

高压油管的压力控制方法研究

摘要

高压油管是内燃机工作的关键元件，燃油从高压油管中喷出的速率与管内燃油压强息息相关。为了获得更好的喷油效果，应通过控制高压油管的供油和出油策略，使油管内的燃油压强在需求压强附近稳定变化。本文研究了高压油管内燃油压强在不同条件下出油，进油时的变化规律，为高压油管的压力计算和控制提供了一种方法。

针对任务（1），模型以油管在进油和出油时的质量守恒关系为切入点，建立起油管内燃油密度的变化量关于时间变量的质量守恒方程。求解模型的关键在于通过压强和弹性模量的关系求解燃油压强和密度的关系。模型在求解压强和弹性模量关系时使用了三次样条插值法，在求解关于质量守恒的常微分方程时使用了龙格-库塔算法。其次，由于燃油压强随时间的变化是震荡波动的，MATLAB 中的求解器在求解方程于大范围内的解时是无效的。本文基于龙格-库塔算法，利用常微分方程解的延拓性，将原始微分方程修改为多个小区间上的初值问题，以上一个区间求解得到的末端值作为输入下一区间的初值条件，通过层层迭代，解决了程序求解器失效的问题。此外，模型假设喷油嘴的每次工作周期间隔相同，从而便于求解进油和出油工作的周期解。

求解结果得出，为使燃油压强稳定在 100MPa，进油阀门每次打开时长应为 0.28ms；为使燃油压强稳定在 150MPa，进油阀门每次打开的时长应为 0.75ms。若分别经过 2s, 5s, 10s 的调整时间让压强提高到 150MPa，调整阶段阀门每次打开的时长分别为 0.87ms, 0.72ms, 0.68ms，压强升高到 150MPa 后，将阀门打开时长设为 0.75ms 即可保持压强的稳定变化。

针对任务（2），在任务（1）的模型基础上，模型对单位时间内进油和出油的质量进行了计算，重新求解了喷油嘴处的出油流量函数，凸轮轮廓曲线方程和针阀升程随时间的变化关系的求解均使用三次样条插值法。修正质量守恒方程后，利用相同的方法求解压强变化关于凸轮转动角速度的关系。模型求解得出，为了保持油罐内的燃油压强稳定在 100MPa，凸轮转动的角速度应设为 30rad/s。

针对任务（3），由前面的分析和求解结果得到，当喷油嘴进行喷油工作时，管内的燃油压强会出现骤降，因此模型考虑将两个喷油嘴的工作周期错开。由于两个喷油器的出油规律相同，模型将它们等效转换为一个喷油嘴的工作情形，工作周期和原来相比缩短一半。借助任务（2）的模型，便能轻松解决任务（3）的出油和供油策略问题。模型求解得到此时应设置凸轮转动的角速度为 50rad/s。

最后考虑减压阀的加入，模型通过研究一个进油和出油工作周期 50ms 内的压强变化情况，让系统在整个周期的开端和末端都保证恢复到 100MPa 的稳定压强，再通过求解质量守恒方程，得到高压油泵和减压阀的控制方案。

关键词：质量守恒方程，三次样条插值法，龙格-库塔算法，解的延拓和分段求解思想

1. 问题重述

背景：高压油管内的燃油因管内高压经喷油嘴喷出，随着管内燃油的减少，管内压强减小，而喷油嘴处的喷油量会随着管内压强的变化产生波动，影响喷油效果。因此，装置需动态调整高压油管的进油和出油工作，保持管内压强达到需求值并尽可能保持恒定，以提高油管喷油时的工作效率。根据题意，需要完成以下任务：

- (1) 在特定参数条件下，确定高压油泵单向阀的开启时间策略，以满足题目中高压油管内 100MPa、150MPa 的恒压需求
- (2) 利用凸轮驱动装置和喷油嘴针阀升程的参数，求解凸轮转动的角速度，以满足题目中高压油管内 100MPa 的恒压需求
- (3) 在高压油管增加第二个喷油嘴和单向减压阀的情况下，求解高压油管的喷油，供油策略，并求解油泵和减压阀的控制方案

2. 问题分析

任务（1）分析：

任务（1）需要求解油泵阀门的开启时间，阀门的状态仅有开和关两种，因此可以用关于时间的 0-1 二值函数来刻画油泵阀门的开启状态。高压油管内燃油的压强会随着入油口燃油的流入增大，喷油嘴燃油的喷出减小。喷油嘴每次喷出燃油的流量情况由材料中的图 2 给出，燃油流量与压强、密度、出油口面积的关系式由注 2 给出。

由题目注 1 和材料附件 3，可以求解得到燃油压强和密度的关系。借助燃油质量守恒，得到入油质量减出油质量等于燃油变化质量，变化的质量可借助压强和密度的关系用于计算压强的变化情况。入油质量又与阀门的开启状态有关，至此，联立上面各式便能求解高压油管内压强和入油阀门开关状态的关系。

利用上述关系，模型可以得到管内压强关于阀门状态的函数，为尽可能使压强稳定在需求值，模型最后的求解可转换为优化问题，找到尽可能良好的阀门控制方案，使管内压强随时间变化的均值尽可能等于需求值。模型可以用压强的均值和需求压强的误差值作为优化问题的目标函数，寻找最优方案使二者的误差尽可能小。

此外，加以对实际情况的考虑，模型应尽可能寻找满足需求条件的周期解，这样对于装置进油和出油的规划较为合理。

任务（2）分析：

对一般情况研究，高压油泵由凸轮驱动柱塞推动，将燃油挤压升压，推入到高压油管中，因此入油口处的压强将是变化的，不再是恒压。另一方面，喷油嘴处的出油流量由针阀的升降来控制，针阀的升程大于 0 时喷出燃油，且随着针阀的升程增大，出油口面积增大，流量会增大，因此喷油嘴处出油流量的变化规律将由它的几何参数及管内燃油压力决定，流量的变化也是一个动态模型。

在凸轮驱动推动柱塞上下运动的压油过程中，高压油泵中的低压燃油（0.5MPa）经过柱塞压缩，使压强大于高压油管内的燃油压强，冲开入油口单向阀。高压油泵被压缩的体积与柱塞活动的上、下止点位置，柱塞腔内直径有关。而上、下止点位置又与凸轮的形状有关，凸轮的边缘曲线数据已在附件 1 中给出。整个高压油泵柱塞腔的体积由被压缩体积和柱塞腔的残余体积两部分构成。

此外，针阀工作时的升程和时间的关系在附件 2 中给出，由附件 2 可以求解升程关于时间的函数，利用喷油嘴各结构的几何参数能得到喷油口面积关于时间的函数，再利用注 2 中的流量公式，便能得到在该情况下，喷油嘴流量关于时间的函数。联立以上条件并修改问题（1）中的模型，以求解最优的凸轮转动角速度。

任务（3）分析：

在任务（2）的基础上，高压油管增加了第二个喷油嘴。由于系统的喷油效果主要与高压油管内的压强有关，因此，两个喷油嘴的工作时间应错开，轮流进行作业，以保证高压油管有足够且稳定的压强。凸轮的角速度选择应尽可能满足进油次数与一次出油对应，一方面能满足恒压需求，另一方面能使喷油系统进行有规律的周期工作。

若凸轮不断转动压入燃油，而喷油嘴出油量小于进油量，随着时间累积，高压管内的压强会逐渐增大，为维持恒压，需打开新加入的单向减压阀降低管内油压。利用凸轮角速度和出油流量可计算一个工期内高压油管内燃油的净增量，进而计算一个进出油工作周期后油管内压强的增量，再求解减压阀门的控制方案，让高压油管内燃油压强在下一次喷油开始前恢复到初始状态的稳定压强，得到模型的周期解。

3. 模型假设与符号系统

3.1 模型假设

- （1） 假设高压油管内燃油压强在各个方向上分布均匀
- （2） 假设喷油嘴喷油的工作时间间隔相同
- （3） 当凸轮带动柱塞运动到进油阀门打开后，柱塞腔与高压油管连通。假设二者连通时，柱塞腔内的燃油压强和高压油管内的燃油压强相等
- （4） 假设凸轮带动柱塞上下运动的高度差等于凸轮极径的变化量
- （5） 假设减压阀的开关状态可以任意控制

3.2 符号系统

符号系统

符号	含义
P	高压油管内的燃油压强
P_0	高压油泵的在入口处提供的压强
ρ_0	高压油泵提供的燃油密度
ρ	高压油管内的燃油密度
V	高压油管的容积
A_0	高压油泵的入油阀门面积
E	燃油的弹性模量

符号系统

符号	含义
C	常数参数，代表流量系数（ $C = 0.85$ ）
$F(t, T)$	高压油泵入油阀门的开关状态函数，这是0 – 1二值函数， T 为参数
t	喷油系统的工作时间
$Q(t)$	喷油嘴工作时的出油速率
$M(P)$	高压油管内燃油压强随时间变化的均值
ε_0	压强均值 $M(P)$ 和需求压强之间的误差范围
T_x	估算得出的每次进油阀门打开的时长
R_1	喷油嘴的针阀半径
R_2	喷油嘴的喷孔半径
$d(t)$	喷油嘴针阀的升程，它是时间的函数
ϕ	喷油嘴密封座圆锥的半角
θ	凸轮边缘曲线上的点对应的极角
$r(\theta)$	凸轮边缘曲线上的点对应的极径
r_{\max}, r_{\min}	凸轮极径的最大值和最小值
P_{\max}, P_{\min}	压强在稳定变化阶段时的两个极值
H	柱塞的最大升降高度
$l(t)$	柱塞随时间上升的高度
$V_0(t)$	柱塞腔随时间变化的体积
S	柱塞腔的横截面积
$U(t)$	进油阀门状态的触发器函数，是一个0 – 1二值函数
ω	凸轮转动的角速度
T_ω	凸轮以角速度 ω 转动一周所花费时间
ω_x	为满足恒压条件估算得出的凸轮转动角速度
n	在一个 50ms 工作周期内凸轮驱动系统的进油次数
$N(t)$	减压阀的状态函数，是一个0 – 1二值函数
T_n	第一个 50ms 的工作周期内减压阀门的打开时间

4. 任务（1）的求解

4.1 问题分析

由前面的分析可以得出，首先模型需要解决燃油压强和密度的函数关系。其次，建立进油和出油的质量守恒方程，求解得到高压油管内燃油的密度关于入油阀门状态的关系，再通过压强和密度关系将上式转换为高压油管内燃油压强关于入油阀门状态的关系。在以上模型的基础上，研究不同阀门控制方案对油管内压强的均值的影响，模型转化为求解规划问题：寻找最优的阀门控制方案，以均值距需求压强的误差为目标函数，让压强均值与需求压强的误差尽可能小。

任务（1）的建模流程图如下所示：

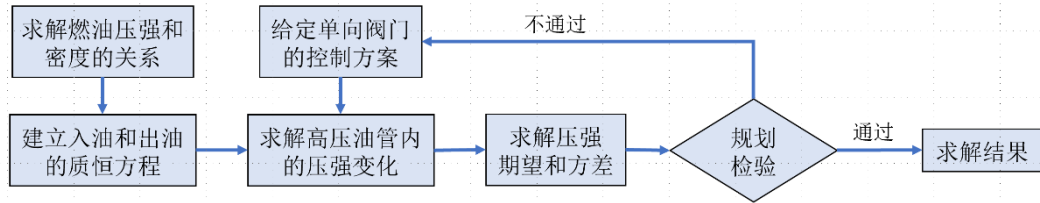


图 1：任务（1）的建模流程图

4.2 模型准备

4.2.1 燃油压强和密度的关系

由注 2 知燃油的压力变化量与密度变化量成正比，且比例系数已知，取压力变化量和密度变化量的微元，可得压力和密度满足的微分方程为：

$$dP = \frac{E}{\rho} d\rho \quad (4.2.1)$$

（4.2.1）式中 P 表示燃油压强， E 表示弹性模量， ρ 表示燃油密度，弹性模量 E 是与压强 P 相关的量，因此这里把 E 记为 $E(P)$ ，二者的数值关系由附件 3 给出。且已知在压强为 100MPa 的条件下，燃油的密度为 0.850 mg/mm³，由（4.2.1）式两端积分，求解燃油压强和密度的关系等价于求解下面积分方程初值问题的解：

$$\begin{cases} \int \frac{1}{E(P)} dP = \int \frac{1}{\rho} d\rho \\ \rho(100) = 0.850 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

方程右端一项的积分可直接求解得到：

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = \ln \rho(P) + C \quad (4.2.3)$$

