导子与 Kähler 微分

Kevin

2022

这份笔记大体是 [1] [2] [3] [4] [5] 相关内容的整理.

首先固定一个交换幺环 R 和一个 R-代数 A.

Definition 1. *令 M 是一个 A-模，A 的一个取值在 M 上的 R-导子是一个 R-模同态 $D: A \to M$，其满足如下的 Leibniz 法则: $D(a_1a_2) = a_1D(a_2) + a_2D(a_1), \forall a_1, a_2 \in A$. 将所有 A 的取值在 M 上的 R-导子的集合记为 $\mathrm{Der}_R(A, M)$. 显然，$\mathrm{Der}_R(A, M)$ 是 $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ 的 A-子模，同时也有 R-模结构. 特别的，如果 $M = A$，$\mathrm{Der}_R(A, A)$ 就记为 $\mathrm{Der}_R(A)$.*

注意到因为 $1 \cdot 1 = 1$，所以对任意 $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ 有

$$D(1) = D(1) + D(1) \Rightarrow D(1) = 0 \Rightarrow D(r) = rD(1) = 0, \forall r \in R$$

Leibniz 法则使得一个导子一定不是非平凡的 A-模同态: D 是一个 A-模同态当且仅当 $D = 0$，这是因为对任意的 $x \in A$ 都有 $D(x) = D(x \cdot 1) = xD(1) = x \cdot 0 = 0$.

在微分几何中，有如下两个例子；

Example 2. *假设 M 是一个 n 维的光滑实流形，$p \in M$ 为 M 上一点. $C^\infty(M)$ 为其上的光滑函数环，$C_p^\infty(M)$ 为 p 点处的茎.*

1. *实数域 $\mathbb{R}$ 可以视为一个 $C_p^\infty(M)$-模，其模结构为*

$$f \cdot a := f(p)a, f \in C_p^\infty(M), a \in \mathbb{R}$$

导子 $v \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ 为 p 点处的切向量, $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ 作为 $\mathbb{R}$-线性空间即是 p 点处的切空间.

2. *M 上的光滑切向量场 $X: M \to TM$ 是一个导子 $f \mapsto Xf \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$.*

假设 N 是另一个 A-模且 $\alpha: M \to N$ 是一个 A-模同态，则对 $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$，$\alpha \circ D$ 是一个取值在 N 上的 R-导子. $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ 是一个 R-模范畴上的加性共变函子.

可以直接验证导子有如下基本的公式. 我们用 $D^{[a]}$ 表示映射合成 n 次：$D \circ D \circ \cdots \circ D$.

Proposition 3. *假设 $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$.*

1. *对 $a \in A$，$D(a^n) = na^{n-1}D(a)$. 如果 A 的特征 $p > 0$，则 $D(a^p) = 0$.*
2. *Leibniz 公式:$D^{[n]}(ab) = \sum_{i=0}^n C_n^i D^{[i]}(a)D^{[n-i]}(b)$. 如果 A 的特征 $p > 0$，则有 $D^{[p]}(ab) = D^{[p]}(a)b + aD^{[p]}(b)$，故 $D^{[p]} \in \mathrm{Der}_R(A, M)$.*
3. *假设 $b \in A$ 是一个可逆元，则有*
$$D(\frac{a}{b}) = \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2}, \forall a \in A$$
4. *如果 $M = A$，设 $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_R(A)$. 定义 $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$，则 $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}_R(A)$，此时 $(\mathrm{Der}_R(A), [\cdot, \cdot])$ 是一个 Lie 代数.*

接下来我们构造 A 的泛 R-导子.

Theorem 4. *函子 $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ 是可表函子，即在同构意义下存在唯一的 A-模 $\Omega^1_{A/R}$ 使得对于任意的 A-模 M，有 $\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}(\Omega^1_{A/R}, M)$*

证明. 考虑由 $da, a \in A$ 生成的的自由 A-模 F，令 E 为如下元素生成的子模：

$$dr, r \in R$$

$$d(a_1 + a_2) - da_1 - da_2 \ a_1, a_2 \in A$$

$$d(a_1a_2) - a_1da_2 - a_2da_1 \ a_1, a_2 \in A$$

则令 $\Omega^1_{A/R}$ 为商模 F/E，定义映射 $d_{A/R} : A \to \Omega^1_{A/R}, a \mapsto da$，则 $d_{A/R}$ 定义了一个 R-导子. 任意给定一个 R-导子 $D : A \to M$，则映射 $da \mapsto Da$ 可以扩充为从 F 到 M 的 A-模同态，显然诱导了 $\overline{D} : \Omega^1_{A/R} \to M$ 且 $D = \overline{D}d_{A/R}$. 故有 $\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}(\Omega^1_{A/R}, M)$. $\square$

Definition 5. *上述 $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ 的构造称为 A 在 R 上的 Kähler 微分模或微分 1-形式模.*

对于 Kähler 微分模，我们有如下基本的性质.

