



北京航空航天大学 实验报告

学号: 20213011
 班级: 200615
 姓名: 樊悦
 同组者: _____
 日期: 2021.10.18
 评分: _____

实验名称: 波尔共振实验

一. 实验目的.

1. 探究波尔共振仪中弹性摆轮受迫振动的幅频特性和相频特性. 总结共振现象规律.
2. 研究不同阻尼力矩对受迫振动的影响.
3. 学习利用频闪法测定运动的物体的相位差.
4. 掌握逐差法和极值取点的数据处理方法.

二. 实验原理.

1. 物体在周期外力持续作用下发生的振动称为受迫振动. 这种周期性的外力称为强迫力.
2. 本实验中, 由纯铜圆形摆轮和弹簧组成弹性摆轮. 可绕转轴摆动. 摆轮在摆动过程中, 受到与角位移成正比, 方向指向平衡位置的弹性恢复力矩的作用. 与角速度成正比, 方向与摆轮的转动方向相反的阻尼力矩的作用. 根据转动规律, 可以得出摆轮的摆动方程:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (1)$$

其中: J 为摆轮的转动惯量, $k\theta$ 为弹性力矩, k 为弹性力矩系数, b 为电磁阻尼力矩系数, M_0 为强迫力矩的幅值, ω 为强迫力矩的圆频率, 令 $\omega^2 = \frac{k}{J}$.

即 $\beta = \frac{b}{2J}$, $m = \frac{M_0}{J}$. 则式(1)变为 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (2)$

当强迫外力为0, 即(2)式等号右侧为0时, 方程变为二阶常系数线性齐次微分方程, 根据微分方程的相关理论, 当 ω_0 远大于 β 时, 其解为 $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3)$ 此时, 摆轮作阻尼振动, 振幅 $\theta_0 e^{-\beta t}$ 随时间 t 衰减, 振动频率为 $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 式中, ω_0 称为系统的固有频率, β 为阻尼系数, 当 β 也远大于0时, 摆轮以 ω_0 作简谐振动.

当强迫外力不为0时, 方程(2), 为二阶常系数线性非齐次微分方程, 其解为 $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) + \theta_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$.

式中, 第一部分表示阻尼振动, 经过一段时间后衰减消失. 设 $A = \theta_0 e^{-\beta t}$ 为阻尼振动振幅. 第二部分为稳态解, 说明振动系统在强迫力作用下, 经过一段时间后可达稳态状态. 如果外力是按简谐规律变化, 那么物体在稳态状态时的运动



也是与强迫力同频率的简谐振动。具有稳定的振幅 θ_s 。并与强迫力之间有一个确定的相位差 φ 。将 $\theta = \theta_s \cos(\omega t + \varphi)$ 代入方程 (2)。方程在任一时间成立。 θ_s 与 φ 需满足一定的条件。由此解得稳定受迫振动的幅频特性及相频特性的表达式为。

$$\theta_s = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (5)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\beta T_0^2}{\pi(T_0^2 - T^2)} \right) \quad (6)$$

由 (5) 式和 (6) 式可以看出。在稳定状态时振幅和相位差。保持恒定振幅 θ_s 与相位差 φ 的数值取决于 β 。 ω_0 。 m 和 ω 。也取决于 J 。 b 。 k 。 m_0 和 ω 而振动的起始位置无关。当强迫力的频率 ω 与系统的固有频率 ω_0 相同。相位差为 -90° 。

由于阻尼。受迫振动的相位总落后于强迫力相位。即 (6) 中 φ 应为负值。而反函数取值范围为 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 当由 (6) 式算得的角度数值为正值时。应减去 180° 将其换算为负值。由 (5) 对 θ_s 关于 ω 求极值得。当强迫力频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时。 θ_s 有极大值。产生共振。若只振时圆频率和振幅。分别用 ω_r 。 θ_r 表示。可有。

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (7)$$

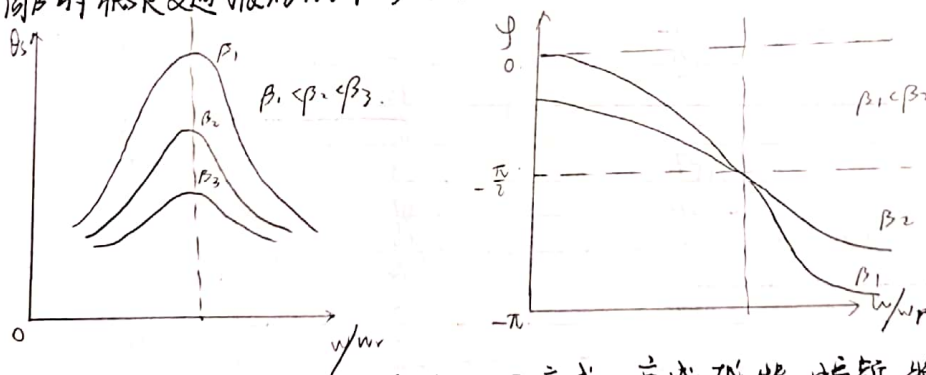
$$\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (8)$$

