

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2018 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上 QQ 群、微信群等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或资料（包括网上资料），必须按照规定的参考文献的表述方式列出，并在正文引用处予以标注。在网上交流和下载他人的论文是严重违规违纪行为。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：_____

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）：_____

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）：_____

参赛队员（打印并签名）：1. _____

2. _____

3. _____

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：_____

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期：_____年____月____日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2018 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

数值迭代算法求解隔热服的温度分布

摘要

在高温环境下作业时，人们需要穿着专用隔热服以避免灼伤。隔热服由不同种类的隔热材料组成，它们的厚度、密度、比热及热传导效率等物理性质各不相同，因此对热量的传导效果各不相同。通过数学模型刻画热量的传递，求解隔热服装各层材料的温度分布，能够更清楚了解隔热服的隔热性能，保证人们的安全作业。

对于问题（1），为了简化模型，我们假设热量传递均匀，隔热材料在各方向上温度分布一致，从而传热过程可抽象为一维传热模型。通过对热量从高温环境到假人外侧皮肤的传递过程进行分析，我们根据热传导知识建立了热量传递的偏微分方程，该方程描述了温度随时间和空间的变化关系。其次，由于隔热服第 IV 层是空气层，因此在热量的传递过程中，在隔热服第 I 层最外侧与外界高温接触处、第 III 层与第 IV 层接触处和第 IV 层与假人皮肤接触处会带有流体换热效应，模型对三个节点处的对流传热系数进行了求解。在求解温度分布的方法上，我们选取适当变量步长，将偏微分方程改写为差分方程，通过数值迭代的算法不断逼近求得温度分布的数值解，并使用附件二中的测量数据对数值解进行检验，以验证模型的合理性和正确性。在题目给定的传热系统参数下，模型的数值解与实验的测量值完全符合。

对于问题（2），在问题（1）的模型基础上，我们让第 II 层材料厚度在给定的导热系统参数下，按适当步长遍历材料厚度的取值范围，通过求解假人皮肤的温度分布，找到符合条件的材料厚度取值范围。并且我们认为，隔热服的材料厚度越薄，生产成本越低，穿戴也越便捷，因此，我们将取值范围的最小值作为模型的最优解。通过求解，我们得到在环境温度 65℃，第 IV 层材料厚度 5.5mm 的条件下，为了满足作业需求，第 II 层材料的最优厚度为 18.1mm。

对于问题（3），我们采用与问题（2）相同的处理方法，求解了温度分布特征关于第 II 层厚度和第 IV 层厚度的二元函数。经过对求解结果的分析，我们得出：第 IV 层空气层的厚度对于隔热服的隔热性能影响不大，隔热服的隔热效果对第 II 层材料的厚度更加敏感。这是由于隔热服第 IV 层中的空气具有导热系数低而导温系数高的性质造成的。通过求解，我们得到在环境温度 80 摄氏度，为了满足作业需求，第 II 层材料的最优厚度为 21.0mm，第 IV 层空气层的最优厚度为 0.6mm。

【关键词】

一维传热模型、对流传热系数、热传导偏微分方程、差分法、数值迭代、导温系数

1. 问题重述

背景：人们在高温环境下作业时，需要穿着专用隔热服以避免灼伤。隔热服通常由多层不同种类的隔热材料组成，它们的厚度、密度、比热及热传导效率各不相同，从而对热量的传导效果各不相同。热量在从高温环境传递到皮肤的过程中需穿透这些不同的隔热层。因此，通过数学模型刻画热量的传递，求解隔热服装各层材料的温度分布，能够分析隔热服的隔热效果是否满足人们的需求，从而保证人们在高温环境下作业的安全。根据题目，我们需要解决以下问题：

- (1) 建立数学模型，计算在指定的服装参数及环境参数下隔热服的温度分布
- (2) 探究隔热服第 II 层材料在指定服装参数及工作需求下的最优厚度
- (3) 探究隔热服第 II 层和第 IV 层在指定工作需求下的最优厚度

2. 问题分析

问题（1）分析：

热量从高温环境传递到假人皮肤的过程中穿过隔热服的不同材料层，但热量的传递始终满足相应的热传导方程，且随着传热过程的不断进行，假人表面的温度最终会趋于一个恒定值，此时便达到了热传导的热平稳阶段。热量的传递效果与材料所处的温度，材料自身的物理特性，材料的形状息息相关。其次，在热量传递的过程中，隔热服的温度随时发生变化，因此，我们应对隔热服温度随时间和空间的变化情况进行建模，借助热传导知识，求解温度随时间和空间的分布函数。

此外，假人在穿着隔热服受热时因几何形状的原因，各位置的受热情况会有差异，因此对该热力学系统的传热情况做出简化假设能降低问题的复杂性。

问题（2）分析：

在问题（1）的模型基础上，通过确定服装各层材料的厚度参数，便能得到假人皮肤外侧温度随时间的变化函数。求解该规划问题，使温度随时间的分布情况满足题目要求（确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，即达到稳态前温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟），即可得到第 II 层隔热材料的最优厚度解。

问题（3）分析：

问题（3）与问题（2）的解决思路类似，只是增加了自变量的个数，在问题（1）的模型基础上，我们需要同时讨论第 II 层和第 IV 层材料的厚度对隔热服导热效果的影响，求出假人外侧温度随时间的分布情况，使其满足题目要求（确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，即达到稳态前温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟），解决该规划问题便可得到第 II 层和第 IV 层隔热材料的最后厚度解。

3. 模型假设与符号系统

3.1 模型假设

- 假设隔热服的各隔热层构成无限大平面，它们组成一个传热平面壁，热量依次传递到第 I, II, III, IV 层平板，最终到达假人外侧皮肤
- 假设假人皮肤外侧各处受热均匀，温度分布一致，热量沿着垂直于各层隔热材料所在平面的方向均匀传递。这样热量在隔热服上的传导便可简化为一维传热问题
- 假设热传导的过程为非稳态导热。根据实际，隔热服各层材料在不同时间的温度会发生变化，各层温度逐渐升高直到达到热平衡（稳态）
- 由于热辐射对传热过程的作用相对较小，假设在实验过程中，从外部环境到假人皮肤外侧的热量传递只有导热以及对流两种方式，忽略热辐射对于实验结果的影响。
- 假设各层隔热材料间为理想传热状态，即不存在热阻，从而温度在各材料接触面处的变化保持连续。
- 经计算隔热服第 IV 层空气层的导温系数大，导温性能良好。假设第 IV 层空气的温度分布均匀

