Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \exp(-\xi^2 t)$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(u_0(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}(\exp - \xi^2 t) \\ &= u_0 * \mathcal{F}^{-1}(\exp - \xi^2 t) \\ &= u_0 * H(\cdot, t) \end{aligned}$$

où $H(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$

On pose $H(x,t) = 0$ si $t \leq 0$.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy$$

Proposition : le noyau de la chaleur est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\setminus \{0,0\}$.

Il vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0.$$

H non continue en 0.

Par ailleurs $H(x,t) > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} H(x,t)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$$

$H(\cdot,t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ uniformément sur

$\mathcal{D}_A = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \geq A\}$ $\forall A > 0$.

Corollaire : La famille $\{H(\cdot,t)\}$ est une approximation de l'identité.

$H(\cdot,t) * f \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact

$\forall f$ continue Si $f \geq 0$ $H(\cdot,t) * f \geq 0$

Equation de la chaleur avec terme source

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donné

Par transformé de Fourier partielle

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}^x - \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^x = \hat{f}^x$$

$$\frac{\partial \hat{u}^x}{\partial t} + \xi^2 \hat{u}^x = \hat{f}^x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}^x(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}^x + \hat{f}^x(\xi, t)$$

ED1 affine. $\Rightarrow$ variation de la constante

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \int_0^t \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}^x(\xi, t) ds$$

Par Fourier inverse

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}(\xi, s) d\xi) ds$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(\exp(-\xi^2(t-s)) \hat{f}^x\right] = \mathcal{F}^{-1}(\exp - \xi^2(t-s)$$

$$* \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot, s))$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(t-s)}\right)}_{H(x,t-s)} * f(\cdot, s)$$

$$u(x,t) = \int_0^t [H(\cdot, t-s) * f(\cdot, s)](x) dx$$

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s) \right) ds$$

C'est la formule de Duhamel.