将 (7) 式代入 (6) 式。得到共振时的相位差为。

$$\text{故 } \varphi_r = \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \right) \quad (9)$$

17. (8) (9) 式表明。 β 越小。共振圆频率 ω_r 越接近系统固有圆频率 ω_0 。振幅 θ 越大。共振时的相位差。接近 -90° 。

因为不同 β 时稳定受迫振动的幅频特性和相频特性。



β 越小。 θ_r 越大。 θ_s 随 ω 偏离 ω_0 而衰减。衰减越快。相频特性曲线越陡峭。

在峰值附近 $\omega \approx \omega_0$ 。 $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ 而 (5) 式可以近似表示为。

$$\theta_s \approx \frac{m}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} \quad (10)$$

由式可见当 $|\omega_0 - \omega| = \beta$ 时。振幅降为峰值的一半根据幅频特性曲线相应点可以确定 β 的值。

三 实验仪器。

波尔共振仪 (振动仪和电器控制箱)。

四 实验步骤与操作方法。

1. 实验准备。



2. 自由振动 — 测量摆轮振幅 θ 与自由振动的周期 T 的关系。

1). 选择“自由振荡”

2). 手转摆轮 16° ，测量振幅与周期 T 的对应表。阻尼小， T 接近摆轮固有周期 T_0 。

3. 测定阻尼系数 β 。

1) 在实验步骤中选择“阻尼振荡”。

2). 将角度指针放在 0° 位置，用手轮将摆轮 16° 左右选取 θ_0 在 15° 左右，开始记录数据。

3). 读出阻尼振动时的振幅数值 A_1, A_2, \dots, A_n ，利用公式 $\ln \frac{A_i}{A_{i+n}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+nT)}} = n\beta T$ 求出 β 值。
 T : 测 10 个振动周期取平均。

4. 测定受迫振动的幅频特性曲线和相频特性曲线。

1) 选取“受迫振荡”保持周期为 1，稳定后测量。

2). 周期从 1 调为 0。

3). 读振幅值，闪光灯，测定受迫振动位移与强迫力之间的相位差。

4). 改变强迫力的频率 ω ，多次测量。

5). 等待 20 秒，稳定后测量。

五. 数据处理

自由振动表 1. 摆轮振幅 θ 与系统固有周期 T_0 的对应关系。

振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$	振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$
154	1.569	83	1.573
150	1.570	82	1.573
147	1.570	80	1.573
146	1.570	69	1.573
142	1.571	68	1.573
138	1.571	67	1.573
134	1.571	66	1.573
128	1.571	64	1.573
126	1.571	60	1.573
125	1.571	58	1.573
120	1.572	56	1.573
116	1.572	53	1.573
112	1.572	47	1.572
105	1.572	46	1.572
104	1.572	40	1.572
102	1.572	34	1.569
96	1.573	30	1.570
95	1.573		
94	1.573		
88	1.573		



表2. 阻尼振动

序号 <i>i</i>	1	2	3	4	5
振幅 $A_i(^{\circ})$	136	124	112	101	91
序号 <i>i+5</i>	6	7	8	9	10
振幅 $A_{i+5}(^{\circ})$	82	74	66	60	54
$\ln A_i$	4.9127	4.8203	4.7185	4.6151	4.5109
$\ln A_{i+5}$	4.4067	4.3041	4.1897	4.0943	3.9890

阻尼档位: 阻尼2档.

$$10T = 15.7273$$

$$\bar{T} = 1.57275.$$

$$A_i = \theta_{\text{tem}} e^{-\beta i \bar{T}}$$

$$\text{则 } \ln A_i = \ln \theta_{\text{tem}} - \beta \bar{T} i$$

$$\text{设 } y = a + bx \text{ 其中 } y = \ln A_i, a = \ln \theta_{\text{tem}}, b = -\beta \bar{T}$$

表3. 列表逐差

<i>i</i>	1	2	3	4	5	平均.
$\Delta x_i = x_{i+5} - x_i$	5	5	5	5	5	5
$\Delta y_i = y_{i+5} - y_i$	-0.5059	-0.5162	-0.5288	-0.5208	-0.5219	-0.5187

逐差法算得.

$$\bar{b} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{y_{i+5} - y_i}{x_{i+5} - x_i}}{\sum_{i=1}^5 (y_{i+5} - y_i)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{代入数据得 } \bar{b} = \frac{-0.5187}{5} = -0.1037.$$

$$U_a(\Delta y) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^5 (\Delta y_k - \bar{\Delta y})^2}{k(k-1)}} = 0.0038$$

$$U_b(\Delta y) = 0$$

由于等间隔测量, 因此, x 无A类不确定度. 由于 x 必为正整数, 因此无B类不确定度.

