

FILTROS FIR E IIR

ARTHUR MEDEIROS GUIMARÃES
DAVIDSON MARCEL SEABRA DANTAS

{Arthur, Davidson} arthurgmwork@outlook.com; davidsonmacel@hotmail.com

RESUMO

Neste artigo, são implementados os filtros de Resposta ao Impulso Finito (Finite Impulse Response – FIR) e Resposta ao Impulso Infinito (Infinite Impulse Response – IIR) em um sinal de áudio com o objetivo de comparar o desempenho de cada filtro submetido aos mesmos parâmetros iniciais.

Palavras-Chave

FILTROS FIR, IIR e PDS.

1. INTRODUÇÃO

Um problema recorrente no processamento digitais de sinais (PDS) são os ruídos oriundos da aquisição de sinais analógicos. Os ruídos são indesejados, pois dificultam o efetivo processamento de sinais. Os ruídos provocam uma deformação no sinal, de tal forma que dificultam a extração das características do mesmo. Portanto é recomendável realizar a filtragem de sinais ruidosos. De acordo com Fourier, um sinal pode ser representado pela soma de senos e cossenos, dessa forma os ruídos podem ser classificados como adição de senos e cossenos de frequências e amplitudes distintas em um sinal, sem agregar informações úteis ao mesmo. Ao analisar o espectro da frequência de um sinal pode-se classificar o ruído e a informação útil no sinal, portanto torna-se possível segregar e descartar as frequência do ruído, esse processo é chamado de filtragem e os reponsáveis pela filtragem são os filtros. Os filtros são classificados em dois tipos: (i) Filtros Analógicos e (ii) Filtros Digitais, os filtros analógicos realizam a filtragem do sinal no domínio do tempo e os filtros digitais realizam a filtragem do sinal no domínio da frequência. No âmbito dos filtros digitais, há os filtros de Resposta ao Impulso Finito (Finite Impulse Response – FIR) e o filtro de Resposta ao Impulso Infinito (Infinite Impulse Response – IIR). Neste trabalho, utiliza-se os filtros FIR e IIR para realizar a filtragem de um sinal de áudio, com intuito de compreender o funcionamento dos filtros e, bem como, comparar a eficácia dos mesmo.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Transformada de Fourier Discreta

Para analisar um sinal no domínio da frequência, é utilizado a transformada de fourier [1]. No tempo discreto a transformada de fourier pode ser expressa pela Equação 1.

$$x[k] = \sum_{n=0}^N x[n]W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1; \quad (1)$$

No qual:

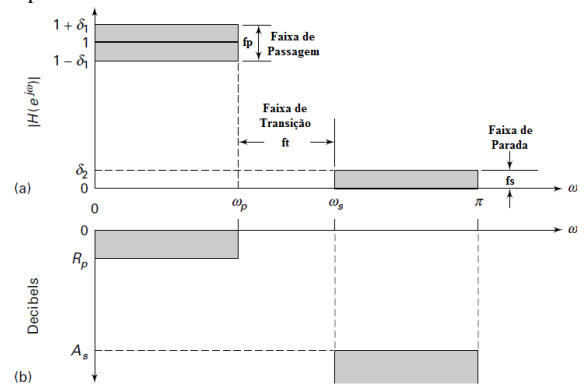
$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (2)$$

2.2 Filtros Digitais

Filtros digitais são equações que operam digitalmente em um sinal amostrado para atenuar as frequências indesejadas de tal forma que o sinal resultante seja apenas o desejado. Para implementar um filtro ideal, é necessário aplicar uma frequência de corte que será o mediador entre as frequência que vão ou não ser atenuadas. Um filtro real diferente de um filtro ideal, não filtra o sinal de entrada no instante exato da frequência de corte, há uma frequência de transição (f_t) nos intervalos dos filtros. A frequência de transição é definida pelo pela diferença da

frequência de passagem (f_p) e a frequência de parada (f_s). A divisão da soma da frequência de parada com a frequência de passagem, resulta na frequência de corte (f_c) do filtro real. Outros fatores a serem considerados em um filtro real são os ripples da faixa de passagem (R_p) e os ripples da faixa de parada (A_s). A Figura 1 apresenta uma imagem representando cada variável na resposta de um filtro.

