Geometria analítica

Anotações Práticas

Vinicius Faria

February 24, 2022

Contents

1 Espaços vetoriais e subvetoriais

1.1 Espaços vetoriais

Dado um conjunto V, V é um espaço vetorial real caso satisfazer as condições: **OBS:** Nas equações abaixo, $\forall x, y, z \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in R$

1. $x + y = y + x$ (Associatividade)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Comutatividade)
3. $\exists \theta \in V \ / \ x + \theta = \theta + x = x$ (Existencia do vetor nulo)
4. $-x \in V \ / \ x + (-x) = \theta$ (Elemento simétrico da soma)
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (Distribuitividade)
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (Distruibitividade)
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (Associatividade)
8. $1x = x$ (Elemento neutro).

Um espaço vetorial que contém os numeros complexos é denominado **espaço vetorial complexo**

A partir das expressões acima, é possivel extrair as afirmações:

1. $\alpha\theta = \theta$
2. $0x = \theta$
3. $\alpha x = \theta, então\ \alpha = 0\ ou\ x = \theta$
4. $(-\alpha)x = \alpha(-x)$

Alguns exemplos de espaços vetoriais, considerando operações normais:

- $V = K_n(x) = P_r(x)/r \leq n$

- $V = C[a,b]$ **OBS:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = f(x)$
- $V = R^n$
- $V = M_{mxn}$

Não são espaços vetoriais:

- $V = Z$
- $V =$ Conjunto de polinômios de grau 3
- Alguns conjuntos com operações diferentes do normal. Ex: $\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha x_2)$

1.2 Subespaços vetoriais

1.2.1 Definições

Dentro de um espaço vetorial V, há subconjuntos W que são espaços vetoriais menores, contidos em V. **Todo espaço vetorial possui 2 subsespaços triviais:** Sub. nulo e ele mesmo. Critérios para subespaços vetoriais:

1. $\theta \in W$
2. $\forall x, y \in W \rightarrow x + y \in W$
3. $\forall \alpha \in R, \forall x \in W \rightarrow \alpha x \in W$

São subespaços:

- Soluções lineares homogêneas
- Qualquer sistema que adote multiplicações/adições usual com a presença do vetor nulo

Não são subespaços:

- Geralmente sistemas com alguma multiplicação/adição fora do comum ou muito específicas (ex. Conjunto de polinomios de terceiro grau)
- $u + v = (u_1, u_1^2) + (v_1, v_1^2)$

1.2.2 Teoremas

Intersecção de subespaços. Dado $W_1 \ e \ W_2$ subespaços vetorias de V, $W_1 \cap W_2$ também é subconjunto de V. Ex - Matriz triangulares inferiores e superiores.

Soma de subespaços. Dado W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V, $W_1 + W_2$ também é subconjunto de V. Caso $W_1 \cap W_2 = \theta$, a soma é chamada de **soma direta**, denotada por $W_1 \oplus W_2$

2 Combinação linear

Dado um espaço vetorial V, o vetor $v \in V$ é considerado a combinação linear de $v_1 + v_2 + ...v_n$ caso houver escalares $\alpha_1 ... \alpha_n$ tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

*Toda combinação de 3 vetores com sistema em SPI que não são multiplos entre si formam R^3

Em exercícios envolvendo combinação linear, dado v e $v_1 ... v_n$, colocar tudo em um sistema e resolver (escalonando ou manualmente). **Caso o sistema for possível e determinado, é uma combinação linear, caso contrário (por desigualdades depois de substituir valores, por exemplo) não é uma combinação linear**.

Como exemplo, utilizando os vetores $v_1 = (1, -1, 3)$ e $v_2 = (2, 3, 0)$ para a combinação linear, verificar se podem ser combinados para formar: $u = (3, 3, 3)$ e $v = (-2, -8, 6)$.