$$U_a(\Delta x) = U_b(\Delta x) = 0.$$

$$\text{合成不确定度: } \frac{U(b)}{\bar{b}} = \sqrt{\left(\frac{U(\Delta y)}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{U(\Delta x)}{\Delta x}\right)^2} = 0.00729.$$

$$|U(b)| = \left| \bar{b} \frac{U(b)}{\bar{b}} \right| = +0.1037 \times 0.00729 = 0.00076 \approx 0.0008$$

$$\frac{U(\beta)}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{U(\bar{b})}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{U(\bar{T})}{\bar{T}}\right)^2} = \frac{U(\bar{b})}{\bar{b}}, U(\beta) = \beta \frac{U(\bar{b})}{\bar{b}} = \frac{\beta}{\bar{T}} \frac{U(\bar{b})}{\bar{b}} = \frac{U(\bar{b})}{\bar{T}} = 0.0005 \text{ s}^{-1}$$

故

$$\bar{b} = (-0.1037 \pm 0.0008).$$

$$\beta = -\frac{\bar{b}}{\bar{T}} = (0.0659 \pm 0.0005) \cdot \text{s}^{-1}$$





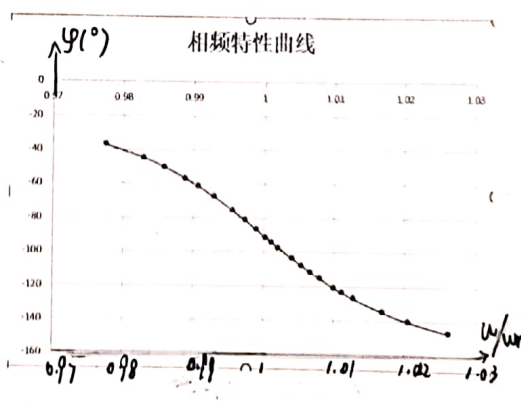
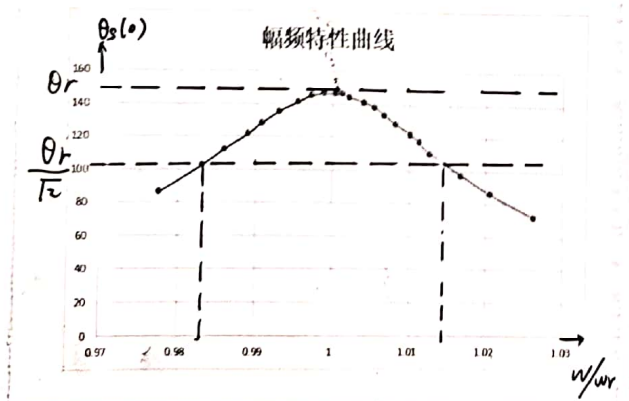
北京航空航天大学 实验报告

学号: _____
 班级: _____
 姓名: _____
 同组者: _____
 日期: _____
 评分: _____

实验名称: _____

表4. 阻尼档位2. 受迫振动

转速指示值 (r/min)	振幅 $\theta_s(^{\circ})$	电机周期 10T(s)	振幅1得弹簧对应的 固有周期 T_0 (s)	频率比 ω/ω_n
4.00	15.328	72	15.327	1.573
4.50	15.412	86	15.412	1.573
4.80	15.467	97	15.467	1.573
5.00	15.518	110	15.519	1.572
5.20	15.545	117	15.544	1.572
5.30	15.562	122	15.562	1.572
5.40	15.583	128	15.583	1.571
5.50	15.603	133	15.603	1.571
5.60	15.624	139	15.624	1.571
5.70	15.643	141	15.644	1.571
5.80	15.666	144	15.665	1.570
5.90	15.679	146	15.680	1.570
5.95	15.692	146	15.693	1.570
6.00	15.714	146	15.714	1.570
6.20	15.740	145	15.740	1.570
6.40	15.779	148	15.779	1.571
6.60	15.820	135	15.820	1.571
6.80	15.856	128	15.856	1.571
6.700	15.896	121	15.896	1.572
7.30	15.944	112	15.944	1.572
7.50	15.993	102	15.992	1.572
8.00	16.041	86	16.090	1.573



由图可知, 共振时, $\theta_s \approx 146^{\circ}$.

若 $|w_0 - w| = \beta$ 振幅为峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处, $\theta = 146^{\circ} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 103.24^{\circ}$. $w_r = \frac{2\pi \cdot 4.002}{T_r} = 0.637$.

得 $\frac{w_1}{w_r} \approx 0.992$, $\frac{w_2}{w_r} = 1.014$.