Theorem 6. 令 $\varphi : A \to B$ 为 R-代数同态. 则

1. 存在如下正合的 B-模序列:

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R} \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

2. 如果 ϕ 是满射，使得 $B \cong A/I$ 对某个理想 $I \subset A$ 成立. 则 $\Omega^1_{B/A} = 0$ 成立且存在如下正合 B-模序列:

$$I/I^2 \to \Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R} \to \Omega^1_{B/A} = 0$$

这里左边第一个同态为 $a + I^2 \mapsto d_{A/R}(a) \otimes 1$

3. (基变换) 对于 A-代数 A'，有 $\Omega^1_{A \otimes_R A'/A'} \cong \Omega^1_{A/R} \otimes_R A'$

4. (局部化) 给定 A 的一个乘性子集 S，有 $\Omega^1_{S^{-1}A/R} \cong \Omega^1_{A/R} \otimes_A S^{-1}A$, 特别的 $\Omega^1_{S^{-1}A/A} = 0$.

5. (张量积) 假设有 R-代数 A, B，则

$$(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \cong \Omega^1_{A \otimes_R B/R}$$

并且 $\Omega^1_{A \otimes_R B/R}$ 的泛导子

$$\delta : A \otimes_R B \to (\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R})$$

由 $x \otimes y \mapsto [\delta_1(x) \otimes y] \oplus [x \otimes \delta_2(y)]$ 给出，其中 δ_1, δ_2 分别是 $\Omega^1_{A/R}, \Omega^1_{B/R}$ 的泛导子.

证明. 1. 有如下的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega^1_{A/R} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ B \arrow[r, "d_B"] & \Omega^1_{B/R} \end{tikzcd}$$

注意到因为 φ 所以 $\Omega^1_{B/R}$ 可以视为 A-模，$d_B \circ \varphi$ 是 A 到 $\Omega^1_{B/R}$ 的 R-导子，所以这里的 ψ 由 d_A 的泛性质唯一决定，这就定义了从 $\Omega^1_{A/R}$ 到 $\Omega^1_{B/R}$ 的同态 $\psi : d_A(a) \mapsto d_B(\varphi(a))$. 因为 $\Omega^1_{B/R}$ 也是 B-模，所以上述映射诱导了如下 B-模同态

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R}, d_{A/R}(a) \otimes b \mapsto b \cdot d_{B/R}(\varphi(a))$$

又注意到每一个 B 的 A-导子可以视为 B 的 R-导子，故由 $\Omega^1_{B/R}$ 的泛性质，存在良定义的同态

$$\Omega^1_{B/R} \to \Omega^1_{B/A}, d_{B/R}(b) \mapsto d_{B/A}(b)$$

为了证明序列正合，首先注意到 Hom 函子的性质：

$$\Omega^1_{A/R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/R} \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

正合当且仅当对任意的 B-模 N，

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Omega^1_{B/A}, N) \to \mathrm{Hom}(\Omega^1_{B/R}, N) \to \mathrm{Hom}(\Omega^1_{A/R} \otimes_A B, N)$$

正合. 又上述正合列同构于

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B,N) \xrightarrow{u} \mathrm{Der}_R(B,N) \xrightarrow{v} \mathrm{Der}_R(A,N)$$

这里 u 是将 A-导子 $B \to M$ 遗忘为 R-导子，v 是 $D \mapsto D \circ \varphi$. 显然 u 是单的且 $v \circ u = 0$，故只需验证 $\ker(v) \subset \mathrm{im}(u)$. 假设 $d : B \to M$ 为一个 R-导子且 $d \circ \varphi = 0$，则对 $a \in A, x \in B$

$$d(a \cdot x) = f(a) \cdot d(x) + x \cdot (d \circ f)(a) = a \cdot d(x)$$

所以 d 也是一个 A-导子. 这就这就证明了 1. 的序列正合.
2. 如果 $B = A/I$，则显然 $\Omega^1_{B/A} = 0$. 此时同样利用泛性质，我们易验证对任意 B-模 N 下述序列都正合

$$0 \to \mathrm{Der}_R(A/I, N) \to \mathrm{Der}_R(A, N) \to \mathrm{Der}_{A/I}(I/I^2, N)$$