Figura 1: Modelo representativo da resposta de um filtro, apresentando as variáveis influentes em um filtro real.



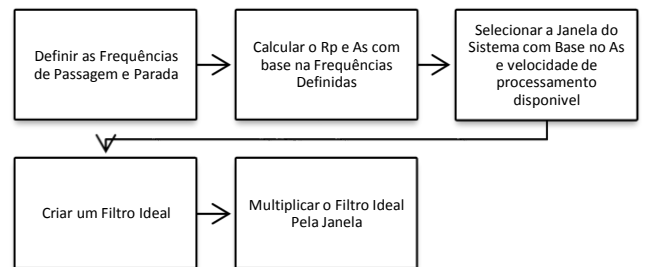
Fonte: Adaptado de Proakis (2012) [1].

Os diversos filtros digitais existentes, produzem uma resposta diferente para cada uma das variáveis apresentadas. Os filtros digitais podem ser divididos em FIR e IIR.

2.3 FIR

Os filtros de duração finita ao impulso (FIR), são filtros apenas digitais de fácil implementação, entretanto necessitam de um considerável custo computacional para filtrar as características desejadas do sinal com uma faixa de transição ideal. Para criar um filtro FIR real, é necessário seguir os passos apresentados no organograma da Figura 2.

Figura 2: Organograma do processo de criação de um filtro real.



Fonte: Autoria própria.

Para definir o R_p e A_s em um filtro FIR, é utilizado as Equações 3 e 4.

$$R_p = -20 \log_{10} \left(\frac{1 - \sigma_1}{1 + \sigma_1} \right) > 0 (\approx 0) \quad (3)$$

$$A_s = -20 \log_{10} \left(\frac{\sigma_2}{1 + \sigma_1} \right) > 0 (>> 1) \quad (4)$$

A resposta ao impulso dos filtros ideais possui uma duração infinita e não causal. As janelas são um artifício utilizado para “janelar” a resposta ao impulso do filtro ideal com o viés obter um filtro de resposta finita e causal ao impulso. Cada janela possui uma resposta diferente em decibéis para a atenuação do ruído, e um custo computacional diferente para executar a atenuação. Os filtros mais comuns a serem implementados são: Retangular, Bartlett, Hann, Hamming, Blackman. A Tabela 1

apresenta as janelas citadas anteriormente e suas características. Tabela 1: Sumario das janelas que são comumente utilizadas e suas funções características. $M = \frac{f_t}{\left(\frac{\text{frequência de amostragem}}{2}\right)}$

Nome da Janela	Ordem Aproximada	Ordem Exata	Atenuação Mínima da Faixa de Parada
Retangular	$\frac{4\pi}{M}$	$\frac{1,8\pi}{M}$	21 dB
Bartlett	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,1\pi}{M}$	25 dB
Hann	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,2\pi}{M}$	44 dB
Hamming	$\frac{8\pi}{M}$	$\frac{6,6\pi}{M}$	53 dB
Blackman	$\frac{12\pi}{M}$	$\frac{11\pi}{M}$	74 dB

Fonte: Adaptado de Proakis (2012).

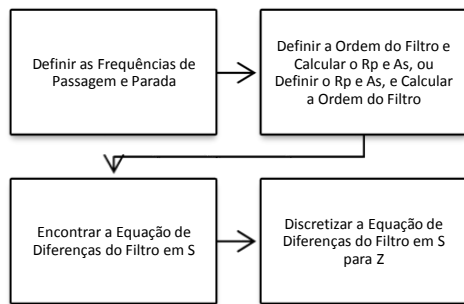
A atenuação mínima da faixa de parada (A_s) é um dos fatores determinantes na escolha de uma janela. Se o “ A_s ” for 19, por exemplo, todos as janelas estarão aptas a serem utilizadas para filtrar o sinal desejado, entretanto se o “ A_s ” for 23, por exemplo, a janela retangular não seria o suficiente para filtrar devidamente o sinal desejado. Após definido os possíveis filtros para o projeto, é analisado qual retornar o melhor custo computacional dentro das especificações de A_s e R_p . A ordem do filtro pode ser calculada pela coluna 3 da Tabela 1, que apresenta a função para a ordem de cada filtro.

