维数理论

Kevin

2022

这份笔记大部分内容来自于 [1] [2]，参考了 [3].

首先我们介绍分次环和分次模的概念.

Definition 1 *我们称环 R 是分次环，如果存在加法子群 $R_n, n \geq 0$ 使得 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 并且 $R_m R_n \subset R_{m+n}$ 对所有 m, n 成立. 可以验证如果 R 是分次环，则 $1 \in R_0$，从而 R_0 是 R 的子环. 类似地，我们称 R-模 M 是分次 R-模，如果存在加法子群 $M_n, n \in \mathbb{Z}$ 使得 $M = \bigoplus M_i$ 并且 $R_m M_n \subset M_{m+n}$ 对任意 m, n 成立.*

此时每个 M_n 被称为齐次分支，如果 $x \in M_n$，则称 x 为 n 次齐次元. 分次模 M 中每个元素都可写为 $x = \sum x_i, x_i \in M_i$，这里 x_i 就称为 x 的 i 次齐次项. 显然，每个 M_n 都有 R_0-模结构. 假设 M, N 都是分次 R-模，如果 $f: M \to N$ 是 R-模同态且满足 $f(M_n) \subset N_n$ 对所有 n 成立，则称 f 为分次 R-模同态.

Definition 2 *假设 M 是分次 R-模，其子模 $N \subset M$ 被称为齐次子模，如果 N 可以由齐次元生成.*

Proposition 3 *假设 M 是分次 R-模，子模 $N \subset M$ 则如下三个条件等价：*

1. *N 是齐次子模*
2. *对 $x \in M$，如果 $x \in N$，则 x 的每一个齐次项都属于 N.*
3. *$N = \bigoplus (N \cap M_i)$*

因此如果 N 是 M 的齐次子模，令 $N_i = M_i \cap N$，则 $M/N = \bigoplus M_i/N_i$ 仍是一个分次 R-模. 由 Prop.3 的 2. 和 3. 分别可知一族齐次子模的和与交仍然是齐次子模. 以下是 Noether 分次环的刻画.

Proposition 4 *一个分次环 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 是 Noether 环当且仅当 R_0 是 Noether 环且 R 是有限生成 R_0-代数.*

证明：如果 R_0 是 Noether 环且 R 是有限生成 R_0-代数，则由 Hilbert 基定理可知

R 是 Noether 环. 反之，注意 $R_{n\geq 1} = \bigoplus_{n\geq 1} R_n$ 是 R 的理想，故有 $R_0 \cong R/R_{n\geq 1}$. 故 R 是 Noether 环表明 R_0 也是 Noether 环. 因为 $R_{n\geq 1}$ 是 R 的理想，所以 $R_{n\geq 1}$ 是有限生成的，不妨设其生成元为 $x_1, x_2, \cdots, x_s$. 我们令 $R' \subset R$ 是在 R_0 上由 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 生成的子环. 仅要证 $R_n \subset R'$ 对所有 n 成立即可. 注意因为 $R_{n\geq 1}$ 是 R 本身作为分次 R-模的齐次子模，所以可以假设生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 全为齐次元且其次数为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$. 下面用归纳法来证明，首先 $n = 0$ 时显然成立，令 $n > 0$ 且 $y \in R_n \subset R_{n\geq 1}$，故 y 可写为 $y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$，这里 $a_i \in R_{n-k_i}$. 由于每一个 k_i 都大于 0，故归纳假设表明每一个 a_i 都是系数在 R_0 中的关于 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 的多项式. 故 $y \in R'$. 因此 $R_n \subset R'$ 对所有 n 成立.

