

Geometria analítica

Anotações Práticas

Vinicius Faria

January 23, 2022

Contents

1	Espaços vetoriais e subvetoriais	1
1.1	Espaços vetoriais	1
1.2	Subespaços vetoriais	2
1.2.1	Definições	2
1.2.2	Teoremas	3

1 Espaços vetoriais e subvetoriais

1.1 Espaços vetoriais

Dado um conjunto V , V é um espaço vetorial real caso satisfazer as condições:

OBS: Nas equações abaixo, $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in R$

1. $x + y = y + x$ (Associatividade)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Comutatividade)
3. $\exists \theta \in V / x + \theta = \theta + x = x$ (Existencia do vetor nulo)
4. $-x \in V / x + (-x) = \theta$ (Elemento simétrico da soma)
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (Distributividade)
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (Distributividade)
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (Associatividade)
8. $1x = x$ (Elemento neutro).

Um espaço vetorial que contém os numeros complexos é denominado **espaço vetorial complexo**

A partir das expressões acima, é possível extrair as afirmações:

1. $\alpha\theta = \theta$
2. $0x = \theta$
3. $\alpha x = \theta$, então $\alpha = 0$ ou $x = \theta$
4. $(-\alpha)x = \alpha(-x)$

Alguns exemplos de espaços vetoriais, considerando operações normais:

- $V = K_n(x) = P_r(x)/r \leq n$
- $V = C[a, b]$ **OBS:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = f(x)$
- $V = R^n$
- $V = M_{m \times n}$

Não são espaços vetoriais:

- $V = Z$
- $V =$ Conjunto de polinômios de grau 3
- Alguns conjuntos com operações diferentes do normal. Ex: $\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha x_2)$

1.2 Subespaços vetoriais

1.2.1 Definições

Dentro de um espaço vetorial V , há subconjuntos W que são espaços vetoriais menores, contidos em V . **Todo espaço vetorial possui 2 subespaços triviais:** Sub. nulo e ele mesmo. Critérios para subespaços vetoriais:

1. $\theta \in W$
2. $\forall x, y \in W \rightarrow x + y \in W$
3. $\forall \alpha \in R, \forall x \in W \rightarrow \alpha x \in W$

São subespaços:

- Soluções lineares homogêneas
- Qualquer sistema que adote multiplicações/adições usual com a presença do vetor nulo

Não são subespaços:

- Geralmente sistemas com alguma multiplicação/adição fora do comum ou muito específicas (ex. Conjunto de polinômios de terceiro grau)
- $u + v = (u_1, u_1^2) + (v_1, v_1^2)$

1.2.2 Teoremas

Interseccão de subespaços. Dado W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V , $W_1 \cap W_2$ também é subconjunto de V . Ex - Matriz triangulares inferiores e superiores.

Soma de subespaços. Dado W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V , $W_1 + W_2$ também é subconjunto de V . Caso $W_1 \cap W_2 = \theta$, a soma é chamada de **soma direta**, denotada por $W_1 \oplus W_2$