Cálculo 2

Anotações Práticas

Vinicius Faria

January 24, 2022

Contents

1 Funções Vetoriais

Funções cuja imagem gerada é um vetor. R^2 *e* R^3 são chamadas **funções coordenadas** e t é denominado **variável livre**

$$\alpha(t) = (2t + 1, 1 - t)$$

1.1 Esboço de curvas

Para esboçar curvas, isolar o x e y (e potencialmente z) em função de t, formando a imagem da curva. A curva abaixo descreve um círculo.

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

1.2 Equações paramétricas de retas

Dado uma curva que passa por A e B, é possível definir sua função utilizando:

$$\alpha(t) = (1-t)A + tB = A + t(B-A)$$

Interpretação geométrica: parametrização da reta que contém o ponto A e é parelela ao vetor não nulo (B-A)

1.3 Parametrizações

Uma função vetorial é uma parametrização da curva que é a imagem da função. Uma curva pode ser parametrizada de várias maneiras, como círculos.

1.4 Limites e Continuidade

Resumidamente, para calcular limites de funções vetoriais, basta calcular o limite de cada função de coordenada separadamente.

Da mesma forma, para verificar a continuidade da função vetorial, basta conferir que todas as funções de coordenadas sejam contínuas.

OBS: Uma função é contínua quando em seu domínio:

- Não possui assíntotas verticais
- Não possui "furos"
- Não possui "pulos"

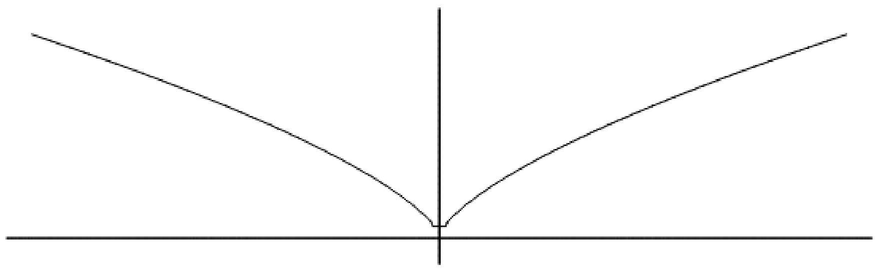
OBS2: $\|\alpha(t)\|$ denota o módulo do vetor.

1.5 Derivadas de funções vetoriais

A derivada de uma função vetorial é interpretada como o **vetor tangente ao traço de α no ponto** $\alpha(a)$. Obtida por derivar cada coordenada separadamente

$$\alpha(t)' = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ...)$$

Quando a derivada é θ, gráfico apresenta uma "cúspide". Essa cúspide, no contexto de funções vetoriais, **não significa que a função é indiferenciável!!!** E sim que o vetor da derivada é equivalente ao vetor nulo.



1.5.1 Retas tangentes

Para calcular a reta tangente à função vetorial no ponto a, a derivada é a reta e as coordenadas de α no ponto a é o ponto inicial.

$$r(t) = t\alpha'(a) + \alpha(a)$$

No caso de **coordenadas polares** (tomada por comprimento e angulo de um vetor em vez de coordenadas usuais), utiliza-se:

$$\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

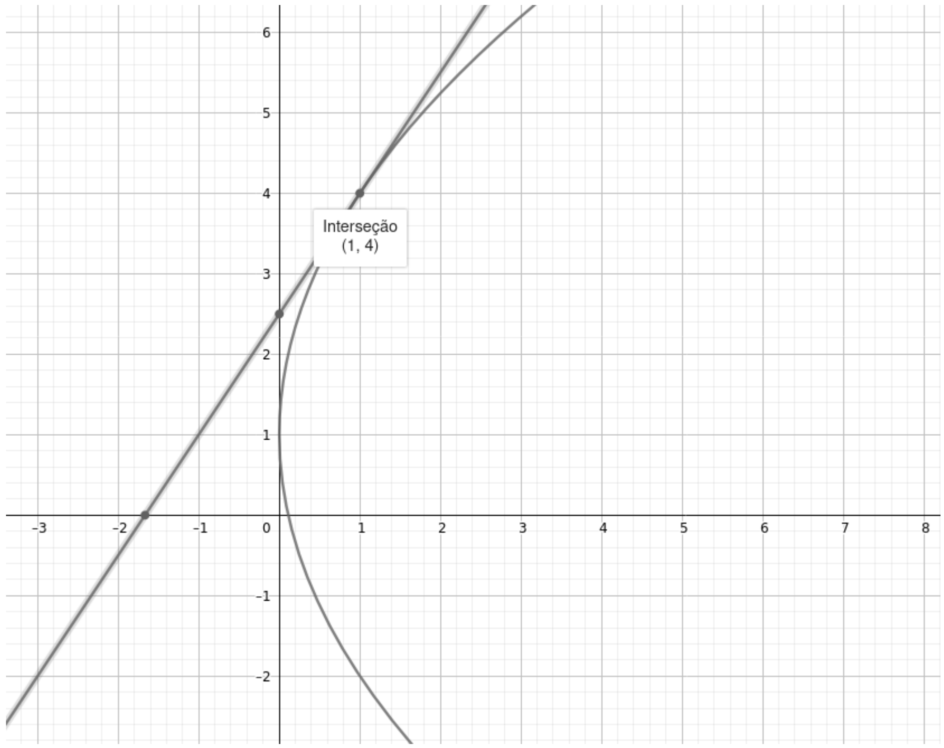
Exemplo:

$\alpha(t) = (t^2, 3t+1) \to \alpha'(t) = (2t, 3)$

Então, a reta no ponto $t = -1$ será

$t(2 \cdot -1, 3) + ((-1)^2, 3(-1)+1) \to (2t+1, 3t+4)$

No geogebra:



Outro exemplo importante

Dado a curva $\alpha(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 4t)$, encontrar ponto(s) onde a curva é tangente à reta $r(t) = (3t + 3, t - 4)$

Passo-a-passo: Derivar a curva, encontrar pontos em que essa derivada é paralela ao vetor diretor da reta, isto é: $\alpha'(t) = \lambda(3, 1)$. Solucionar num sistema linear. (Gabarito $t = -1, t = 3$)

1.6 Integrais de funções vetoriais

Integrar uma função vetorial é feito da mesma maneira que na derivação: integrando um a um. Realizando a integração indefinida, obtemos a função primitiva de cada uma das coordenadas, sendo útil para descobrir a velocidade através da aceleração, por exemplo. Por outro lado, a integração definida resulta num vetor. Uma nomenclatura comum no caso da integração até R^3 é separar as coordenadas em $\vec{i}, \vec{j}$ *e* $\vec{k}$ para representar x,y e z.

$$\int_a^b \alpha(t)\ dt = \int_a^b \alpha_1(t)\ dt\ \vec{\mathbf{i}} + \int_a^b \alpha_2(t)\ dt\ \vec{\mathbf{j}} + \int_a^b \alpha_3(t)\ dt\ \vec{\mathbf{k}}$$

1.6.1 Comprimento de uma curva

Tomando a ideia de módulo de vetores com o somatório da integral, levando em conto que α é uma função de classe C^1 (Continua e derivável em todos os pontos) tomamos a fórmula:

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt \ , \ |\alpha'(t)| = \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}$$

1.6.2 Curvas em coordenadas polares

A fórmula do comprimento de uma curva dada, caso $r(\theta)$ seja de classe C^1, pela equação $r = r(\theta)$ é:

$$L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2 d\theta}$$

A fórmula da área da região delimitada por $0 \leq r \leq r(\theta), a < \theta < b$ é

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta$$