3.2 符号系统

符号系统

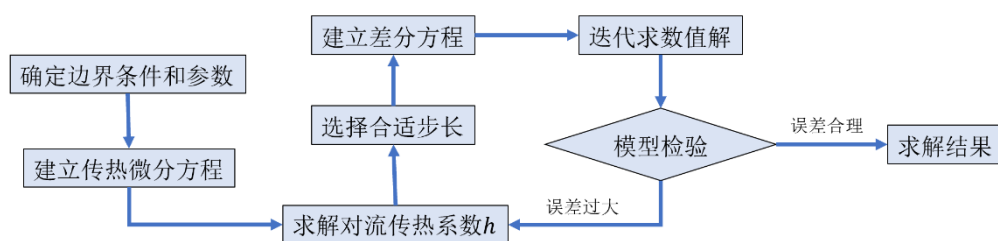
符号	含义
ρ_i	第 <i>i</i> 层隔热材料的密度 ($i = \text{I, II, III, IV}$)
c_i	第 <i>i</i> 层隔热材料的比热 ($i = \text{I, II, III, IV}$)
λ_i	第 <i>i</i> 层隔热材料的导热系数 ($i = \text{I, II, III, IV}$)
h_p	第 I 层最外侧接触面与高温环境的对流换热系数
h_q	第 IV 层空气层与假人外侧皮肤的对流换热系数
$T(x, t)$	在隔热服的位置 <i>x</i> 处，时间 <i>t</i> 时刻的温度
a	热扩散率 $a = \lambda / \rho c$ ，也称为导温系数
ϕ	热流量（单位时间内通过某一给定截面的热量），单位：W
q	热流密度（单位时间内通过单位面积的热量），单位：W/m ²
$\frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}$	温度梯度
d_i	第 <i>i</i> 层隔热材料的厚度 ($i = \text{I, II, III, IV}$)
T_p	外界环境温度（即隔热服作业环境温度）
T_q	隔热服内环境温度，即假人体温（ T_n 恒为 37℃）
T_0	隔热服第 I 层最外侧的稳态温度
T_s	假人外侧皮肤的稳态温度

4. 问题（1）的求解

4.1 问题分析

热量从高温环境穿透隔热服的各隔热层最终到达假人皮肤外侧，因为第 IV 层是空气层，因此热量在环境高温与第 I 层最外侧接触面处、第 III 层与第 IV 层接触面处、第 IV 层与假人外侧皮肤接触面处有对流换热效应，且对流换热系数未知。在已知各层导热材料参数和导热边界条件的条件下（假人体温恒定 37°C ，稳态温度从附件二可得），运用串联热阻叠加原理和傅里叶公式，能够计算得到对流换热系数。其次，再由非稳态导热微分方程可得到温度分布关于时间和空间的偏微分方程。选择合适步长，采用差分法求解该微分方程，得到温度关于时间和空间的函数，再和实际检验，进行模型参数的修正，最终求得温度的分布情况。

问题（1）的建模流程图如下：



图表 1：问题（1）的建模流程图

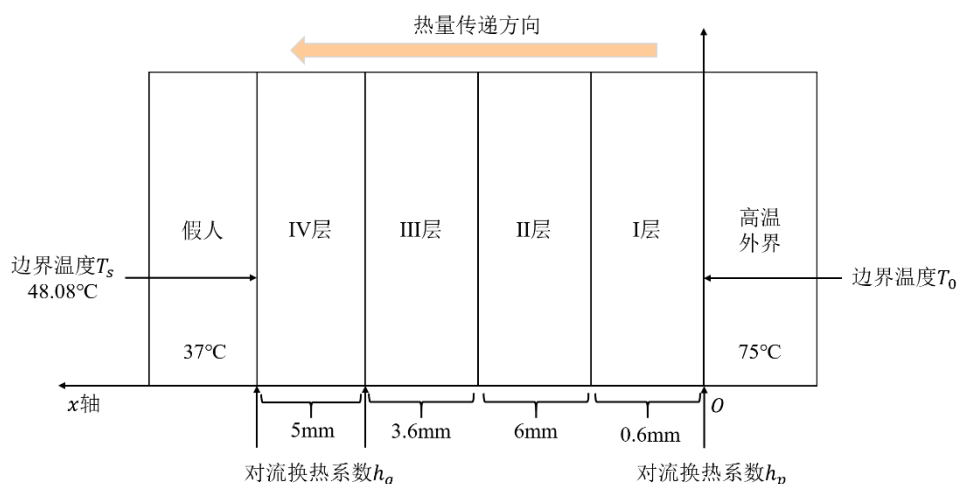
4.2 模型准备

4.2.1 非稳态传热方程

应用能量守恒方程，可以得到一般情况下的导热微分方程为：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \Phi_v \quad (4.2.1)$$

针对本题，热量从高温外界传输到假人外侧皮肤的模式图如下：



图表 2：热量传递过程示意图

因为做出了导热均匀假设，因此可将该传热过程抽象为一维传热，且隔热服的各材料均不含有自发热源。以隔热服的第 I 层材料的最外侧为坐标原点，沿热量传递方向建立数轴，正方向指向隔热服内部假人。因此该导热系统的微分方程可简化为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.2.2)$$

上述方程左边是温度关于时间变量 t 的偏导数，方程右边第一项系数 a 是材料的导热系数，第二项是温度关于材料厚度变量 x 的二阶偏导数。此外，该偏微分方程还有以下重要的初值条件和边界值条件：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(0, t) = T_0 \quad (4.2.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(15.2, t) = T_s = 48.08^\circ\text{C} \quad (4.2.4)$$

$$h_p [T_0 - T_p] = \lambda_I \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (4.2.5)$$

$$h_q [T(15.2, t) - T_q] = \lambda_{IV} \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{x=15.2} \quad (4.2.6)$$

式 (4.2.3) 表示达到稳态时隔热服第 I 层最外侧的温度；式 (4.2.4) 表明假人外侧皮肤的温度最终趋于 48.08°C ，这是当热传递过程达到热平衡时的温度，该温度由附件二求得；式 (4.2.5) 表示第 I 层最外侧与高温环境接触时的边界条件，这是因为高温环境中的气体会与隔热服外侧发生对流传热效应；式 (4.2.6) 是第 IV 层与假人外侧皮肤接触时的边界条件，这是因为第 IV 层为空气层，同样会带有对流传热效应。

4.2.2 求解对流传热系数

在非稳态传热方程中，对流传热系数 h_p, h_q 是未知的。借助串联热阻叠加原理和傅里叶热学定理可以求解得到对流传热系数。

首先，隔热服由四层不同类型的导热材料构成，且中间三层固体材料相互依次链接，串联形成一个大的热阻，而串联过程的总热阻等于分热阻之和，由此得到：

$$\frac{T_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} T(10.2, t)}{q} = \sum_{i=I, II, III} \frac{d_i}{\lambda_i} \quad (4.2.7)$$

其次，由傅里叶定理，得到热流密度和温度梯度的关系满足：

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \quad (4.2.8)$$

再考虑空气层和最外层及第 IV 层边界发生的热交换，由第三类边界条件，满足：

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) = h_p (T_p - T_0) = h_q (T_s - T_q) \quad (4.2.9)$$

联立上面三式，求得对流换热系数的表达式为：

$$h_p = \frac{T_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} T(10.2, t)_s}{(T_p - T_0) \sum_{i=I, II, III} \frac{d_i}{\lambda_i}} \quad (4.2.10)$$

$$h_q = \frac{T_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} T(10.2, t)}{(T_s - T_q) \sum_{i=I, II, III} \frac{d_i}{\lambda_i}} \quad (4.2.11)$$

其中 $T_p = 75^\circ\text{C}$ ， $T_s = 48.08^\circ\text{C}$ ， $T_q = 37^\circ\text{C}$ ，记 $T_m = \lim_{t \rightarrow \infty} T(10.2, t)$ ，它表示第 III 层与第 IV 层接触处的稳态温度，对于第 IV 层左右两侧，由傅里叶定理有：

$$h_q(T_m - T_s) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = q_1 \quad (4.2.12)$$

$$h_q(T_s - T_q) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = q_2 \quad (4.2.13)$$

