Nevanlinna 值分布理论及其应用和推广

Kevin

摘要：R.Nevanlinna 在 1925 年成功建立了关于亚纯函数的值分布理论.通过 Nevanlinna 值理论可以得到复分析中一系列深刻结果.值分布理论揭示了关于亚纯函数零点和极点增长的渐进行为，其中最基本的概念是所谓的 Nevanlinna 特征函数，其衡量了亚纯函数的增长率.本文首先给出值分布理论中核心的第一基本定理和第二基本定理，并给出其在复函数论当中的一些应用.之后介绍近几十年来值分布理论在高维复流形的以及推广值分布理论与 Diophantine 逼近的联系.

关键词：Nevanlinna 值分布理论；第一基本定理；第二基本定理；特征函数；函数论

1 复平面上的 Nevanlinna 值分布理论

在 1922 年到 1925 年，Rolf .Nevanlinna 发表了一系列论文推广了 Picard 定理和 Borel 定理并建立了值分布理论[1].对于每一个非常数的复多项式P，我们用$n(P,a)$表示$P(z)=a$在整个复平面$\mathbb{C}$上的记重数下的零点个数，经典的代数基本定理告诉我们$\deg P=n(P,a)$，这个值衡量了复多项式在复平面上的增长.我们希望将经典的代数基本定理推广到亚纯函数上去.第一个问题就是对于整函数或者亚纯函数应如何衡量其增长速度，对于整函数而言，有两种方式：第一种是取半径r的圆盘和f的最大模函数（半径r的函数），而第二种是固定某个点a，$f(z)=a$在半径r的圆盘中记重数的零点个数.但对于亚纯函数而言，由于极点的存在前者无法定义.Nevanlinna 成功的找到了极大模函数在亚纯函数上的正确替代，即 Nevanlinna 特征函数，这样便可以正确衡量亚纯函数的增长性.从 Poisso-Jensen 公式开始，他通过了一系列精细的估计导出了亚纯函数的第一基本定理和第二基本定理并由此得出了经典 Picard 定理的定量版本. 本节综合参考了 Barry Simon[2]、Norbert Steinmetz[3]、杨乐[4]和张南岳[5]的著作，这些著作均详细介绍了经典的 Nevanlinna 值分布理论的各个方面.

1. 1 Poisson-Jensen 公式

Nevanlinna 理论的起点是 Nevanlinna 推广的 Poisson-Jensen 公式，它是 Jensen 公式的推广.首先我们先给出 Jensen 公式.

定义 1. 1. 1 假设$w\in\mathbb{D}(r),w\neq 0$,我们定义 Blaschke 因子为

$$b(z,w)=\frac{r(w-z)}{r^2-\bar{w}z}$$

注意到$b(z,w)$仅有零点$z=w$且

$$\left|\frac{r(w-re^{i\theta})}{r^2-\bar{w}re^{i\theta}}\right|=\left|\frac{w-re^{i\theta}}{r-\bar{w}e^{i\theta}}\right|=\left|\frac{w-re^{i\theta}}{re^{-i\theta}-\bar{w}}\right|=\left|\frac{\overline{w-re^{i\theta}}}{w-re^{i\theta}}\right|=1$$

所以有$|b(e^{i\theta},w)|=1$.Blaschke 因子将半径为r的闭圆盘映射到单位闭圆盘上且将边界映射到边界.

定理 1. 1. 2[2]（Jensen 公式）固定$r>0$.令f为包含闭圆盘$\overline{\mathbb{D}(r)}$的某个开集上的非常值全纯函数.设f在$\mathbb{D}(r)$中的零点为$\{z_j\}_{j=1}^{N}$（重级零点按重数计算），如果$f(0)\neq 0$,则

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|d\theta-\sum_{j=1}^{N}\log\left(\frac{r}{|z_j|}\right)$$

证明：令

$$g(z)=\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{N}b(z,z_j)}$$

可以看到g全纯且无零点，且$|z|=r$的情况下，有$|g(z)|=|f(z)|$.因g全纯无零点，故$\log|g(z)|$是调和函数，利用调和函数的 Possion 公式的特殊情况平均值公式可以得到

$$\begin{aligned}\log|g(0)|&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta\end{aligned}$$

又因为

$$|g(0)|=\frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^{N}\left|\frac{z_j}{r}\right|}$$

将此式代入就得到 Jensen 公式.

Nevanlinna 在 1925 年中重新挖掘了 Jensen 公式.他将其推广到一般的亚纯函数上，命名为 Possion-Jensen 公式，并应用到自己的值分布理论当中[1].