其中上述序列最右边映射为 $D \mapsto (a + I^2 \mapsto D(a))$. 所以存在 2. 中的正合列.
3. 可直接验证映射 $d_{A/R} \otimes_R A' : A \otimes_R A' \to \Omega^1_{A/R} \otimes_R A'$ 是 $\Omega^1_{A \otimes_R A'/A'}$ 的泛导子，所以有同构 $\Omega^1_{A \otimes_R A'/A'} \cong \Omega^1_{A/R} \otimes_R A'$.
4. 只要取 $R = A$，则 $\Omega^1_{A/A} = 0$，则同构 $\Omega^1_{S^{-1}A/A} \cong \Omega^1_{A/A} \otimes_A S^{-1}A$ 表明 $\Omega^1_{S^{-1}A/A} = 0$. 下面证明同构 $\Omega^1_{S^{-1}A/R} \cong \Omega^1_{A/R} \otimes_A S^{-1}A$ 成立. 首先注意到 $\Omega^1_{A/R} \otimes_A S^{-1}A \cong S^{-1}\Omega^1_{A/R}$ 作为 $S^{-1}A$-模同构. 我们证明 $S^{-1}\Omega^1_{A/R}$ 连同映射

$$d : S^{-1}A \to S^{-1}\Omega^1_{A/R}, \frac{a}{s} \mapsto \frac{s d_{A/R}(a) - f d_{A/R}(s)}{s^2}$$

满足 $S^{-1}A$ 在 R 上的 Kähler 微分模的泛性质. 可以验证映射 d 是良定义的并且 d 是导子，接下来证明其满足微分模的泛性质，假设 $\delta : S^{-1}A \to M$ 是一个 R-导子，则 $\delta \circ \tau$ 是从 A 到 M 的 R-导子，这里 τ 是典范映射 $\tau : A \to S^{-1}A$. 由 $\Omega^1_{A/R}$ 的泛性质，存在 A-线性映射 $\varphi : \Omega^1_{A/R} \to M$ 使得 $\delta \circ \tau = \varphi \circ d_{A/R}$. 利用局部化的泛性质，$\varphi$ 诱导出了 $S^{-1}A$-线性映射 $S^{-1}\varphi : S^{-1}\Omega^1_{A/R} \to M$ 满足 $\delta = S^{-1}\varphi \circ d$，易看出 $S^{-1}\varphi$ 被该式唯一确定.
5. 易验证 δ 是 R-导子，下证 δ 是泛导子，考虑一个 R-导子 $d : A \otimes_R B \to M$，其中 M 是某个 $A \otimes_R B$-模. 令

$$\sigma_1 : A \to A \otimes_R B, \sigma_2 : B \to A \otimes_R B$$

为典范映射，并记 M_A, M_B 分别为从 M 通过典范映射 σ_1, σ_2 得到的 A-模和 B-模. 则

$$d_1 = d \circ \sigma_1 : A \to M_A, d_2 = d \circ \sigma_2 : A \to M_B$$

为 R-导子且对应的 A, B-线性映射

$$\Omega^1_{A/R} \to M_A, \Omega^1_{B/R} \to M_B$$

诱导了 $A \otimes_R B$-线性映射

$$\varphi_1 : \Omega^1_{A/R} \otimes_R B \to M, \varphi_2 : A \otimes_R \Omega^1_{B/R} \to M$$

因此得到映射 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R}) \to M$ 使得对任意 $x', x'' \in A$ 和 $y', y'' \in B$ 有

$$[\delta_1(x') \otimes y'] \oplus [x'' \otimes \delta_2(y'')] \mapsto d_1(x') \cdot (1 \otimes y') + (x'' \otimes 1) \cdot d_2(y'')$$

易验证 $\varphi \circ \delta = d$. 因为 $(\Omega^1_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega^1_{B/R})$ 作为 $A \otimes_R B$-模是由 $\delta(A \otimes_R B)$ 生成，所以 φ 被 $\varphi \circ \delta = d$ 所唯一决定. 故 δ 是 $A \otimes_R B$ 的泛导子. $\square$

利用上述定理我们可以计算一些具体的 Kähler 微分模.

Example 7. 假设 $A = R[x_1, x_2 \cdots, x_n]$ 为 R 上的多项式环，则 $\Omega^1_{A/R}$ 为由 $d_{A/R}(x_i)$ 生成的自由 A-模：

$$\Omega^1_{A/R} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot d_{A/R}(x_i)$$

令 $f \in A$，假设 $d : A \to M$ 是 R-导子，则易看出 $d(f) = \sum_{i=0}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}) d(x_i)$，这里的 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 即多项式 f 的形式导数. 因此导子 d 完全由在 $d(x_i)$ 决定. 定义 $d' : A \to \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot d_{A/R}(x_i), f \mapsto \sum_{i=0}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}) d_{A/R}(x_i)$. 可以验证 $(\bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot d_{A/R}(x_i), d')$ 满足 $\Omega^1_{A/R}$ 的泛性质.