$w_1 = 0.992 \times 0.637 = 0.631$, $w_2 = 1.014 \times 0.637 = 0.646$.

$\beta = \frac{w_2 - w_1}{2} = 0.0075$
 与通差法比较, 得 $\gamma = \frac{0.0075}{0.0037} = 2.88\%$.



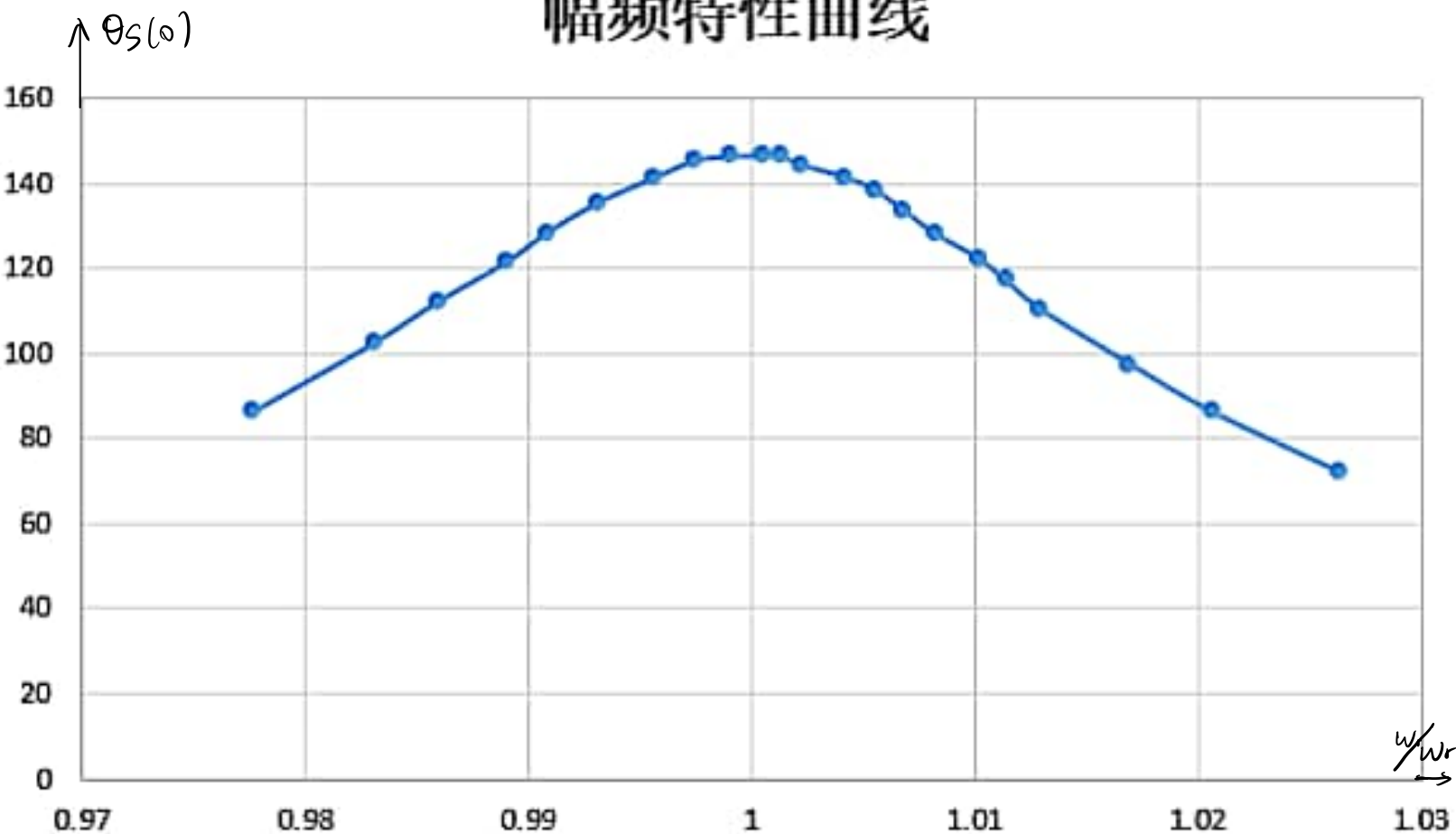
扫描全能王 创建

表4 幅频特性和相频特性测量

电位器刻度值	电动机周期 $T(s)$	摆轮振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$	相位差 $\varphi(^{\circ})$	$\varphi = \arctan \frac{-\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)}$		$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{T}$
4.00	1.5327	72	1.573	148	33.25914228	-146.7408577	1.026293469
4.50	1.5412	86	1.573	140.5	39.81096368	-140.1890363	1.020633273
4.80	1.5467	97	1.573	136.5	45.27401042	-134.7259896	1.017003944
5.00	1.5519	110	1.572	130.5	52.89526269	-127.1047373	1.012951865
5.20	1.5544	117	1.572	125	56.50319432	-123.4968057	1.011322697
5.30	1.5562	122	1.572	121.5	59.29920939	-120.7007906	1.010152937
5.40	1.5583	128	1.571	116.8	64.47988151	-115.5201185	1.008149907
5.50	1.5603	133	1.571	113	68.10156741	-111.8984326	1.006857656
5.60	1.5624	138	1.571	108	72.10694587	-107.8930541	1.005504352
5.70	1.5644	141	1.571	103.5	76.09241847	-103.9075815	1.00421887
5.80	1.5665	144	1.57	98.5	82.51713065	-97.48286935	1.00223428
5.90	1.568	146	1.57	95	85.70969268	-94.29030732	1.00127551
5.95	1.5693	146	1.57	93	88.4965483	-91.5034517	1.000446059
6.00	1.5714	146	1.57	92	-86.99716874	-86.99716874	0.999109075
6.20	1.574	145	1.57	81.5	-81.4829997	-81.4829997	0.997458704
6.40	1.5779	141	1.571	73.5	-75.54601575	-75.54601575	0.995627099
6.60	1.582	135	1.571	66.5	-67.68715127	-67.68715127	0.993046776
6.80	1.5856	128	1.571	60.5	-61.45001773	-61.45001773	0.990792129
7.00	1.5896	121	1.572	54.5	-56.79779414	-56.79779414	0.988928032
7.30	1.5944	112	1.572	49	-50.25063116	-50.25063116	0.985950828
7.50	1.5992	102	1.572	43.4	-44.76084083	-44.76084083	0.982991496
8.00	1.609	86	1.573	35.5	-36.95279978	-36.95279978	0.977625855