- u não pode ser formado, pois, dependo da maneira que o sistema for resolvido $\alpha_2 = 1$ ao mesmo tempo que $\alpha_2 = \frac{4}{3}$, classificando o sistema como impossível.
- Agora, v é totalmente possível, pois ao escalonar ou tentar resolver o sistema claramente chegamos em $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -2$.

2.1 Subespaço gerado

Dado um conjunto de vetores S (combinação linear), o subespaço vetorial formado por S é chamado de **subespaço gerado** por S. Assim os vetores $s_1, s_2 ... s_n$ **geram** ou formam um **conjunto gerador** de um espaço vetorial V se V coincide com o subespaço. Ou seja $S \subset V$ e $V \subset S$.

De modo prático devemos mostrar que cada vetor composto por S pertence a V, e que qualquer vetor de V pode ser composto por combinação linear dos vetores que compõem S.

Para a resolução de exercícios, primeiro provar a primeira hipótese, depois verificar se o sistema formado possui uma única solução (se houver infinitas ou nenhuma solução, não é um subespaço gerado).

EX: $\alpha_1(1,0,0), \alpha_2(0,1,0)$ *e* $\alpha_3(0,0,1)$ formam um subespaço, pois o sistema montado é SPD.

EX2: $\alpha_1(1,3,-2), \alpha_2(-1,2,1), \alpha_3(5,0,-7)$ não formam um subespaço, pois o sistema abaixo não possui solução

$$\begin{cases} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 5\alpha_3 & = & u_1 \\ 3\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = & u_2 \\ -2\alpha_1 & + & \alpha_2 & - & 7\alpha_3 & = & u_3 \end{cases}$$

2.2 Dependência linear

O conceito de dependência linear determina qual o menor conjunto gerador de um espaço vetorial. Dado V um espaço vetorial e os vetores $v_1...v_n$, se há numeros reais $\alpha_1...\alpha_n$ tais que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \theta$, ou seja, há numeros reais multiplicados pelos vetores, que quando somados, dão o vetor nulo, dizemos que são **Linearmente dependentes** Note que sempre há a solução trivial para essa conta dada, portanto se a unica solução para o sistema for a trivial (todos $\alpha = 0$), o sistema é considerado **linearmente independente**.

Algumas observações para facilitar exercícios:

- Dado R^n e n vetores que não são multiplos entre si, eles formam o espaço R^n.
- Dado R^n e r vetores, se $r > n$, então os vetores r serão LD. Note que se $r < n$ não vale a mesma afirmativa, pois ao escalonar o sistema há a possibilidade de anular linhas, já que o sistema é homogêneo. (Ex 4.25 do livro)
- Colocando as váriaveis no sistema A, se **$\det(A) = 0 = SPI = LD$, ou $\det(A) \neq 0 = SPD = LI$**
- **Se o sistema contêm o vetor nulo, ele é linearmente dependente.**

Teorema: Dado um conjunto LD $\{v_1...v_n\}$, algum elemento v_i, não nulo, é uma combinação linear dos outros.

$$0 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_i v_i + ... + \alpha_n v_n$$
$$\text{-}\alpha_j v_j = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Assim, dado $V = R^3$, $v_1, v_2, v_3 \in V$, $\{v_1, v_2\}$ é LD somente se pertencerem á mesma reta de origem, com $v_n \in \{\beta_x v_x; \beta \in R\}$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD somente se pertencerem ao mesmo plano que passa pela origem, $v_n \in \{\beta_1 v_x + \beta_2 v_y; \beta_i \in R\}$.

3 Bases

Determinar um conjunto de vetores que gere um espaço vetorial V de tal modo que todos os vetores sejam necessários para gerar V.

Dado um espaço vet. V e B = $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, dizemos que B é uma base de V se:

- Os vetores de V são **LI**
- B for gerador de V

Em outras palavras, verificar primeiro se o conjunto é LI, escalonando a matriz homogênea e verificando que a solução trivial é a unica (ou pelo método de determinantes. Depois, escalonar sistema para obter valores quaisquer de V $(v_1, v_2, ..., v_n)$, e verificar que ele é SPD. Se as duas condições forem aceitas, B é uma base para V.