Example 8. 令 $A = R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_s)$，则

$$\Omega^1_{A/R} \cong (\bigoplus_{i} A \cdot d_{A/R}(x_i))/(d_{A/R}(f_j))$$

由定理 *6.* 的第二部分可知，

$$\Omega^1_{A/R} = \operatorname{coker}(I/I^2 \to \Omega^1_{R[x_1, x_2, \cdots, x_n]/R} \otimes_R A) = \operatorname{coker}(I/I^2 \to \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot d_{A/R}(x_i))$$

将 I/I^2 视为生成元为 e_i 的自由 A-模的同态像，考虑如下映射合成：

$$\mathcal{J} : \bigoplus A \cdot e_i \twoheadrightarrow I/I^2 \to \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot d_{A/R}(x_i)$$

则映射 $\mathcal{J}$ 由 f_j 关于 x_i 的 Jacobi 矩阵表示，即 (i,j)-元为 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. 所以 $\Omega^1_{A/R}$ 可以视为映射 $\mathcal{J}$ 的 coker. 故 $\Omega^1_{A/R} \cong (\bigoplus_i A \cdot d_{A/R}(x_i))/(d_{A/R}(f_j))$.

Example 9. 设 $S = R[x,y,z]/(y^2 - x^2(t^2 - x))$，此时映射 $\mathcal{J}$ 为：

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xt^2 \\ 2y \\ -2xt^2 \end{pmatrix}$$

所以 $\Omega^1_{S/R}$ 是由 dx, dy, dz 生成的自由 S-模商掉关系 $(3x^2 - 2xt^2)dx + (2y)dy - (-2xt^2)dz = 0$.

Example 10. 设 k 为特征为 0 的域，令 $S = k[x,y]/(y^2 - x^3)$ 为平面曲线 $y^2 = x^3$ 的仿射坐标环. 则 $\Omega^1_{S/R} = S \cdot dx \oplus S \cdot dy/(2ydy - 3x^2dx)$.

利用例 8. 和定理 6. 的第四部分可得下述推论.

Corollary 11. 如果 A 是有限生成的 R-代数或者 A 是有限生成的 R-代数的局部化，则 $\Omega^1_{A/R}$ 是有限生成的 A-模.

我们引入下述代数几何中的概念，它们是流形中浸入、淹没和局部光滑同胚的类比.

Definition 12. 假设有 R-代数 A，我们称 A 在 R 上是形式光滑的，如果对所有交换图：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_0} & T/I \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & T \end{array}$$

(这里 T 是任意的 R-代数，理想 I 满足 $I^2 = 0$，u_0 是任意 R-代数同态) 都存在 u_0 的提升 $u : A \to T$ 使得下述整个图交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_0"] \arrow[dr, dashed, "u"] & T/I \\ R \arrow[u] \arrow[r] & T \arrow[u] \end{tikzcd}$$

如果上述提升存在且唯一，那么称 A 在 R 上形式平展的，如果上述提升最多只存在一个，那么我们称 A 在 R 上形式非分歧. 显然，形式平展等价于形式光滑且形式非分歧.

Proposition 13. (导子与提升) 给定如下与形式光滑定义中相同的环映射的交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & B/I \\ R \arrow[r] & B \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

这里 I 满足 $I^2=0$.（所以 I 可以视为 B/I-模）

1. 给定 $\phi_1,\phi_2:A\to B$ 为 f 的两个提升 $(\pi\circ\phi_i=f)$，则 $\delta:\phi_1-\phi_2:A\to I$ 是一个 R-导子.
2. 给定 $\phi:A\to B$ 为 f 的提升，$\delta:A\to I$ 为一个 R-导子，则 $\phi+\delta:A\to B$ 另一个 f 的提升.

该命题说明了 A 到 I 的所有 R-导子构成的集合可以自由传递的作用在 f 的提升构成的集合上.

证明. 1. 对任意 $a,b\in A$，我们有

$$\begin{aligned}\delta(ab)&=\phi_1(ab)-\phi_2(ab)\\&=\phi_1(a)\phi_1(b)-\phi_1(a)\phi_2(b)+\phi_1(a)\phi_2(b)-\phi_2(a)\phi_2(b)\\&=\phi_1(a)\delta(b)+\phi_2(b)\delta(a)\end{aligned}$$

因为 $I^2=0$，所以 A-模通过 ϕ_1 或者 ϕ_2 的作用是相同的. 故 $\delta(ab)=a\delta(b)+b\delta(a)$. 又因为 δ 显然是 R-线性的，所以 δ 是导子.
2. 仅需验证 $\phi+\delta$ 是一个 R-代数同态，此时显然它是 f 的提升. 对任意 $a,b\in A$，计算可得

$$(\phi+\delta)(ab)=\phi(ab)+\delta(ab)=\phi(a)\phi(b)+\phi(a)\delta(b)+\phi(b)\delta(a)+\delta(a)\delta(b)$$

最后一个等式是因为 $I^2=0\Rightarrow\delta(a)\delta(b)=0$. 所以我们得到 $(\phi+\delta)(ab)=(\phi+\delta)(a)(\phi+\delta)(b)$. □