定理 1. 1. 3[2]（Poisson-Jensen 公式）假设$f(z)$为闭圆盘$\overline{\mathbb{D}(R)}$上的非常数亚纯函数，记$a_i, 1\leq i\leq t$为$f(z)$在开圆盘$\mathbb{D}(R)$中的零点，$b_j, 1\leq j\leq s$为$f(z)$在开圆盘$\mathbb{D}(R)$中的极点（重级零点和极点按重数计算），则有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|}d\theta$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\log|\frac{R^2-\bar{b}_j z}{R(z-b_j)}|-\sum_{i=1}^{t}\log|\frac{R^2-\bar{a}_i z}{R(z-a_i)}|$$

对$z\neq a_i,b_j,1\leq i\leq t,1\leq j\leq s$成立，如果$f(0)\neq 0,\infty$且$z=0$，则上式就退化为经典的 Jensen 公式：

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{t}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{i=1}^{s}\log\frac{r}{|a_i|}$$

证明：首先考虑f无零点和极点的情况.此时$\log|f(z)|$是调和函数，由 Possion 公式

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\mathrm{Re}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta$$

如果有零点$a_i,1\leq i\leq s$和极点$b_j,1\leq j\leq t$，同定理 1.1.2 的证明，利用零点和极点的 Blaschke 因子可以构造函数

$$F(z)=f(z)\frac{\prod_{j=1}^{t}b(z,b_j)}{\prod_{i=1}^{s}b(z,a_i)}$$

则当$|z|=R$时，$|F(z)|=|f(z)|$，对$F(z)$应用 Poisson 公式，就得到 Poisson-Jensen 公式.

1.2 Nevanlinna 第一基本定理

Nevanlinna 通过定义适当的函数来衡量亚纯函数的增长，第一基本定理基本就是 Poisson-Jensen 公式的改写.

定义 1.2.1 假设f是$\mathbb{C}$上的亚纯函数，$a\in\hat{\mathbb{C}}$，其中$\hat{\mathbb{C}}$是扩充复平面，$\{\zeta_j\}_{j=1}^{V_r}$是$f(\zeta)=a$在$\overline{\mathbb{D}(r)}$中的零点，且的ζ_j的重数为m_j.定义计数函数

$$n_f(r,a)=\sum_{j=1}^{V_r}m_j$$

$n_f(r,a)$即亚纯函数f在圆盘$\overline{\mathbb{D}(r)}$中计算重数下取到a的次数.利用积分将加权平均化，定义幂指量或者计数函数$N_f(r,a)$，即$n_f(r,a)$的加权平均化.

$$
\begin{aligned}
N_f(r,a) &= \int_0^r \frac{n_f(s,a)-n_f(0,a)}{s}ds + n_f(0,a)\log r \\
&= n_f(0,a)\log r + \sum_{\zeta_j\neq 0} m_j \log\left(\frac{r}{|\zeta_j|}\right)
\end{aligned}
$$

这里$N_f(r,a)$衡量了亚纯函数f在$\mathbb{D}(r)$中可以取到a的次数随着半径r的增长.

定义 1.2.2 引入正对数记号$\log^+(x)=\max\{0,\log x\}$，并定义逼近函数$m_f(r,a)$

$$
m_f(r,a)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\text{ , } a=\infty \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-a}\right|d\theta\text{ , } a\neq\infty \end{cases}
$$

逼近函数衡量了f的函数值与a的接近程度.Nevanlinna 特征函数$T_f(r)$定义为

$$
T_f(r)=m_f(r,\infty)+N(r,\infty)
$$

Nevanlinna 特征函数刻画了亚纯函数f的增长.它的作用类似于整函数的极大模函数取正对数，用来衡量整函数随着半径r的增长.实际上，如果f是整函数，那么f的特征函数与极大模函数有如下的约束关系，对于整函数来说，特征函数和极大模函数的正对数增长相同.

定理 1.2.2 假设f是复平面$\mathbb{C}$上的整函数，其极大模函数为

$$
M(r,f)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|
$$

则对于$0<r<R$有

$$
T_f(r)\leqslant\log^+M(r,f)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T_f(R)
$$

证明：第一个不等式是显然的.对于第二个，设z_0是$|z|=r$上f取到最大值$M(r,f)$的点.则

$$
\begin{aligned}
\log M(r,f)=\log|f(z_0)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\mathrm{Re}\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z_0}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z_0}d\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\mathrm{Re}\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z_0}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z_0}d\theta \\
&\leqslant \frac{R+r}{R-r}T_f(R)
\end{aligned}
$$

Nevanlinna 定义的逼近函数、幂指量和特征函数是整个值分布理论中主要

的三个函数，值分布理论即描述了这三个主函数的增长是如何相互关联的，进而给出亚纯函数增长的定量版本.利用 Nevanlinna 定义的这三个函数，我们可以重写 Poisson-Jensen 公式来得到第一基本定理.