Lemma 5 令 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 为一个 Noether 分次环. 如果 M 是有限生成分次 R-模，则对任意 n，M_n 作为 R_0-模都是有限生成的.
证明：因为 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 为一个 Noether 分次环，所以 R 是有限生成 R_0 代数，设其生成元为齐次元 $x_1, x_2, \cdots, x_s$. 注意 M 由有限多个齐次元 $m_j (1 \leq i \leq t)$ 生成，令 m_j 的次数为 r_j. 每个 M_n 中的元素都可以写为 $\sum_{j=1} f_j(x) m_j$，其中 $f_j(x) \in A$ 是 $n - r_j$ 次的齐次元. 这表明 M_n 由 $g_j(x) m_j$ 生成，其中 $g_j(x)$ 是次数为 $n - r_j$ 的关于 x_i 的单项式，即 M_n 是有限生成的 R_0-模.

由上述引理立马可以看出，如果 R_0 是 Artin 环，则 M_n 作为有限生成 R_0-模，其 $l(M_n) < \infty$. 这是因为 Artin 环同时也是 Noether 环，故其上的有限生成模既是 Artin 模也是 Noether 模，即同时满足升链和降链条件，故模的长度有限. 在 R_0 是 Artin 环的条件下，我们因此获得了一个序列 $\{l(M_n) : n \geq 0\}$.

Definition 6 令 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 为一个 Noether 分次环且 M 是有限生成分次 R-模，R_0 是 Artin 环. 称函数 $n \mapsto l(M_n)$ 为 Hilbert 函数. 称其生成函数

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

为 Hilbert 系数.

Theorem 7 令 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 为一个 Noether 分次环且 R_0 是 Artin 环，M 是有限生成分次 R-模. 假设 $R = R_0[x_1, \cdots, x_r]$，$x_i$ 为 d_i 次的齐次元. 则 $P(M, t)$ 是关于 t 的有理函数：

$$P(M, t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{r} (1 - t^{d_i})}$$

其中 $f(t)$ 是整系数的多项式.
证明：对 r 用归纳法. 当 $r = 0$ 时，有 $R = R_0$，故当 n 充分大时，$M_n = 0$. 此时 $P(M, t)$ 是多项式. 当 $r > 0$，时，x_r 作用在 M 上定义了一个 R_0-线性映射 $M_n \to M_{n+d_r}$，有如下正合列：

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \longrightarrow L_{n+d_r} \longrightarrow 0$$

其中 $K_n=\ker(x_r), L_{n+d_r}=M_{n+d_r}/x_rM_n$. 令 $K=\bigoplus K_n, L=\bigoplus L_n$. 则 K 是 M 的子模，且 $L=M/x_rM$，故 K 和 L 都是有限生成 R-模. 并且 $x_rK=x_rL=0$ 表明 K,L 可以视为 R/x_rR-模，故我们可以用 $P(K,t),P(L,t)$ 的归纳假设. 由上述正合序列和 l 是加性函数，有

$$l(K_n)-l(M_n)+l(M_{n+d_r})-l(L_{n+d_r})=0$$

在上式两边乘 t^{n+d_r} 并对 n 求和得到

$$t^{d_r}P(K,t)-t^{d_r}P(M,t)+P(M,t)-P(L,t)=g(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$$

整理即可得到 $P(M,t)$.

在上述定理中，如果 $d_1=d_2=\cdots=d_r=1$，R 作为 R_0-代数由 1 次齐次元生成，此时 $P(M,t)=\frac{f(t)}{(1-t)^r}$，如果 $f(t)$ 本身有因子 $1-t$，则我们约去因子 $1-t$ 得到如下形式

$$P(M,t)=\frac{f(t)}{(1-t)^d},d\geq 0$$

且若 $d>0$ 则 $f(1)\neq 0$. 我们把此时的 d 记为 $d(M)$. 注意到下述幂级数展开

$$\frac{1}{(1-t)^d}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} d+n-1 \\ d-1 \end{pmatrix}t^n$$

如果 $f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_st^s$，则我们就得到

$$l(M_n)=a_0\begin{pmatrix} d+n-1 \\ d-1 \end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix} d+n-2 \\ d-1 \end{pmatrix}+\cdots+a_s\begin{pmatrix} d+n-s-1 \\ d-1 \end{pmatrix}$$

