Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1

по дисциплине

«Нелинейные системы управления»

Выполнили: Хогоев А.Б.

Лукашова И.С.

Преподаватель: Зименко К. А.

Группа: R34362

Санкт-Петербург

2024 г.

1. Для каждой из нижеследующих систем найти все точки равновесия и определить тип каждого изолированного состояния равновесия. Численно построить фазовый портрет и сравнить с полученными результатами (кроме системы 7).

1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ -x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.1.3)}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ 2x_1\left(x_2^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.1.4)}$$

$$p_1 = (0, 0)$$
$$p_2 = (-1, 1)$$
$$p_3 = (1, -1)$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1.5)}$$

$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{12} = -1 \pm i$ **устойчивый фокус**

$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -0.8284, \lambda_2 = 4,8284$ **седло**

$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -0.8284, \lambda_2 = 4,8284$ **седло**

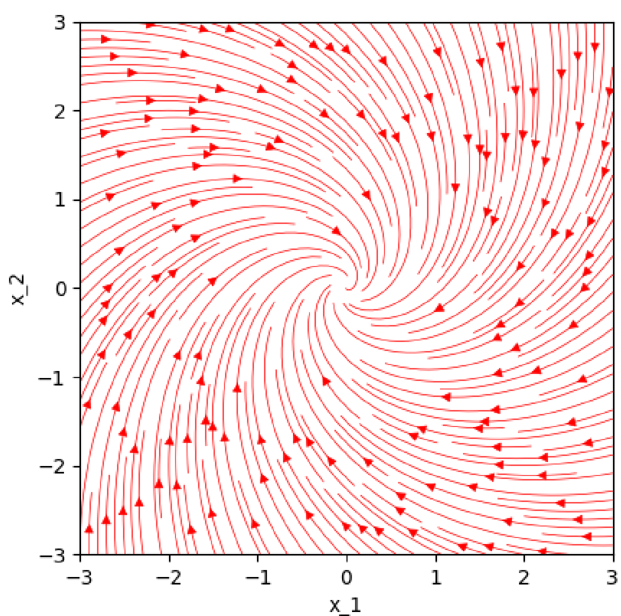

рис. 1 Фазовый портрет для матрицы A_1

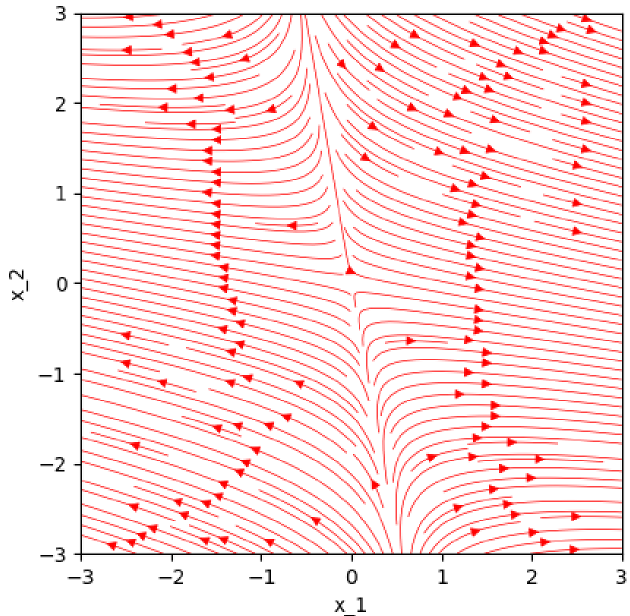

рис. 2 Фазовый портрет для матриц A_2 и A_3

2)

$$\dot{x_1} = -x_1 + x_1 x_2$$
$$\dot{x_2} = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \quad \textbf{(1.2.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.2.2)}$$

$$\begin{cases} x_1(x_2 - 1) = 0 \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 - x_1^3 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.2.3)}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2(x_2 - 1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1\left(x_1^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.2.4)}$$

$$p_1 = (0, 0)$$
$$p_2 = (0, 1)$$
$$p_3 = (1, 1)$$
$$p_4 = (-1, 1)$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ -1 + 2x_2 + x_1 & x_2 - 3x_1^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.5)}$$