由于此时达到热平稳，所以温度不变，因此流入第 IV 层的热量等于流出第 IV 层的热量，从而有：

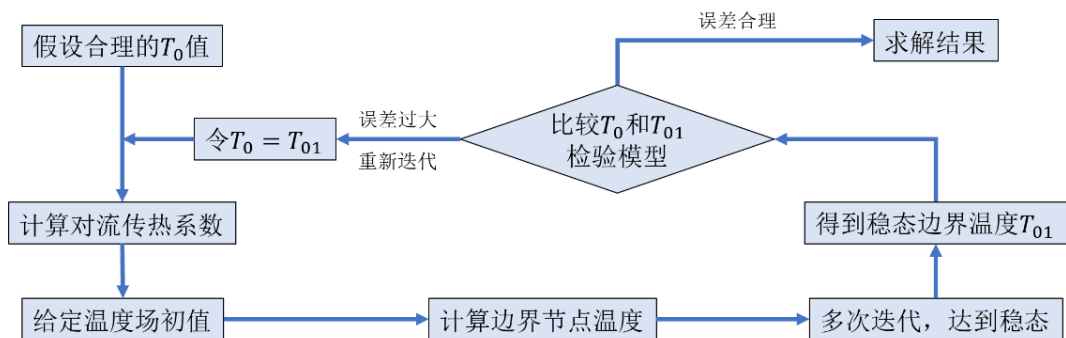
$$q_1 = q_2 \quad (4.2.14)$$

联立（4.2.12）至（4.2.14），求得 $T_m = 2T_s - T_q = 59.16^\circ\text{C}$

4.3 模型的建立

4.3.1 对流换热系数求解模型

从（4.2.10）和（4.2.11）式得到，为了完成求解，还需要知道 T_0 的值， T_0 是第 I 层最外侧的稳态温度，当达到稳态时，它的值应该与环境温度较为接近。而通过现有的条件无法求解 T_0 ，因此设计下面的数值迭代求解的方法，逼近求得 T_0 的值，进而求解得到对流换热系数的数值解。



图表 3：数值迭代求解边界稳态温度 T_0 及对流换热系数的程序流程图

上图中数值迭代求解的过程采用差分法求解热传导偏微分方程，且考虑到稳态时最外侧温度 T_0 接近环境温度 75°C ，因此假设程序入口处的第一个 T_0 为 70°C ；此外，我们认定当 $|T_0 - T_{01}| < 0.01$ 时， T_0 的解符合实际，程序迭代停止。

将（4.2.2）式的偏微分方程改写为关于时间和空间的差分方程，得到：

$$\frac{T_n^{(i+1)} - T_n^{(i)}}{\Delta t} = a \frac{T_{n+1}^{(i)} - 2T_n^{(i)} + T_{n-1}^{(i)}}{\Delta x^2} \quad (4.3.1)$$

为了便于程序迭代计算，可将上式改写为：

$$T_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{n+1}^{(i)} + T_{n-1}^{(i)}) + \left(1 - 2\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_n^{(i)} \quad (4.3.2)$$

式（4.3.1）及式（4.3.2）中，函数 $T(x, t)$ 的自变量 x, t 分别对长度和时间做分割，取适当步长作为每一段差分方程上的表达式。 Δx 和 Δt 分别表示长度步长和时间步长。厚度 x 的取值范围为 $x \in [0, 15.2]$ ，将其等分为 N 份；同样取足够长的时间范围确保系统达到稳态（这里取 $t \in [0, 10000]$ ），并将时间等分为 M 份。则长度步长变量 n 和时间步长变量 i 的取值范围为：

$$0 \leq n \leq N, 0 \leq i \leq M \quad (4.3.3)$$

在第 I 层最外侧与高温空气接触节点处（对应厚度 $n = 0$ 处），以及第 IV 层最内侧与假人皮肤接触节点处（对应厚度 $n = N$ 处），取微小厚度的元体进行分析，由能量守恒定律得到：

$$\lambda_I \frac{T_1^{(i)}}{\Delta x} + h_p (T_p - T_0^{(i)}) = \rho_I c_I \frac{\Delta x}{2} \frac{T_0^{(i+1)} - T_0^{(i)}}{\Delta t} \quad (4.3.4)$$

$$\lambda_{IV} \frac{T_{N-1}^{(i)}}{\Delta x} + h_q (T_q - T_N^{(i)}) = \rho_{IV} c_{IV} \frac{\Delta x}{2} \frac{T_N^{(i+1)} - T_N^{(i)}}{\Delta t} \quad (4.3.5)$$

上面两式化简后可以得到：

$$T_0^{(i+1)} = T_0^{(i)} \left(1 - \frac{2h_p \Delta t}{\rho_I c_I \Delta x} - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} T_1^{(i)} + \frac{2h_p \Delta t}{\rho_I c_I \Delta x} T_p \quad (4.3.6)$$

$$T_N^{(i+1)} = T_N^{(i)} \left(1 - \frac{2h_q \Delta t}{\rho_{IV} c_{IV} \Delta x} - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} T_{N-1}^{(i)} + \frac{2h_q \Delta t}{\rho_{IV} c_{IV} \Delta x} T_q \quad (4.3.7)$$

式（4.3.6）及式（4.3.7）用于迭代算法求解第 I 层最外侧稳态温度 T_0 及对流换热系数

4.3.2 假人皮肤外侧温度求解模型

通过式（4.2.10）和式（4.2.11）可求解得到对流换热系数的值，再由式（4.3.6）可以得到隔热服第 I 层最外侧的温度分布。第 I 层至第 III 层间的热量传递属于固体传热，由热传导方程可知其传热特征满足式（4.3.1），通过差分法可求得温度在 I, II, III 层分布的数值解。而对于第 IV 层，因为空气层的特殊性，其传热会与材料接触面发生对流传热效应，因此它的传热方程与前三层有所差别。

计算隔热服四层材料的导温系数 a 之后发现，第 IV 层空气层的导温系数 a 相比固体材料的导温系数非常大，其导温效果极好，因此我们认为整个空气层单独只占有一个厚度的步长，即抽象第 IV 层空气层只有一个点，因为其良好的导温性质，使空气层的温度几乎分布均匀，温度不会随着空气层厚度位置产生变化。由此，需要重点关注第 III 层与第 IV 层接触面温度、接触面的对流传热；以及第 IV 层和假人皮肤外侧接触面的温度和对流传热。

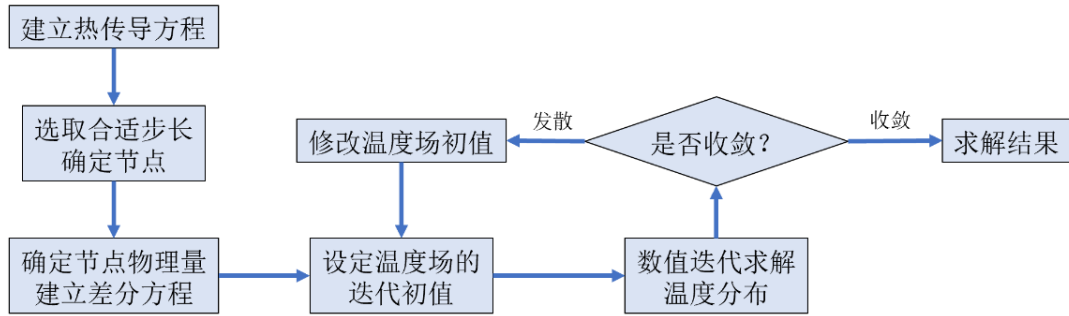
设代表第 IV 层所占有的厚度步长的标号为 N ，考虑到第 IV 层外侧流入的热量减去第 IV 层内侧流出的热量等于第 IV 层自身热量的增量，得到：

$$h_q(T_{N-1}^{(i)} - T_N^{(i)}) - h_q(T_N^{(i)} - T_{N+1}^{(i)}) = \rho_{IV} c_{IV} d_{IV} \frac{T_N^{(i+1)} - T_N^{(i)}}{\Delta t} \quad (4.3.8)$$