因此，解决上述方程的关键在于得到弹性模量 E 关于压强 P 的关系，进而求解密度关于压强的关系式。附件 3 给出的是弹性模量和燃油压强的数值关系，仅通过这些数据不便于求得初值问题（4.2.2）的解析解，因此模型考虑采用计算机数值求解的方法，得到燃油压强和密度的关系。

4.2.2 入油和出油的质量守恒方程

由于燃油在进出高压油管时受到压力挤压，密度和体积会发生变化，但燃油质量不会改变，因此通过进油质量减去出油质量等于高压油管内燃油的净增质量，利用材料中注 2 的流量公式，得到进出油时的质量守恒方程为：

$$F(t,T) \cdot \rho_0 C A_0 \sqrt{\frac{2 \times (P_0 - P(\rho))}{\rho_0}} dt - \rho Q(t) dt = V d\rho \quad (4.2.4)$$

上式中 $F(t,T)$ 是高压油泵进油阀门的状态函数，它的定义如下：

$$F(t,T) = \begin{cases} 1, & \text{阀门打开} \\ 0, & \text{阀门关闭} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

式（4.2.4）中 ρ_0 表示高压油泵提供的进油燃油密度， $P_0 = 160\text{MPa}$ 表示高压油泵入油口处提供的恒定压强， $P(\rho)$ 表示高压油管内的燃油压强，它与管内的燃油密度有关， $P(\rho)$ 由式（4.2.2）求得。 $C = 0.85$ 表示流量系数， A_0 表示进油口的圆孔面积，已知入油小孔直径为 1.4mm ，可得 $A_0 \approx 1.54\text{mm}^2$ 。

ρ 表示高压油管内的燃油密度， V 表示高压油管的体积，由高压油管的几何参数可求得 $V \approx 39268.75\text{mm}^3$ 。 $Q(t)$ 表示喷油嘴工作时的流量变化函数，由材料给出的图 2 可以求解，同时由模型假设（2），得到 $Q(t)$ 是一个周期函数，喷油嘴工作的时间间隔相同。喷油嘴每秒工作十次，因此每个工作周期时长均为 100ms ， $Q(t)$ 以 100ms 为周期，即对于流量函数 $Q(t)$ 应满足：

$$Q(t+100) = Q(t), t \geq 0 \quad (4.2.6)$$

在第一个 100ms 的周期内，喷油流量 $Q(t)$ 的表达式为：

$$Q(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t < 0.2 \\ 20, & 0.2 \leq t < 2.2 \\ 240 - 100t, & 2.2 \leq t < 2.4 \\ 0, & 2.4 \leq t < 100 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

方程（4.2.4）能够得出高压油管内燃油密度和时间的关系。再借助积分方程初值问题（4.2.2）的解，若压强 P 和密度 ρ 之间能建立双射，便能求解得到油管内燃油压强和时间的关系。

对于方程（4.2.4），燃油密度 ρ 关于时间变量 t 的关系无法给出显式表达式，且式中含有一项数值解 $P(\rho)$ ，因此求解该方程的解析解是不现实的，模型仍然采用计算机数值求解的方法得到燃油压强随时间的变化关系。

4.2.3 入油控制阀门状态函数 $F(t,T)$

前文在式（4.2.5）中已经说明了 $F(t,T)$ 这个 $0-1$ 二值函数的定义情况，此外，入油控制阀门的状态函数 $F(t,T)$ 还具有参数 T 。模型定义 $F(t,T)$ 为周期函数，即阀门的打开和关闭是周期变化的，而参数 T 表示阀门每次打开的时长，阀门每次开启后，需关闭 10ms ，然后再进入下一周期的工作。

与喷油嘴处的燃油流量函数 $Q(t)$ 类似,可以得到阀门控制函数 $F(t,T)$ 的周期性质:

$$F(t+(T+10),T) = F(t,T), t \geq 0 \quad (4.2.8)$$

在第一个 $(T+10)$ ms 的周期内, 阀门控制函数 $F(t,T)$ 的表达式为:

$$F(t,T) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & T \leq t < T+10 \end{cases} \quad (4.2.9)$$

4.3 模型的建立

4.3.1 稳定压强在 100MPa 的模型

由前文的分析得到, 每当模型给定一个入油阀门控制函数 $F(t,T)$ 的参数 T , 便能通过解方程 (4.2.4) 得到高压油管内燃油压强关于时间的关系。考虑下面的规划问题:

通过改变输入参数 T , 观察高压油管内的燃油压强的变化情况, 压强是否能够稳定变化。若能, 分别计算不同参数 T 控制下, 燃油压强随时间变化的均值 $M(P)$, 该规划问题的目标函数为:

$$\text{seek } T: \text{ s.t. } |M(P) - 100| < \varepsilon_0 \quad (4.3.1)$$

式 (4.3.1) 中 ε_0 是一预先给定的正数, 它表示燃油压强均值与 100MPa 的误差, 当燃油的压强均值与 100MPa 的差距在允许的误差范围 ε_0 内时, 模型就认为燃油压强在所要求的 100MPa 附近波动。取定的 ε_0 越小, 均值的误差范围就越小, 但若取定的 ε_0 过于小, 可能会导致模型出现无解的情形。因此 ε_0 的选取要适中, 模型以需求压强的百分之一为允许的误差值, 可得 ε_0 的值为:

$$\varepsilon_0 = 100 \times 1\% = 1 \quad (4.3.2)$$

4.3.2 调整压强到 150MPa 并保持稳定的模型

若要将高压油管内的燃油压强从 100MPa 提升到 150MPa, 进油阀门的开启时间应经过 t_0 的调整状态让油管内压强升高到需求值, 后后进入稳定工作状态保持管内压强稳定。首先可以运用 (4.3.1) 的模型求解压强稳定在 150MPa 所需的参数 T_b :

$$\text{seek } T_b: \text{ s.t. } |M(P) - 150| < \varepsilon_0 \quad (4.3.3)$$

对于 $0 \sim t_0$ 的调整时间段, 阀门控制函数 $F(t,T)$ 应使用另一参数 T_a , 在给定时间 t_0 内, 高压油管内的燃油压强应在参数 $T = T_a$ 的阀门控制函数 $F(t,T_a)$ 下, 压强从 100MPa 升高到 150MPa。

因此对于需求中的三个不同的调整时间 $t_0 = 2s$, $t_0 = 5s$ 和 $t_0 = 10s$, 它们在经过调整时间后为稳定在 150MPa 所需的进油阀门控制参数 T_b 是相同的, 三者之间的差异主要在于 T_a 的求解。且从实际考虑, 调整时间长度 t_0 越短, 参数 T_a 的值应越大。

该模型的阀门控制函数 $F(t,T)$ 的表达式为:

$$F(t,T) = \begin{cases} F(t,T_a), & 0 \leq t < t_0 \\ F(t,T_b), & t_0 \leq t < \infty \end{cases} \quad (4.3.4)$$

4.4 模型的求解

4.4.1 龙格-库塔算法和分段思想求解质恒方程

首先由积分方程初值问题（4.2.2），利用附件 3 弹性模量和压强的关系，使用三次样条插值法^[1]，求解得到燃油压强和密度的关系图如下：

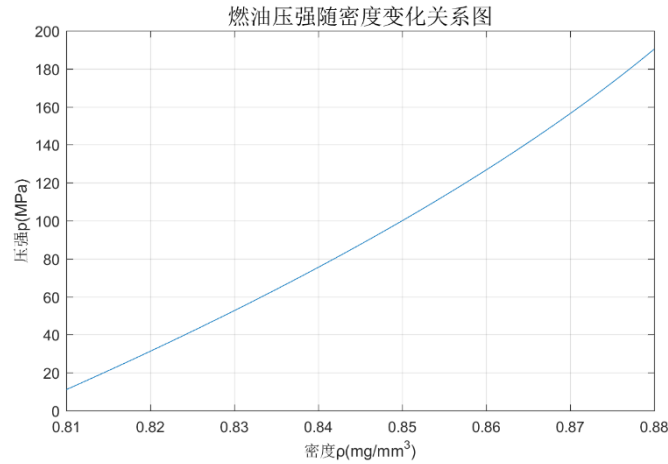


图 2：燃油压强随密度变化的关系图

得到压强和密度的关系后，模型采用龙格-库塔算法^[2]求解常微分方程（4.2.4）的数值解，模型采用工程问题中常用的四阶龙格-库塔算法：设有常微分方程初值问题：

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.4.1)$$

该初值问题的数值解表达式如下：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

在 MATLAB 中调用 ODE45 求解器对质量守恒的常微分方程（4.2.4）进行求解。首次求解发现，求解器的求解效果较差，不符合油管内燃油压强的实际变化情况。

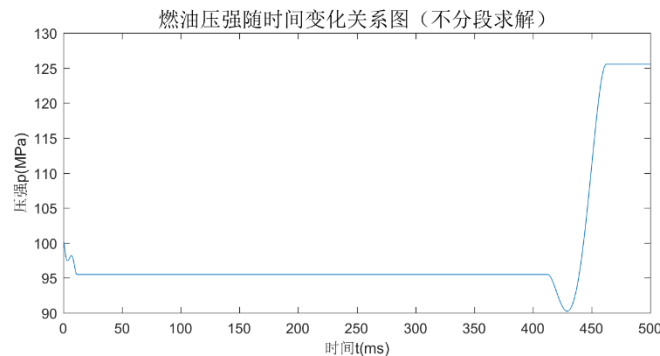


图 3：首次求解得到的压强关于时间变化的错误曲线

经过试验，发现当缩小每次求解积分区间的长度时，求解器的求解结果与实际较为吻合。因此修改常微分方程（4.2.4）的形式，考虑将所求解的整个积分区间进行分割，成为等长的小区间：

$$[0, t_m], [t_m, t_{2m}], [t_{2m}, t_{3m}], \dots \quad (4.4.3)$$

考虑方程（4.2.4）在第一个区间内的解：

$$\begin{cases} F(t, T) \cdot \rho_0 C A_0 \sqrt{\frac{2 \times (P_0 - P(\rho))}{\rho_0}} dt - \rho Q(t) dt = V d\rho, & 0 \leq t \leq t_m \\ \rho(t=0) = P(100) = 0.85 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

求解上述方程得到油管内燃油密度 $\rho(t)$ 关于时间 t 在区间 $[0, t_m]$ 上的关系式，由常微分方程解的延伸定理^[3]，可证明方程（4.2.4）的解的存在区间可以向右延拓（证明见附录），用式（4.4.4）的求解结果作为新的初值进行迭代，方程与质量守恒方程（4.2.4）同解。因此用分段思想考虑下面的迭代方程：

$$\begin{cases} F(t, T) \cdot \rho_0 C A_0 \sqrt{\frac{2 \times (P_0 - P(\rho))}{\rho_0}} dt - \rho Q(t) dt = V d\rho, & t_{km} \leq t \leq t_{(k+1)m} \\ \rho(t = t_{km}) = \rho(t = t_{km}) \end{cases} \quad (4.4.5)$$

式（4.4.5）中 $k = 1, 2, \dots$ ，即方程在每一段区间末尾的值将作为下一次方程迭代的初值条件，将区间分割后得到的局部解拼接起来，在大范围上与原方程（4.2.4）是同解的，且通过以上操作能保证求解器的求解结果是精确的。

4.4.2 压强稳定在 100MPa 的解

求解模型，在参数精度为 0.01 的条件下，进油阀门控制函数 $F(t, T)$ 当 $T = 0.28\text{ms}$ 时，高压油管内燃油压强能在 100MPa 附近稳定波动，在该条件下，油管内燃油压强随时间（总试验时间为 5s）的变化关系图如下所示：

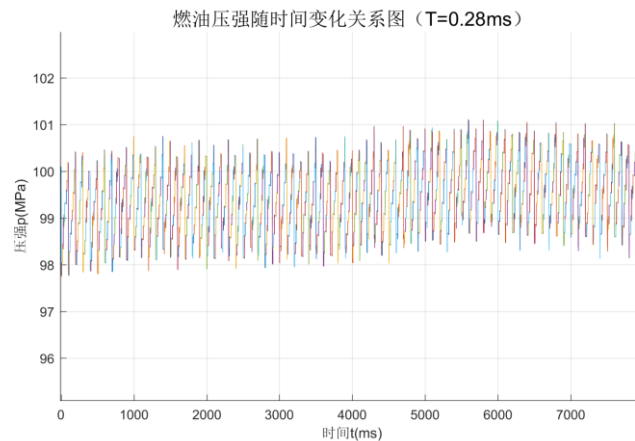


图 4：燃油压强随时间变化关系图（ $T=0.28\text{ms}$ ，稳定压强 100MPa）

从上图中可以看出压强随时间围绕 100MPa 稳定波动，定义压强均值 $M(P)$ 为：

$$M(P) = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \quad (4.4.6)$$

上式中的 P_{\max} 和 P_{\min} 分别表示压强随时间稳定波动时的两个峰值，由求解结果计算得到压强均值 $M(P)$ 的与需求压强的误差值为：

$$|M(P)-100| \approx \left| \frac{101+98}{2} - 100 \right| = 0.5 < 1 \quad (4.4.7)$$