Corollary 14. *R-代数 A 在 R 上形式非分歧当且仅当 $\Omega^1_{A/R}=0$*

证明. 假设 $\Omega^1_{A/R}=0$，则 $\mathrm{Der}_R(A,I)=0$，故对任意的提升 ϕ_1,ϕ_2，有 $\phi_1-\phi_2=0$，这表明提升 $\phi_1=\phi_2$，故 A 在 R 上形式非分歧. 反之，如果 R-代数 A 在 R 上形式非分歧，考虑 A-模 $B=A\oplus\Omega^1_{A/R}$，定义其乘法结构为 $(a,a')\cdot(b,b')=(ab,ab'+a'b)$，则 B 构成 A-代数. 将 $\Omega^1_{A/R}\subset B$ 视为 B 的理想，则 $\Omega^1_{A/R}$ 满足 $(\Omega^1_{A/R})^2=0$，且 B 商 $\Omega^1_{A/R}$ 为 A. 定义映射 $A\to B,a\mapsto(a,0)$ 和 $A\to B,a\mapsto(a,d_{A/R}(a))$，它们都是恒等映射 $A\to A$ 的提升. 由提升唯一性，我们可以得到上述两个映射相等，这表明 $A\to\Omega^1_{A/R},a\mapsto d_{A/R}(a)$ 是平凡的，所以 $\Omega^1_{A/R}=0$. □

Kähler 微分模也有下述更直接的构造方式.

Lemma 15. *令 A 为 R-代数且 I 为如下映射的核:*

$$A\otimes_R A\to A,a\otimes b\mapsto ab$$

则

1. 将 $A \otimes_R A$ 视为映射 $\iota_1 : A \to A \otimes_R A, a \mapsto a \otimes 1$ 下的 A-模，I 视为 A-子模. 则 I 作为 A-模被元素 $1 \otimes t - t \otimes 1, t \in A$ 生成.

2. 如果 A 是由 $(t_i)_{i \in I}$ 生成的 R-代数，则元素

$$1 \otimes t_i - t_i \otimes 1, i \in I$$

生成了理想 I.

证明. 显然，元素 $1 \otimes t - t \otimes 1, t \in A$ 都在 I 中. 我们可以将 $a \otimes b$ 写为

$$a \otimes b = ab \otimes 1 + (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$$

这对所有 $a, b \in A$ 成立. 现在假设 $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in I$，则有 $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ 并且

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$$

所以元素 $1 \otimes t - t \otimes 1, t \in A$ 生成了 A-模 I，这就证明了 1. 注意到如果 $t = xy, x, y \in A$，则

$$(1 \otimes t - t \otimes 1) = (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1) + (1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes y)$$

将 $1 \otimes b_i - b_i \otimes 1$ 展开成 t_i 的多项式并利用上式可知 2. 成立. □

Proposition 16. 令 A 为 R-代数且 I 为如下 R-同态的核:

$$A \otimes_R A \to A, a \otimes b \mapsto ab$$

则:

1. I/I^2 有自然的 A-模结构.

2. 映射

$$\delta : A \to I/I^2, a \mapsto 1 \otimes a - a \otimes 1 + I^2$$

是一个 R-导子且它的像作为 A-模生成了 I/I^2.

3. 由 δ 诱导的 A-模同态 $\Omega^1_{A/R} \to I/I^2$ 是同构.

故 I/I^2 可以视为 Kähler 微分模 $\Omega^1_{A/R}$，且泛导子 d 为 $a \mapsto 1 \otimes a - a \otimes 1 + I^2$.

证明. 对任意 $a \in A, i + I^2 \in I/I^2$，有如下 A-模结构.

$$a \cdot (i + I^2) := (a \otimes 1)i + I^2 = (1 \otimes a)i + I^2$$

这给出了 1.
对于 2，我们验证 δ 是一个导子:

$$\delta(ab) = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 = 1 \otimes ab - a \otimes b + a \otimes b - ab \otimes 1 = b\delta(a) + a\delta(b)$$

或者对理想 I/I^2 利用命题 12. 易得 $\delta = f_1 - f_0$ 是导子，其中 $f_0, f_1 : A \to (A \otimes_R A)/I^2$ 分别为 $x \mapsto x \otimes 1, x \mapsto 1 \otimes x$.
3. 对任意的 A-模 M 和 R-导子 $d : A \to M$，考虑如下 R-模映射：

$$\varphi : A \otimes_R A \to M, a \otimes b \mapsto ad(b)$$

实际上也是 A-模映射. 因为 d 是导子，则对任意 $a, b \in A$，有

$$\begin{aligned}
&\varphi((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) \\
&= \varphi(1 \otimes ab) - \varphi(b \otimes a) - \varphi(a \otimes b) + \varphi(ab \otimes 1) \\
&= d(ab) - bd(a) - ad(b) = 0
\end{aligned}$$

由引理 14. 可知 I^2 作为 A-模是由如下乘积生成：

$$(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1), a, b \in A$$

因此 φ 在 I^2 上是平凡的，这诱导了一个 A-模映射 $\overline{\varphi} : I/I^2 \to M$ 使得下述交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "d"'] & I/I^2 \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