上式中， $n = N - 1$ 表示第 IV 层与第 III 层接触面节点， $n = N + 1$ 表示假人人体处的节点温度，其温度始终为 37°C 。将上式解出 T_N^{i+1} 得到第 IV 层的温度分布为：

$$T_N^{(i+1)} = \frac{h_q(T_{N-1}^{(i)} - 2T_N^{(i)} + T_{N+1}^{(i)})\Delta t}{\rho_{IV} c_{IV} d_{IV}} + T_N^{(i)} \quad (4.3.9)$$

求解假人外侧皮肤温度分布的方法仍采用将微分方程改写为差分方程，使用数值迭代的方法求解数值解，程序计算的流程图如下：



图表 4：数值迭代求解假人外侧皮肤温度的程序流程图

在上面迭代程序的计算过程中，除了温度场初值的合理设置外，还需注意构造差分方程时步长的选取。在式（4.3.2）中有：

$$T_n^{(i+1)} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{n+1}^{(i)} + T_{n-1}^{(i)}) + \left(1 - 2\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) T_n^{(i)} \quad (4.3.2)$$

温度从 i 时刻传递到 $i + 1$ 时刻的过程中，从实际角度出发， i 时刻点的温度越高，则 $i + 1$ 时刻点的温度也要越高，因此应该保证 $T_n^{(i)}$ 前面的系数不小于 0，即：

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.3.10)$$

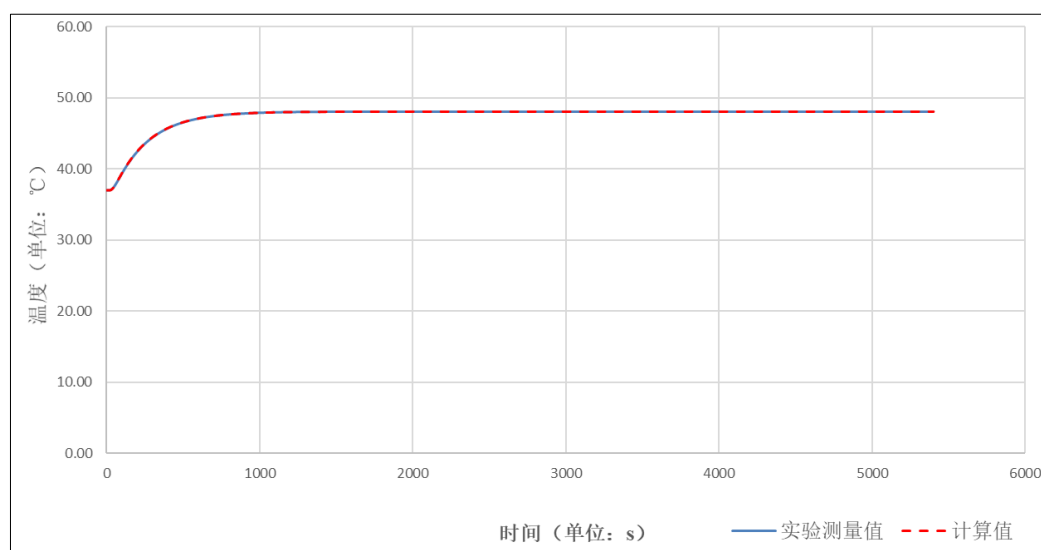
式（4.3.10）是构造差分方程时厚度步长和时间步长选择是否合理的重要判据，它是数值解收敛的关键性保障

4.4 模型的求解

先假设第 I 层最外侧的稳态温度为 70°C ，通过数值迭代，求解得到第 I 层最外侧的稳态温度 T_0 及高温环境气体传热的对流换热系数 h_p 和第 IV 层的对流换热系数 h_q 为：

参数	T_0	h_p	h_q
迭代数值解	73.631°C	$108.029\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	$12.675\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$

再由假人外侧温度求解模型，设置时间步长 $\Delta t = 0.01\text{ s}$ ，厚度步长 $\Delta x = 0.1\text{ mm}$ ，通过数值迭代求解，根据附件二数据，在同一坐标下绘制计算值与测量值随时间的变化情况如下图：



图表 5：假人皮肤外侧温度的实验测量值和模型计算值对比图

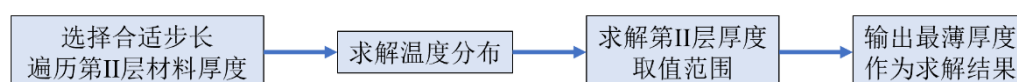
从图中可以看出，导热方程模型计算得到的假人皮肤外侧温度曲线几乎完全拟合了实验时的测量数据。对比附件二数据，该导热系统数学模型真实有效。求解得到的温度分布结果已存储为 Problem1.xlsx 附件。

5. 问题（2）的求解

5.1 问题分析

在问题（1）的求解基础上，当给定第 II 层隔热材料厚度时，我们便能计算得到假人皮肤外侧的温度分布。让第 II 层材料的厚度以适当步长遍历 0.6 mm 至 25 mm ，根据温度分布寻找满足工作环境要求的厚度取值范围。且材料越薄，造假越低，穿着的便捷性越好，因此选取在取值范围内的最薄厚度作为该问的最优解。

问题（2）的建模流程图如下：



图表 6：问题（2）的建模流程图

5.2 模型的建立

以 l 记第 II 层隔热材料的厚度， l 取值范围为 0.6mm 至 25mm，在总计 60 分钟的升温过程中，用 P_l 表示厚度 l 的实验中，假人皮肤温度上升超过 44℃所需的时间，用 T_l 表示厚度 l 的实验中，在经过完整的 60 分钟后，假人皮肤温度上升到的最高温度，根据题目要求， P_l 和 T_l 应该满足：

$$P_l \geq 55 \text{ min} \quad (5.2.1)$$

$$T_l \leq 47^\circ\text{C} \quad (5.2.2)$$

此外，与问题（1）不同的有，导热系统的参数有所变化：

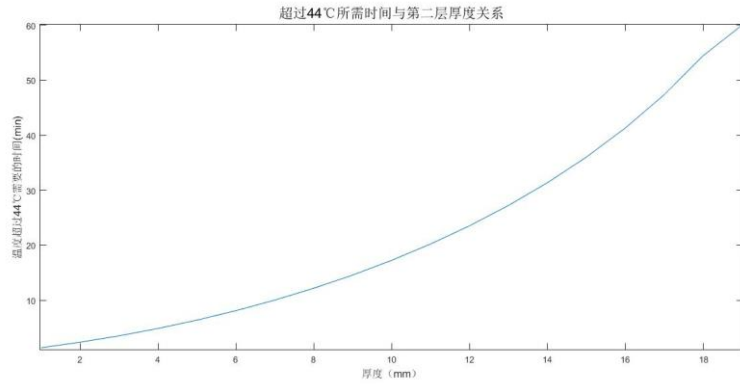
$$T_p = 65^\circ\text{C} \quad (5.2.3)$$