Uma base de $\mathbb{R}^n$ deve conter, obrigatoriamente, exatamente n vetores. Dado um numero de p vetores, se p > n, o sistema vai ser LD, se p < n, o sistema pode até ser LI, mas não irá gerar V (sistema impossível).

3.1 Dimensão de um espaço vetorial

Um espao vetorial V tem dimensão n em símbolo, dim n, quando:

- Existem n vetores linearmente independentes.
- (n+1) vetores são sempre linearmente independentes.

Ou seja, a dimensão de um espaço vetorial V é definida como sendo o número de vetores de uma base de V. Assim, podemos extrair algumas informações:

- Uma base $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n
- Uma base M_{nxn} possui n^2 elementos e dimensão.

- Uma base $K_n(x)$ possui n+1 elementos e dimensão.

Teorema: Se x e y são duas bases de um espaço vetorial V. Se x é uma base de com n vetores V, ela gera V, assim y também possui exatamente n vetores, pois caso contrário, os vetores serão LD. Qualquer base de um espaço vetorial V possui o mesmo número de elementos

Teorema 2: Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita está contido em uma base de V. Ou seja se dim $V = n$, qualquer conjunto LI com n vetores formará uma base de V

3.1.1 Dimensão de subespaços

Determinar a dimensão de um subespaço vetorial e completar a base de um subespaço para obter uma base de um espaço vetorial. Tendo base que as linhas não nulas em uma matriz escalonada são sempre **LI**. Se W é subespaço vetorial V de dimensão n, $dim\ W \leq n$, e se $dim\ W = n$, então $W = V$. W não pode conter mais de n vetores, se não será LD.

- Se dim W = 0, então W é um ponto
- dim W = 1, reta passando pela origem
- dim W = 2, então W é um plano passando pela origem
- dim W = 3, então W é igual ao $\mathbb{R}^3$

Teorema: $dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$. Dado 2 planos, por exemplo $\pi_1 : x + y - z = 0$ e $\pi_2 : x = y$, obtemos $\pi_1 = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ e $\pi_2 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$, cuja interseção é uma reta. Assim, a adição dos 2 gera $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2: Dado uma base e seus vetores, existe uma única n-upla de escalares que resultam em v.

Para determinar as bases e a dimensão de W, colocamos os vetores de W em uma matriz, porém **um vetor por linha (em vez de coluna!)**, ao contrário que foi feito até agora. Se uma das linhas forem nulas, a base de W será a vetores de forma escalonada. Caso contrário, será os vetores originais. Na hora de **completar bases**, é necessário observar, dado $V = \mathbb{R}^n$, se W possui n linhas (vetores) não nulos na **forma escalonada**, caso contrário, é so "preencher" com vetores canônicos até completar n vetores.

Ex com linhas nulas:

$V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(1,0,1,2),(2,1,1,0),(0,-1,1,4)\}$ um subespaço de V. Escalonando a matriz temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, W tem dimensão 2 e $(1,0,1,2),(0,-1,-1,-4)$ são a base para W, e caso necessário completar a base, adicionamos os vetores $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$, tornando esses vetores uma base para $\mathbb{R}^4$

Ex sem linhas nulas:

Base para o $\mathbb{R}^2$, que contenha os vetores: $u = (1,2,3)$, $v = (2,1,1)$, escalonando a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Então, já que não há linhas nulas, podemos simplesmente declarar como vetores de W $(1,2,3),(2,1,1)$.

OBS: em casos de matrizes $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, colocamos na matriz para escalonar na forma $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2 Mudança de base

Dado um espaço V e $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, chamamos os escalares de **coordenadas** ou **componentes** de v em relação àquela base. Trocando as ordem da base, trocamos a ordem das coordenadas. Por isso, chamaremos as bases de **ordenadas** agora em diante.