因为 I/I^2 是由 $\delta(a), a \in A$ 生成的，所以可以看出 $\overline{\varphi}$ 是满足 $d = \overline{\varphi} \circ \delta$ 的唯一 A-模映射. 这表明 $(I/I^2, \delta)$ 满足 $\Omega^1_{A/R}$ 的泛性质. □

这个构造有如下几何解释，考虑一个光滑流形 M，有对角嵌入 $M \to M \times M$，该对角嵌入诱导的切丛间的映射为：

$$T_M \to T_{M \times M/M} = T_M \oplus T_M$$

而 M 的法从为上述向量丛映射的 coker，即 T_M. 因此 M 的余切丛即是对角嵌入的余法丛. 命题 16. 即为该论断的代数版本.

下面考虑局部环的情况.

Theorem 17. 设 $(A, \mathfrak{m})$ 为一个局部 k-代数，这里 k 为域且满足典范映射 $A \to A/\mathfrak{m}$ 限制在 k 上是同构 $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$. 则有同构 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \Omega^1_{A/k} \otimes_A k$.

证明. 由定理 6 第二部分可知有满射 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A k, x+\mathfrak{m}^2 \mapsto d_{A/K}(x) \otimes 1$. 记该映射为 ϕ. 下面我们定义映射 $\psi : \Omega^1_{A/k} \otimes_A k \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，但是因为

$$\mathrm{Hom}_k(\Omega^1_{A/k} \otimes_A k, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/k}, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

所以只需给出映射 $\Omega^1_{A/k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，我们定义导子 $\partial : A \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，注意 $A = k \oplus \mathfrak{m}$，所以定义 $\partial(\lambda + x) = x + \mathfrak{m}^2$，其中 $\lambda \in k, x \in \mathfrak{m}$. 可以验证 ∂ 是导子. 所以我们就定义了 ψ 并且 ϕ, ψ 是互逆的. □

上述结果联系了 Kähler 微分和余切空间：假设 $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/I$ 为一个代数簇的坐标环，$\mathfrak{m}$ 为其极大理想. 因为 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，所以由 Nullstellensatz 可知 $A/\mathfrak{m} \cong k$. 而 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 为点 $\mathfrak{m}$ 的余切空间，即为 $\Omega^1_{A/k} \otimes_A k$.

接下来我们将视角转向域扩张，假设 k 为域，k'/k 是域扩张，那么显然 $\Omega^1_{k'/k}$ 是 k'-线性空间. 我们希望完全决定 $\Omega^1_{k'/k}$ 的结构，此时更容易决定 $\Omega^1_{k'/k}$ 的对偶空间 $\mathrm{Der}_k(k') \cong \mathrm{Hom}_{k'}(\Omega^1_{k'/k}, k')$，注意此时因为是线性空间所以二次对偶有如下典范的嵌入：

$$\Omega^1_{k'/k} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k'}(\mathrm{Der}_k(k'), k'), d_{k'/k}(x) \mapsto (D \mapsto D(x))$$

如果 $\Omega^1_{k'/k}$ 和 $\mathrm{Der}_k(k')$ 中有一个是有限维空间，则上述嵌入为同构.

Theorem 18. 设 k'/k 为可分代数扩张，则 $\mathrm{Der}_k(k') = 0$，即 $\Omega^1_{k'/k} = 0$.

证明. 假设 $D \in \mathrm{Der}_k(k')$. 如果 $a \in k'$，令 $p(x)$ 为 a 的极小多项式，$p(x)$ 是 k 上的可分多项式. 则

$$0 = D(p(a)) = p'(a)D(a)$$

因为 p 可分，多项式 p 和 p' 是互素的，所以 $p'(a) \neq 0$，故 $D(a) = 0$. 由 a 的任意性，D 是零导子. □

Corollary 19. 假设 $k \subset F \subset k'$ 为域扩张，假设 k'/F 为有限可分扩张，则 F 上的每一个 k-导子都唯一的扩充到 k' 上的 k-导子.

证明. 先证明唯一性，假设 D_1, D_2 是 k' 上的 k-导子且在 F 上的限制相同，则 $D_1 - D_2 \in \mathrm{Der}_F(k') = 0$，所以 $D_1 = D_2$. □

Theorem 20. 假设 $\mathrm{char}(k) = p > 0$，令 $k' = k(a)$ 为 k 上的纯不可分扩张. 如果 $k' \neq k$，则 $\mathrm{Der}_k(k')$ 是一维 k'-线性空间.