$$d_{IV} = 5.5 \text{ mm} \quad (5.2.4)$$

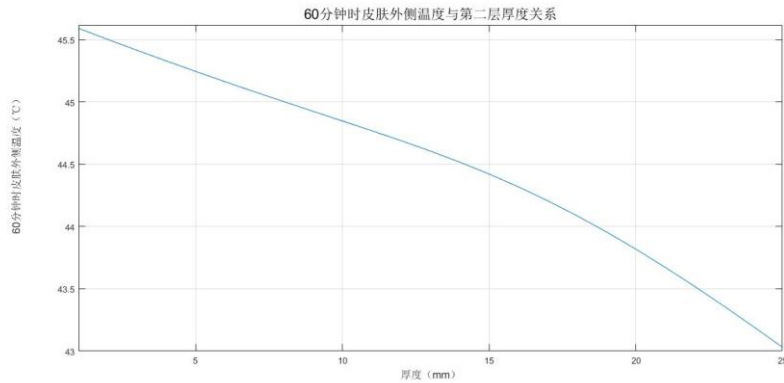
其它条件未发生改变，其它模型均与问题（1）所使用的相同

5.3 模型的求解

以第 II 层材料厚度 l 为横坐标， P_l 和 T_l 为纵坐标，分别绘制 P_l 和 T_l 随第 II 层材料厚度变化的曲线图如下：



图表 7: P_l 随着第 II 层材料厚度 l 变化的曲线图

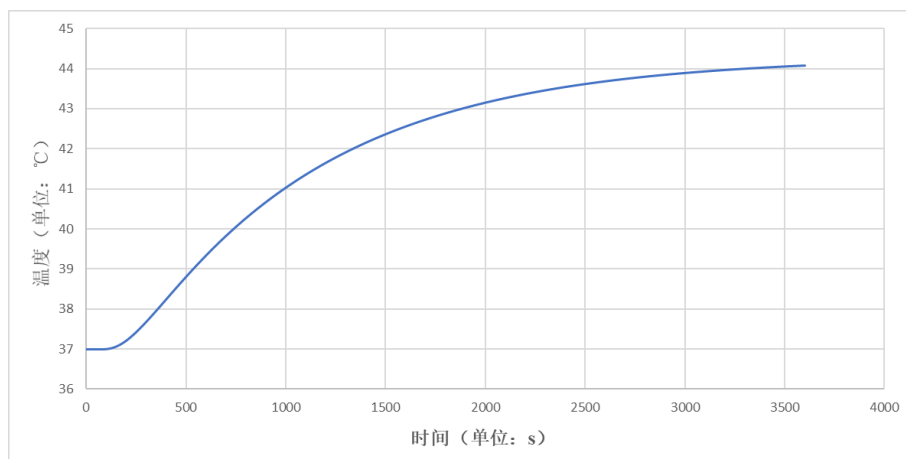


图表 8: T_l 随着第 II 层材料厚度 l 变化的曲线图

根据上图及数值迭代得到的温度分布结果（计算时所采用的厚度步长为 0.1mm），由条件（5.2.1）和（5.2.2）所确定的第 II 层材料厚度 l 的取值范围为：

$$18.1\text{mm} \leq l \leq 25.0\text{mm} \quad (5.3.1)$$

结合实际，取满足要求的厚度的最小值做为最优解，即第 II 层隔热材料的最优厚度为 18.1mm，当 $d_H = 18.1\text{mm}$ 时，假人外侧皮肤的温度分布图如下所示：



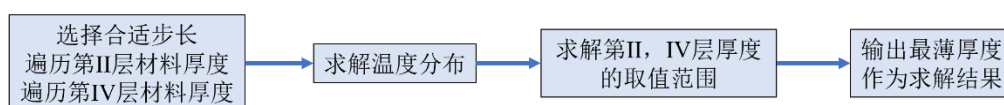
图表 9：环境温度 65°C，第 II 层材料厚度 18.1mm 时的假人皮肤温度分布图

6. 问题（3）的求解

6.1 问题分析

在问题（2）的基础上，本问增加了新变量——第 IV 层空气层厚度。与问题（2）的解决方法类似，确定导热系统参数后求解假人外侧皮肤温度分布，根据工作环境要求分别求出第 II 层和第 IV 层厚度的取值范围，再结合实际，确定最优厚度。

问题（3）的建模流程如下：



图表 10：问题（3）的建模流程图

6.2 模型的建立

以 l_1 记第 II 层隔热材料的厚度， l_2 记第 IV 层隔热材料的厚度， l_1 和 l_2 的取值范围为分别为 0.6mm 至 25mm 和 0.6mm 至 6.4mm，在总计 30 分钟的升温过程中，用 $P(l_1, l_2)$ 表示对应材料厚度的实验中，假人皮肤温度上升超过 44°C 所需的时间， $T(l_1, l_2)$ 表示对应材料厚度实验中，在经过完整的 30 分钟后，假人皮肤温度上升的最高温度。

根据题目要求， $P(l_1, l_2)$ 和 $T(l_1, l_2)$ 应该满足：

$$P(l_1, l_2) \geq 25 \text{ min} \quad (6.2.1)$$

$$T(l_1, l_2) \leq 47^\circ \text{C} \quad (6.2.2)$$

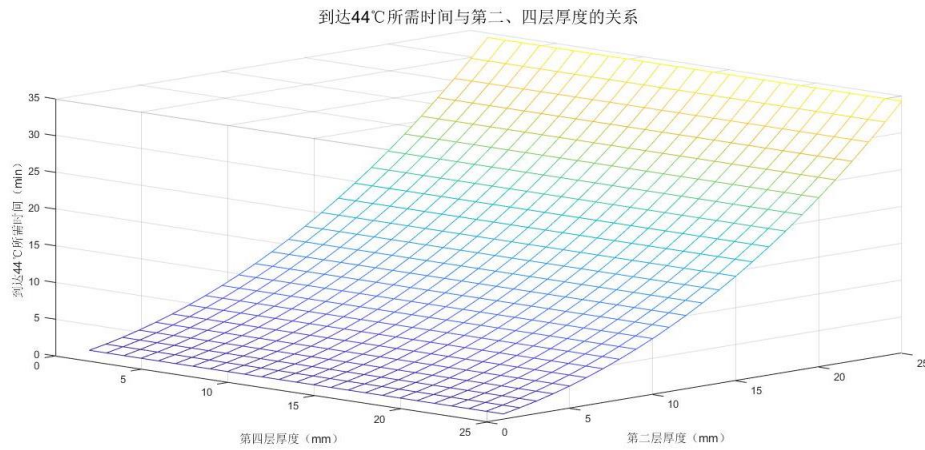
此外，导热系统的参数有所变化：

$$T_p = 80^\circ \text{C} \quad (6.2.3)$$

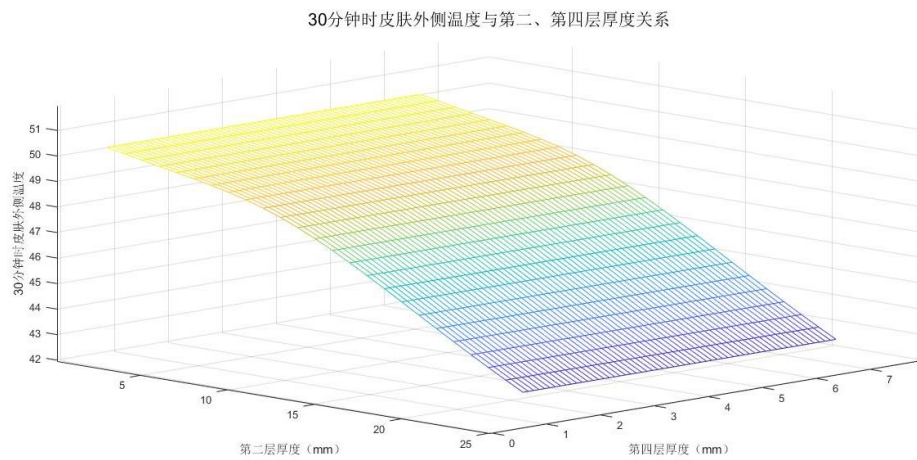
其它条件未发生改变，其它模型均与问题（1）所使用的相同

6.3 模型的求解

以第 II 层材料厚度 l_1 和第 IV 层材料厚度 l_2 为自变量， $P(l_1, l_2)$ 和 $T(l_1, l_2)$ 为因变量，分别绘制二者的二元函数图像如下：



