi(x)\,dx$ //

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$

fct identiquement égale à 1.

$\Rightarrow \boxed{x\, vp\frac{1}{x} = 1}$

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$$

car $\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx\right| \leq 2\varepsilon\|\varphi\|_\infty \longrightarrow 0$

suite

27 mars

2

2) a) $x\delta_0$:

On revient aux définitions

$\langle x\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', x\varphi\rangle = -\langle \delta_0, (x\varphi)'\rangle$

multiplication par une fct C^∞.

$(x\varphi)' = \varphi + x\varphi' \quad = -\langle \delta_0, \varphi + x\varphi'\rangle$

$= -\langle \delta_0, \varphi\rangle - \langle \delta_0, x\varphi'\rangle$

$= -\langle \delta_0, \varphi\rangle - \underbrace{\langle x\delta_0, \varphi'\rangle}_{=0}$

$= -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi\rangle$

$x\delta_0' = -\delta_0$

c) $x\delta_0''$

$\langle x\delta_0'', \varphi\rangle = \langle \delta_0'', x\varphi\rangle = \langle \delta_0, (x\varphi)''\rangle$

$(x\varphi)'' = (\varphi + x\varphi')' = \varphi' + x\varphi'' + \varphi' = x\varphi'' + 2\varphi'$

$\langle x\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0, x\varphi''\rangle + 2\langle \delta_0, \varphi'\rangle$

$= \underbrace{\langle x\delta_0, \varphi''\rangle}_{=0 \text{ par a}} + 2\langle \delta_0, \varphi'\rangle$

$= -2\langle \delta_0', \varphi\rangle \Rightarrow \boxed{x\delta_0'' = -2\delta_0'}$

Exo 3 : Remarque préliminaire :

$\frac{1}{x^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ car $\forall R > 0 \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2} = +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

But de l'exo :

Construire une distribution qui "ressemble" à $\frac{1}{x^2}$ par renormalisation

On pose $\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right]$

$\forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

1) La limite existe

Soit $R>0$ tq

supp $\varphi \in [-R,R]$ càd $\varphi(x)=0$ sur $\mathbb{R}\setminus[-R,R]$

Posons $I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}]$.

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\varepsilon\le|x|\le R}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

Écrivons : $\int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \int_\varepsilon^R\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx$

$$+\int_\varepsilon^R \frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx + \varphi(0)\int_\varepsilon^R \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} + \varphi(0)\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^R = \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0)}{R}$$

On utilise le thm

$\exists\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\varphi(x) - \varphi(0) = x\,\psi(x)$

$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xs)\,ds \qquad \|\psi'\|_\infty \le \|\varphi''\|_\infty$

On remplace $\int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_\varepsilon^R \frac{x\,\psi(x)}{x^2}\,dx + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0)}{R}$

$$= \int_\varepsilon^R \frac{\psi(x)}{x}\,dx + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0)}{R}$$

En regroupant les termes $I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{\psi(x)}{x}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{R}$

En raisonnant comme pour vp $\frac{1}{x}$

On montre que $\lim \int \frac{\psi(x)}{x}\,dx$ existe et que

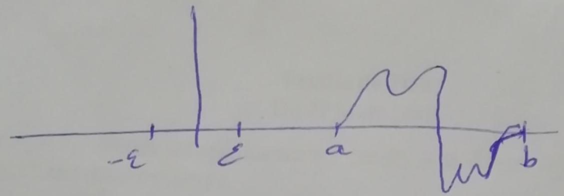
$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{\psi(x)}{x}\,dx\right| \le C\|\psi'\|_\infty \le C\|\varphi''\|_\infty$.

$\Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi''\|_\infty \Rightarrow T$ est une distrib.

27 mars

-3-

2) Reduction de T à $I =]a,b[$ avec $0<a<b<0$



$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$$

si $\operatorname{supp} \varphi \subset]a,b[\Rightarrow \varphi = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]a,b[$.

en partic $\varphi(0) = 0$

On a alors si $0 < \varepsilon < a$

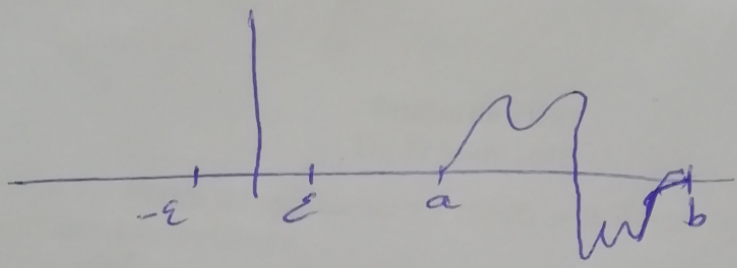
$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_{a>0}^{b} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \langle \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[a,b]}, \varphi \rangle.$$

$$\Rightarrow \langle T_I, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[a,b]}, \varphi \rangle$$

$$T_{|I} = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{]a,b[}.$$

27 mars
-3-

2) Reduction de T à $I =]a, b[$ avec $0<a<b<0$



$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$$

si supp $\varphi \subset]a, b[\Rightarrow \varphi = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]a, \cancel{b}[$.

en partic $\varphi(0) = 0$

On a alors si $0 < \varepsilon < a$

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_{a>0}^{b} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \langle \frac{1}{x^2} 1\!\!1_{[a,b]}, \varphi \rangle.$$

$$\Rightarrow \langle T_I, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle \frac{1}{x^2} 1\!\!1_{[a,b]}, \varphi \rangle$$

$$T_{|I} = \frac{1}{x^2} 1\!\!1_{]a,b[}.$$

Feuille de TD5

Du 27 Mars 2019

Exercice 1. Parmi les applications $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, déterminer les applications qui sont des distributions :
1) $T(\varphi) = \varphi(0)^2$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
2) $T(\varphi) = \varphi'(1)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
3) $T(\varphi) = \int_1^2 \varphi(x)\mathrm{d}x$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
4) $T(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
5) $T(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)\right)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
6) $T(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\varphi(\frac{1}{n}) + \varphi(-\frac{1}{n}) - 2\varphi(0)\right)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. 1) Calculer la distribution $T = x\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.
2) Déterminer les distributions $x\delta_0$ et $x\delta_0'$, $x\delta_0''$.
3*) Calculer pour m, n entiers la distribution $x^m \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\delta_0)$.

Exercice 3. 1) Montrer que l'application $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ suivante définit par

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right] \text{ pour toute fonction } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),$$

définit une distribution.
2) Que peut-on dire de la restriction de T à l'ouvert $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$ pour $A > 0$.
3) Déterminer la distribution xT.
4) Déterminer la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)'$.

Exercice 4. 1*) Soit $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = S$.
2*) Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tel que $xT = 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $T = c\delta_0$.
3) Résoudre dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ les équations

$$xT = 1, \ \ xT = \delta_0, \ \ xT = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 5. 1) Soit G une fonction C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que G' ait des limites à gauche et à droite sur chacun des points a_i de la subdivision (voir