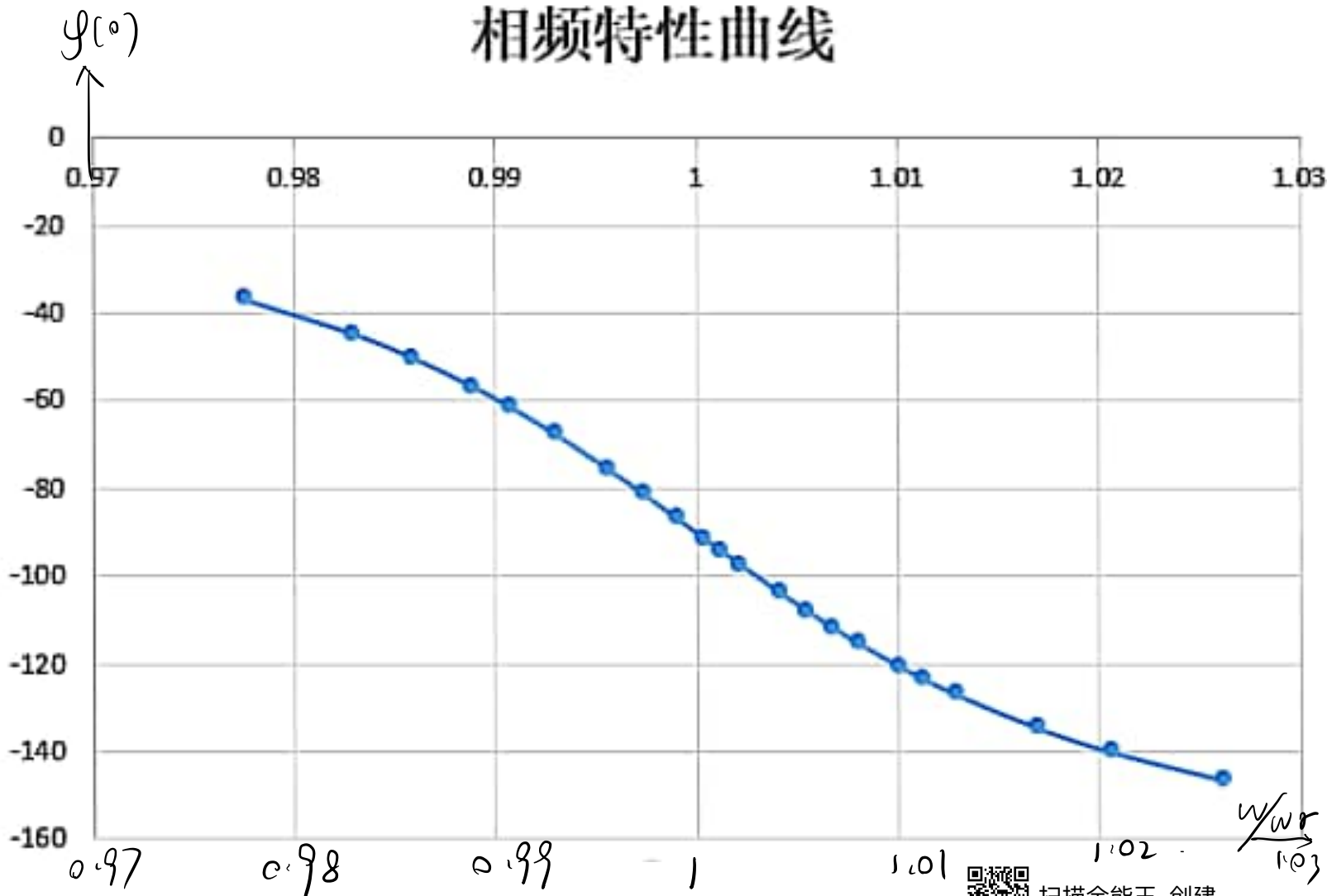


幅频特性曲线



扫描全能王 创建

相频特性曲线



扫描全能王 创建