因此可判断上述模型求解的结果是合理的。

4.4.3 调整压强到 150MPa 并保持稳定的解

首先求解压强稳定在 150MPa 所需的 $F(t, T_b)$ 时间参数 T_b ，得到当 $T_b = 0.75\text{ms}$ 时，高压油管内的燃油压强能围绕 150MPa 稳定波动，示意图如下：

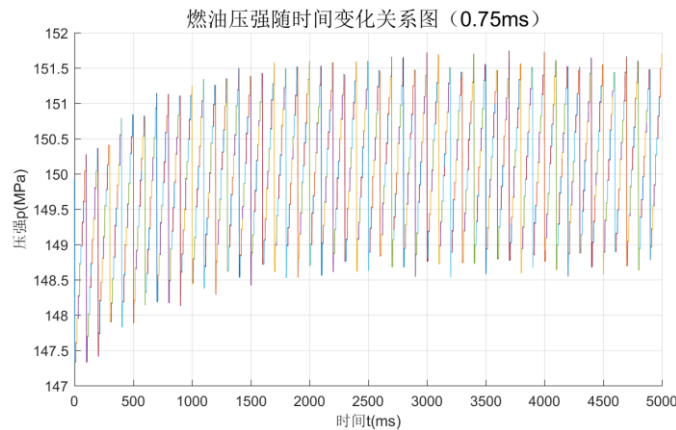


图 5：燃油压强随时间变化关系图 ($T=0.75\text{ms}$ ，稳定压强 150MPa)

由求解结果计算得到压强均值 $M(P)$ 的与需求压强的误差值为：

$$|M(P)-150| \approx \left| \frac{151.5+148.5}{2} - 150 \right| = 0 < 1.5 \quad (4.4.8)$$

因此可判断上述模型求解的结果是合理的。

同理求解模型 (4.3.4)，为使油管内压强在 t_0 时间段内从 100MPa 升到 150MPa，压强升高所需的调整参数 T_a 结果为：

表格 1：不同调整时间对应的进油阀开启时长方案

调整时间 t_0 （单位：s）	参数 T_a （单位：ms）	参数 T_b （单位：ms）
2	0.87	0.75
5	0.72	
10	0.68	

即若调整时间为 2s，则进油阀的开启时间在前 2s 内为 0.87ms，从而使压强升高到 150MPa，后将阀门每次开启时长设置为 0.75MPa，维持压强在 150MPa 稳定；若调整时间为 5s，则第一段阀门开启时长设置为 0.72ms；若调整时间为 10s，则第一段阀门开启时长设置为 0.68ms。压强要在更短时间内提高到 150MPa，进油速率要快，可见模型的结果与实际物理规律相吻合。三种情况压强随时间的变化关系如下所示：

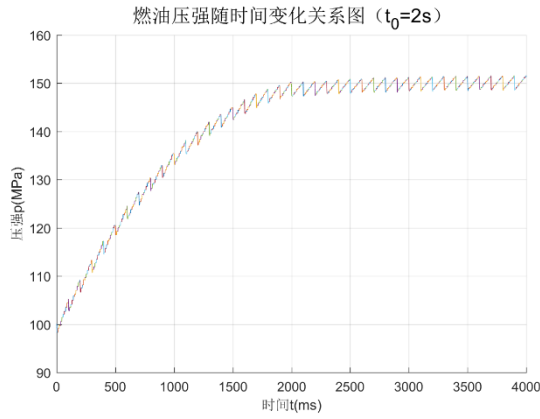


图 6: 压强随时间的变化关系 ($t_0 = 2s$)

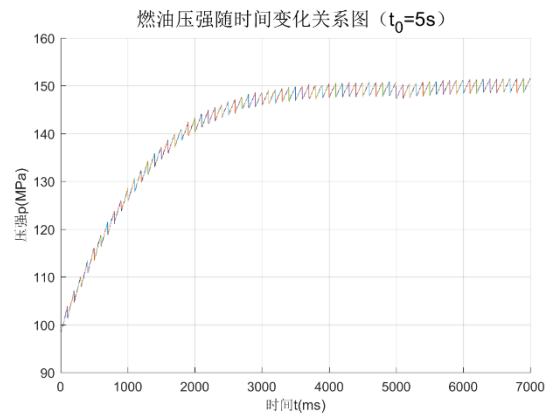


图 7: 压强随时间的变化关系 ($t_0 = 5s$)

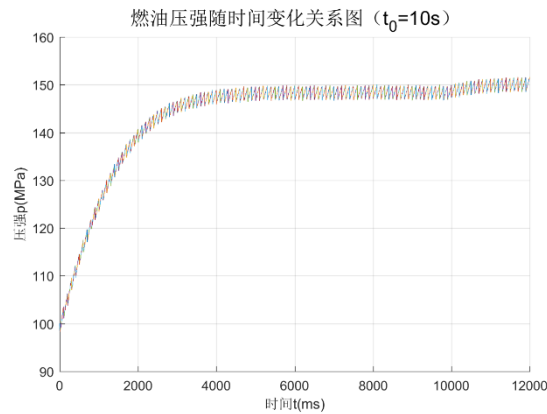


图 8: 压强随时间的变化关系 ($t_0 = 10s$)

4.5 求解结果分析

本文通过简单估算的方法，对上述模型的求解结果进行检验分析，从而判断求解的结果与实际情况相比是否合理。

想要让压强稳定在 100MPa 或 150MPa，实际上就是需要高压油管内油的质量稳定不变。假设在进出油时，高压油管内燃油的压强保持不变，对进出油系统工作一段时间的状态进行分析，在这段时间内让油管内质量保持恒定，则进油质量等于出油质量，出油质量可通过流量函数 $Q(t)$ 直接对时间积分得到，从而反向计算在这段时间内为了保证进油质量等于出油质量所需的进油阀门打开时长 T_x 。

上述计算 T_x 的详细推导见附录，这里仅给出模型求解得到的参数 T 和估算得到的 T_x 的对比结果：

表格 2: 模型求解值 T 与实际估算值 T_x 对比表

所需的恒定压强	模型求解值 T	估计值 T_x
100 MPa	0.28 ms	0.29 ms
150 MPa	0.75 ms	0.77 ms

分析上表可以得出，模型的求解结果和估算值的误差很小，说明模型的结果与现实结果是非常吻合的。

5. 任务（2）的求解

5.1 问题分析

在任务（1）的模型基础上，任务（2）的求解模型需要对质量守恒方程进行修正。燃油的进油控制方案发生了变化，模型需要求解进油质量与时间的关系，而这与凸轮转动的角速度相关。此外，喷油嘴处的燃油喷出流量也会随着针阀升程发生变化，模型需要求解新的喷油流量关于时间的表达式。模型仍以压强随时间变化的均值作为规划问题的目标函数，通过改变角速度的输入值寻找最优解。

任务（2）的建模流程图如下所示：

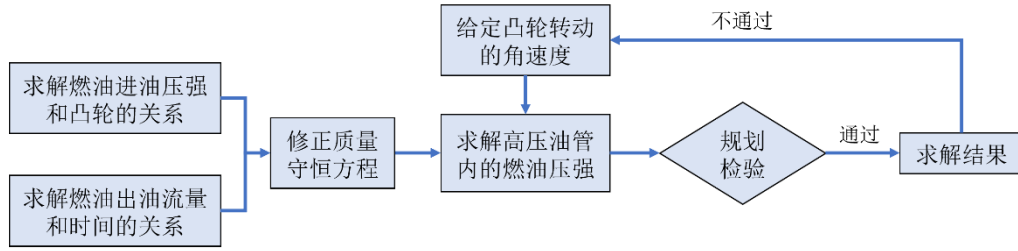


图 9：任务（2）的建模流程图

5.2 模型准备

5.2.1 燃油出油流量的求解

当针阀升程大于 0 时，喷油嘴开始喷油。随着针阀升起高度的增加，出油口的面积逐渐增大，出油流量随之增大。但考虑到喷油嘴针阀的几何结构，在出油的开始阶段，出油流量的大小主要依赖于针阀与密封座间的圆环面积，而随着针阀升起高度的增加，当针阀与密封座间的圆环面积大于喷孔面积时，出油流量的大小将只由喷孔面积决定。之后当针阀下降时，出油流量的变化也将遇到同样的问题，如下图所示：

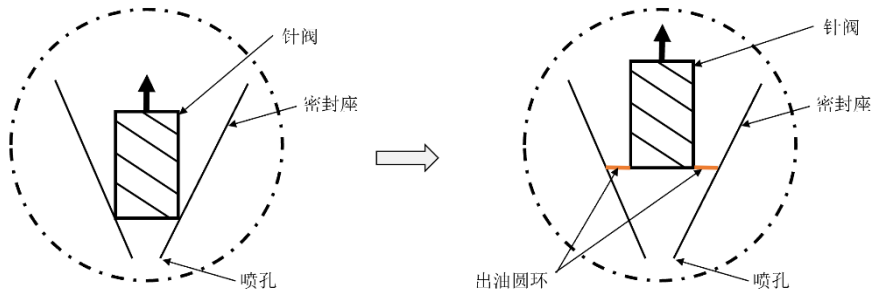


图 10：针阀出油的几何关系示意图

因此，出油流量函数 $Q(t)$ 是分段函数，模型首先需要找到分段的时间点，当针阀与密封座间的圆环面积等于喷孔面积时，有关系式：

$$\pi((R_1 + d \cdot \tan \theta)^2 - R_1^2) = \pi R_2^2 \quad (5.2.1)$$

上式左端表示针阀与密封座间的圆环面积，右端表示喷油孔面积， R_1, R_2 分别表示针阀和喷油孔的半径， d 表示针阀升程， θ 表示密封座圆周的半角。上式解出 d ，即可得到出油流量函数 $Q(t)$ 的分段依据。

经过推导（推导见附录），得到喷油嘴出油流量 $Q(t)$ 在第一个周期内的表达式为：

$$Q(t) = \begin{cases} \pi C \cdot \left((R_1 + d(t) \cdot \tan \theta)^2 - R_1^2 \right) \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & 0 \leq t < t_1 \\ \pi C \cdot R_2^2 \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & t_1 \leq t < t_2 \\ \pi C \cdot \left((R_1 + d(t) \cdot \tan \theta)^2 - R_1^2 \right) \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & t_2 \leq t < 2.45 \\ 0, & 2.45 \leq t < 100 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

式（5.2.2）中， t_1 和 t_2 分别表示针阀在升起和下落时圆环面积和喷孔面积相等的时刻，由附件知 2.45ms 后加油结束。 t_1 和 t_2 应该满足下面的关系式：

$$d(t_1) = d(t_2) = \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2} - R_1}{\tan \theta}, \quad t_1 < t_2 \quad (5.2.3)$$

5.2.2 进油压强和凸轮的关系

与任务（1）的情形不同，此时高压油泵的进油策略受到凸轮驱动的直接影响。凸轮周期性的转动，通过带动柱塞挤压高压油泵油腔，使腔内燃油压强增大，直到大于高压油管内的压强，将燃油压入油管。当凸轮极径较长的一端转向柱塞时，柱塞压缩燃油压强增大；当凸轮极径较短的一端转向柱塞时，柱塞放松，腔内燃油压强减小。

在进油单向阀未打开的状态下，通过附件 1 中的凸轮边缘曲线参数和假设（4），可以求解高压油泵油腔内燃油压强的大小随凸轮转动规律的关系，示意图如下：

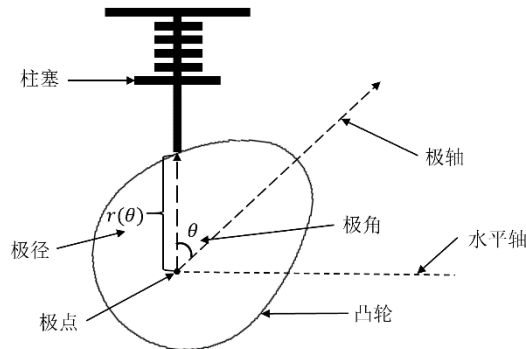


图 11：凸轮带动柱塞运动示意图

以凸轮旋转中心为极坐标极点，凸轮的最长极径为极轴建立极坐标系。设凸轮接触柱塞处极角为 θ ，极径长为 $r(\theta)$ ， $r(\theta)$ 和 θ 的关系可由附件 1 求解。