证明. 定义 $D : k' \to k', D(f(a)) = f'(a)$. 首先验证 D 是良定义的. 令 p 是 a 在 k 上的极小多项式. 则 $p(x) = x^{p^m} - \alpha, m \in \mathbb{N}, \alpha \in k$. 假设 $f(a) = g(a)$，则 p 整除 $f - g$，所以对某个 q 有 $f(x) - g(x) = p(x)q(x)$. 取导数，因为 $p'(x) = 0$ 所以有 $f'(x) - g'(x) = p(x)g'(x)$. 因此 $f'(a) = g'(a)$，所以 D 是良定义的. 显然 D 是 k' 上的 k-导子. 假设 E 是 k' 上的任何导子，则 $E(f(a)) = f'(a)E(a)$，故 E 是 D 的数乘. 这表明 $\mathrm{Der}_k(k')$ 是一维 k'-线性空间. □

Corollary 21. 假设 k' 是 k 的代数扩张且 $\mathrm{Der}_k(k') = 0$，则 k'/k 是可分扩张.

证明. 令 S 为 k 在 k' 的可分闭包. 如果 $k' \neq S$，则有真子域 L 包含了 S 且有 $a \in k'$ 使得 $k' = L(a)$ 并且 k'/L 纯不可分. 定理 20. 表明 $\mathrm{Der}_L(k') \neq 0$，所以 $\mathrm{Der}_k(k') \neq 0$，这是因为 $\mathrm{Der}_k(k')$ 包含了 $\mathrm{Der}_L(k')$. 这与假设矛盾，所以 k'/k 是可分扩张. □

接着考虑超越扩张的情况，并将上述可分扩张的判据推广到有限生成扩张的情形.

Theorem 22. 假设 k'/k 为由超越基 $\{x_j\}_{j=1}^n$ 生成的纯超越扩张，即 k' 为有理函数域 $k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $\Omega^1_{k'/k}$ 由 dx_j 生成.

证明. 对于多项式环 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的情况已经成立，注意到有理函数域是多项式环的分式域，即关于零理想的局部化，所有由定理 6 第四部分立得. □

Theorem 23. 假设 k'/k 为 r 个元素生成的域扩张，设 $k' = k(y_1, y_2, \cdots, y_r)$. 则

$$\mathrm{trdeg}_k k' \leq \dim_{k'}(\Omega^1_{k'/k}) \leq r$$

更进一步，k'/k 可分等价于 $\mathrm{trdeg}_k k' = \dim_{k'}(\Omega^1_{k'/k})$.

证明. 首先 $\Omega^1_{k'/k}$ 由 $d_{k'/k}(y_1), \cdots, d_{k'/k}(y_r)$ 生成，所以 $\dim_{k'}(\Omega^1_{k'/k}) \leq r$. 现在选取 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in k'$ 使得 $d_{k'/k}(x_1), \cdots, d_{k'/k}(x_n)$ 构成 $\Omega^1_{k'/k}$ 的一组基并令 $L = k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 注意下述正合列：

$$\Omega^1_{L/k} \otimes_L k' \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{k'/k} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{k'/L} \longrightarrow 0$$

其中 α 是满射，这表明 $\Omega^1_{k'/L} = 0$. 故 k'/L 是可分扩张，故得到

$$\mathrm{trdeg}_k k' = \mathrm{trdeg}_k L \leq n = \dim_{k'}(\Omega^1_{k'/k})$$

如果上述不等式是等式的话，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 k 上代数无关，k'/k 是可分生成的. 反之，如果 k'/k 是超越次数为 n 的有限生成可分域扩张，则 k'/k 是可分生成的，此时 $\Omega^1_{k'/k}$ 的维数是 n. □

Corollary 24. k'/k 是有限生成域扩张，则 k'/k 是可分代数扩张等价于 $\Omega^1_{k'/k}=0$.

如果我们将 Kähler 微分视为光滑微分形式的代数版本，则我们可以类似定义高阶的 Kähler 微分.

Definition 25. 设 $(\Omega^1_{A/R}, d_{A/R})$ 为 Kähler 微分模，则定义如下 n 次外积 $\Omega^n_{A/R} = \bigwedge^n \Omega^1_{A/R}$，称其为 n 次 Kähler 微分模. 并且记 $A=\Omega^0_{A/R}$. 下述序列称为代数 de Rham 复形：

$$A=\Omega^0_{A/R} \longrightarrow \Omega^1_{A/R} \longrightarrow \Omega^2_{A/R} \longrightarrow \cdots$$

令 $\Omega_{A/R}=\bigoplus_{i\geq 0}\Omega^i_{A/R}$，则 $\Omega_{A/R}$ 为一分次交错代数，有 $\omega^i\wedge\omega^j\in\Omega^{i+j}_{A/R}, \omega^i\wedge\omega^j=(-1)^{ij}\omega^j\wedge\omega^i$.