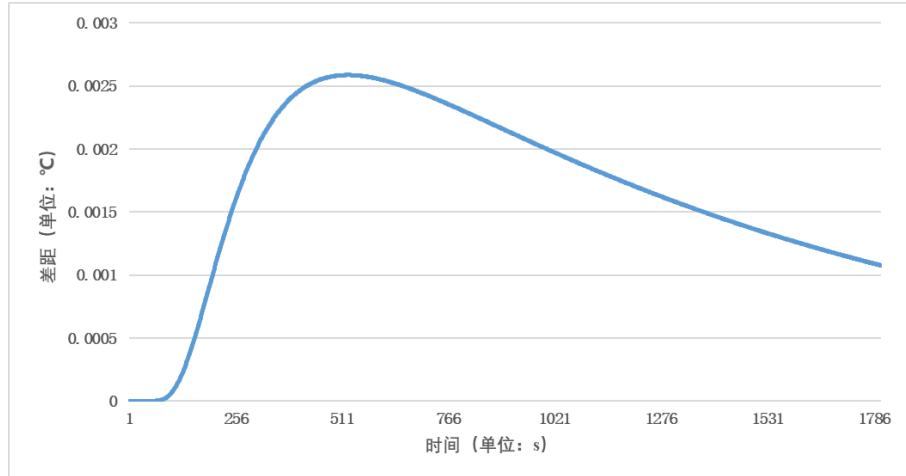
图表 11: $P(l_1, l_2)$ 随着材料厚度 l_1, l_2 变化的曲面图



图表 12: $T(l_1, l_2)$ 随着材料厚度 l_1, l_2 变化的曲面图

分析上面函数图像及数值求解的结果发现，当固定第 II 层隔热材料的厚度，并使第 IV 层空气层厚度从最小厚度 0.6mm 按步长 0.1mm 遍历到 6.4mm 时，得到的假人皮肤温度分布几乎没有变化。说明第 IV 层空气层的厚度对隔热效果影响不大，假人皮肤温度的变化对第 II 层材料的厚度更加敏感。

为了验证上述推断，固定第 II 层材料的厚度 $l_1 = 21.0\text{mm}$ ，分别计算 $l_2 = 0.6\text{mm}$ 和 $l_2 = 6.4\text{mm}$ （两端极值）对应的假人皮肤温度分布函数 F_1 和 F_2 ，并作差 $F_1 - F_2$ ，二者温度差距的图像如下：



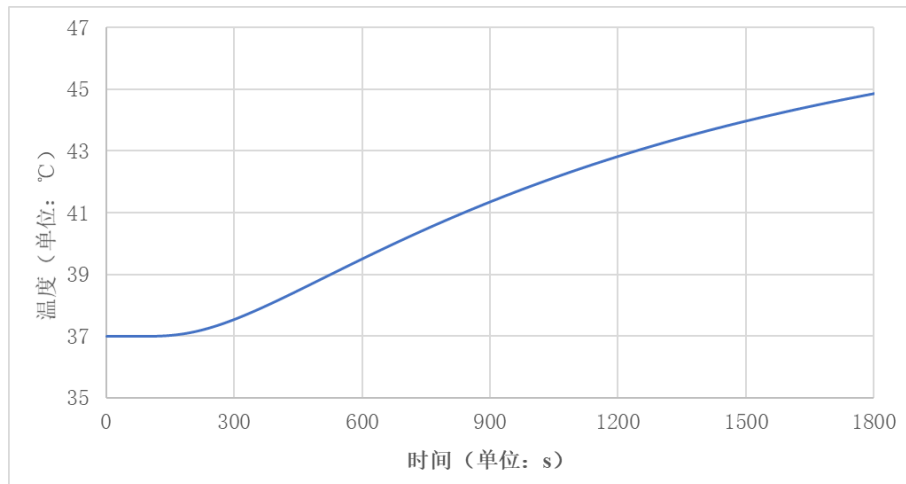
图表 13: $l_2 = 0.6\text{mm}$ 及 $l_2 = 6.4\text{mm}$ 对应温度分布的差距 $F_1 - F_2$ 的图像

从上图中可以看到，两个极值条件下的温度相差最大也没有超过 0.003°C ，因此可以断言在该热传导模型下，第 IV 层空气层的厚度对导热的影响几乎可以忽略，这是因为空气的导温性能良好而导热性质相对固体而言较差导致的。考虑到隔热服的穿戴要舒适，因此材料厚度越薄越好，这里以 $l_2 = 0.6\text{mm}$ 作为第 IV 层厚度的最优解。

固定 $l_1 = 0.6\text{mm}$ 的条件下，求解得满足条件的第 II 层材料厚度的取值范围为：

$$21.0\text{ mm} \leq l_2 \leq 25.0\text{ mm} \quad (6.3.1)$$

结合实际，取满足要求的厚度的最小值作为最优解，即第 II 层隔热材料的最优厚度为 21.0mm，当 $d_H = 21.0\text{mm}$ 时，假人外侧皮肤的温度分布图如下所示：



图表 14: 环境温度 80°C ，第 II 层厚度 21.0mm，第 IV 层厚度 0.6mm 时的假人皮肤温度分布图

7. 模型的评价和推广

7.1 模型误差分析

通过分析，模型的误差主要来自以下几个方面：

- 在建立隔热服的传热模型时，我们假设各层隔热材料间为理想传热即不存在热阻效应，这与实际情况存在一定误差，热阻的存在会导致各层材料间的温度传导不连续，进一步导致在接触面处的实际边界条件与模型存在偏差。
- 考虑到第 IV 层空气层的优良导温性，我们假设第 IV 层的温度在传热过程中处处相等，从而在迭代拟合过程中，我们将第 IV 层近似成一个点处理，但在实际情况下，空气层的内部的温度不可能保持处处相等，这也会造成一定误差。
- 经过迭代后计算出的空气对流传热系数分别为 108.029 与 12.675，然而空气强制对流系数的范围为 20~100，由于实际操作时实验室的环境状况（包括气压，风速，气温等）未知，所以该误差在可以接受的范围内。
- 关于初始温度的选择，由于实际人体的体温由内而外应保持递减，且隔热服内的初始温度相较人体体温 37°C 应该更低，所以可以对初始温度进行合理的调整使其更加接近实际情况；同样的，当隔热服内的温度达到稳态之后，按照常理，皮肤最外侧的温度应该比体内的温度略高（即高于 37°C），所以对于稳态温度也可以进行合理调整以减小误差。
- 考虑到通过不同形状介质（即沿平壁、沿圆筒壁、沿球壁）传热情况的差异，且人体应更近似于圆柱体，故本文将热量在隔热服上的传导简化为一维传热的方法与实际存在一定误差。