下面考虑阀门关闭时的压缩过程，柱塞的升降范围与凸轮的最长最短极径有关，通过简单几何分析，得到柱塞的最大升降高度 H 为：

$$H = r_{\max} - r_{\min} \quad (5.2.4)$$

当柱塞向上压缩的距离为 Δl 时，油腔被压缩的体积为 $S \cdot \Delta l$ ，由此可得压缩后的高压油泵油腔内燃油的密度的变化量 $\Delta\rho$ 为（ m 为腔内燃油质量）：

$$\Delta\rho = \frac{m}{S \cdot H + 20 - S \cdot \Delta l} - \frac{m}{S \cdot H + 20} \quad (5.2.5)$$

且当柱塞处于下止点时，腔内燃油处于 0.5MPa 的低压状态，由燃油压强和密度的关系（4.2.2），得到此刻的燃油密度 ρ_0 为 $\rho_0 = P(0.5)$ ，设此时柱塞上升高度 $l = 0$ ，则将方程（5.2.5）修改为微分形式并添加初值条件得到初值问题：

$$\begin{cases} \frac{1}{m} d\rho = \frac{1}{S \cdot H + 20 - S \cdot dl} - \frac{1}{S \cdot H + 20} \\ \rho_0(l = 0) = P(0.5) \end{cases} \quad (5.2.6)$$

上述初值问题的解便是高压油泵油腔内燃油密度和凸轮运动的关系，再次借助压强和密度的关系（4.2.2）的解，即可得到燃油压强和凸轮运动的关系。

5.2.3 质量守恒方程的修正

模型考虑下面的进油过程：在初始状态下，高压油泵内的燃油压强为 0.5MPa，当凸轮带动柱塞压缩燃油时，燃油压强组件增大，当压强增大到刚好大于等于高压油管内的燃油压强时，进油单向阀门打开，高压油泵油腔和油泵连通。由假设（3），从此刻起到接下来的一段时间内，高压油泵油腔内的燃油压强和油管内的压强相等。

当凸轮带动柱塞运动到上止点时，进油过程结束。柱塞会随着凸轮的转动回落到下止点，补充燃油流入高压油泵油腔内，使压强恢复到 0.5MPa 低压，整个装置进入到下一轮工作周期。

考虑连通情况下的进出油质量守恒，某一时刻油管内的燃油密度 ρ 满足：

$$\rho = \frac{m}{V + V_0(t)} \quad (5.2.7)$$

上式中 m 表示整个连通装置内燃油的质量， V 表示高压油管的体积， $V_0(t)$ 表示高压油泵油腔的体积，考虑上述状态的下一时刻，燃油的密度发生变化，得到：

$$\rho + d\rho = \frac{m - \rho Q(t)dt}{V + V_0(t) + Sdl} \quad (5.2.8)$$

式（5.2.8）分子上 $\rho Q(t)dt$ 表示流出的燃油质量，分母上 Sdl 表示压缩后连通装置体积的变化量。 S 表示柱塞腔的截面积，由柱塞腔直径可得 $S \approx 19.63\text{mm}^2$ ，然后联立（5.2.7）和（5.2.8）消去 m ，得到质量守恒方程：

$$\rho Sdl - \rho Q(t)dt = (V + V_0(t))d\rho \quad (5.2.9)$$

上式第一项 ρSdl 表示进油质量，式（5.2.9）仅能表达进油阀门开启状态的质量守恒方程，为了在方程中描述进油阀门的开启状态，在（5.2.9）的基础上添加一个触发器函数 $U(t)$ ，最终的质量守恒方程为：

$$U(t) \cdot \rho Sdl - \rho Q(t)dt = (V + V_0(t))d\rho \quad (5.2.10)$$

触发器 $U(t)$ 与 $F(t, T)$ 的定义类似，是取值0 – 1的二值函数：

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{阀门打开} \\ 0, & \text{阀门关闭} \end{cases} \quad (5.2.11)$$

$U(t)$ 是以凸轮转动一周所花费时间 T_ω 为周期的“伪周期”函数。将 T_ω 分为三段考虑，定义触发器函数 $U(t)$ 如下：

$$U(t) = \begin{cases} 0, & kT_\omega \leq t < T_0(\rho) + kT_\omega \\ 1, & T_0(\rho) + kT_\omega \leq t < T_\omega/2 + kT_\omega \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ 0, & T_\omega/2 + kT_\omega \leq t < T_\omega + kT_\omega \end{cases} \quad (5.2.12)$$

第一段时间 $0 - T_0(\rho)$ 表示柱塞从下止点向上运动压缩柱塞腔内的燃油升压的过程， $T_0(\rho)$ 表示柱塞腔内燃油压强从 0.5MPa 上升到高压油管内压强所需的时间，因此在这段时间内进油阀门尚未打开，触发器 $U(t)$ 置 0。

第二段时间 $T_0(\rho) - T_\omega/2$ 表示进油过程，凸轮带动柱塞运动到上止点时进油结束。此时经过了凸轮转动周期 T_ω 的一半。

第三段时间 $T_\omega/2 - T_\omega$ 表示柱塞腔燃油的恢复过程，此时凸轮带动柱塞从上止点到下止点，柱塞腔内压强逐渐恢复到 0.5MPa，这段时间进油阀门是关闭的。

当凸轮转动的角速度 ω 确定时，凸轮运转的周期 T_ω 就能确定，因此，求解触发器函数 $U(t)$ 的关键在于求解 $T_0(\rho)$ 。通过方程（5.2.6）能够得到柱塞腔内燃油密度 ρ_0 关于柱塞上升高度 l 的关系式 $\rho_0 = \rho_0(l)$ ，而 l 与凸轮极径 $r(\theta)$ 相关，再利用式（4.2.2）得到的压强和密度的关系，联立下面各式可求得 P_0 关于时间 t 的表达式 $P_0(t)$ ：

$$\begin{cases} l = r(\theta) - r_{\min} \\ \theta = \omega t \\ \rho_0 = \rho_0(l) \\ P_0 = P_0(\rho_0) \end{cases} \quad (5.2.13)$$

利用上式的求解结果 $P_0(t)$ ，解下面的方程：

$$P_0(t) - P = 0 \quad (5.2.14)$$

上述关于变量 t 的方程的解即为所求的 $T_0(\rho)$ ，从而触发器函数 $U(t)$ 可求。

5.3 模型的建立

当模型给定一个凸轮转动的角速度 ω 时，便能通过方程（5.2.10）和（4.2.2）求解高压油管内燃油压强随时间的变化情况。考虑规划问题：通过改变输入模型的参数 ω ，观察高压油管内的燃油压强的变化情况，压强是否能够稳定变化。若能，分别计算不同参数 ω 控制下，燃油压强随时间变化的均值 $M(P)$ ，该规划问题的目标函数为：

$$\text{Seek: } \omega \quad \text{s.t.} \quad |M(P) - 100| < \varepsilon_0 \quad (5.3.1)$$

与式（4.3.2）同理， ε_0 是预先给定的正数，表示误差，因此有：

$$\varepsilon_0 = 100 \times 1\% = 1 \quad (5.3.2)$$

5.4 模型的求解

与求解燃油压强与密度的关系的方法同理，模型仍然采用三次样条抽样法^[1]求解了凸轮极径和极角的关系，凸轮边缘曲线示意图如下：

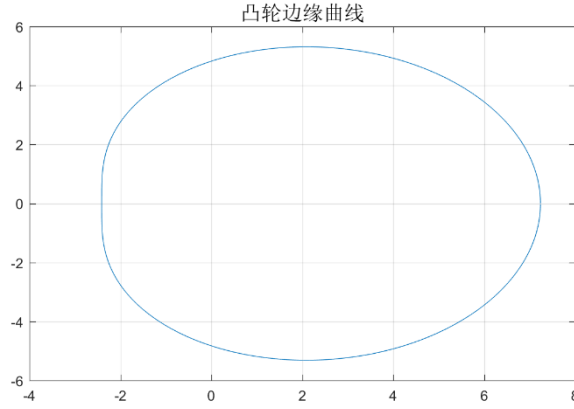


图 12：凸轮边缘曲线示意图

再次应用三次样条插值法求解针阀升程关于时间的变化关系 $d(t)$ ，利用 $d(t)$ 可通过式（5.2.2）求解喷油嘴出油流量函数 $Q(t)$ ，由于出油流量与高压油管内的燃油压强息息相关，而实际上管内的油压时刻变化。这里仅给出理想状况下，假定管内压强恒定为 100MPa 时的出油流量函数 $Q(t)$ 的图像：

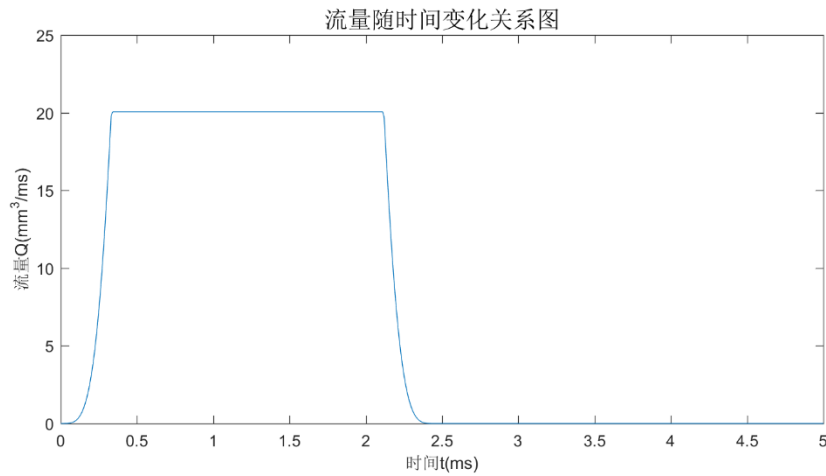


图 13：喷油嘴出油流量 $Q(t)$ 的函数图像（假设管内压强恒为 100MPa）

分析上图能够看出，随着时间的增加，针阀逐渐升高，出油流量逐渐增大。当到达 t_1 时刻，针阀与密封座间的出油圆环的面积等于喷孔面积，再之后，即使针阀继续升高，但限制出油流量的因素转变为喷孔面积。针阀升到最高处后开始下降，针阀与密封座间的出油圆环的面积逐渐减小，到 t_2 时刻，出油圆环面积再次等于喷孔面积，之后出油流量的大小又变为受针阀升程影响。

上面的求解结果可得到极径 r 关于极角 θ 的关系 $r(\theta)$ ，由（5.2.13）和（5.2.14）得到柱塞升起的高度 l 关于 $\theta = \omega t$ 的关系 $l(t)$ ，并求解得进油阀门触发器函数 $U(t)$ ，最后通过 $l(t)$ 、 $Q(t)$ 和 $U(t)$ 代入方程（5.2.10）求解压强随时间的变化。

在参数精度为 0.001 条件下，求解模型得到凸轮转动的角速度 $\omega = 0.030\text{rad/ms}$ 时（即 $\omega = 30\text{rad/s}$ ），高压油管内的燃油压强趋向于围绕 100MPa 稳定波动，在该条件下，高压油管内燃油压强随时间变化的关系图如下：

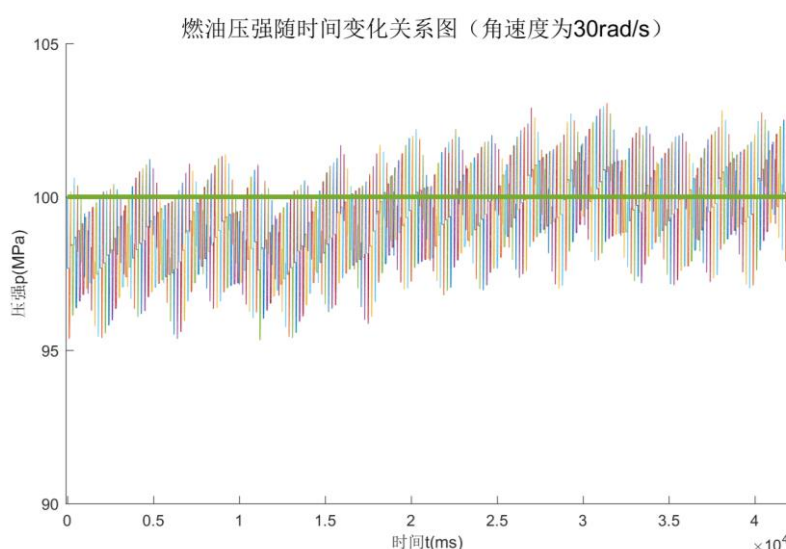


图 14：压强随时间的变化关系（ $\omega = 30\text{rad/s}$ ）

分析上图可以得出，整个进出油系统大概在 2s 之后进入平稳运行的周期状态，压强围绕 100MPa 上下波动。每次喷油压强降低到 97 MPa 左右，每次进油后压强又回升到 102.5MPa。计算压强的均值误差得到：

$$|M(P)-100| \approx \left| \frac{102.5+97}{2} - 100 \right| = 0.25 < 1 \quad (5.4.1)$$