Após a escolha da janela a ser utilizada, o próximo passo é multiplicar a janela por um filtro ideal para tornar o filtro causal e finito ao impulso.

2.4 IIR

Os filtros duração infinito ao impulso (IIR), são filtros projetados para como filtros reais, mas implementados de forma digital, estes filtros são um pouco mais complexo em sua implementação, porém oferecem um bom desempenho em conjunto de um baixo custo computacional. Para projetar o filtro IIR, é necessário seguir os passos apresentados no organograma da Figura 3.

Figura 3: Organograma da criação de um filtro IIR.



Fonte: Autoria própria.

Existem diversos filtros IIR de alto desempenho com funções de transferência já catalogados, o filtro Butterworth é um exemplo clássico deste tipo de filtros. Este filtro possui um *ripple* quase desprezível na faixa de passagem e na faixa de parada. As frequências definidas são normalizadas na metade da frequência de amostragem. Se a ordem do filtro for previamente definida, é possível calcular o R_p e A_s que aquela ordem irá proporcionar para o filtro Butterworth, pelas equações 5 e 6.

$$R_p = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right) \quad (5)$$

$$A_s = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right) \quad (6)$$

Entretanto, caso o R_p e A_s , estejam previamente definidos, é possível calcular a ordem que seu filtro irá precisar ter para realizar o processo de filtragem no R_p , A_s , f_p e f_s definidos. A Equação 7 apresenta a função para encontrar a ordem do filtro.

$$M = \frac{\log_{10} \left[\left(\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2} \right) / (10^{A_s/10} - 1) \right]}{2 \log_{10} \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)} \quad (7)$$

O filtro butterworth possui uma resposta na frequência definida pela Equação 8.

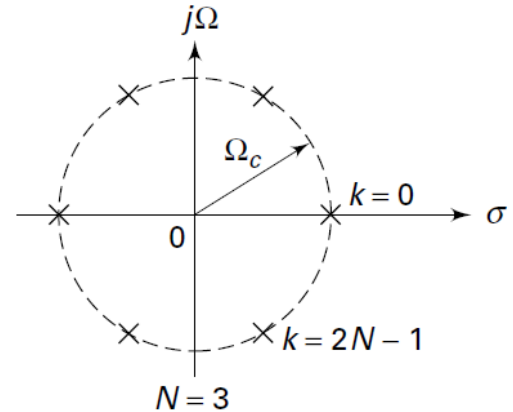
$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}} \quad (8)$$

Para encontrar a estabilidade do sinal da equação de diferenças do filtro, é necessário mapear os polos e zeros do sinal, utilizar todos os polos presentes no semi-ciclo esquerdo. A Equação 9 apresenta o metodo de mapear os polos e zeros em S para um filtro de ordem par, e a Equação 10 apresenta a equação para mapear os polos e zeros para um filtro de ordem impar. A Figura 4 apresenta um exemplo de polos e zeros de um filtro butterworth.

$$p_k = \Omega_c e^{jk\pi/N} \quad (9)$$

$$p_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right)} \quad (10)$$

Figura 4: Mapeamento de polos para um filtro de ordem 3.



Fonte: Proakis (2012).

O filtro Butterworth é um filtro já catalogado, incluindo sua equação de diferenças em S. Como dito anteriormente, para garantir a estabilidade do sinal, é necessário utilizar apenas os polos no semiciclo esquerdo do sinal. Desta forma, é utilizado a Equação 11 para projetar a equação de diferenças do filtro em S.

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{LPC \text{ poles } (s - pk)} \quad (11)$$

Para transformar o filtro projetado para uma Equação de diferenças em S, é necessário discretizar para Z. O plano discreto em Z refere-se ao espaço amostrado, no qual a função de transferencia do sinal respeita os valores da função como amostras unicas no tempo discreto. Um objetivos de transformar o sinal de S para Z é o mapeamento do plano complexo, no qual garante que cada variável seja linear ou bilinear em S e Z. A Equação 12 apresenta uma função para a discretização bilinear de S para Z.