Visto que as coordenadas de um vetor em uma base dependem da base fornecida, não basta fazer uma combinação linear para converter bases. Assim primeiro calcula-se a **matriz de mudança de base**, depois encontra-se as novas coordenadas utilzando-a:

Podemos converter uma base $B = \{u_1, ..., u_n\}$ para outra $B' = \{w_1, ..., w_n\}$, para montar a matriz, obter cada w em razão da combinação linear de u e colocar na matriz na forma:

$$w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n$$
$$\text{w}_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n2}u_n$$
$$...$$
$$\text{w}_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n$$

Assim, obtemos a matriz $[A]\frac{B'}{B}$ (sem a barra), que é chamada de matriz de mudança de base B para B'. Multiplicando ela por uma matriz M_{1xn}, preenchidas com $y_1 ... y_n$, obtemos os escalares y_n, que $x_n = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n$. v' é a **matriz de coordenadas em relação à nova base**.y Ou seja,

$$v = A \cdot v'$$
$$\text{v'} = \text{A}^{-1} \cdot v$$

Em um sistema de polinômios, por exemplo, os v' são os escalares que multiplicam cada vetor da nova base, cuja ordem varia dependendo de foram distruibuidos eles na hora de montar a matriz.

Fica um exemplo do livro:

Exemplo 4.57 *Considere na base canônica de $\mathcal{K}_2(t)$ o polinômio $P_2(t) = t^2 - 5t + 6$. Determine as coordenadas de $P_2(t)$ na base $B' = \{3,\ t-3,\ t^2-1\}$.*

Solução: A base canônica de $\mathcal{K}_2(x)$ é $\{1,\ t,\ t^2\}$. De (4.24), temos:

$$\begin{aligned} 1^{\text{o}} \rightarrow 3 &= a_{11}\ (1) + a_{21}\ (t) + a_{31}\ (t^2), \\ t-3 &= a_{12}\ (1) + a_{22}\ (t) + a_{32}(t^2), \\ t^2-1 &= a_{13}\ (1) + a_{23}\ (t) + a_{33}(t^2). \end{aligned}$$

Em cada equação anterior, igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos, da primeira equação, que: $a_{11} = 3,\ a_{21} = 0$ e $a_{31} = 0$, da segunda equação: $a_{12} = -3,\ a_{22} = 1$ e $a_{32} = 0$, e da terceira equação: $a_{13} = -1,\ a_{23} = 0$ e $a_{33} = 1$.

Substituindo os valores conhecidos em (4.25), segue que:

$$1^{\text{o}} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}, \quad 1^{\text{o}}$$

cuja solução é: $v_1' = -\frac{8}{3}$, $v_2' = -5$ e $v_3' = 1$. Assim, $P_2(t) = -\frac{8}{3}\{3\} - 5\{t-3\} + 1\{t^2-1\}$.

4 Transformação linear

Funções da forma $v = F(u)$, chamada de transformações lineares. Dado os espaços vetoriais U e V e F uma função que associa um vetor de U a um único vetor de V, escreve-se $F : U \to V$. **Dizemos que F leva U em V, sendo F uma transformação linear**

Dado um vetor $u = (u_1, u_2)$, então $F(u) = (u_1, u_1 + u_2, u_2)$ é uma função que leva o $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Dado uma $T : U \to V$, T é uma transformação linear caso

- $T(u + v) = T(u) + T(v), u, v \in U$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u), \alpha \in \mathbb{R}$

Assim, podemos afirmar:

- T é transformação linear se preservado as equações básicas de um espaço vetorial.
- Se $U = V$, $T : V \to V$, T é um **operador linear**.

Como exemplos:

- $T(u) = (u_1, u_2) = (u_1, 0)$ é transform.
- $T : K_n(x) \to K_{n-1}(x), T(P_r(x)) = \frac{d}{dx} P_r(x)$ é transform.
- $T : R^n \to R^m, A_{mxn}, T(u) = Au$ é transform, e a matriz A_{mxn} sempre determina esse tipo de transformação
- $T : U \to V, U = V = C[a, b], T(x) = f(t)x(t)$, sendo $f(t)$ contínua e fixa e $x \in V$ é transform.
- $T(u) = (u_1 - u_2 + u_3, u_2 + 1)$ não é (primeira propriedade).