因此，可判断模型求解的结果是符合误差要求的。

5.5 求解结果分析

采用与 4.5 节类似的方法，结合实际情形考虑，对求解的角速度进行简单估算，对上述模型的求解结果进行检验分析，判断求解的结果与实际情况相比是否合理。

想要让压强稳定在 100MPa，需要高压油管内油的质量保持稳定。假设在进出油时，高压油管内燃油的压强保持 100MPa 不变，利用进油质量等于出油质量，出油质量可通过出油流量函数 $Q(t)$ 积分求解，再计算凸轮每旋转一周增加的进油质量，反向计算单位时间内凸轮旋转的圈数，进而估算出角速度 ω_x 。

上述计算 ω_x 的详细推导见附录，这里仅给出模型求解得到的角速度参数 ω 和估算得到的 ω_x 的对比结果：

表格 3：模型求解值 ω 与实际估算值 ω_x 对比表

所需的恒定压强	模型求解值 ω	估计值 ω_x
100 MPa	30 rad/s	31.4 rad/s

可以看出模型的求解结果和估算值很接近，说明模型的结果与现实结果是吻合的。

6. 任务（3）的求解

6.1 问题分析

基于任务（1）、（2）的分析和求解，考虑到两个喷油嘴的喷油规律相同，且高压油管在工作期间燃油压强应尽可能保持稳定，可将两个喷油嘴的喷油时间错开，等效化为单个喷油嘴以原来工作周期的一半进行喷油工作，工作周期从 100ms 变为 50ms。在第二问质量守恒方程的基础上，修正出油流量函数即可。

减压阀的加入能进一步稳定高压油管内的燃油压强。分析前面的求解结果，对于一个进出油工作周期内的燃油压强，当喷油嘴开始喷油时，油管内压强骤降；现在喷油周期减半，相应地高压油泵处的凸轮转速也应加快，提高入油速率，进油时管内压强又将迅速升高超过 100MPa。在之前模型的基础上，减压阀的开启会使高压油管内的燃油流出，因此应重新修正质量守恒方程。

任务（3）的建模流程图如下所示：

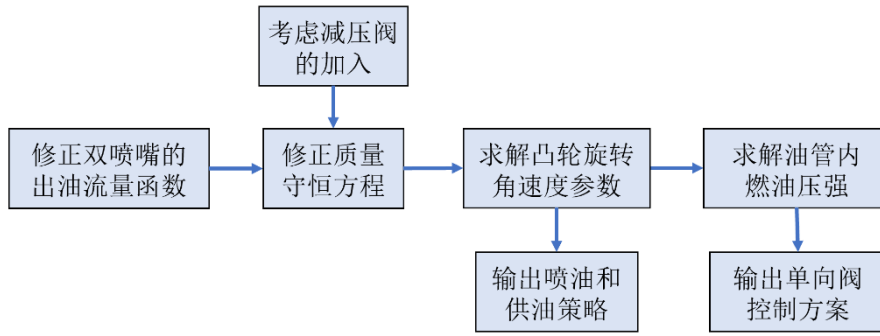


图 15：任务（3）的建模流程图

6.2 模型准备

6.2.1 修正双喷嘴的出油流量函数

在任务（2）的基础上，虽然增加了一个喷油嘴，但二者喷油规律相同。从前面的求解结果中可以看到，当喷油嘴工作时，高压油管内的油压会骤降，因此为了尽可能保持高压油管内燃油压强的稳定，两个喷油嘴的工作周期应该错开。考虑最简单的情形，将两个喷油嘴等效地转化单个喷油嘴的工作状态，使原来的工作周期减半，工作周期从 100ms 变为 50ms。修正得喷油嘴出油流量 $Q(t)$ 在第一个周期内的表达式为：

$$Q(t) = \begin{cases} \pi C \cdot \left((R_1 + d(t) \cdot \tan \theta)^2 - R_1^2 \right) \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & 0 \leq t < t_1 \\ \pi C \cdot R_2^2 \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & t_1 \leq t < t_2 \\ \pi C \cdot \left((R_1 + d(t) \cdot \tan \theta)^2 - R_1^2 \right) \sqrt{\frac{2(P - P_1)}{\rho}}, & t_2 \leq t < 2.45 \\ 0, & 2.45 \leq t < 50 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

6.2.2 考虑减压阀修正质量守恒方程

每次打开减压阀将会使高压油管内的燃油流出油管，油管内压强减小，考虑通过减压阀流出油管的燃油质量，在（5.2.10）的基础上，得到修正后的质量守恒方程：

$$U(t) \cdot \rho S dl - \rho Q(t) dt - N(t) \cdot \rho A_1 C \sqrt{\frac{2 \times (P(\rho) - P_2)}{\rho}} dt = (V + V_0(t)) d\rho \quad (6.2.2)$$

上式中 P_2 表示回流管内的外部低压， $P_2 = 0.5\text{MPa}$ ； A_1 表示减压阀的出油口面积，由减压阀的小孔直径可得 $A_1 = A_0 \approx 1.54\text{mm}^2$ 。 $N(t)$ 是取值0—1的二值函数，用于表示减压阀的打开和关闭，与任务（1）中 $F(t, T)$ 的定义类似， $N(t)$ 的定义为：

$$N(t) = \begin{cases} 1, & \text{减压阀门打开} \\ 0, & \text{减压阀门关闭} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

通过求解出油和供油策略确定凸轮转动的角速度，那么方程（6.2.2）中仅有 $N(t)$ 是未知函数，模型的目标是求解 $N(t)$ 使高压油管内的燃油压强稳定在100MPa左右，最后输出函数 $N(t)$ 即为减压阀的控制方案。

6.3 模型的建立

在整个系统的工作时，为使高压油管内的燃油压强稳定在100MPa，仅需考虑在系统一个工作周期内稳定在100MPa，之后系统进入周期性的工作状态，就能保证压强在长时间内稳定波动。

因为等效喷油嘴的工作周期是50ms，所以仅考虑整个系统在前50ms内的压强变化情况。为了让系统的工作进入周期工作状态，凸轮带动柱塞运动的进油频率应调整为喷油频率的整数倍，模型才能保证在完成第一段50ms的进出油后进入工作周期。

假设在初始状态 $t = 0\text{ms}$ 时，油管内的压强 $P = 100\text{MPa}$ 。喷油嘴在前2.45ms内完成一次喷油工作，此时燃油压强减小。之后凸轮带动着柱塞压缩高压油泵内的燃油进入到高压油管内。在50ms内进油的次数会随着凸轮角速度的变化而改变，当50ms内的进油工作完成后，油管内的压强会高于100MPa，此时打开减压阀门，使高压油管内的燃油压强在 $t = 50\text{ms}$ 时降低到100MPa。此刻，整个系统恢复到 $t = 0\text{ms}$ 时的初始状态，进出油系统将进入下一个周期的工作中。

考虑进油频率应是出油频率的整数倍，假设在一个50ms的工作周期内，系统共完成进油 n 次，则凸轮转动的角速度 ω 应满足：

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{50} \times 10^3 \text{ rad/s} \quad (6.3.1)$$

通过角速度参数，运用方程求解减压阀控制方案 $N(t)$ 。理想状况下， $N(t)$ 的解是以50ms为周期的周期函数，函数 $N(t)$ 的表达式设计如下：

$$N(t) = \begin{cases} 0, & 0 + 50k \leq t < T_n + 50k \\ 1, & T_n + 50k \leq t < 50 + 50k \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.3.2)$$

其中 T_n 表示第一个工作周期内的减压阀门开启时间，它与周期内的进油次数 n 有关，即与凸轮转动的角速度 ω 有关。求解减压阀的状态函数 $N(t)$ 的参数 T_n 后，即可得到高压油泵和减压阀的对应关系，获得二者的控制方案。

6.4 模型的求解

6.4.1 喷油和供油策略

前文已经说明了，模型考虑将两个喷油嘴等价化为一个喷油嘴工作的情形，不过喷油工作周期时间减半，在任务（2）的 100ms 每周期的基础上缩短到 50ms 每周期。在参数精度为 0.001 的条件下，求解模型得到凸轮转动的角速度 $\omega = 0.050\text{rad/ms}$ 时（即 $\omega = 50\text{rad/s}$ ），高压油管内的燃油压强趋向于围绕 100MPa 稳定波动，在该条件下，高压油管内燃油压强随时间变化的关系图如下：

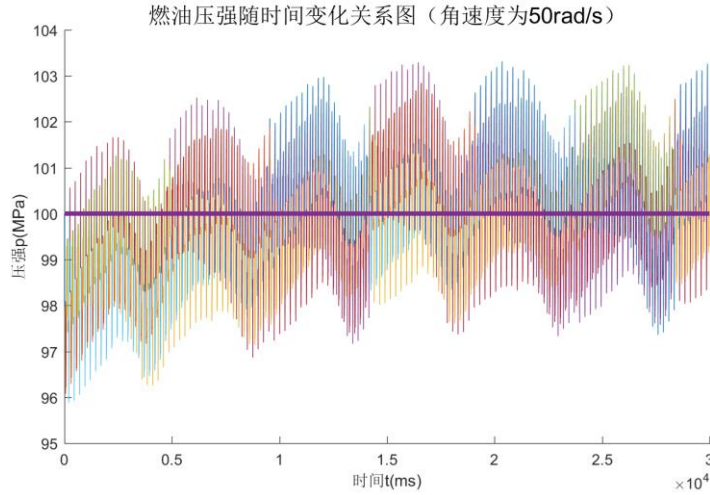


图 16：压强随时间的变化关系（ $\omega = 50\text{rad/s}$ ）

分析上图可以得出，整个进出油系统大概在 1s 之后进入平稳运行的周期状态，压强围绕 100MPa 上下波动。每次喷油压强降低到 98.5 MPa 左右，进油后压强又回升到 103MPa 左右。计算压强的均值误差得到：

$$|M(P) - 100| \approx \left| \frac{103 + 98.5}{2} - 100 \right| = 0.75 < 1 \quad (6.4.1)$$

因此，可判断模型求解的结果是符合误差要求的。

喷油和供油策略：

针对喷油策略，高压油管的喷油嘴数量增加一个，且两个喷油嘴喷油规律相同。当喷油嘴工作向外喷油时，油管内的燃油压强会迅速下降，为了维持管内压强的稳定，让两个喷油嘴的工作时间错开。由假设（2），每个喷油嘴的工作周期是 100ms。在初始时刻，让一个喷油嘴喷油工作，经过 2.45ms 后喷油结束，第一个喷油嘴将在 97.55ms 后进入下一个工作周期，让第二个喷油嘴在第 50ms 时开始喷油，规律相同，则两个喷油嘴可等价化为一个 50ms 工作周期的喷油嘴再进行喷油工作。这样能最大限度保证管内压强的稳定变化，保留其周期性变化的特征。

针对供油策略，为了使高压油管内的燃油压强在 50ms 工作周期的喷油工作负载下维持 100MPa 稳定，需要调整凸轮转动的角速度为 50rad/s，采用这样的供油策略，在喷油系统工作 1s 之后，管内压强将围绕 100MPa 稳定波动。

6.4.2 减压阀控制方案

由式 (6.3.1) 和 (6.3.2) 的分析, 模型通过求解进出油系统喷油、进油和放油的周期工作状态, 求解 T_ω 来确定减压阀和高压油泵的控制策略。

对一个周期而言, 在式 (6.3.1) 中分别取 $n = 1, 2, 3$, 即分别在 $\omega = 40\pi \text{ rad/s}$, $\omega = 80\pi \text{ rad/s}$, $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$ 的进油条件下, 通过求解质量守恒方程 (6.2.2) 和关于控制策略 T_ω 的式子 (6.3.2), 得到在不同条件下, 油管内燃油压强随时间变化的关系如下, 并得出减压阀和高压油泵的控制策略。