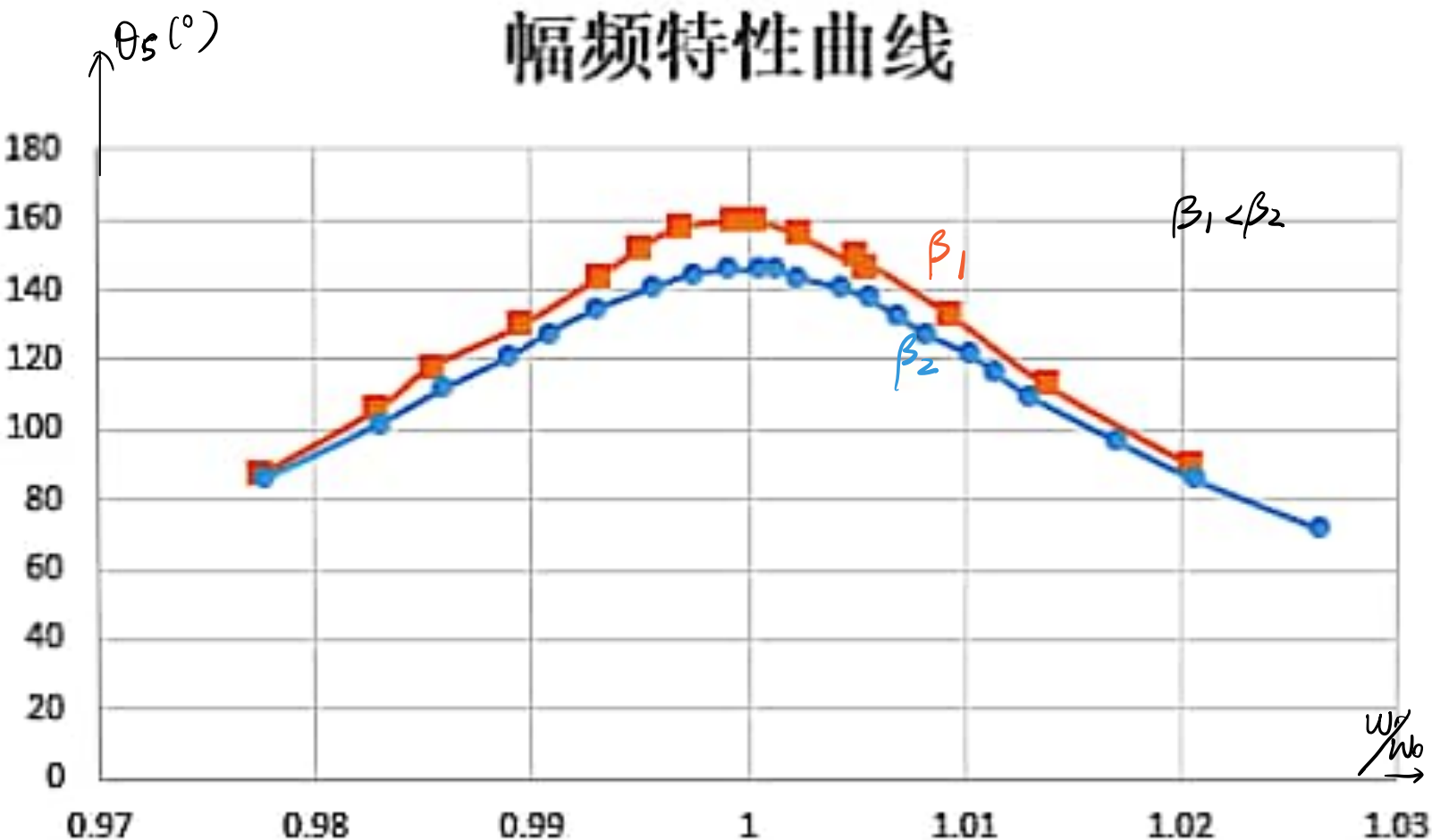
选做：探究不同阻尼下的幅频特性与相频特性。

表5 幅频特性和相频特性测量(阻尼1)