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad (12)$$

3. METODOLOGIA

3.1 Sinal de Entrada

Para teste dos Filtros FIR e IIR foi utilizado um áudio de aproximadamente 5 segundos, com a seguinte frase: “O rato roeu a roupa do rei de Roma”. Esse áudio foi gravado numa taxa de amostragem de 16.000 Hz, 16 bits e canal mono.

Após a análise do espectro de frequência do sinal de entrada, observa-se que as frequências da informação útil do sinal de voz alcança cerca de 2 KHz. Para representar o ruído foi utilizado um áudio com frequência acima de 3,6 KHz até pouco menos que 5 KHz. Os parâmetros do filtro FIR foram os mesmos utilizados no filtro IIR, a fim de prover uma comparação entre os mesmos. A frequência de passagem utilizada foi de 2 KHz, a frequência de corte foi de 3,550 KHz, a frequência de corte foi de 2,775 KHz, a frequência de transição de 1,550 KHz e a ordem 10 para ambos os filtros.

3.2 FIR

Utilizando os parâmetros de frequência de passagem e parada definidos no programa, é possível definir os parâmetros R_p e A_s , do filtro utilizando as Equações 5 e 6 respectivamente. O R_p encontrado de 0,2015 e o A_s encontrado foi de 19,9966. Após definir a atenuação mínima da faixa de parada (A_s), é possível definir a janela a ser utilizada no projeto do filtro ao comparar o A_s encontrado com a coluna 4 da Tabela 1 (atenuação mínima da faixa de parada). O A_s encontrado é de 19,9966, este valor está abaixo dos valores máximos de atenuação que cada janela pode oferecer, ou seja, todas as janelas podem ser utilizadas no projeto deste filtro. Diante disto, foi escolhido a Janela Retangular, pois ela oferece um menor custo computacional para implementação, o que aumentaria a viabilidade da implementação do filtro se necessário. Utilizando a fórmula da coluna 3 da Tabela 1, é possível calcular a ordem do filtro, que resultou em 10.

A janela retangular selecionada, foi multiplicada por um filtro ideal, apresentado na Equação 13, com a frequência de corte de 2,775 KHz.

$$h_{ideal} = w_c \frac{\sin(\pi w_c m)}{\pi w_c m} \quad (13)$$

No qual:

$$w_c = \frac{f_c}{frequência\ de\ amostragem} \quad (15)$$

$$m = (0 \dots M - 1) - \left(\frac{M - 1}{2}\right) \quad (16)$$

Ao multiplicar o filtro ideal pela janela retangular, é possível encontrar os coeficientes do filtro real. Os coeficientes do filtro real resultantes da multiplicação do filtro ideal com a janela retangular, estão apresentados na Equação 17.

$$\begin{aligned} y[n] = & -0,069x[n] - 0,056x[n - 1] \dots \\ & \dots + 0,05x[n - 2] + 0,2x[n - 3] + 0,33x[n - 4] \dots \\ & \dots + 0,33x[n - 5] + 0,2x[n - 6] + 0,05x[n - 7] \dots \\ & \dots - 0,056x[n - 8] - 0,069x[n - 9] \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 IIR

O filtro IIR utilizado neste projeto, foi o butterworth, pois ele elimina quase que por completo o *ripple* na faixa de passagem e faixa de transição. Para comparar o filtro IIR com o filtro FIR, foi implementado um filtro IIR de ordem 10, para projetar um filtro de ordem 10 com as mesmas faixa de passagem e e faixa de parada que o FIR, foram manipulados os R_p e A_s que de tal forma que justificassem a ordem 10 do filtro. Utilizando as Equações 7 e 8, foi possível encontrar um R_p de 6,2 e um A_s de 12,39.