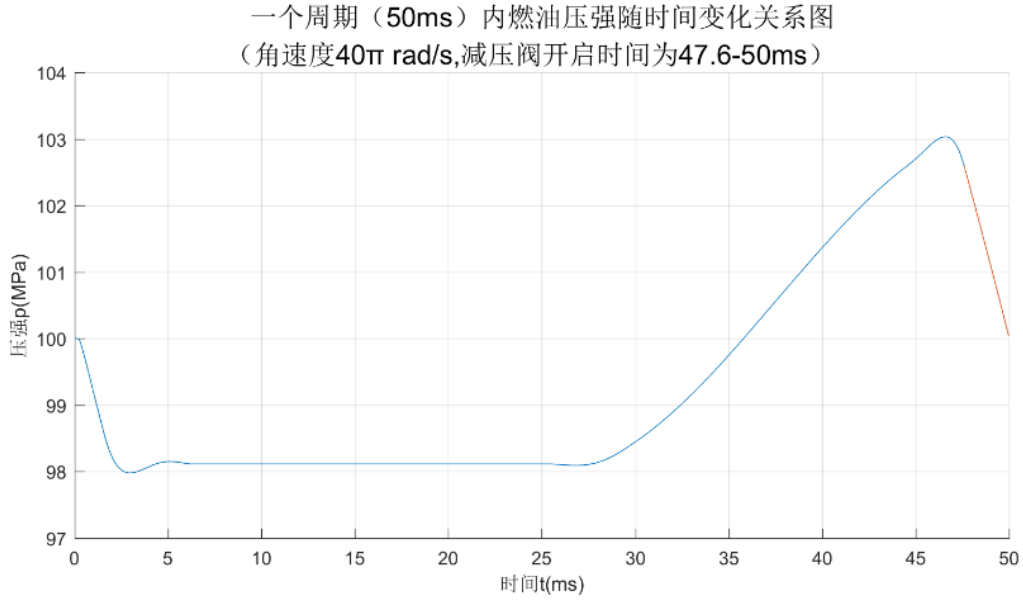


图 17: 50ms 周期内压强随时间的变化关系 ($\omega = 40\pi \text{ rad/s}$, $T_\omega = 47.6\text{ms}$)

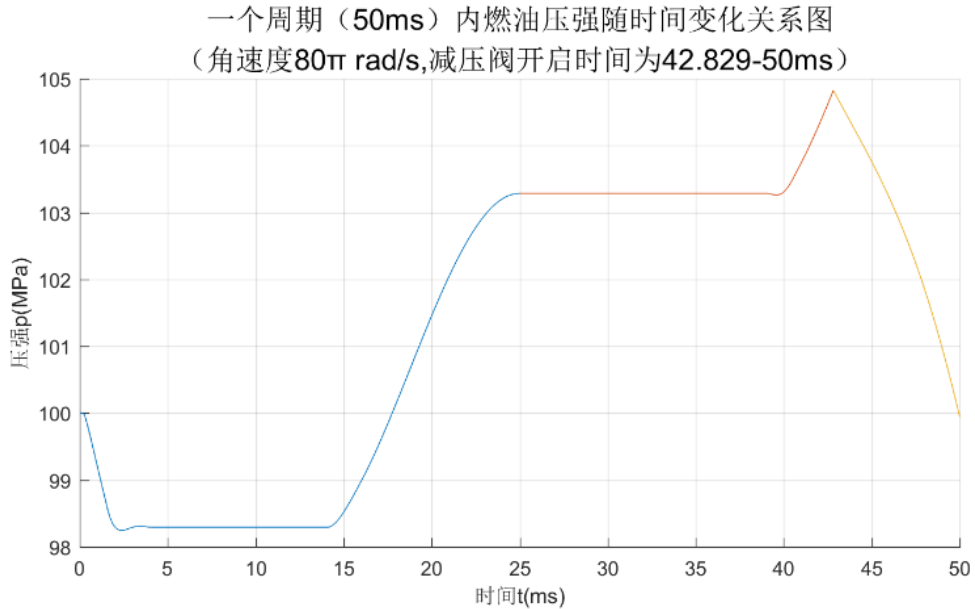


图 18: 50ms 周期内压强随时间的变化关系 ($\omega = 80\pi \text{ rad/s}$, $T_\omega = 42.829\text{ms}$)

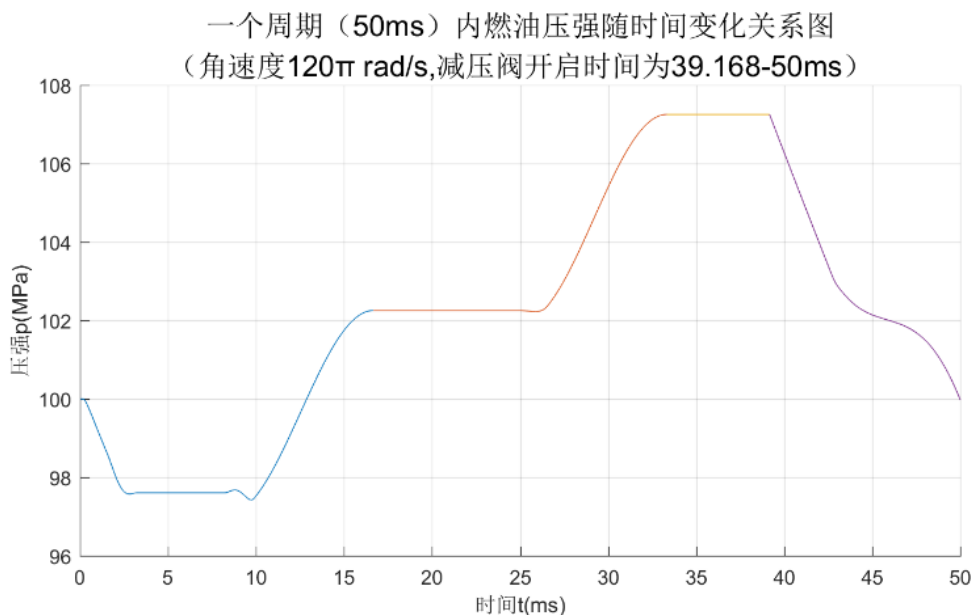


图 19: 50ms 周期内压强随时间的变化关系 ($\omega = 120\pi$ rad/s, $T_{\omega} = 39.168$ ms)

将上述求解结果归纳为表格，得到高压油泵和减压阀的控制方案为：

表格 4: 单周期 50ms 内，高压油泵和减压阀的控制方案表

方案编号	单个周期内进油次数 n	凸轮转动角速度 ω	减压阀开启时间
1	1	40π rad/s	47.6~50 ms
2	2	80π rad/s	42.829~50 ms
3	3	120π rad/s	39.168~50 ms

分析上表可以看到，模型仅求解了 $n = 1,2,3$ 时，高压油泵和减压阀的控制方案。因为随着 n 的增大，在单个周期内的进油次数增多，会使得管内压强远大于 100MPa，因此再增大每个周期内的进油次数，模型求解得到的结果是无意义的。

7. 模型的分析 and 评价

7.1 误差分析

- (1) 在建立模型时，需要确定燃油压强与密度的函数关系 $P(\rho)$ ，而根据题目的注记以及附件中给出的弹性模量 E 关于燃油压强 P 的数据， E 与 P 的解析关系式不易得到，从而 $P(\rho)$ 的解析表达式也不可求。采用插值方法得到 $E(P)$ 数值表达代入后面的计算，会导致微分方程求解结果与实际结果存在一定误差。
- (2) 本文在求解燃油质量守恒的微分方程时，采用了精度较高的龙格-库塔算法，但由于求解器算法限制，求得的数值解与方程的实际解析解存在一定误差。
- (3) 在建立模型时，本文假设高压油管内的燃油压强在各个方向上处处相等，但是在实际进出油的过程中，燃油压强是和空间坐标有关的函数。
- (4) 在计算通过各种小孔（进油单向阀口、喷油嘴、减压阀口）燃油的流量时，本文忽略了小孔开启的时间，即小孔面积瞬间达到最大面积，这会对进出小孔燃油量的计算引起微小偏差。

7.2 误差评价

模型的优点：

- (1) 采用高阶龙格-库塔数值解法求解常微分方程，避免陷入求解复杂解析表达式的困境，能够控制步长在一定精度范围内求得指定时间区间里目标函数近似值，并绘制大致的图像。
- (2) 求解常微分方程时，根据实际任务中进出油时间分配的需要，将时间区间分段后再求数值解，可以使管内压强的变化保持在合理的范围内并且能够保证求解器的求解结果正确无误。
- (3) 考虑到燃油压强及密度随时间变化的关系较为复杂，在用数值法求解常微分方程后，假定油管内压强不变，利用质量守恒对所求参数的实际需求值进行了简单估算，对模型的求解结果进行检验，保证模型的求解结果符合实际。

模型的缺点：

- (1) 弹性模量 E 关于燃油压强 P 的关系只有数值解，这会导致后面涉及到 $E(P)$ 计算方程的结果与真实结果之间存在误差，模型精度下降，且求解程序效率较低。
- (2) 本文采用高阶龙格-库塔方法求解常微分方程，在一定的精度范围内表现较好，使用分段求解的处理思想虽然避免了求解器失效的情况，但无法避免划分的区间端点处出现截距误差。且使用高阶龙格-库塔方法对于解的光滑性存在相应要求。因此在适合解决本文常微分方程的前提下，可以寻找计算量更小且精度相对更好的数值求解方法。
- (3) 本文模型对于管内燃油压强分布不做考虑，会导致微分方程的求解结果与真实情况存在误差，当高压油管的几何参数发生改变，使得管内燃油压强随空间位置的分布情况无法忽略时，模型的误差会增大，需更改方程后才能使用。

8. 参考文献

- [1]崔国华,徐如初.计算方法[M].电子工业出版社:北京,2002:40-44.
[2]崔国华,徐如初.计算方法[M].电子工业出版社:北京,2002:96-102.
[3]丁同仁,李承治.常微分方程教程第二版[M].高等教育出版社:北京,2004:81-88.

附录

● 本文中出现的数学计算和证明:

1. 质量守恒方程解的延拓:

由参考文献[3]中第 84 页中的推论, 首先将方程 (4.2.4) 修改形式为:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \left[F(t, T) \cdot \rho_0 C A_0 \sqrt{\frac{2 \times (P_0 - P(\rho))}{\rho_0}} - \rho Q(t) \right] = f(\rho, t)$$

若函数 $f(\rho, t)$ 关于变量 ρ 满足 Lipchitz 连续条件, 则上述方程经过积分区域 G 内任一点存在唯一的积分曲线 Γ , 且 Γ 可以延拓到 G 的边界, 下面通过估计和放缩, 验证函数 $f(\rho, t)$ 关于变量 ρ 的 Lipchitz 连续条件。

$$|f(\rho, t)| = \left| \frac{1}{V} \left[F(t, T) \cdot \rho_0 C A_0 \sqrt{\frac{2 \times (P_0 - P(\rho))}{\rho_0}} - \rho Q(t) \right] \right|$$

$$|f(\rho, t)| \leq \left| \frac{1}{V} \left[\sqrt{\rho_0} C A_0 \sqrt{2 \times (P_0 - P(\rho))} + 20\rho \right] \right|$$

$$|f(\rho, t)| \leq \left| \frac{1}{V} \left[\sqrt{\rho_0} C A_0 \sqrt{2 \times (P_0)} + 20\rho \right] \right|$$

于是我们找到了 $f(\rho, t)$ 关于变量 ρ 的上控函数 $M(\rho) = k\rho + b$, 因此 $f(\rho, t)$ 关于变量 ρ 是满足 Lipchitz 条件的, 即论文中所使用的分段求解方法是合理的。

2. 估算值 T_x 的推导过程:

关于将压力稳定在 100MPa 的问题, 利用进出燃油质量守恒方程, 根据题目中“喷油器每秒工作 10 次, 每次工作 2.4ms, 考察以 10000ms 为周期的进出油情况, 将喷油工作安排在每个 10000ms 周期的前 2.4ms, 剩下的时间安排合理的进油方案使管内压强尽快稳定到 100MPa。设每次供油单向阀打开的时间为 T_x , 在 10000ms 周期内共进油 n 次。燃油质量守恒方程如下:

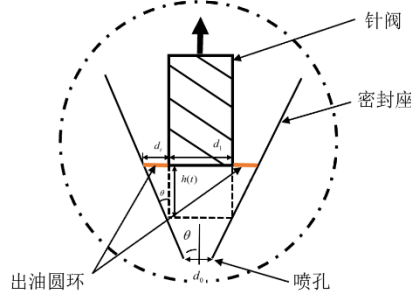
$$\frac{\pi}{4} C \rho(P_2) d_A^2 \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(P_2)}} n T_x = \rho(P_1) V_0$$