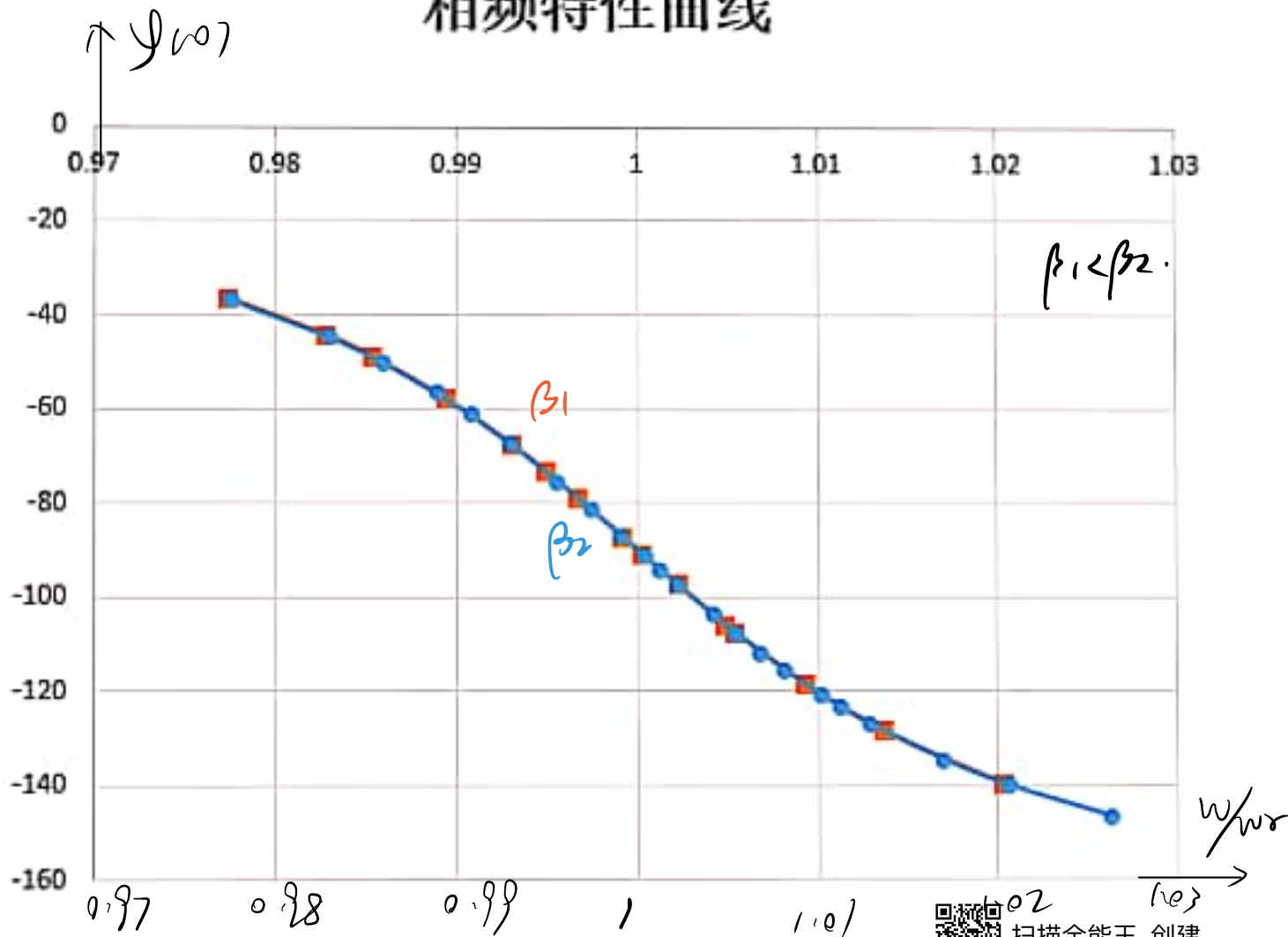
电位器刻度值	电动机周期 $T(s)$	摆轮振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$	相位差 $\varphi(^{\circ})$	$\varphi = \arctan \frac{-\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)}$		$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{T}$
8.00	1.6092	87	1.573	148	-36.80211226	-36.80211226	0.9775043
7.50	1.5993	106	1.572	140.5	-44.65660426	-44.65660426	0.98293003
7.20	1.5953	118	1.572	136.5	-49.14525176	-49.14525176	0.98539459
6.90	1.5876	130	1.571	130.5	-58.27439131	-58.27439131	0.98954396
6.60	1.5818	144	1.571	125	-68.05275375	-68.05275375	0.99317233
6.40	1.5779	152	1.57	121.5	-73.54287005	-73.54287005	0.99499334
6.20	1.574	158	1.569	116.8	-79.38742877	-79.38742877	0.9968233
6.00	1.5701	160	1.569	113	-87.63657509	-87.63657509	0.99929940
5.90	1.5684	160	1.569	108	88.70964686	-91.29035314	1.00038255
5.75	1.5654	156	1.569	103.5	82.29591863	-97.70408137	1.00229973
5.60	1.5605	146	1.569	98.5	72.26010699	-107.739893	1.00544697
5.50	1.5623	150	1.57	95	73.86192496	-106.138075	1.00492863
5.30	1.5565	133	1.571	93	61.39252288	-118.6074771	1.00931577
5.00	1.5507	113	1.572	92	51.27401931	-128.7259807	1.01373573
4.50	1.5416	90	1.573	81.5	40.17176685	-139.8282332	1.02036844