注意上式右边可以写为关于 n 的 $d-1$ 次有理系数多项式，记为 $\varphi(n)$，其首项系数为 $\frac{f(1)}{(d-1)!}$. 于是我们得到如下推论：

Corollary 8 如果 Theorem 7 中的 $d_1=d_2=\cdots=d_r=1$，且 $d=d(M)$ 为上述所定义，则存在一个 $d-1$ 次有理系数多项式 $\varphi_M(x)$ 使得当 $n\geq s+1-d$ 时 $l(M_n)=\varphi_M(n)$，这里 s 为 $P(M,t)(1-t)^d$ 的次数. 我们称 $\varphi_M(x)$ 为 M 的 Hilbert 多项式.

Definition 9 令 A 为环，$\mathfrak{a}$ 为 A 的理想. 定义 $\mathfrak{a}$ 的相伴分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A):=\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{gr}_n(A)=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$. 对于相伴分次环,定义乘积 $(x+\mathfrak{a}^{n+1})(y+\mathfrak{a}^{m+1})=xy+\mathfrak{a}^{n+m+1},x\in\mathfrak{a}^{n+1},y\in\mathfrak{a}^{m+1}$，易看出 $\mathrm{gr}(A)$ 在该乘积下具有分次环结构. 类似的,对于 A-模 M,我们可以定义一个分次 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$-模 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(M):=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{a}^nM/\mathfrak{a}^{n+1}M$.

我们假设 A 是一个 Noether 半局部环，$\mathfrak{m}$ 为其 Jacobson 根，如果 I 为 A 中理想使得存在 $v>0$ 有 $\mathfrak{m}^v \subset I \subset \mathfrak{m}$，称 I 为定义理想，意为定义了 $\mathfrak{m}$-进拓扑的理想，此时 I-进拓扑和 $\mathfrak{m}$-进拓扑重合. 注意 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)_0 = A/I$ 为 Artin 环，这是因为如果 $\mathfrak{p}$ 是一个包含 I 的素理想，由 $\mathfrak{m}^v \subset \mathfrak{p}$ 可得到 $(\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i)^v \subset \mathfrak{p}$，故至少存在一个 i 使得 $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}$，即 $\mathfrak{p}$ 是极大理想，故 A/I 是 0 维 Noether 环，即 Artin 环.

Definition 10 A 是一个 Noether 半局部环，$\mathfrak{m}$ 为其 Jacobson 根，I 为 A 中理想使得存在 $v>0$ 有 $\mathfrak{m}^v \subset I \subset \mathfrak{m}$，$M$ 为有限生成 A-模，则 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(M)$ 是一个有限生成分次 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$-模. 故将 Theorem 7 和其推论应用在 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(M)$ 上，定义

$$\chi_M^I(n) = l(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{n} l(I^n M/I^{n+1}M)$$

并记 $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n)$ 为 $\chi_M(n)$，称其为模 M 的 Hilbert-Samuel 函数.

利用公式 $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 \\ n \end{pmatrix}$ 和之前推论可得

$$\chi_M^I(n) = a_0 \begin{pmatrix} d+n \\ d \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} d+n-1 \\ d \end{pmatrix} + \cdots + a_s \begin{pmatrix} d+n-s \\ d \end{pmatrix}$$

这里 $a_i \in \mathbb{Z}$，当 $n \geq s$ 时这是一个关于 n 的 d 次多项式. 这里的 d 被 M 决定，不依赖于 I 的选取，因为假设 I, J 都是定义理想，则存在 a, b 使得 $I^a \subset J, J^b \subset I$，故因 $l(M/I^{an}M) \geq l(M/J^n M)$ 和 $l(M/J^{bn}M) \geq l(M/I^n M)$ 有

$$\chi_M^J(bn+b-1) \geq \chi_M^I(n) \ , \ \chi_M^I(an+a-1) \geq \chi_M^J(n)$$

这表明两个多项式的次数相同. 我们将 $d = d(M)$ 为模 M 的某种维数，当 M 为局部环 A 时，$\chi_A^{\mathfrak{m}}(k) = l(A/\mathfrak{m}^{k+1})$. 几何上来看，将这里的 A 视为某个概型上某点处的局部环，则环 $A/\mathfrak{m}^{k+1}$ 为这点处的“k-阶无穷小邻域”的坐标环，此时的 Hilbert-Samuel 函数的次数即是其维数关于 k 的增长性，这种增长性刻画了概型在这一点处的局部维数.