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ **неустойчивый узел**

$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ **неустойчивый узел**

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm 2.45$ **седло**

$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm 2$ **седло**

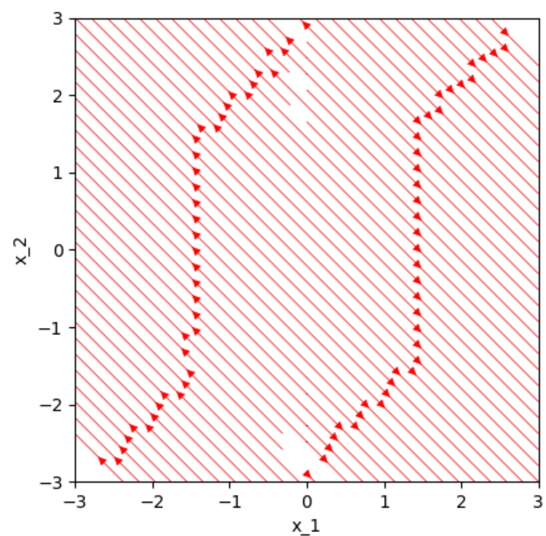

рис. 3 Фазовый портрет для матрицы A_1

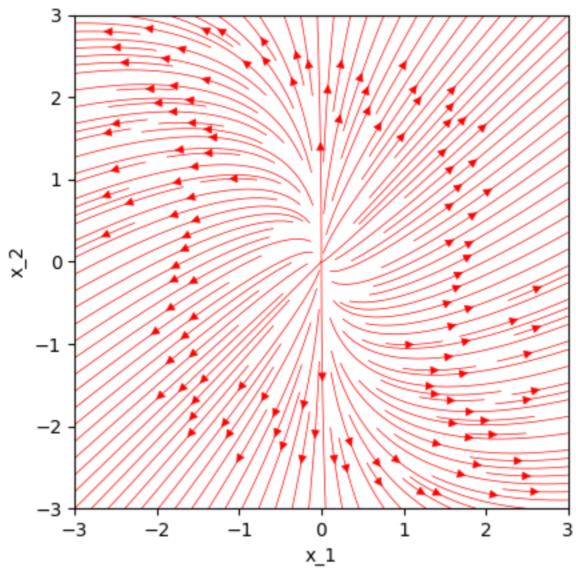

рис. 4 Фазовый портрет для матрицы A_2

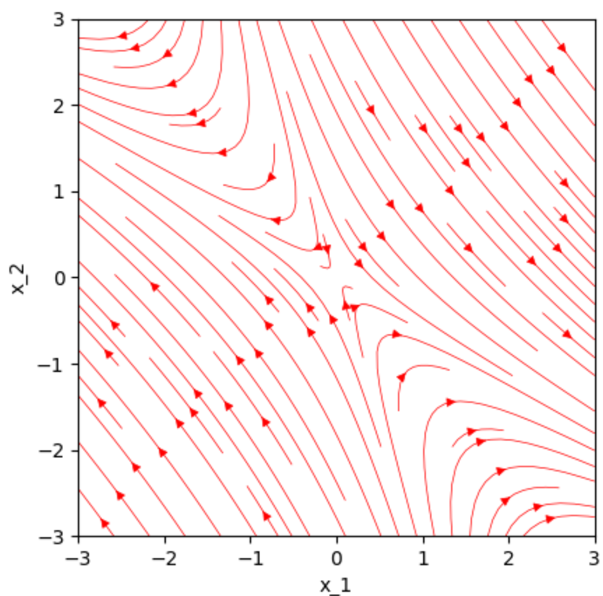

рис. 5 Фазовый портрет для матрицы A_3

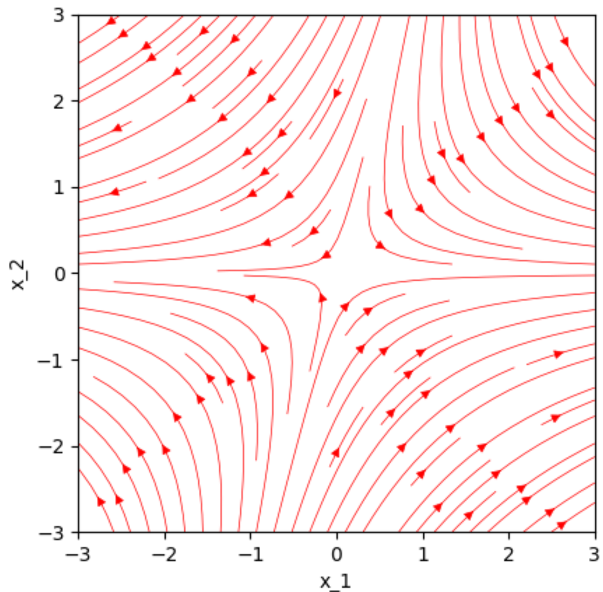

рис. 6 Фазовый портрет для матрицы A_3

3)