4.1 Propriedades da transformação linear

- $T(\theta) = \theta$,pois, $T(\theta) = T(0u) = 0T(u)$ assim, leva o vetor nulo ao vetor nulo.
- $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$

Uma transformação linear deve atender essas duas propriedades. Muita atenção que obedecer essa primeira propriedade não indica que é obrigatoriamente uma transformação linear.

Teorema: Dado uma base $\{u_1, ..., u_n\}$ de U, e as imagens $T(u_1)...T(u_n)$ conhecidas, é sempre possivel obter a imagem de $T(u)$, pois podemos escrever como uma "combinação" linear.

$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, multiplicando T pelos dois lados, temos:
T(u) = $\alpha_1 T(u_1) + ... + \alpha_n T(u_n)$.

Passo a passo na pag 223 do livro.

4.2 Operações com transformações lineares

No caso da **adição**, dado que T_1 e T_2 transformadores lineares de U em V, ou seja, os dois levam de U para V (obrigatoriamente!), temos:

$$(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u)$$

Ou seja, simplesmente somamos as duas funções. Como exemplo: $T_1 = (u_1 + u_2, u_2), T_2 = (u_2, u_1)$, a soma será $(T_1 + T_2)(u) = (u_1 + 2u_2, u_1 + u_2)$.

Na **multiplicação**, $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$, ou seja, apenas multiplica-se a função. $2T(u_1 + u_2, u_1) = (2T)(u) = (2u_1 + 2u_2, 2u_1)$.

- $T(-u) = -T(u)$
- $T(u - v) = T(u) - T(v)$

Ja na **composta**, dado que as duas funções são compatíveis, ou seja, $T_1 : U \to V, T_2 : V \to W$ (T2 toma a "saída" de T1 como "entrada"). A aplicação $T_2 \circ T_1 = T_2(T_1(u))$ é a operação composta. Dado que as duas transformações são lineares, a composta também vai ser.

Dado T_1, T_2 transformações lineares de U em V e S_1, S_2 de V em W, então:

- $S_1 \circ (T_1 + T_2) = S_1 \circ T_1 + S_1 \circ T_2$
- $(S_1 + S_2) \circ T_1 = S_1 \circ T_1 + S_2 \circ T_1$
- $\alpha(S_1 \circ T_2) = (\alpha S_1) \circ T_2 = S_1 \circ (\alpha T_2)$
- $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$
- $T_1 \circ T_1$ representado por T_1^2.

Ex: Dado $T_1(u) = (u_1 - u_2, u_2), T_2(u) = (u_1, 2u_2)$, Temos $(T_1 \circ T_2)u = T_1(u_1, 2u_2) = (u_1 - 2u_2, 2u_2)$.

OBS: Caso as transformações no caso da adição ou composição não forem "compatíveis" como descritas, não são possíveis de ser realizadas.

4.3 Existência e unicidade de transformações lineares

Agora, vamos descobrir um certo $T(u)$, dado $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e uma base para $\mathbb{R}^n$. Assim, $T(u_1) = v_1, T(u_2) = v_2$, e assim em diante.

Por exemplo, dado $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que satisfaz $T(1,1) = (2,1,2); T(0,1) = (1,1,2)$. Para descobrir $T(u)$, dado que $\{(1,1),(0,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$, escrevemos:

$$
\begin{gathered}
(u_1, u_2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1) = (\alpha, \alpha + \beta) \\
\alpha = u_1,\ \beta = u_2 \\
\mathrm{T}(\mathrm{u}_1, u_2) = T(u_1(1,1) + (u_2 - u_1)(0,1)) \\
= \mathrm{u}_1(2,1,2) + (u_2 - u_1)(1,1,2) \\
= (\mathrm{u}_1 + u_2, u_2, 2u_2)
\end{gathered}
$$

Lembrando que, para achar um vetor $T(u) = (x, y)$, basta igualar cada vetor de $T(u)$ com o vetor igualado, formando um sistema.