Theorem 11 A 是一个 Noether 半局部环并且

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

是一个有限生成 A-模的正合列. 则 $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$. 如果 I 是 A 的定义理想，则 $\chi_M^I - \chi_{M''}^I$ 与 $\chi_{M'}^I$ 有同样的首项系数.

Definition 12 A 是一个 Noether 半局部环，M 是有限生成 A-模，定义

$$\delta(M) = \min\{n : l(M/x_1M + \cdots + x_nM) < \infty, x_i \in \mathfrak{m}\}$$

当 $l(M)<\infty$ 时，$\delta(M)=0$. 如果 I 是任意定义理想，则 $l(M/IM)<\infty$，故 $\delta(M)$ 会小于等于 I 的生成元. 特别的，当 A 是局部环，且 $M=A$ 时，$l(A/I)<\infty$ 表明 I 是 $\mathfrak{m}$-准素理想，此时 $\delta(M)$ 就是 $\mathfrak{m}$-准素理想的生成元的最小值. 接下来我们证明维数基本定理.

Definition 13 设 R 为环，$\mathfrak{p}$ 为一素理想，定义 $\mathfrak{p}$ 的高度和深度为：

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) := \{r : \exists \text{ chain of primes } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}\}$$

$$\mathrm{depth}(\mathfrak{p}) := \{r : \exists \text{ chain of primes } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r\}$$

由定义有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$，$\mathrm{depth}(\mathfrak{p}) = \dim R/\mathfrak{p}$ 和 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{depth}(\mathfrak{p}) \geq \dim A$ 成立.

Theorem 14 A 是一个 Noether 半局部环，M 是有限生成 A-模，则

$$\dim M = d(M) = \delta(M)$$

其中 $\dim M = \dim\,(A/\mathrm{Ann}_A(M))$ 为 M 的 Krull 维数.
证明：我们分三步来证明 $\dim M \geq \delta(M) \geq d(M) \geq \dim M$.
Step 1：$d(M) \geq \dim M$. 先假设 $M=A$，如果 $d(A)=0$，则对充分大的 d，有 $\mathfrak{m}^d = \mathfrak{m}^{d+1}$，故有 Nakayama 引理可知 $\mathfrak{m}=0$，故 $\dim A=0$. 如果 $d(A)>0$，我们用归纳法来证明，假设 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 为 A 的一个严格素理想升链，取 $x \in \mathfrak{p}_1 \backslash \mathfrak{p}_0$，考虑如下商环 $B = A/(\mathfrak{p}_0 + xA)$，$B$ 满足如下的正合列：

$$0 \longrightarrow A/\mathfrak{p}_0 \xrightarrow{x} A/\mathfrak{p}_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

利用定理 11 可知 $d(B) < d(A/\mathfrak{p}_0) \leq d(A)$，由归纳假设有 $\dim B \leq d(B) \leq d(A)-1$. 因为取商后 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 仍是 B 中的素理想升链，故 $\dim B \geq n = \dim A - 1$, 因此 $\dim A \leq d(A)$, 这就证明了 $M=A$ 的情况. 对于一般情况, 利用 Noether 环上有限生成模的滤过分解, 存在子模 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_s = M$ 使得 $M_{i+1}/M_i \cong A/\mathfrak{p}_i$，这给出了 A-模的短正合列：

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow A/\mathfrak{p}_i \longrightarrow 0$$