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4\right) \quad \textbf{(1.3.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4\right) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.3.2)}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.3.3)}$$

$$p_1 = (0, 0)$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1x_2 + 0.4x_1^3x_2 & 1 - x_1^2 + 0.1x^4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3.4)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = 0.5 \pm 0.866i$$ **неустойчивый фокус**

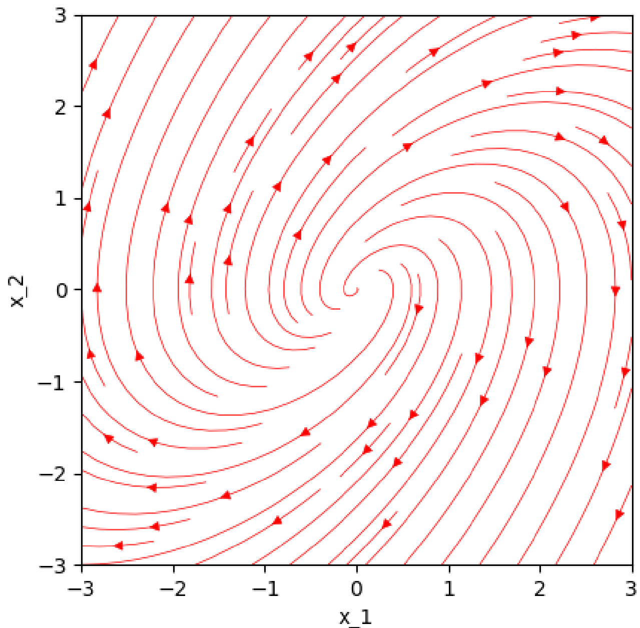

рис. 7 Фазовый портрет для матрицы A_1

4)

$$\dot{x_1} = (x_1 - x_2)\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)$$
$$\dot{x_2} = (x_1 + x_2)\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \quad \textbf{(1.4.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) = 0 \\ (x_1 + x_2)\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.4.2)}$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) = 0 \\ (x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \qquad 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_1 = \sin(t) \quad \textbf{(1.4.3)}$$
$$x_2 = 0 \qquad x_2 = \cos(t)$$

$$p_1 = (0,0)$$
$$p_2 = (\sin(t), \cos(t))$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 & -1 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 \\ 1 - 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 & 1 - 2x_1x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4.4)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$ **неустойчивый фокус**

Для точек находящихся на окружности неопределен тип состояния, так как Якобиан в этих точках находится на границе устойчивости. Переведем систему в полярные координаты

$$x_1 = r\cos(\theta)$$
$$x_2 = r\sin(\theta)$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \textbf{(1.4.5)}$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2}}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{(1-r^2)r^2}{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = \dfrac{\dot{x_2}x_1 - x_2\dot{x_1}}{1 + x_2^2} = \dfrac{r^2(1-r^2)}{1 + r^2\sin^2\theta} \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

$$p_1 = (0, \theta)$$
$$p_2 = (1, \theta)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 3r^2 & 0 \\ -2r\dfrac{(r^4\sin^2(\theta) + 2r^2 - 1)}{(1 + r^2\sin^2(\theta))^2} & 2r^4(r^2 - 1)\dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{(1 + r^2\sin^2(\theta))^2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.4.7)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$ **неустойчивый фокус**

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$$

Для нахождения устойчивой осциляции исследуем только переменную r на устойчивость