7.2 模型优点

- 本文使用的数学模型较为客观的模拟了外界高温环境和各层隔热材料以及假人皮肤外侧间的传热情况，并利用偏微分方程建立了皮肤外侧与各层材料内关于时间和空间的温度分布状况。
- 在求解微分方程时，避免寻求复杂的解析解，而采用离散显式表达的差分方法，得到温度分布的数值解，提高了求解效率，也让最终的结果更加直观。
- 在求解过程中，针对空气层导温性能好的特点，对问题（1）中的模型进行了改进使其更加符合问题（2），（3）的规划求解。

7.3 模型推广

本文采用的数学模型以及传热过程的差分离散方程，可用于解决类多层平板的一维非稳态导热问题，从而确定温度在平板内关于时间和空间的分布状况，有较好的应用能力及拓展空间。同时采用能量守恒思想建立各物理量间的动态关系，也在求解实际物理问题时有广泛的应用。

此外，对于复杂的偏微分方程系统，分析求得解析解会非常困难，而使用数值迭代的方法求解能大大降低难度。同时，通过对于迭代的时间以及空间步长，温度场初值的控制，能避免解的发散和震荡情况。对于求解类似问题，即使不使用解析解，也可通过差分离散方程，分析解的稳定性的条件。

8. 附录

8.1 参考资料

[1]杨世铭, 陶文铨, 传热学第四版, 高等教育出版社

[2]非稳态热传导, 百度文库,

<https://wenku.baidu.com/view/37a2be2e52d380eb63946d00.html>

访问日期: 2019.8.16

[3] 非稳态导热(修改版), 爱问共享资料,

<http://ishare.iask.sina.com.cn/f/19wvy2cncax.html?qq-pf-to=pcqq.group>

访问日期: 2019.8.16

8.2 程序代码

模型求解过程中所使用的 Matlab 代码如下:

Problem1:

```
clc;
clear;
p = [300 862 74.2 1.18];
c = [1377 2100 1726 1005];
lambda = [0.082 0.37 0.045 0.028];
d = [0.0006 0.006 0.0036 0.005];
d_all = sum(d); % 四层材料厚度和
a = lambda ./ (p .* c);
Sigma = sum(d(1:3) ./ lambda(1:3));
dt = 0.01; % 时间步长 1s
dx = 0.0001; % 空间步长 0.1mm
t0 = 75.0;
t1 = 37.0; % t1 是假设的稳态时的温度, 其他都是测得的稳态温度
t4 = 59.16;
t5 = 48.08;
t6 = 37.0;
% 初始化
time_all = 1;
t = 112.4 * ones(100 * time_all, 1);
t = [t, 59.16 * ones(100 * time_all, 102), 48.08 * ones(100 * time_all, 1)];
times = 0;

while abs(t(100 * time_all, 1) - t1) > 0.0001
    % 初始化
    if(times == 0)
        t1 = 73.7;
    else
        % t1 = t1 - 0.8 * (t1 - t(100 * time_all, 1));
        t1 = t(100 * time_all, 1);
    end
    times = times + 1;
end
```

```

end
%      t4 = t(100 * time_all, 103);
%      t5 = t(100 * time_all, 104);
h1 = (t1 - t4) / (Sigma * (t0 - t1));    % 最外侧，空气对流换热系数
h2 = (t1 - t4) / (Sigma * (t5 - t6));    % 第 IV 层，空气对流换热系数
time_all = 10000;                        % 计算 10000 秒后应当基本稳定
t = 37 * ones(100 * time_all + 10, d_all / dx);
t = [t0 * ones(100 * time_all + 10, 1), t];    % 外侧边界初始为 t0
%      h1 = 102;
%      h2 = 6.3;
% 有限差分法
for i = 1 : 100 * time_all
    t_next = 37 * ones(1, size(t, 2));
    t_next(1) = t(i, 1) * (1 - 2 * h1 * dt / (p(1) * c(1) * dx) - 2 * a(1) * dt / dx^2) + 2 * a(1) * dt * t(i, 2) / dx^2 + 2 * h1 * dt * t0 / (p(1) * c(1) * dx);
    for n = 2 : 6                                % 第一层
        t_next(n) = a(1) * dt / (dx^2) * (t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2 * a(1) * dt / (dx^2)) * t(i, n);
    end
    t_next(7) = t(i, 7) + 2 * dt * (lambda(1) * t(i, 6) + lambda(2) * t(i, 8) - (lambda(1) + lambda(2)) * t(i, 7)) / (dx^2 * (p(1) * c(1) + p(2) * c(2)));

    for n = 8 : 66                                % 第二层
        t_next(n) = a(2) * dt / (dx^2) * (t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2 * a(2) * dt / (dx^2)) * t(i, n);
    end
    if(t(i, 66) > 37.0)
        t_next(67) = t(i, 67) + 2 * dt * (lambda(2) * t(i, 66) + lambda(3) * t(i, 68) - (lambda(2) + lambda(3)) * t(i, 67)) / (dx^2 * (p(2) * c(2) + p(3) * c(3)));
    else
        t_next(67) = 37;
    end

    for n = 68 : 102                                % 第三层
        t_next(n) = a(3) * dt / (dx^2) * (t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2 * a(3) * dt / (dx^2)) * t(i, n);
    end
    if(t(i, 102) > 37.0)
        t_next(103) = t(i, 103) * (1 - 2 * h2 * dt / (p(3) * c(3) * dx) - 2 * a(3) * dt / dx^2) + 2 * a(3) * dt * t(i, 102) / dx^2 + 2 * h2 * dt * t(i, 104) / (p(3) * c(3) * dx);
    else
        t_next(103) = 37;
    end
end

```

```

        % 第四层
        t_next(104) = t(i, 104) + h2*dt*(t(i, 103) + t(i, 105) - 2*t(i, 104)) /
(50*p(4)*c(4)*dx);
        t(i+1, :) = t_next;      % 预先分配内存提速
    end
    times = times + 1;
    disp(t(100 * time_all, 1));
    disp(t(100 * time_all, 104));
end
res = zeros(time_all, 1);
for i = 1 : length(res)
    res(i) = t(i*100 - 99, 104);
end
res = [res; t(100 * time_all, 104)];
% xlswrite("result.xlsx", t, 1);
xlswrite("result.xlsx", res, 4, "A2");

```

Problem2:

```

clc;
clear;
p = [300 862 74.2 1.18];
c = [1377 2100 1726 1005];
lambda = [0.082 0.37 0.045 0.028];
d = [0.0006 0.006 0.0036 0.0055];
for d2 = 180 : 190
    d(2) = d2 / 10000;
    d_all = sum(d);      % 四层材料厚度和
    d_three = sum(d(1:3)); % 外三层材料厚度和
    d_two = sum(d(1:2));
    a = lambda ./ (p .* c);
    dt = 0.01;          % 时间步长 1s
    dx = 0.0001;        % 空间步长 0.1mm
    n_one = int32(d(1) / dx);
    n_two = int32(d_two / dx);
    n_three = int32(d_three / dx);
    h1 = 108.0292;
    h2 = 12.6749;      % 第 IV 层，空气对流换热系数
    t0 = 65;           % 环境温度为 65
    % 初始化
    time_all = 3601;
    t = 37 * ones(100 * time_all + 10, n_three + 2); % 第四层仅用一个点来差分
    t = [t0 * ones(100 * time_all + 10, 1), t];      % 外侧边界初始 t0°C
    % 有限差分法
    for i = 1 : 100 * time_all