易看出 $d(M) = \max\{d(A/\mathfrak{p}_i)\} \geq \max\{\dim(A/\mathfrak{p}_i)\} = \dim M$. 这也表明了 $\dim M$ 的有限性.
Step 2：$\delta(M) \geq d(M)$. 同样的用归纳法，如果 $\delta(M)=0$，则 M 是有限长的，故 $\chi_M(n)$ 是有界的, 因此 $d(M)=0$. 现在假设 $\delta(M)=s>0$, 取 $x_1, x_2 \cdots, x_s \in \mathfrak{m}$ 使得 $l(M/x_1M + x_2M + \cdots + x_sM) < \infty$, 并且令 $M_i = M/x_1M + x_2M + \cdots + x_iM$,

则显然 $\delta(M_i) = \delta(M) - i$. 另一方面，

$$\begin{aligned} l(M/\mathfrak{m}^n M_1) &= l(M/x_1 M + \mathfrak{m}^n M) \\ &= l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(x_1 M/x_1 M \cap \mathfrak{m}^n M) \\ &= l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(M/(\mathfrak{m}^n M : x_1)) \\ &\geq l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(M/\mathfrak{m}^{n-1} M) \end{aligned}$$

最后一个不等式是因为 $(\mathfrak{m}^n M : x_1) \subset \mathfrak{m}^{n-1} M$. 所以 $d(M_1) \geq d(M) - 1$，重复就可以得到 $d(M_s) \geq d(M) - s$，但因为 $\delta(M_s) = 0$ 故 $d(M_s) = 0$，所以 $d(M) \geq s$.
Step 3: $\dim M \geq \delta(M)$，对 $\dim M$ 做归纳，当 $\dim M = 0$ 时，$A/\mathrm{ann(x)}$ 是 0 维 Noether 环，即是 Artin 环. 此时 $l(M) < \infty$ 因此 $\delta(M) = 0$. 对于 $\dim M > 0$，可以找到素理想 $\mathfrak{p}_i, 1 \leq i \leq t$ 使得 $\mathfrak{p}_i$ 是 $\mathrm{ann(x)}$ 的极素理想并且 depth $\mathfrak{p}_i = \dim M$. 故 $\mathfrak{p}_i$ 不是极大理想，此时我们可以取 $x_1 \in \mathfrak{m}$ 使得 $x_1 \notin \mathfrak{p}_i$ 对任意 i 成立. 令 $M_1 = M/x_1 M$，则有 $\dim M_1 < \dim M$，所以 $\delta(M) - 1 \leq \delta(M_1) \leq \dim M - 1$. 因此 $\delta(M) \leq \dim M$.

由维数基本定理可以得到一些推论.

Corollary 15 A 是 Noether 局部环，则 $\dim A$ 是有限的.

Corollary 16 A 是一个 Noether 环，$I = (a_1, \cdots, a_r)$ 为一个由 r 个元素生成的理想，若 $\mathfrak{p}$ 是 I 的一个极小素理想，则 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$. 因此 A 中真理想的高度总是有限的.
证明；理想 $IA_\mathfrak{p} \subset A_\mathfrak{p}$ 是属于极大理想的准素理想，故 $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = \dim \mathfrak{p} = \delta(A_\mathfrak{p}) \leq r$ 成立.

此推论的一个特殊情况是如下的 Krull 主理想定理.

Corollary 17 A 是一个 Noether 环，$x \in A$ 既不是零因子也不是单位元，则 (x) 的任何极小素理想的高度为 1.
证明：由推论 17，可知 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. 如果 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$，则 $\mathfrak{p}$ 是属于 0 的素理想，故 $\mathfrak{p}$ 的所有元素都是零因子，矛盾.

