Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações - Lista 01

Arthur Cardoso Leite, Cleibson Aparecido de Almeida

18 de janeiro de 2017

Exercício 03

Dados $A, B_1, ..., B_n \geq 1$, subconjuntos de $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, mostre que:
a) $(A^c)^c = A$
Seja: $A^c = 1 - A$;
Então: $(1 - A)^c = (1 - (1 - A)) = 1 - 1 + A = A$

b) $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i^c$ e $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i)^c = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i^c$
Seja: $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)^c$
$= (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n)^c$
$= B_1^c \cup B_2^c \cup ... \cup B_n^c$
$= B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$
$= \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i^c$
e seja: $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i)^c$
$= (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)^c$
$= B_1^c \cap B_2^c \cap ... \cap B_n^c$
$= B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$
$= \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i^c$

c) Se $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n\}$ é uma partição de $\mathcal{U}$, então a coleção $\{B_1 \cap A, ..., B_n \cap A\}$ é uma partição de A.

Aplicando a propriedade $(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcup\limits_{i \in I}(A_i \cup B)$ ao problema, temos que:

$(\underset{i\in I}{\cup} B_i) \cup A$
$= \underset{i\in I}{\cup}(B_i \cup A)$
$= (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup ... \cup (B_n \cap A)$
$= \{B_1 \cap A, B_2 \cap A, ..., B_n \cap A\}$

Exercício 09

De quantas maneiras podemos distribuir n objetos em duas caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia, quando:

a) Os objetos e as caixas são diferentes?

b) Os objetos são iguais e as caixas diferentes?

Exercício 11

a) Um químico possui 10 tipos de substâncias: $/A_1, A_2, .., A_n/$. De quantos modos poderá combinar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas não podem estar juntas?

b) O mesmo químico tem a hipótese de que ao dissolver 5 doses de 2 ml das substâncias $/A_1, .., A_10/$ (as doses podem ser repetidas) em 5 ml de água, obterá uma solução útil ao combate da dengue. O químico precisa fazer um experimento no laboratório com todas as soluções possíveis. Qualé o número máximo de testes a serem feitos pelo químico? (suponha que a ordem de dissolução não afeta a solução final).

Exercício 13

Seja $\mathcal{F}$ a classe das funções que associam o conjunto $\{1, 2, ..., 2n + 1\}$ ao conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$, $n \geq 1$, isto é:

$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, ..., 2n + 1\} \rightarrow \{1, 2, ..., 2n\}\}$

Sejam ainda os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}$:

$\mathcal{I}$: constituído pelas funções de $\mathcal{F}$ que associam a cada número ímpar um número par,

$\mathcal{S}$: constituído pelas funções sobrejetoras de $\mathcal{F}$.

Determine $|\mathcal{F}|, |\mathcal{I}| e |\mathcal{S}|$.

Exercício 15

Determine os números de possíveis anagramas das palavras SUSSURRO, VESTIBULAR e BATATA.

a) SUSSURRO - Esta palavra possui repetição de letras,portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

Temos então a seguinte organização das 8 letras: SSS UU RR O (3 S, 2 U, 2 R e 1 O), e com isso a fórmula será P_8^{3221}

$= C_8^3 \times C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1$

$= 56 \times 10 \times 3 \times 1 = 1680$ anagramas

b) VESTIBULAR - Esta palavra não possui letras repetidas,portanto trata-se de uma *permutação simples*.

Temos então P_{10}

$= 10!$

$= 10 \times 9 \times ... \times 1$

$= 3628800$ anagramas

c) BATATA - Esta palavra possui repetição de letras,portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

Temos então a seguinte organização das 6 letras: AAA TT B (3 A, 2 T e 1 B), e com isso a fórmula será P_6^{321}

$= C_6^3 \times C_3^2 \times C_1^1$

$= 20 \times 3 \times 1 = 60$ anagramas

Exercício 20

Quantas são as soluções não negativas da inequação $x + y + z \leq 2$?