Como já mencionado no referencial teórico, para projetar o filtro IIR, é necessário projetar o filtro real em S. Utilizando a Equação 11, foi possível mapear os polos e zeros do do filtro

de modo que a equação de diferenças do filtro respeite os limites das frequências de passagem e parada apresentado. Esta equação de diferenças é apresentada na Equação 18.

$$H(s) = \frac{1}{s^{10} + 6,3s^9 + 20,4s^8 + 42,8s^7 + 64,8s^6 \dots \dots + 74,2s^5 + 64,8s^4 + 42,8s^3 \dots \dots + 20,4s^2 + 6,3s + 1} \quad (18)$$

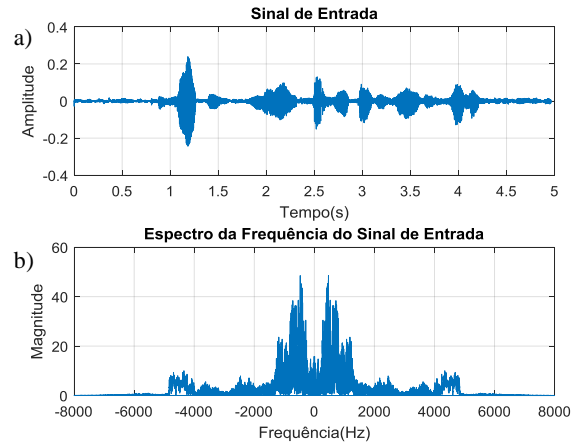
Após obter a equação de diferenças em S do filtro butterworth, é utilizado o método bilinear de discretização apresentado na Equação 12. A equação de diferenças em Z resultante da discretização pelo método bilinear é apresentado na Equação 19.

$$H(z) = \frac{10^3(0,04z^{10} + 0,4z^9 + 2z^8 + 5,2z^7 \dots \dots 9,1z^6 + 11z^5 + 9,1z^4 + 5,2z^3 \dots \dots 2z^2 + 0,4z + 0,04)}{z^{10} - 4,0z^9 + 8,4z^8 - 11z^7 + 10z^6 \dots \dots - 6,5z^5 + 3z^4 - z^3 \dots \dots - 0,2z^2 - 0,03z + 0,002} \quad (19)$$

4. RESULTADOS

O áudio utilizado para este projeto possui componentes úteis de sinal na faixa de frequência de 0 a cerca de 2kHz, e ruídos de 3,6 KHz até cerca de 5 KHz. A Figura 5 apresenta o sinal de entrada e seu espectro da frequência.

Figura 5: a) Sinal de Entrada dos Filtros FIR e IIR; b) Espectro da frequência do sinal de entrada.



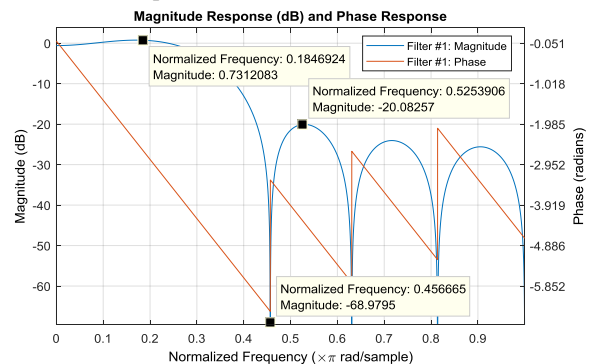
Fonte: Autoria própria.

4.1 Resultados FIR

Antes de analisar o resultado do processo de filtragem do sinal de entrada no filtro FIR, é analisado as respostas do filtro em decibéis e na magnitude, além de visualizar os polos do filtro. A Figura 6 apresenta a resposta do filtro em decibéis em conjunto com a fase.

Figura 6: Resposta do filtro FIR normalizado na frequência.

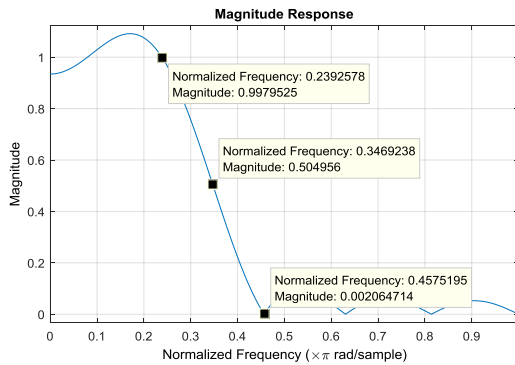
$R_p = 0,2015$; $A_s = 19,9966$.