进一步我们可以定义外微分运算 d，对于 $p\geq 1$，存在唯一 A-线性映射 $d:\Omega^p_{A/R}\to\Omega^{p+1}_{A/R}$ 使得下式成立：

$$d(a_0da_1\wedge\cdots\wedge da_p)=da_0\wedge da_1\wedge\cdots\wedge da_p$$

注意 $\Omega 1_{A/R}$ 由 $da, a\in A$ 生成，所以 $\Omega^p_{A/R}$ 由 $a_0da_1\wedge\cdots\wedge da_p$ 生成，所以如果上述 d 存在则一定唯一. 下面我们构造外微分运算，将 $d:A=\Omega^0_{A/R}\to\Omega^1_{A/R}$ 定义为泛导子 $d_{A/R}$，接着定义 $d:\Omega^1_{A/R}\to\Omega^2_{A/R}$ 为 $a_0da_1\mapsto da_0\wedge da_1$. 对于 $p\geq 2$，定义 d 为

$$d:\Omega^p_{A/R}\to\Omega^{p+1}_{A/R}, \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\mapsto\sum_{i=1}^{p}(-1)^{j-1}d(\omega_i)\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\omega_j}\wedge\cdots\wedge\omega_p$$

可以验证上述定义都是良定义的且外微分运算满足：

1. $d^2=0$
2. $d(\omega_i\wedge\omega_j)=d\omega_i\wedge\omega_j+(-1)^i\omega_i\wedge d\omega_j$

最后我们给出特征 $p>0$ 时的 Hochschild 恒等式，证明来自 [6]

Theorem 26. 假设 A 是特征 $p>0$ 的整环，对所有导子 $D\in\mathrm{Der}_{\mathbb{F}_p}(A)$ 和 $a\in A$ 有

$$(D(a))^p=a^{p-1}D^{[p]}(a)-D^{p-1}(a^{[p-1]}D(a))$$

证明. 想法是利用泛性质约化到可数个变量的多项式环上，令

$$A'=\mathbb{F}_p[x_0,x_1,x_2,\cdots]$$

在 A' 上定义导子 D' 为 $D'(x_n) = x_{n+1}, n \geq 0$. 则存在唯一的 $\phi : A' \to A$ 使得 $\phi(x_0) = a$ 并且 $\phi(x_n) = D^{[n]}(a)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立. 我们有 $D \circ \phi = \phi \circ D'$，所以只要证明 $A = A', D = D', a = x_0$ 的情况即可. 先证明元素

$$Q \coloneqq x_0^{p-1} D^{[p]}(x_0) - D^{[p-1]}(x_0^{p-1} D(x_0))$$

属于 A^p. 注意到 $D(Q) = 0$，这是因为

$$\begin{aligned} D(x_0^{p-1} D^{[p]}(x_0)) &= (p-1) x_0^{p-2} D(x_0) D^{[p]}(x_0) + x_0^{p-1} D^{[p+1]}(x_0) \\ &= D^{[p]}(x_0^{p-1} D(x_0)) \end{aligned}$$

其中第二个等号利用了 $D^{[p]}$ 本身是导子. 现在假设 Q 不在 A^p 中，记 i 为使得 $Q \in \mathbb{F}_p[x_0, \cdots, x_i, x_{i+1}^p, x_{i+2}^p, \cdots]$ 的最小整数. 记 ∂_j 为关于 x_j 的形式偏导数，则 $0 = D(Q) = \sum_j (\partial Q) D(x_j) = \sum_{j=0}^{i} (\partial_j Q) x_{j+1}$. 由 i 的最小性，必有 $\partial_i Q \neq 0$，故 $x_{i+1} \in \mathbb{F}_p[x_0, \cdots, x_i, x_{i+1}^p, x_{i+2}^p, \cdots]$，矛盾. 所以 $Q \in A^p$. 由定义 Q 是关于 x_i 的 p 次齐次多项式. 另一方面，考虑 $\mathbb{F}_p[x_0, \cdots, x_i, x_{i+1}^p, x_{i+2}^p, \cdots]$ 上的自然分次使得 x_i 具有次数 i. 则导子 D 将 i 次元变为 $i+1$ 次元，故 Q 在该分次下是 p 次的. 记 $\tilde{Q}$ 为 A 中的使得 $\tilde{Q}^p = Q$ 成立的唯一元素，则 $\tilde{Q}$ 是两种分次下的 1 次齐次元，这表明 $\tilde{Q} = m x_1, m \in \mathbb{F}_p$. 另一方面，$Q$ 作为 $x_1 = D(x_0)$ 的多项式的首项系数是 $-(p-1)! x_1^p = x_1^p$. 所以 $m = 1$ 且 $Q = x_1^p = D(x_0)^p$. □

参考文献

[1] Hideyuki Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8, Cambridge University Press, Cambridge 1986

[2] Siegfried Bosch, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, second edition, Springer-Verlag, London 2013

[3] David Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York 1995

[4] Peter Scholze, Notes for the course Algebraic Geometry II, 2017

[5] Robert Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer Science+Business Media, New York 1977

[6] Philippe Gille, Tamás Szamuely, Central Simple Algebras and Galois Cohomology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 101, Cambridge University Press, 2006