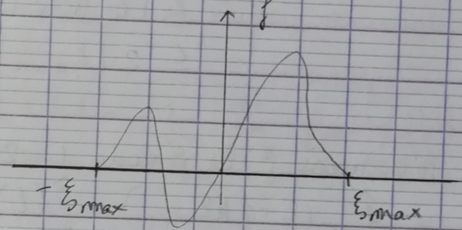
TD 4

Exercice 1

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ à support compact.

$\exists\, \xi_{max}$ tq $\hat{f}(\xi) = 0$ si $\xi \notin [-\xi_{max}, \xi_{max}]$



1)

$f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{f}$ continue et d'après le th de cvg dominée :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\xi x) \qquad \forall \xi \ |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

$\hat{f}$ décroît très vite à l'infini d'où $f \in \mathcal{C}^\infty$?

> prop 3.6.1 $\forall f \in \mathcal{L}^2$ Si $\int_{\mathbb{R}} |\xi|^k |\widehat{f(\xi)}| \, d\xi < +\infty$ $\qquad \exists C_k : |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(|\xi|+1)^{k+2}}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^k$

ici $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| \, d\xi = \int_{-\xi_{max}}^{\xi_{max}} |\xi|^k |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

$$\leq |\xi_{max}|^k \int |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

$$\leq |\xi_{max}|^k \, 2 \, |\xi_{max}| \, \|\hat{f}(\xi)\|_\infty$$

$$\leq 2 \, |\xi_{max}|^{k+1} \, \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$$

2) Périodisons $\hat{f}$ de période $L = 2\xi_{max}$:

$$\hat{f}_{per}(\xi + 2k\xi_{max}) = \hat{f}(\xi) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\forall \xi \in [-\xi_{max}, \xi_{max}]$$

$\hat{f}$ est continue (en particulier sur $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$)

et $\hat{f}(\xi_{max}) = \hat{f}(-\xi_{max})$ $(= 0)$

$\hat{f}_{per}$ est continue donc $\mathcal{C}^0$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi x) \, d\xi$$

d'après la formule d'inversion de Fourier

comme $\hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \notin [-\xi_m, \xi_m]$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_m}^{\xi_m} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi x) \, d\xi$$

Comme $\hat{f} = (\hat{f})_{per}$ sur $[-\xi_m, \xi_m]$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_m}^{\xi_m} \hat{f_{per}}(\xi) \exp(i\xi x) d\xi$$

3) f est L périodique avec $L = 2\xi_{max}$. On a la décomposition de Fourier suivante pour la var. ξ

prop 3.2.1

$$\hat{f}_{per}(\xi) = \frac{1}{2\xi_m} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\hat{f}_{per}}^{L} \left(\frac{2\pi k}{2\xi_m}\right) \exp\left(\frac{2i\pi k \xi}{2\xi_{max}}\right)$$

4) $$c_k = \frac{1}{2\xi_m} \int_{-\xi_m}^{\xi_m} \hat{f}(\xi) \exp\left(\frac{-i\pi k \xi}{\xi_m}\right) d\xi$$

Posons : $x_k = \frac{-\pi k}{\xi_{max}}$

$$c_k = \frac{\pi}{\xi_{max}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_{max}}^{\xi_{max}} \hat{f}(\xi) \exp(i x_k \xi) d\xi \right)$$

$$= \frac{\pi}{\xi_{max}} f(x_k).$$

Exercice 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

1) Transformé de Fourier partielle par rapport à x

$$\hat{u}^x(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\exp(i\xi x)\,dx$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}^x(\xi,t)$$ d'ap. th. de dérivation sous le signe somme

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = (i\xi)^3 \hat{u}^x(\xi,t)$$

$$= -i\xi^3 \hat{u}^x(\xi,t)$$

2) ED1 en t à ξ fixé (= coeff cte)

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}^x(\xi,0)\exp(-i\xi^3 t)$$

$$= \hat{u}_0(\xi)\underbrace{\exp(-i\xi^3 t)}_{\text{module } 1}$$

3) $|\hat{u}^x(\xi,t)| = |\hat{u}_0(\xi)|$

En particulier $u_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\forall t$ $x \mapsto u(x,t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

(Parseval)

D'après la formule d'inversion de Fourier

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi)\exp(-i\,\xi^3 t)\,d\xi$$

<u>Rq</u> : Difficile de l'écrire sous forme de produit de convolution.

$$\mathcal{F}^{-1}(\exp(-i\xi^3 t))\ ? \quad * \in \mathcal{L}^\infty$$

4) La décroissance à l'infini de $|\hat{u}^x(\xi,t)| = |u_0(\xi)|$ sachant que $u_0 \in \mathcal{C}^\infty_c$ nous indique que u est $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 3 (équation des ondes)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases} \qquad u_0, u_1 \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$$

On a aussi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_1(x)\,dx = 0$ et $\hat{u_1}(0) = 0$