Fonte: Autoria própria.

Analisando a Figura 6, é possível perceber que o pico da maior atenuação da magnitude em dB é de -20,08 , ou seja, o módulo deste valor é inferior ao As (19,9966) definido pelo filtro. Portanto a janela conseguiu garantir a atenuação mínima da faixa de parada do sinal, entretanto, o *ripple* encontrado na faixa de passagem (0,7312) foi superior ao definido no filtro (0,2015). O sistema é linear no processo de passagem das frequências permitidas pelo filtro, com certas variações na representação dos ruídos no filtro. A Figura 7 apresenta a resposta do filtro FIR normalizada na frequência.

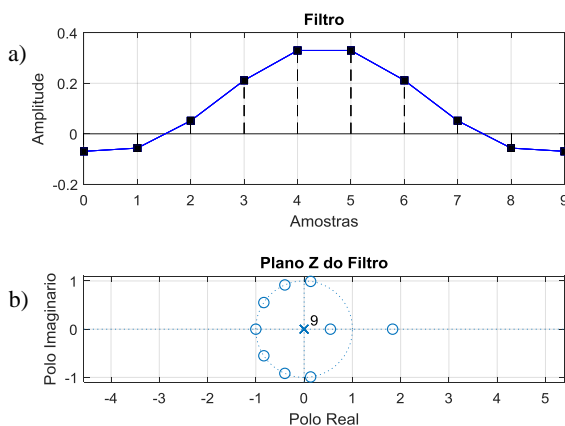
Figura 7: Resposta do filtro FIR normalizado na frequência.
 $W_p = 0,25$; $W_s = 0,4437$; $W_c = 0,3469$.



Fonte: Autoria própria.

Analisando a Figura 7, é possível visualizar que as frequências de passagem, corte e para estão bastante similar as definidas pelo programa. A frequência de passagem normalizada definida foi de 0,25 , enquanto a encontrada pelo programa foi cerca de 0,239. A frequência de parada normalizada definida foi de 0,4437 , enquanto a encontrada pelo programa foi de 0,4575. A frequência de corte normalizada definida foi de 0,3469 , enquanto a encontrada pelo programa foi de 0,3469. Portanto, pode-se afirmar que o filtro FIR está filtrando valores de frequências próximos as frequências definidas pelo programa. A Figura 8 apresenta os coeficientes do filtro FIR e o diagrama de polos e zeros do sistema.

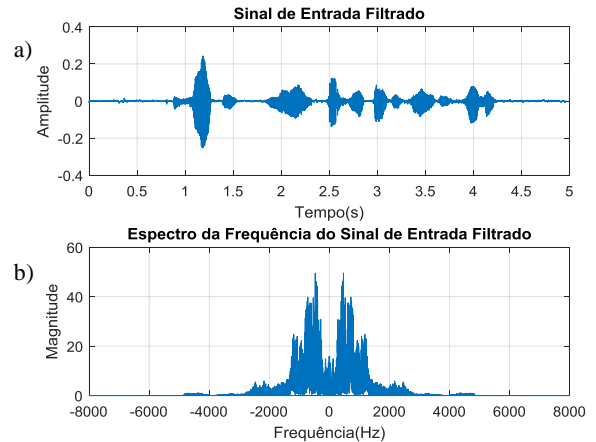
Figura 8: a) Coeficientes do Filtro FIR; b) Diagrama de Polos e Zeros.



Fonte: Autoria própria.

Analisando a Figura 8 a), é possível visualizar os coeficientes do filtro no qual apresenta um filtro descentralizado e simétrico. A Figura 8 b) apresenta o diagrama de polos do filtro, o filtro FIR não possui polos, um zero dentro dos zeros existentes no sistema zero não é linear, pois está fora do círculo unitário. A Figura 9 apresenta o sinal filtrado e o seu espectro da frequência.