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$A = [1 - 3r^2]$$

$A_1 = [1]$ **неустойчивый фокус при** $r = 0$

$A_2 = [-2]$ **устойчивая осциляция при** $r = 1$

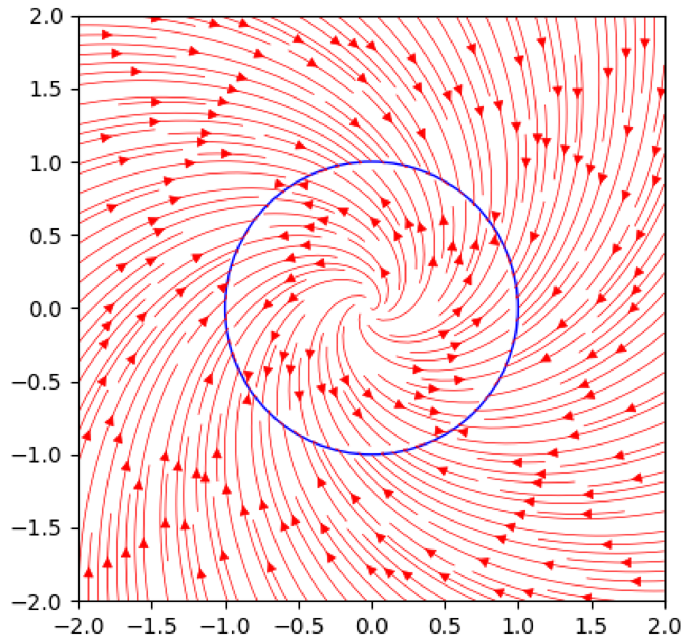

рис. 8 Фазовый портрет системы 1.4.1

5)

$$\dot{x_1} = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x_2} = x_1 - x_2^3 \quad \textbf{(1.5.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.5.2)}$$

$$p_1 = (0,0)$$
$$p_2 = (1,1)$$
$$p_3 = (-1,-1)$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5.3)}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$ **седло**