Equation pour $\hat{u}^x(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\exp(-i\xi x)d$

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}^x(\xi,t) = \widehat{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u}(\xi,t)$$

$$\begin{cases} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}^t(\xi,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{u}^x(\xi,t) \\ \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\xi,t) = (i\xi)^2\hat{u}^x(\xi,t) \end{cases}$$

On trouve $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}^x(\xi,t)$

À ξ fixé, ED2 à coeff. cst par rapport à t

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}^x(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}^x(\xi,t)$$

donc polynôme caractéristique $r^2 = -\xi^2$

$$r^2 + \xi^2 = 0$$

Solution $r_1 = i\xi$ $\quad r_2 = -i\xi$

$$\hat{u}^x(\xi,t) = A\exp(i\xi t) + B\exp(-i\xi t)$$

(équation du pendule)

Il faut déterminer A et B en fonction des données initiales $\hat{u}(\xi,0) = u_0(\xi)$

$$\hat{u}(\xi,0) = A + B$$

$$\hat{u}_0(\xi) = A + B$$

Par ailleurs $\dfrac{\partial \hat{u}^x}{\partial t}(\xi,t) = i\xi A \exp(i\xi t) - i\xi B \exp(-i\xi t)$

$t = 0$ $\dfrac{\partial \hat{u}^x}{\partial t}(\xi, 0) = \dfrac{\widehat{\partial u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi)$

Or $\hat{u}_1(\xi) = i\xi A - i\xi B$

$A - B = \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)$ où $\xi \neq 0$.

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right) \\ B = \dfrac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\xi) - \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right) \end{cases}$$

Solution : $\hat{u}^x(\xi,t) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right)\exp(i\xi t)\right.$

$\left. + \left(\hat{u}_0(\xi) - \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right)\exp - i\xi t\right]$

Par transformée de Fourier inverse :

$u(x,t) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{1}{i\xi}\tilde{u}_1(\xi)\right)\exp(i\xi t)$.

$\exp(i\xi x)\,d\xi + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{1}{i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right)$

$\exp(-i\xi t).\ \exp(i\xi x)\,d\xi.$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{i\xi} \hat{u}_1(\xi) \right) \exp(i\xi(x+t))$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left[\hat{u}_0(\xi) - \frac{1}{i\xi} \right] \exp(-i\xi(x-t))\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{i\xi} \hat{u}_1(\xi) \right)(x+t) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1} \left(\hat{u}_0(\xi) - \frac{1}{i\xi} \hat{u}_1(\xi) \right)(x-t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{i\xi} u_1(\xi) \right) \hat{g}(\xi)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0) = u_0$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = g$$

Posons $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(s)\,ds$

$g \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(s)\,ds = 0$

$$g'(x) = u_1(x)$$

$$\widehat{g'(x)} = \widehat{u_1}$$

$$i\xi \hat{g}(\xi) = \hat{u}_1 \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \frac{1}{i\xi} \hat{u}^1$$

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\hat{u}^x(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \exp(-\xi^2 t)$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(u_0(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}(\exp - \xi^2 t) \\ &= u_0 * \mathcal{F}^{-1}(\exp - \xi^2 t) \\ &= u_0 * H(\cdot, t) \end{aligned}$$

où $H(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$

On pose $H(x,t) = 0$ si $t \leq 0$.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy$$

Proposition : le noyau de la chaleur est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\setminus \{0, 0\}$.

Il vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0.$$

H non continue en 0.

Par ailleurs $H(x,t) > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} H(x,t)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$$

$H(\cdot,t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ uniformément sur

$D_A = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \geq A\} \quad \forall A > 0.$

$\boxed{\text{Corollaire}}$ La famille $\{H(\cdot,t)\}$ est une approximation de l'identité.

$H(\cdot,t) * f \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact

$\forall f$ continue Si $f \geq 0$ $H(\cdot,t) * f \geq 0$

Equation de la chaleur avec terme source

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ donné

Par transformé de Fourier partielle

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}^x - \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^x = \hat{f}^x$$

$$\frac{\partial \hat{u}^x}{\partial t} + \xi^2 \hat{u}^x = \hat{f}^x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}^x(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}^x + \hat{f}^x(\xi,t)$$

ED 1 affine. $\Rightarrow$ variation de la constante

$$\hat{u}^x(\xi,t) = \int_0^t \exp(-\xi^2(t-s))\, \hat{f}^x(\xi,t)\,ds$$

Par Fourier inverse

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2(t-s))\, \hat{f}(\xi,s)\,d\xi)\,ds$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(\exp(-\xi^2(t-s))\hat{f}^x\right] = \mathcal{F}^{-1}(\exp -\xi^2(t-s)$$

$$* \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot,s))$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(t-s)}\right)}_{H(x,t-s)} * f(\cdot,s)$$

$$u(x,t) = \int_0^t [H(\cdot,t-s) * f(\cdot,s)](x)\,dx$$

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\right) ds$$

C'est la formule de Duhamel.