Corollary 18 A 是 Noether 局部环且 $x \in \mathfrak{m}$ 为非零因子，则 $\dim A/(x) = \dim A - 1$.
证明：首先我们有 $\dim A > 0$，否则 $\mathfrak{m}$ 是唯一素理想，则 $\mathfrak{m}$ 包含了所有零因子，矛盾. 在维数定理证明 Step 3 中，令 $M = A, M_1 = A/(x)$，则得到 $\dim A/(x) < \dim A$，故 $\dim A/(x) \leq \dim A - 1$. 另一方面，令 $x_i \in \mathfrak{m}(1 \leq i \leq d)$ 为在 $A/(x)$ 中的像生成了一个 $\mathfrak{m}/(x)$-准素理想的元素. 则理想 $(x, x_1, \cdots, x_d)$ 在 A 中是 $\mathfrak{m}$-准素的，因此 $\dim A/(x) \geq \dim A - 1$.

Corollary 19 设 A 是 Noether 环，则 $\dim A \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

证明：如果 $x_i \in \mathfrak{m}, 1 \leq i \leq s$ 在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的像构成了 k 上线性空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组基，则这些 x_i 生成了 $\mathfrak{m}$. 因此由推论 16 可知 $\dim A = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq s$.

接下来我们定义正则局部环，在代数几何中这个概念刻画了代数簇上点的非奇异性. 如果 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个 r 维的 Noether 局部环，由维数定理存在一个可以由 r 个元素生成的 $\mathfrak{m}$-准素理想. 假设 $a_1, a_2 \cdots, a_r \in \mathfrak{m}$ 生成了一个 $\mathfrak{m}$-准素理想，则把这 r 个元素称为 A 的参数系. 如果 M 是有限生成 A-模且 $\dim M = s$，存在 $y_1, y_2, \cdots, y_s \in \mathfrak{m}$ 使得 $l(M/(y_1, y_2, \cdots, y_s)M) < \infty$，则 $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ 被称为 M 的参数系.

Theorem 20 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是 d 维的 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 为其极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$，如下条件等价：

1. $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d$
2. $\mathfrak{m}$ 可以被 d 个元素生成. 此时这 d 个元素构成的参数系称为 A 的正则参数系.
3. 相伴分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ 同构于多项式环 $k[t_1, t_2, \cdots, t_d]$.

若 A 满足以上条件，则称其为正则局部环.

证明：

1. ⇒ 2. 由 Nakayama 引理可得.

2. ⇒ 3. 令 $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$，定义映射

$$\alpha : k[t_1, t_2, \cdots, t_d] \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A), t_i \mapsto \overline{x_i} = x_i + \mathfrak{m}^2$$

则 α 是分次环的同构.

3. ⇒ 1. 显然.

Example 21 一些例子：

1. 由 Nakayama 引理可知，A 是 0 维正则局部环等价于 A 是域，
2. 任何域上 n 个变量的多项式环关于极大理想的局部化都是 n 维的正则局部环.
3. k 为域，环 $A = k[x]/(x^2)$ 不是正则局部环，因为 A 只有唯一素理想 $\mathfrak{m} = (x)/(x^2)$，故其 Krull 维数为 0，但是 $\mathfrak{m}^2 = 0$，故 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的维数至少为 1.

由下述引理可知正则局部环一定是整环.

Lemma 22 A 为环，$\mathfrak{a}$ 为 A 中理想使得 $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$. 假设其相伴分次环 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ 是整环，则 A 是整环.

证明：令 $x, y \in A$ 是的非零元，则 $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$ 表明存在 r, s 使得 $x \in \mathfrak{a}^r, x \notin \mathfrak{a}^{r+1}, y \in \mathfrak{a}^s, y \notin \mathfrak{a}^{s+1}$. 令 $\overline{x}, \overline{y}$ 为 x, y 在 $\mathrm{gr}_r(A), \mathrm{gr}_s(A)$ 中的像. 则 $\overline{x} \neq 0, \overline{y} \neq 0$，因此 $\overline{xy} \neq 0$，这说明 $xy \neq 0$.

因为对于 1 维的 Noether 局部整环 A，A 是离散赋值环等价于 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$. 故上述引理表明 1 维的正则局部环就是离散赋值环.

参考文献

[1] Hideyuki Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8, Cambridge University Press, Cambridge 1986

[2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley, Reading, Massachusetts 1969

[3] David Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York 1995