Figura 9: a) Sinal de entrada Filtrado FIR; b) Espectro da Frequência Filtrado FIR.



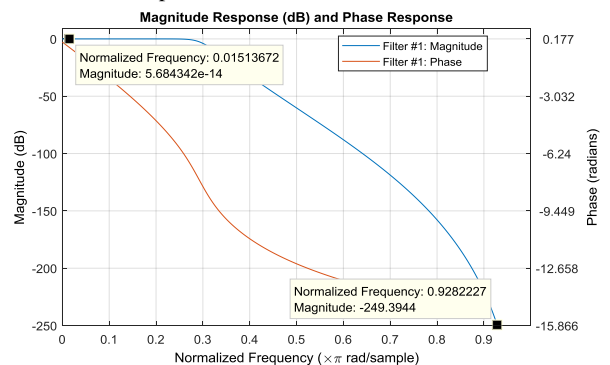
Fonte: Autoria própria.

A Figura 9 a) apresenta o sinal de entrada filtrado, e a Figura 9 b) apresenta o espectro da frequência do sinal filtrado. Ao comparar a Figura 9 b) com a Figura 5 b), é possível visualizar que as frequências acima de 3550 Hz foram bastante atenuadas, entretanto devido ao *ripple* da faixa de rejeição (As), ser alto, a atenuação não foi suficiente para neutralizar a total influência do ruído no sinal de entrada.

4.2 Resultados IIR

Antes de analisar o resultado do processo de filtragem do sinal de entrada no filtro IIR, é analisado as respostas do filtro em decibéis e na magnitude, além de visualizar os polos do filtro. A Figura 10 apresenta a resposta do filtro em decibéis em conjunto com a fase.

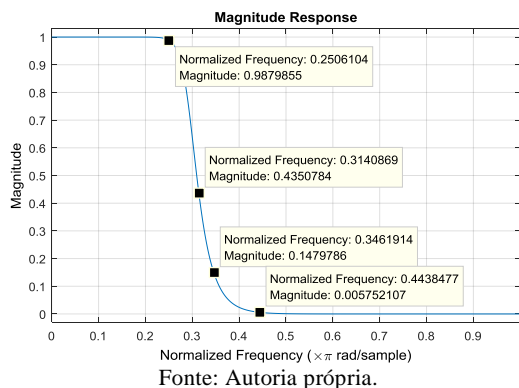
Figura 10: Resposta do filtro FIR normalizado na frequência.
 $R_p = 6,2055$; $A_s = 12,3969$.



Fonte: Autoria própria.

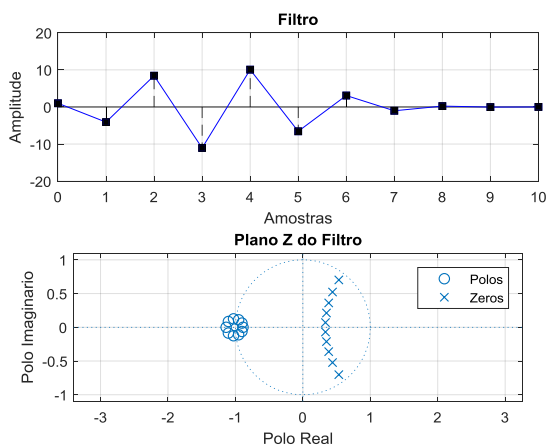
Analisando a Figura 10, é possível visualizar atenuação da magnitude em dB não é linear, entretanto não produz *ripple*, entretanto a atenuação em dB é extremamente alta comparado com a do filtro FIR. A fase do filtro não é linear comparado com a atenuação em dB do filtro. A Figura 11 apresenta a resposta do filtro FIR normalizado na frequência.

Figura 11: Resposta do filtro FIR normalizado na frequência.
 $W_p = 0,25$; $W_s = 0,4437$; $W_c = 0,3469$.