```

```

t_next = 37 * ones(1, size(t, 2));
t_next(1) = t(i, 1)*(1 - 2*h1*dt/(p(1)*c(1)*dx) - 2*a(1)*dt/dx^2) + 2*a(1)*dt*t(i,
2)/dx^2 + 2*h1*dt*t0/(p(1)*c(1)*dx);
for n = 2 : n_one % 第一层
    t_next(n) = a(1)*dt/(dx^2)*(t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2*a(1)*dt/(dx^2))*t(i,
n);
end
t_next(1 + n_one) = t(i, 1 + n_one) + 2*dt*(lambda(1)*t(i, n_one) + lambda(2)*t(i,
2 + n_one) - (lambda(1) + lambda(2))*t(i, 1 + n_one)) / (dx^2 * (p(1)*c(1) + p(2)*c(2)));

for n = 2 + n_one : n_two % 第二层
    t_next(n) = a(2)*dt/(dx^2)*(t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2*a(2)*dt/(dx^2))*t(i,
n);
end
t_next(1 + n_two) = t(i, 1 + n_two) + 2*dt*(lambda(2)*t(i, n_two) + lambda(3)*t(i,
2 + n_two) - (lambda(2) + lambda(3))*t(i, 1 + n_two)) / (dx^2 * (p(2)*c(2) + p(3)*c(3)));

for n = 2 + n_two : n_three % 第三层
    t_next(n) = a(3)*dt/(dx^2)*(t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 - 2*a(3)*dt/(dx^2))*t(i,
n);
end
% t_next(103) = t(i, 103)*(1 - 2*h2*dt/(p(3)*c(3)*dx) - 2*a(3)*dt/dx^2) +
2*a(3)*dt*t(i, 102)/dx^2 + 2*h2*dt*37/(p(3)*c(3)*dx);
t_next(1 + n_three) = t(i, 1 + n_three)*(1 - 2*h2*dt/(p(3)*c(3)*dx) -
2*a(3)*dt/dx^2) + 2*a(3)*dt*t(i, n_three)/dx^2 + 2*h2*dt*t(i, 2 + n_three)/(p(3)*c(3)*dx);

% 第四层
t_next(2 + n_three) = t(i, 2 + n_three) + h2*dt*(t(i, 1 + n_three) + t(i, 3 + n_three) -
2*t(i, 2 + n_three)) / (50*p(4)*c(4)*dx);

t(i+1, :) = t_next; % 预先分配内存提速
end
if(t(100 * 3301, end - 1) <= 44 && t(100 * 3601, end - 1) <= 47)
    break;
end
end
disp(d(2));
res = zeros(time_all, 1);
for i = 1 : length(res)
    res(i) = t(i*100 - 99, end - 1);
end
res = [res; t(100 * time_all, end - 1)];
% xlswrite("result.xlsx", t, 1);
xlswrite('result.xlsx', res, 6, 'A2');

```

Problem3:

```

clc;
clear;
p = [300 862 74.2 1.18];
c = [1377 2100 1726 1005];
lambda = [0.082 0.37 0.045 0.028];
d = [0.0006 0.006 0.0036 0.0006];
for d4 = 6 : 64
    d(4) = d4 / 10000;
    for d2 = 200 : 220
        d(2) = d2 / 10000;
        d_all = sum(d); % 四层材料厚度和
        d_three = sum(d(1:3)); % 外三层材料厚度和
        d_two = sum(d(1:2));
        a = lambda ./ (p .* c);
        dt = 0.01; % 时间步长 1s
        dx = 0.0001; % 空间步长 0.1mm
        n_one = int32(d(1) / dx);
        n_two = int32(d_two / dx);
        n_three = int32(d_three / dx);
        h1 = 108.0292;
        h2 = 12.6749; % 第 IV 层, 空气对流换热系数
        t0 = 80; % 环境温度为 65
        % 初始化
        time_all = 1801;
        t = 37 * ones(100 * time_all + 10, n_three + 2); % 第四层仅用一个点来差分
        t = [t0 * ones(100 * time_all + 10, 1), t]; % 外侧边界初始 t0°C
        % 有限差分法
        for i = 1 : 100 * time_all
            t_next = 37 * ones(1, size(t, 2));
            t_next(1) = t(i, 1) * (1 - 2 * h1 * dt / (p(1) * c(1) * dx) - 2 * a(1) * dt / dx^2) +
            2 * a(1) * dt * t(i, 2) / dx^2 + 2 * h1 * dt * t0 / (p(1) * c(1) * dx);
            for n = 2 : n_one % 第一层
                t_next(n) = a(1) * dt / (dx^2) * (t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 -
                2 * a(1) * dt / (dx^2)) * t(i, n);
            end
            t_next(1 + n_one) = t(i, 1 + n_one) + 2 * dt * (lambda(1) * t(i, n_one) +
            lambda(2) * t(i, 2 + n_one) - (lambda(1) + lambda(2)) * t(i, 1 + n_one)) / (dx^2 * (p(1) * c(1) +
            p(2) * c(2)));
            for n = 2 + n_one : n_two % 第二层
                t_next(n) = a(2) * dt / (dx^2) * (t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 -
                2 * a(2) * dt / (dx^2)) * t(i, n);
            end
        end
    end
end

```

```

        t_next(1 + n_two) = t(i, 1 + n_two) + 2*dt*(lambda(2)*t(i, n_two) +
lambda(3)*t(i, 2 + n_two) - (lambda(2) + lambda(3))*t(i, 1 + n_two)) / (dx^2 * (p(2)*c(2) +
p(3)*c(3)));

        for n = 2 + n_two : n_three % 第三层
            t_next(n) = a(3)*dt/(dx^2)*(t(i, n+1) + t(i, n-1)) + (1 -
2*a(3)*dt/(dx^2))*t(i, n);
        end
        % t_next(103) = t(i, 103)*(1 - 2*h2*dt/(p(3)*c(3)*dx) - 2*a(3)*dt/dx^2) +
2*a(3)*dt*t(i, 102)/dx^2 + 2*h2*dt*37/(p(3)*c(3)*dx);
        t_next(1 + n_three) = t(i, 1 + n_three)*(1 - 2*h2*dt/(p(3)*c(3)*dx) -
2*a(3)*dt/dx^2) + 2*a(3)*dt*t(i, n_three)/dx^2 + 2*h2*dt*t(i, 2 + n_three)/(p(3)*c(3)*dx);
        % 第四层
        t_next(2 + n_three) = t(i, 2 + n_three) + h2*dt*(t(i, 1 + n_three) + t(i, 3 +
n_three) - 2*t(i, 2 + n_three)) / ((d(4)/dx)*p(4)*c(4)*dx);
        t(i+1, :) = t_next; % 预先分配内存提速
    end
    if(t(100 * 1501, end - 1) <= 44 && t(100 * 1801, end - 1) <= 47)
        break;
    end
end
disp(d(2));
end
res = zeros(time_all, 1);
for i = 1 : length(res)
    res(i) = t(i*100 - 99, end - 1);
end
res = [res; t(100 * time_all, end - 1)];
% xlswrite("result.xlsx", t, 1);
xlswrite('result.xlsx', res, 7, 'A2');

```