Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

XLVI Programa de Verão IME/USP - 2017

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

- **Entrega:** em sala, no dia 18/01/2017.
- **Exercícios para entrega:** 3, 9, 11, 13, 15 e 20.

Exercício 1. Preencha a lacuna com a relação apropriada.

1(a) $\{a\}\_\_\{a, b, c, d\}$.

1(b) $\{\emptyset\}\_\_\{\emptyset, a, b\}$.

1(c) $\{-3, 3\}\_\_\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 9 = 0\}$.

1(d) $\emptyset\_\_\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$.

Exercício 2. Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ em que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathcal{U} : x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}, \\ B &= \{x \in \mathcal{U} : x = 8k,\ k \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \\ C &= \{x \in \mathcal{U} : x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Determine:

2(a) A^c e C^c.

2(b) $A \cap B$, $B \cap C$ e $A \cup C$.

2(c) $(A \cap C^c)^c$.

Exercício 3. Dados A, $B_1, \ldots, B_n$, $n \geq 1$, subconjuntos de $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, mostre que

3(a) $(A^c)^c = A$.

3(b) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} B_i^c$ e $\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} B_i^c$.

3(c) Se $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ é uma partição de $\mathcal{U}$, então a coleção $\{B_1 \cap A, \ldots, B_n \cap A\}$ é uma partição de A.

Exercício 4. Suponha que $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção de subconjuntos de um espaço universal bem definido $\mathcal{U}$. Qual(s) da(s) alternativa(s) é verdadeira

4(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_k \text{ para infinitos } k \in \mathbb{N}^*\}$.

4(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_k \text{ para todo } k \text{ excepto um número finito de } k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercício 5. Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 8 livros diferentes de física e 9 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?

Exercício 6. Com relação a palavra **TEORIA**.

6(a) Quantos anagramas existem?

6(b) Quantos anagramas começam com T?

6(c) Quantos anagramas começam com T e terminam com A?

6(d) Quantos anagramas começam com uma vogal?

Exercício 7. Dado $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$, em que os p_i's são primos e distintos, calcular o número de divisores de N.

Exercício 8. Quantos são os números que podemos formar usando todos os dígitos $1, 1, 1, 1, 2$ e 3.

Exercício 9. De quantas maneiras podemos distribuir n objetos em duas caixas, de modo que nehuma caixa fique vazia, quando

9(a) Os objetos e as caixas são diferentes?.

9(b) Os objetos são iguais e as caixas diferentes?.

Exercício 10. (Pedras de Dominó) Cada pedra de dominó é constituída de 2 números. As peças são simétricas, de modo que o par de números não é ordenado. Quantas peças diferentes podem ser formadas se usarmos os números $0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercício 11(a). Um químico pussui 10 tipos de substâncias: $\{A_1, \ldots, A_{10}\}$. De quantos modos poderá combinar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas não podem estar juntas?

Exercício 11(b). O mesmo químico tem a hipótese de que ao dissolver 5 doses de 2 ml das substâncias $\{A_1, \ldots, A_{10}\}$ (as doses podem ser repetidas) em 5 ml de água, obterá um solução útil ao combate da Dengue. O químico precisa fazer um experimento no laboratório com todas as soluções possíveis. Qual é número máximo de testes a serem feitos pelo químico? (Suponha que a ordem de dissolução não afeta a solução final).

Exercício 12. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas dessas não fiquem juntas? Suponha agora que você tem 15 balas de caramelo e pretende dividi-las entre estas 6 crianças de modo que cada criança receba ao menos uma bala. De quantos modos poderia fazer isto?

Exercício 13. Seja $\mathcal{F}$ a classe de funções que associam o conjunto $\{1, \ldots, 2n+1\}$ ao conjunto $\{1, \ldots, 2n\}$, $n \geq 1$, isto é

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, \ldots, 2n+1\} \rightarrow \{1, \ldots, 2n\}\}.$$

Sejam ainda os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}$:

$\mathcal{I}$: constituído pelas funções de $\mathcal{F}$ que associam a cada número ímpar um número par,

$\mathcal{S}$: constituído pelas funções sobrejetoras de $\mathcal{F}$.

Determine $|\mathcal{F}|, |\mathcal{I}|$ e $|\mathcal{S}|$.

Exercício 14. Quantas são as permutações simples dos números $1, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-esima posição é maior que $k-4$, para todo k?

Exercício 15. Determine os números de possíveis de anagramas das palavaras SUSSURRO, VESTIBULAR e BATATA.

Exercício 16. Sejam A e B conjuntos dos números naturais com $|A| = m$ e $|B| = n$, m e n naturais não nulos.

16(a) Quantas são as funções $f : A \to B$? .

16(b) Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?.

16(c) Quantas são as funções estritamente crescentes $f : A \to B$?.

16(d) Quantas são as funções não decrescentes $f : A \to B$?.

Exercício 17. Para cada inteiro positivo n, define-se $\varphi(n)$ como sendo a número de inteiros que são primos com n e não superiores a n. Se a decomposição de n em fatores primos é da forma $n = p_1^{\alpha_1} p_r^{\alpha_r} \ldots p_r^{\alpha_r}$, em que $p_1, \ldots, p_r$ são primos e distintos, mostre que

17(a) $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$.

17(b) Use 17(a) e calcule $\varphi(20)$ e $\varphi(p)$, em que p é um número primo.

Exercício 18. Escrevem-se os inteiros de 1 a 17999. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?

Exercício 19. Qual é a soma de todas as permutações de todos os números de 8 algarismos distintos formados a partir dos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Exercício 20. Quantas são as soluções não negativas da inequação

$$x + y + z \leq 2 \; ?$$