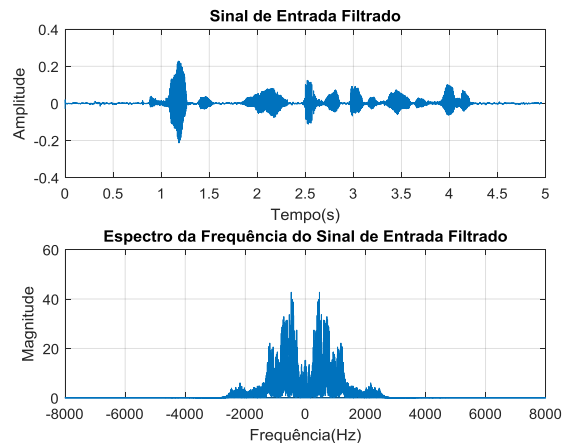
Analisando a Figura 11, é possível visualizar que as frequências de passagem, corte e para estão bastante similar as definidas pelo programa. A frequência de passagem normalizada definida foi de 0,25 , enquanto a encontrada pelo programa foi cerca de 0,25. A frequência de parada normalizada definida foi de 0,4437 , enquanto a encontrada pelo programa foi de 0,4438. A frequência de corte normalizada definida foi de 0,3469 , enquanto a encontrada pelo programa foi de 0,314. Portanto, pode-se afirmar que o filtro IIR esta filtrando valores de frequências próximos as frequências definidas pelo programa, principalmente frequências mais proximas que as frequências encontradas pelo FIR, exceto o a frequência de corte. A Figura 12 apresenta os coeficientes do filtro IIR e o diagrama de polos e zeros do sistema.

Figura 12: a) Coeficientes do Filtro IIR; b) Diagrama de Polos e Zeros.



Analisando a Figura 8 a), é possível visualizar os coeficientes do filtro no qual apresenta um filtro descentralizado e assimétrico. A Figura 8 b) apresenta o diagrama de polos do filtro, o filtro IIR diferente do filtro FIR possui polos e zeros, dentre os zeros existentes alguns dos zeros não garantem a linearidade do sistema, sistema dos zeros não é linear, pois alguns zeros estão fora do círculo unitário. Contudo, todos os polos estão dentro do círculo unitário da resposta do sistema. A Figura 13 apresenta o sinal filtrado e o seu espectro da frequência.

Figura 13: a) Sinal de entrada Filtrado IIR; b) Espectro da Frequência Filtrado IIR.



A Figura 13 a) apresenta o sinal de entrada filtrado, e a Figura 13 b) apresenta o espectro da frequência do sinal filtrado. Ao comparar a Figura 13 b) com a Figura 5 b), é possível visualizar que as frequências acima de 3550 Hz foram extremamente atenuadas, o trecho em que havia um ruído foi quase que eliminado do sinal.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram utilizados os filtros FIR e o IIR para realizar a filtragem de um mesmo sinal de áudio. Ambos os filtros utilizados possuem ordem 10 e os mesmos parâmetros de frequência de passagem (f_p), frequência de parada (f_s), frequência de corte (f_c) e frequência de transição (f_t), esses parâmetros foram iguais para realizar a comparação entre os dois filtros.

Com o resultados obtidos por intermédio dos experimentos realizados nesse trabalho, conclui-se que o filtro FIR é de uma implementação mais fácil, porém para realizar a mesma filtragem do filtro IIR faz-se necessário utilizar uma ordem maior, por conseguinte o filtro FIR possui um alto custo computacional. Desta forma, o filtro IIR possui um grau maior de complexidade para implementação que o filtro FIR, contudo o filtro IIR consegue realizar a filtragem do sinal com uma ordem notoriamente menor que a do filtro FIR, portanto possui um menor custo computacional. Também observou-se que a resposta em fase do filtro FIR tende a ser linear enquanto a do IIR não possui uma linearidade.

Ambos os filtros foram capazes de exercer uma filtragem do sinal, à visto disso a escolha da utilização de um tipo de filtro é dever do projetista, no qual deverá escolher o filtro que possui um melhor custo-benefício para o seu projeto.

6. REFERÊNCIAS

- [1] PROAKIS, J.G.; INGLE, V.K.; *Digital Signal Processing*, Cengage Learning, 3ª Edição, 2012, cap 6 an 8.