其中, V_0 可由题目所给喷油嘴喷油速率关于时间的图像求得 $V_0 = 44\text{mm}^3$, A 处小孔直径 $d_A = 1.4\text{mm}$, $\rho(P_2) = 0.871\text{mg/mm}^3$, $\rho(P_1) = 0.850\text{mg/mm}^3$, 代入数据计算后得到 $n = 9.48 \approx 9$, $T_x = 0.29\text{ms}$ 。

同理, 可计算将要使压力稳定在 150MPa 所需的 $T_x = 0.77\text{ms}$

3. 针阀出油流量函数 $Q(t)$ 的导出

如针阀示意图所示，随着针阀升程 h 的增加，出油圆环的面积将会逐渐增加，同时考虑到下方喷孔的面积，我们假设存在临界时刻 t_0 使在这一时刻前后喷嘴的喷油速率分别完全由出油圆环面积和喷孔面积决定，通过分析，这一时刻即为针阀上升至出油圆环与喷孔面积相等的时刻。设喷孔直径为 d_0 ，针阀直径为 d_1 ，密封座半角大小为 θ ，高压燃油侧压强为 $P(t)$ ，大气压强为 P_0 ，针阀升程为 $h(t)$ ，管内燃油密度为 $\rho(t)$ 。 t 时刻针阀相对密封座位置如下：



由相应数学知识可得：

$$t \text{ 时刻出油圆环的面积 } S_2 = \frac{\pi}{4} (d_1 + 2d_t)^2 \quad (1)$$

$$\text{针阀底面面积 } S_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \quad (2)$$

$$\text{喷孔面积 } S_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 \quad (3)$$

$$\text{及 } \tan \theta = \frac{d_t}{h(t)} \quad (4)$$

由公式(1) – (4)，可计算出临界时刻 $h(t)$ 满足：

$$h(t) = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2} - d_1}{2 \tan \theta} \quad (5)$$

根据针阀升程关于时间的附件数据可知，在针阀上升和下降的过程中各存在一个临界时刻，分别记作 t_{b1} 和 t_{b2} ，通过插值计算得到 $t_{b1} = 0.33135\text{ms}$ ， $t_{b2} = 2.1181\text{ms}$ 。进一步根据进出高压油管的流量公式可以得到 $Q(t)$ 的分段表达式如下：

$$Q(t) = \begin{cases} \pi C \left[h^2(t) \tan^2 \theta + d_1 h(t) \tan \theta \right] \sqrt{\frac{2(P(t) - P_0)}{\rho(t)}} & 0 \leq t < t_{b1} \\ \frac{\pi}{4} C d_0^2 \sqrt{\frac{2(P(t) - P_0)}{\rho(t)}} & t_{b1} \leq t < t_{b2} \\ \pi C \left[h^2(t) \tan^2 \theta + d_1 h(t) \tan \theta \right] \sqrt{\frac{2(P(t) - P_0)}{\rho(t)}} & t_{b2} \leq t < 2.45 \\ 0 & 2.45 \leq t \leq 100 \end{cases} \quad (6)$$

4. 估算值 ω_x 的推导过程:

考察 10s 时间内进出油的情况:

对于高压油泵进油的单个周期而言, 柱塞位于下止点时, 单向阀口并未开启, 设 $r(0)$ 为凸轮边缘曲线在标准极坐标系下极角为 0 时对应的极径, d_A 为进油小孔的直径, V_0 为柱塞运动到上止点时高压油泵内的残余容积, P_x 为低压燃油的压强, 则此时高压油泵内的燃油质量 M_1 有如下表达:

$$M_1 = \left(\frac{\pi r(0) d_A^2}{4} + V_0 \right) \rho(P_x) \quad (7)$$

柱塞位于上止点时, 假设高压油泵内的压强与高压油管内的压强达到平衡即 $P_1 = 100\text{MPa}$, 此时高压油泵内残余的燃油质量 M_2 为:

$$M_2 = \rho(P_1) V_0 \quad (8)$$

代入数据得到, 凸轮旋转一个周期, 进油质量 $M_3 = M_1 - M_2 = 75.2656\text{mg}$

下面考察喷油嘴的出油情况, 根据附件数据可知, 喷油嘴处针阀的运动以 100ms 为一个周期, 根据前文推导出的喷油嘴燃油流量 $Q(t)$ 的表达式, 并根据附件的数据对针阀的上升高度 h 做粗糙近似后得到针阀升程关于时间的表达式 $h(t)$:

$$h(t) \begin{cases} 4.44t & 0 < t \leq 0.45 \\ 2 & 0.45 < t \leq 2 \\ -4.44t + 10.88 & 2 < t \leq 2.45 \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(6)后对 100ms 内的流量进行积分得到一个周期内喷油嘴喷出的燃油质量 M_0 (假设此过程中管内燃油压强保持 $P_1 = 100\text{MPa}$ 恒定):

$$5. \quad M_0 = \rho(P_{\text{初}}) \left(\int_0^{t_{b1}} Q(t) dt + \int_{t_{b1}}^{t_{b2}} Q(t) dt + \int_{t_{b2}}^{2.45} Q(t) dt \right) \quad (10)$$

其中 $t_1 = 0.33135\text{ms}$, $t_2 = 2.1181\text{ms}$

代入数据计算之后得到一个周期内喷出的燃油质量 $M_0 = 37.622\text{mg}$, 从而得到10s 内由喷油嘴喷出的燃油质量共计 $M_4 = 3762.2\text{mg}$ 。所以为了保持油管内的压强尽量稳定, 通过控制凸轮旋转的角速度, 使在10s 内高压油泵压入的燃油质量等于喷油嘴喷出的燃油质量, 设在10s 内凸轮旋转了 n 圈 (即高压油泵经历 n 个进油周期), 则有:

$$nM_{\text{进}} = M_{\text{出}} \quad (11)$$

且相应的角速度可由下式算得:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi M_{\text{出}}}{tM_{\text{进}}} \quad (12)$$

代入数据得到: $n \approx 50$, $\omega_x \approx 31.4\text{rad/s}$

● 本文中所有计算程序的代码

1. draw.m 文件代码

脚本功能：主模块，用于画出各题所需的图像，当需要作出某部分的图时，将这部分的代码注释去除后运行程序即可

```
% 可能需要先运行其他模块文件代码
% 首先计算一系列全局变量
clc; clear;
% 对 E 作三次样条插值
data_E = xlsread("附件 3-弹性模量与压力.xlsx", 1, "A2:B402");
Epp = csape(data_E(:, 1), data_E(:, 2));

% 求解  $\rho$  关于  $p$  的数值解
p0 = 100;
ro0 = 0.85;
pspan1 = [100 0];
pspan2 = [100 200];
global psol1;
global psol2;
psol1 = ode45(@(p,ro) (ro / ppval(Epp, p)), pspan1, ro0);
psol2 = ode45(@(p,ro) (ro / ppval(Epp, p)), pspan2, ro0);

% 求解  $p$  关于  $\rho$  的数值解
rospan1 = [0.85, 0.88];
rospan2 = [0.85, 0.8];
global sol1;
global sol2;
sol1 = ode45(@(ro,p) (ppval(Epp, p) / ro), rospan2, p0);
sol2 = ode45(@(ro,p) (ppval(Epp, p) / ro), rospan1, p0);

% 对针阀运动作插值
data_h1 = xlsread("附件 2-针阀运动曲线.xlsx", 1, "A2:B46");
data_h2 = xlsread("附件 2-针阀运动曲线.xlsx", 1, "D2:E46");
data_h1 = [data_h1;0.45, 2];
data_h = [data_h1;data_h2];
global hpp;
hpp = csape(data_h(:, 1), data_h(:, 2));
global d1;
global d0;
d1 = 2.5; d0 = 1.4;

global Ad; % 减压阀面积
Ad = pi * 0.7^2;
```

```

global t0;
t0 = 0.33135;
global t1;
t1 = 2.11814;

data_R = xlsread("附件 1-凸轮边缘曲线.xlsx", 1, "A2:B629");
global Rpp;
Rpp = csape(data_R(:, 1), data_R(:, 2));
global dR;
dR = fnder(Rpp, 1); % 一阶导数
global L0; % 表示参与部分的高度
L0 = 20 / (pi * 2.5^2);
global m1; % m1 表示油泵内最大可能存油质量
m1 = ro_p(0.5) * V1_t(1, pi);
global S1; % 油泵底面积
S1 = pi * 2.5^2;
global C;
C = 0.85;

%%% 作极坐标图
% theta = 0:0.01:2*pi;
% plot(ppval(Rpp, theta) .* cos(theta), ppval(Rpp, theta) .* sin(theta), '-');
% title('\fontsize{15} 凸轮边缘曲线');
% grid on;

%%% 这里作压强随密度变化曲线
% ro = 0.81:0.001:0.88;
% plot(ro, p_ro(ro), '-');
% xlabel('密度  $\rho$ (mg/mm3)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15} 燃油压强随密度变化关系图');
% grid on;

%%% 稳定在 100
% global roh;
% roh = 0.8711; % 0.8711
% end3 = 0.282; % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 8000; % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15} 燃油压强随时间变化关系图');

```

```

% grid on;

% % % 稳定在 100 细致解
% global roh;
% roh = 0.8711;          % 0.8711
% end3 = 0.28;           % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 200;          % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% % % 稳定在 150
% global roh;
% roh = 0.8711;          % 0.8711
% end3 = 0.75;           % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 5000;         % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t_ro0(0, tscale, [0, end3], 0.8679); %这里要设定初始密度为 0.8679 而非 0.85
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% 两秒内到 150
% global roh;
% roh = 0.8711;
% end3 = 0.87;           % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 5000;         % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% 2s 内到 150MPa 的两张图的拼接部分
% global roh;
% roh = 0.8711;
% end3 = 0.87;           % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 2000;         % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);

```

```

% end3 = 0.75;
% tend = p1_t_ro0(tscale, tscale, [0, end3], 0.8679);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% 五秒内到 150
% global roh;
% roh = 0.8711;          % 0.8711
% end3 = 0.72;           % 注：调整这个值设定进油
% tscale = 6000;         % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% 5s 内到 150MPa 的两张图的拼接部分
% global roh;
% roh = 0.8711;
% end3 = 0.72;           % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 5000;         % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% end3 = 0.75;
% tend = p1_t_ro0(tscale, 2000, [0, end3], 0.8679);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% 十秒内到 150
% global roh;
% roh = 0.8711;          % 0.8711
% end3 = 0.68;           % 注：调整这个值设定进油
% tscale = 11000;        % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');

```

```

% grid on;

% 10s 内到 150MPa 的两张图的拼接部分
% global roh;
% roh = 0.8711;
% end3 = 0.68;          % 注：调整这个值来设定开启时间，单位 ms
% tscale = 10000;       % 注：调整这个值来设定积分区间，单位 ms
% tend = p1_t(tscale, [0, end3]);
% end3 = 0.75;
% tend = p1_t_ro0(tscale, 2000, [0, end3], 0.8679);
% hold on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图');
% grid on;

% % % 下面是第二问的结果的作图
% % % 注：在这里设置角速度 w 的值， $w=2\pi/50$  时，凸轮周期为 50ms
% % % 所以修改下面这一项（可以只修改减号后的值，也可以直接改）
% %  $w = 2\pi/50 - 0.0948$ ;
% < 0.0303
% w = 0.0300;          % 表示角速度为 31rad/s
% % 注：在这里设置总积分区间 tall，tall=5000 表示运行 5000ms 并打印图像
% tall = 42000;
% p2_t(tall, w);
% hold on;
% plot([0, tall], [100, 100], '-', 'LineWidth', 3);
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图（角速度为 31rad/s）');
% hold off;

% % % 下面是第三问前半问的作图
% % % 注：在这里设置角速度 w 的值， $w=2\pi/50$  时，凸轮周期为 50ms
% % % 所以修改下面这一项（可以只修改减号后的值，也可以直接改）
% w =  $2\pi/50 - 0.2$ ;
% w = 0.0500;          % 表示角速度为 50rad/s
% % % 注：在这里设置总积分区间 tall，tall=5000 表示运行 5000ms 并打印图像
% tall = 30000;
% p3_t(tall, w, [50, 50]);
% hold on;
% plot([0, tall], [100, 100], '-', 'LineWidth', 3);
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');