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$$ **устойчивый узел**

$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$ **устойчивый узел**

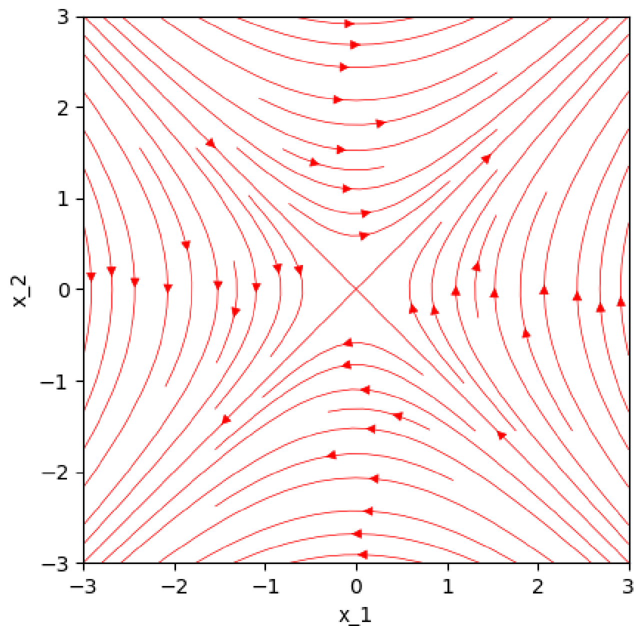

рис. 9 Фазовый портрет для матрицы A_1

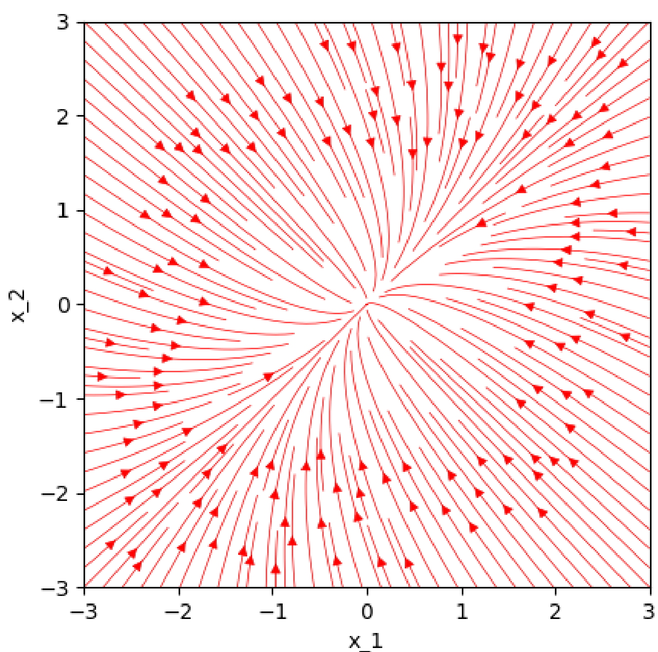

рис.10 Фазовый портрет для матрицы A_2, A_3

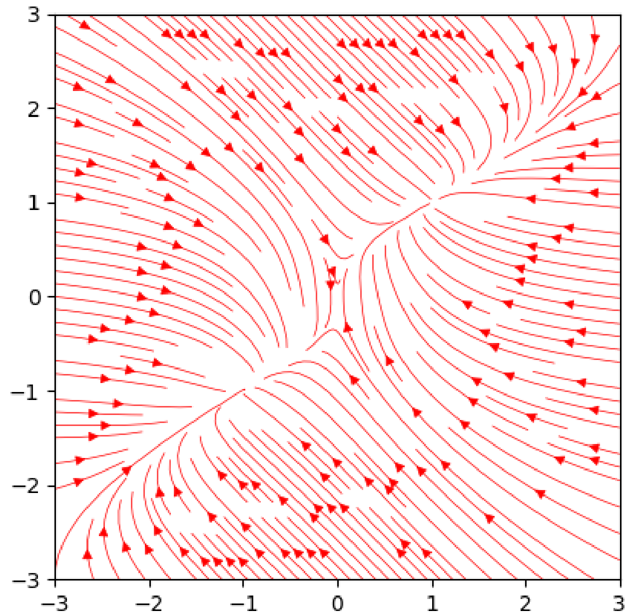

рис. 11 Фазовый портрет системы 1.5.1

6)

$$\dot{x_1} = -x_1^3 + x_2^3$$
$$\dot{x_2} = x_2^3 x_1 - x_2^3 \quad \textbf{(1.6.1)}$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} x_1^3 = x_2^3 \\ x_1^3(x_1 - 1) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1.6.2)}$$

$$p_1 = (0, 0)$$
$$p_2 = (1, 1)$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$A = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.6.3)}$$

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = 0$ **тип точки неопределен**

$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0.79, \lambda_2 = -3.79$ **седло**

7)

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -x_1^3 + x_2^3 \\
\dot{x_2} &= x_1 + 3x_3 - x_2^3 \\
\dot{x_3} &= x_1x_3 - x_2^3 + \sin(x_1)
\end{aligned}
\quad \textbf{(1.7.1)}
$$

Точки равновесия:

$$
\begin{cases}
x_1^3 = x_2^3 \\
x_3 = \dfrac{x_1\left(x_1^2 - 1\right)}{3} \\
x_1^2 \dfrac{\left(x_1^2 - 1\right)}{3} - x_1^3 + \sin(x_1) = 0
\end{cases}
\quad \textbf{(1.7.2)}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (0, 0, 0) \\
p_2 &= (-0.944, 0.034, -0.944) \\
p_3 &= (0.902, -0.056, 0.902) \\
p_4 &= (3.316, 11.049, 3.316)
\end{aligned}
$$

Определение типа изолированного состояния точки равновесия

$$
A = \begin{bmatrix} -3x_1^3 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos(x_1) & -3x_2^2 & x_1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.7.3)}
$$

2. Для каждой из нижеследующих систем найти все изолированные точки равновесия и построить локально стабилизирующий регулятор

1)

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin(u_1) \\
\dot{x_2} &= -x_1 - x_2 + 3\sin(u_2)
\end{aligned}
\quad \textbf{(2.1.1)}
$$

Точки равновесия при отсутствии управления

$$
\begin{cases}
x_2 = -x_1 \\
2x_1\left(x_1^2 - 1\right) = 0
\end{cases}
\quad \textbf{(2.1.2)}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (0, 0) \\
p_2 &= (1, -1) \\
p_3 &= (-1, 1)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 + x_1x_2 + u^3 \\
\dot{x_2} &= -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin(u)
\end{aligned}
\quad \textbf{(2.2.1)}
$$

Точки равновесия при отсутствии управления

$$\begin{cases} x_2(x_1+1)=0 \\ -x_1^3+x_2^2-x_2=0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

$$p_1=(0,0)$$