幅频特性曲线



相频特性曲线



扫描全能王 创建

自由振动数据记录表

组数	振幅测量值 θ (度)	周期 T_0 (秒)
1	128	1.571
2	126	1.571
3	125	1.571
4	120	1.572
5	116	1.572
6	112	1.572
7	105	1.572
8	104	1.572
9	102	1.572
10	96	1.573
11	176 \downarrow 160.152.	
12	17 154.	1.569
13	150.	1.570
14	168.	
15	147.	1.570.
16	146.	1.570.
17	142.	1.570.
18	138.	1.571
19	134.	1.571
20	125.	1.571.
21	120.	1.572.

50 ~ 160.

10.187.



22	95	1.573
23	94	1.573
24	88	1.573
25	83	1.573
26	82	1.573
27	80	1.573
28	69	1.573
29	68	1.573
30	67	1.573
31	66	1.573
32	64	1.573
33	60	1.573.
34	58	1.573.
35	56	1.573
36	53	1.573
37	47	1.572.
38	46	1.572.
39	40	1.571
40	34	1.569..

30.

1.570.

10.187,
78.



扫描全能王 创建

复通 阻尼.2.

实验报告

课程名称: _____ 实验日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

班 级: _____ 学生姓名: _____

阻尼.2.

组数.

1

2

3

4

5.

振幅(度) 136

124

112

101

91

组数

6

7

8

9

10.

振幅(度). 82

74

66

60

54.

$$10T = 15.727.5.$$

$$\bar{T} = 1.57275.$$

10.187-

10.



阻光2.

组数	转速指示值	转速指示值 10T(S).	转速指示值 10T(S).	转速指示值 10T(S).	转速指示值 10T(S).	转速指示值 10T(S).
1	6.00	15.714	146	15.714	82.0	
2	5.00	15.518	110	15.518	130.5	
3	4.00	15.328	72	15.327	148.0	
4	8.00	16.091	86	16.090	35.5	
5	7.50	15.993	102	15.992	43.4	
6	7.00	15.896	121	15.896	54.5	
7	6.80	15.856	128	15.856	60.5	
8	6.60	15.820	135	15.820	66.3	
9	6.40	15.779	141	15.779	73.5	
10	6.20	15.740	145	15.740	81.5	
11	5.80	15.666	<u>144</u>	15.665	98.5	
12	5.60	15.624	138	15.624	108.0	
13	5.70	15.643	141	15.646	103.5	
14	5.90	15.679	146	15.680	104.0	
15	5.95	15.692	146	15.693	95.0	
16	5.50	15.603	133	15.603	103.0	
17	5.40	15.583	128	15.583	116.8	
18	5.30	15.562	122	15.562	121.5	
19	4.50	15.412	86	15.412	140.5	
20	5.20	15.545	117	15.544	125.0	
21	4.80	15.467	97	15.467	136.5	
22	7.30	15.966	112	15.966	49.0	

10.187. 10.



组1

组	指标	摆轮 10T(s)	振幅 θs	电抗/可(s)	T ₀ (s)	相位差 ψ(°)
1	8.00	16.093	87	16.092		33.5
2	7.50	15.993	106	15.994		42.0
3	7.20	15.993	118	15.994		47.0
4	6.90	15.976	130	15.877		55.0
5	6.60	15.888	144	15.817		63.5
6	6.40	15.779	152	15.779		70.3
7	6.20	15 15.740	158	15.739		78.5
8	6.00	15.701	160	15.701		87.0
9	<u>5.90</u>	15 15.684	160	15.683		91.5
10	<u>5.75</u>	15.654	156	15.655		99.8
11	5.50	15.605	146	15.604		113.0
12	5.60	15.623	150	15.624		108.3
13	5.30	15.565	133	15.565		121.9
14	5.00	15.507	113	15.508		132.2
15	4.50	15.416	90	15.415		144.3

10.187 停



扫描全能王 创建