```

```

% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图（角速度为 31rad/s）');
% hold off;

% % % 如果不用分段法，直接龙格库塔积分结果
% tspan = 0:0.01:500;
% dspan = [0, 0.28];
% V = 500 * pi * 5^2;      % 高压油管体积
% A = pi * 0.7^2;          % 小孔面积
% sol = ode45(@(t,ro) ((decide2(t,dspan)*C*A*sqrt(2*ro*(160-p_ro(ro)))...
%             - ro*Q1(t)) / V), tspan, ro0);
% plot(tspan, p_ro(deval(sol, tspan)), '-');
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}燃油压强随时间变化关系图（不分段求解）');

% % 作 Q(t)图
% t = 0:0.01:5;
% q = zeros(size(t));
% for k = 1:length(t)
%     q(k) = Qrt(t(k), 0.85);
% end
% plot(t, q, '-');
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('流量 Q(mm^3/ms)');
% title('\fontsize{15}流量随时间变化关系图');

% 然后是后半问，只考虑一个周期内的情况
% % % 下面首先考虑 50ms 内进油一次的情况
% % % 注：这里调整油泵的周期，即 50ms 内进油的次数 N
% N = 1;
% % 注：这里调整减压阀开始的时刻 jT，即 50ms 内减压阀开启区间为[jT, 50)
% jT = 47.6;
% % jT = 42.829;
% w = 2*pi*N / 50;
% ted = 50;
% % dspan = [42.829 50];
% dspan = [jT 50];
% res = p3_t(ted, w, dspan);
% grid on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}一个周期（50ms）内燃油压强随时间变化关系图（角速度 125.7rad/s,
减压阀开启时间为 47.6-50ms）');

```



```

%%% 下面考虑 50ms 内进油两次的情况
%%% 注：这里调整油泵的周期
% N = 2;
%%% 注：这里调整减压阀开始的时刻 jT，即 50ms 内减压阀开启区间为[jT, 50)
% jT = 42.829;
% w = 2*pi*N / 50;
% ted = 50;
% dspan = [jT 50];
% res = p3_t(ted, w, dspan);
% grid on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}一个周期（50ms）内燃油压强随时间变化关系图（角速度 251.3rad/s,
减压阀开启时间为 42.829-50ms）');

```

```

%%% 下面考虑 50ms 内进油 3 次的情况
%%% 注：这里调整油泵的周期
% N = 3;
%%% 注：这里调整减压阀开始的时刻 jT，即 50ms 内减压阀开启区间为[jT, 50)
% jT = 39.168;
% w = 2*pi*N / 50;
% ted = 50;
% dspan = [jT 50];
% res = p3_t(ted, w, dspan);
% grid on;
% xlabel('时间 t(ms)');
% ylabel('压强 p(MPa)');
% title('\fontsize{15}一个周期（50ms）内燃油压强随时间变化关系图（角速度 377.0rad/s,
减压阀开启时间为 39.168-50ms）');

```

2. p_ro.m 文件代码

函数功能：表示压强 p 关于密度 ρ 的函数

```

function p = p_ro(ro)
    % 计算压强 p 随密度的变化关系
    global sol1;
    global sol2;
    p = zeros(size(ro));
    for k = 1:length(ro)
        if(ro(k) > 0.88)
            p(k) = 3665.8 * (ro(k) - 0.88) + deval(sol2, 0.88);
        elseif(ro(k) > 0.85)
            p(k) = deval(sol2, min(ro(k), 0.9));
        else
            p(k) = deval(sol2, ro(k));
        end
    end

```

```

elseif(ro(k) > 0.8)
%       p(k) = deval(sol1, max(ro(k), 0.78));
       p(k) = deval(sol1, ro(k));
else
       p(k) = 0;
end
end
end
end

```

3. Q1.m 文件代码

功能：表示第一问中喷油流量随时间的变化函数

```

function Q = Q1(t)
% 计算喷油速率随时间的函数关系
% t 的单位是 ms
t0 = mod(t, 100);
if(t0 < 0.2)
    Q = 100 * t0;
elseif(t0 < 2.2)
    Q = 20;
elseif(t0 <= 2.4)
    Q = 240 - 100 * t0;
else
    Q = 0;
end
end
end

```

4. ro_p.m 文件代码

功能：表示密度 ρ 关于压强 p 的函数

```

function ro = ro_p(p)
global psol1;
global psol2;
ro = zeros(size(p));
for k = 1:length(p)
    if(p(k) > 100)
        ro(k) = deval(psol2, p(k));
    elseif(p(k) > 0)
        ro(k) = deval(psol1, p(k));
    else
        ro(k) = 0;
    end
end
end
end

```

5. p1_t_ro0.m 文件代码

函数功能：求解第一问中压强关于时间的数值表达式，tend 参数表示积分区间，dspan 表示单向阀每次开启的时间，ro0 表示积分开始时高压油管内的密度

```
function pend = p1_t_ro0(tstart, tend, dspan, ro0)
    % 作第一问的压强关于时间的图，tend 是积分区间，dspan 是进油时间
    % 这个函数版本要求提供 ro0
    spanbuf = (0:(10+dspan):tend);
    spanbuf = [spanbuf(100:100:tend)];
    spanbuf = sort(spanbuf);
    spanbuf = unique(spanbuf);
    C = 0.85; % 流量系数
    V = 500 * pi * 5^2; % 高压油管体积
    A = pi * 0.7^2; % 小孔面积
    global roh;
    hold on;
    for k = 1:(length(spanbuf) - 1)
        tspan = spanbuf(k):0.01:spanbuf(k+1);
        sol = ode45(@decide2(t,dspan)*C*A*sqrt(2*roh*(160-p_ro(ro))) ...
            - ro*Q1(t))/V, tspan, ro0); % 这里可能应该用 ode23t
        ro0 = deval(sol, tspan(end));
        plot(tspan + tstart, p_ro(deval(sol, tspan)));
    end
    pend = p_ro(deval(sol, tend));
    hold off;
end
```

6. decide2.m 文件代码

函数功能：求解第一问中 A 开关的函数，返回 1 表示 A 打开，0 表示 A 关闭

```
function b = decide2(t, span)
    t0 = mod(t, span(2) + 10);
    if(t0 <= span(2))
        b = 1;
    else
        b = 0;
    end
end
```

7. p2_t.m 文件代码

函数功能：求解第二问中压强关于时间的数值表达式，ted 参数表示积分区间，w 表示进油泵凸轮旋转的角速度，单位 rad/ms

```
function p = p2_t(ted, w)
    wT = 2*pi / w;
    oT = 100;
    oTs = 0;
```

```

wTs = wT;
cnt = 0;
% 构造若干个不均匀的积分区间
spanbuf = zeros(ceil(ted/wT + ted/oT),1);
while(wTs < ted - 1e-3 || oTs < ted - 1e-3)
    cnt = cnt + 1;
    if(wTs < oTs - 1e-3)
        spanbuf(cnt) = wTs;
        wTs = wTs + wT;
    elseif(wTs - 1e-3 > oTs)
        spanbuf(cnt) = oTs;
        oTs = oTs + oT;
    else % 相等的情况也要考虑
        spanbuf(cnt) = oTs;
        oTs = oTs + oT;
        wTs = wTs + wT;
    end
end
spanbuf(cnt+1) = ted;
spanbuf(spanbuf==0) = [];
spanbuf = [0; spanbuf];
ro0 = 0.85;
V = 500 * pi * 5^2; % 高压油管体积
hold on;
for k = 1:(length(spanbuf)-1)
    tspan = spanbuf(k):0.01:spanbuf(k+1);
    sol = ode23t(@(t,ro) (F_in(t,w,ro) - ro * Qrt(t,ro))/(V + V1_t(t,w)), tspan, ro0);
    ro0 = deval(sol, tspan(end));
    plot(tspan, p_ro(deval(sol, tspan)), '-');
end
hold off;
p = p_ro(deval(sol, tspan(end)));
end

```

8. F_in.m 文件代码

函数功能：求解第二问中微元时间内从油泵内因柱塞活动而变化的微元质量，用在微分方程求解器 ode 的表达式中，这里 t 表示时间，w 表示角速度，ro 表示高压油管内的密度

```

function m_in = F_in(t, w, ro)
    theta = mod(t * w, 2 * pi);
    global S1;
    global dR;

```

```

    if(theta > pi)    %% 这里不应当从 3*pi/2 开始, 而应当从 pi 就开始算
        ro1 = ro_theta(theta);
        if(ro1 > ro)
            m_in = S1 * ro * w * ppval(dR, theta);
        else
            m_in = 0;
        end
    else
        m_in = 0;
    end
end
end

```

9. ro_theta.m 文件代码

函数功能: 表示油泵中的油密度与凸轮转过的角度 θ 的函数关系

```

function ro = ro_theta(theta)
    global m1;
    ro = m1 / V1_t(1, theta);
end

```

10. V1_t.m 文件代码

函数功能: 表示油泵内的体积在角速度 w 下随时间 t 的变化函数

```

function V1 = V1_t(t, w)
    global S1;
    L = L_t(t, w);
    V1 = L * S1;
end

```

11. L_t.m 文件代码

函数功能: 表示油泵内的柱塞与油泵顶的距离 L 在角速度 w 下随时间 t 的变化函数

```

function L = L_t(t, w)
    global L0;
    global Rpp;
    L = L0 + ppval(Rpp, 0) - ppval(Rpp, mod(w*t, 2*pi));
End

```

12. Qrt.m 文件代码

函数功能: 表示喷油口喷油的速率 Q 随时间 t 和高压油管内密度 ρ 的变化关系

```

function Q = Qrt(t, ro)
    global t0;
    global t1;
    p0 = 0.1;    % 大气压
    t = mod(t, 100);

```

```

global C;
global d1;
global d0;
if(t < t0)
    Q = C*pi*(d1*h_t(t)*tan(pi/20)+h_t(t)^2*tan(pi/20)^2) ...
        * sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
elseif(t < t1)
    Q = (pi/4)*C*d0^2*sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
elseif(t < 2.45)
    Q = C*pi*(d1*h_t(t)*tan(pi/20)+h_t(t)^2*tan(pi/20)^2) ...
        * sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
else
    Q = 0;
end
End

```

13. h_t.m 文件代码

函数功能：表示针阀升程 h 关于时间 t 的函数关系

```

function h = h_t(t)
% 计算针阀升程对时间的函数关系
t0 = mod(t, 100);
global hpp;
if(t0 <= 0.45)
    h = ppval(hpp, t0);
elseif(t0 <= 2)
    h = 2;
elseif(t0 <= 2.45)
    h = ppval(hpp, t0);
else
    h = 0;
end
end

```

14. p3_t.m 文件代码

函数功能：表示针阀升程 h 关于时间 t 的函数关系

```

function p = p3_t(ted, w, dspan)
wT = 2*pi / w;
% 构造若干个不均匀的积分区间
spanbuf = 0:wT:ted;
spanbuf = [spanbuf, (50:50:ted), (dspan(1):50:ted)];
spanbuf = sort(spanbuf);
spanbuf = unique(spanbuf);
spanbuf(diff(spanbuf) < 0.01) = []; % 去重

```

```

ro0 = 0.85;
V = 500 * pi * 5^2;      % 高压油管体积
hold on;
for k = 1:(length(spanbuf)-1)
    tspan = spanbuf(k):0.01:spanbuf(k+1);
    sol = ode45(@(t,ro) (F_in(t,w,ro) - F_out(t,ro,dspan) - ro * Qrt2(t,ro))/(V +
V1_t(t,w)), tspan, ro0);
    ro0 = deval(sol, tspan(end));
    plot(tspan, p_ro(deval(sol, tspan)), '-');
end
hold off;
p = p_ro(deval(sol, tspan(end)));
end

```

15. F_out.m 文件代码

函数功能：表示第三问中微元时间内减压阀出油的微元质量，t 为时间，ro 为高压油管的密度，span 为减压阀开启的时间段

```

function m_out = F_out(t, ro, span)
    global C;
    global Ad;
    p0 = 0.1;
    t = mod(t, 50);
    if(t >= span(1) && t < span(2))
        m_out = C * Ad * sqrt(2 * ro * (p_ro(ro) - p0));
    else
        m_out = 0;
    end
end

```

16. Qrt2.m 文件代码

函数功能：表示有两个喷油口时的出油流量随时间和密度的变化函数

```

function Q = Qrt2(t, ro)
    % 唯一的区别是喷油周期变为 50ms
    global t0;
    global t1;
    p0 = 0.1;    % 大气压
    t = mod(t, 50); % 这里变了
    global C;
    global d1;
    global d0;
    if(t < t0)
        Q = C*pi*(d1*h_t(t)*tan(pi/20)+h_t(t)^2*tan(pi/20)^2) ...
            * sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
    elseif(t < t1)

```

```

        Q = (pi/4)*C*d0^2*sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
elseif(t < 2.45)
    Q = C*pi*(d1*h_t(t)*tan(pi/20)+h_t(t)^2*tan(pi/20)^2) ...
        * sqrt(2*(p_ro(ro)-p0)/ro);
else
    Q = 0;
end
end
end

```