Em polinômios, agrupa-se os termos comuns (pg 234.)

4.4 Imagem da transformação linear

Dado $T : U \to V$, a **imagem de T**, denotada por $Im(T)$, é o conjunto de vetores v em que há um vetor u em que $T(u) = v$. A imagem pode ser um plano, uma reta, ou uma expressão.

Por exemplo, dado $T(u_1, u_2, u_3 = (u_1, u_2, 0)$, $Im(T) = \{(v_1, v_2, 0), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$, ou seja, o plano xy.

Outro exemplo: $T(u_1, u_2) = (u_1, u_2, \frac{u_1+u_2}{2})$, $Im(T) = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}/v_1 + v_2 - 2v_3 = 0\}$.

Em termos gerais, igualamos a expressão de cada vetor de $T(u)$ para v_i, formando um sistema. Caso o sistema só admita solução para determinados valores, ele só tera imagens para esses valores. Caso contrário $Im(T) = R^n$. Especificar **todas** as condições, como no ex 5.12.

Teoremas: Transformações e subespaços (Dado $T : U \to V$:

- $Im(T)$ é subespaço de V
- $T^{-1}(S)$ é subespaço de U
- O conjunto $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_n)\}$ gera $Im(T)$

Um exemplo bem completo para tudo visto é o 5.28 da pág 238.

4.5 Núcleo da transformação linear

Um núcleo de T, denotado por $Ker(T)$ ou $N(T)$, é o conjunto de vetores u que são levados para o vetor nulo de v. $N(T) = \{u \in U/T(u) = \theta \in V\}$. Pode ser uma reta, um plano, expressão, etc. $Ker(T)$ também é um subespaço de V, dado $T : U \to V$.

Para encontrar o núcleo, basta igualar a expressão de todos os elementos a 0, formando um sistema. A solução do sistema é o núcleo, lembrando que deve-se especificar **todas** as condições, inclusive a que dependem de outras. Um exemplo bom é o 5.12, novamente.

4.6 Dimensão da imagem e do núcleo

Dado uma transformação $T : V \to W$, a $dimN(T)$ e $dimIm(T)$ é correspondente ao número de vetores que compõem cada um dos elementos. Caso $Im(T) = W$, a dimensão será a mesma de W

Pegando os 2 exemplos do material:

Exemplo 3: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x, y) = x - y.$$

Aqui,

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\} = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1); x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)], \end{aligned}$$

ou seja, $N(T)$ é a reta $y = x$ e

$$Im(T) = \mathbb{R},$$

pois dado $w \in \mathbb{R}$, $T(w, 0) = w - 0 = w$.

Observação 3. $\dim N(T) = 1$ e $\dim Im(T) = 1$.

Exemplo 4: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Aqui, o núcleo de T é dado por

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,0) = (0,0,0)\} \\ &= \{(0,0,z); z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1); z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0,0,1)]. \end{aligned}$$

A imagem de T é dada por

$$\begin{aligned} Im(T) = T(\mathbb{R}^3) &= \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0); x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,0),(0,1,0)]. \end{aligned}$$

Observação 4. $\dim N(T) = 1$ e $\dim Im(T) = 2$.

Teorema: $dimN(T) + dimIm(T) = dimV$.

4.7 Isomorfismo

Primeiramente, inciamos o teorema: Uma transformação linear T é injetora se e somente se ela for sobrejetora.

Uma transformação linear $T : V \to W$ que é injetora e sobrejetora é chamada de isomorfismo, e os espaços são chamados de isomorfos - **possuem a mesma dimensão**. Todo isomorfismo possui uma inversa T^{-1}, em que $T \circ T^{-1} = I$.

Para afirmar que T é injetora. e portanto, sobrejetora, verificar que $N(T) = \{(0,0,0)\}$. Assim, ela será um isomorfismo.

4.8 Matriz de uma transformação linear