定理 1.2.3[2]（第一基本定理）对任意$a\in\hat{\mathbb{C}}$，我们有

$$m_f(r,a)+N_f(r,a)=T_f(r)+O(1) \tag{1.2.1}$$

证明：如果$a=\infty$，那么定理显然成立.下面假设$a\in\mathbb{C}$.回忆 Poisson-Jensen 公式

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|}d\theta$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_jz}{r(z-b_j)}\right|-\sum_{i=1}^{t}\log\left|\frac{r^2-\bar{a}_iz}{r(z-a_i)}\right|$$

其中$a_i,1\le i\le t$是f在$\mathbb{D}(r)$中的零点，$b_j,1\le j\le t$是f在$\mathbb{D}(r)$中的极点.现在假设$f(z)$在0处的展开式首项为$c_\tau z^\tau$，则考虑函数$\dfrac{f(z)}{z^\tau}$代入上式，即可得

$$\begin{aligned}\log|c_\tau|=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\tau\log r\\&+\sum_{b_j\neq0}\log\left|\frac{r}{b_j}\right|-\sum_{a_i\neq0}\log\left|\frac{r}{a_i}\right|\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

只要f不恒为零则上式总成立.

注意到$\log(x)=\log^+(x)-\log^+\dfrac{1}{x}$，故

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta\\&=m_f(r,\infty)-m_f(r,0)\end{aligned}$$

又因为

$$N_f(r,0)=n_f(0,0)\log r+\sum_{a_i\neq0}\log\left|\frac{r}{a_j}\right|$$

$$N_f(r,\infty)=n_f(0,\infty)\log r+\sum_{b_j\neq0}\log\left|\frac{r}{b_j}\right|$$

故

$$\sum_{b_j\neq0}\log\left|\frac{r}{b_j}\right|-\sum_{a_i\neq0}\log\left|\frac{r}{a_j}\right|-\tau\log r=N_f(r,\infty)-N_f(r,0)$$

故式(1.2.2)可改写为

$$\log|c_\tau|=m_f(r,\infty)-m_f(r,0)+N_f(r,\infty)-N_f(r,0)$$

即

$$T_f(r)=\log|c_\tau|+m_f(r,0)+N_f(r,0) \tag{1.2.3}$$

注意如下关于正对数的不等式

$$\log^+(x+y)\leqslant\log^+(x)+\log^+(y)+\log 2$$

$$\log^+|x-y|\leqslant\log^+(x)+\log^+(y)$$

所以有

$$|\log^+|f(z)-a|-\log^+|f(z)||\leqslant\log^+|a|+\log 2$$

这得出

$$|m_{f-a}(r,\infty)-m_f(r,\infty)|\leqslant\log^+|a|+\log 2$$

显然我们有 $N_f(r,\infty)=N_{f-a}(r,\infty)$，所以有

$$|T_{f-a}(r)-T_f(r)|\leqslant\log^+|a|+\log 2$$

因此，对$f-a$应用式(1.2.3)就可推出式(1.2.1)

$$N_f(r,a)+m_f(r,a)=N_{f-a}(r,0)+m_{f-a}(r,0)$$

$$=T_{f-a}(r)-\log|c_\tau|=T_f(r)-\log|c_\tau|+\log^+|a|+\log 2$$

可以看出式(1.2.1)中的$O(1)$被$|\log|c_\tau||+\log^+|a|+\log 2$限制.

Nevanlinna 第一基本定理告诉我们，对任意的$a\in\hat{\mathbb{C}}$，Nevanlinna 特征函数与$N_f(r,a)+m_f(r,a)$的差是有界量，所以如果f平均而言取到a的次数越少，那么f的函数值就会与a越接近.

例 1.2.4 令$f(z)=e^z$，此时$\log|f(re^{i\theta})|=r\cos\theta$，因为$N_f(r,\infty)=0$，故

$$T_f(r)=m_f(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta d\theta=\frac{r}{\pi}$$

例 1.2.5 如果$f(z)$是$\mathbb{C}$上的d次有理函数，即$f=Q/P$，其中Q,P是无公共零点的多项式且$\max\{\deg P,\deg Q\}=d$.则可以证明

$$T_f(r)=d\log r+O(1)$$

为了刻画特征函数$T_f(r)$的增长性，我们引入如下级的概念.

定义 1.2.6 设$S(r)$为区间$[r_0,\infty],r_0\geqslant 0$上的实函数且$S(r)$在该区间上非负且非减，定义

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ S(r)}{\log r}，\quad \lambda=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^+ S(r)}{\log r}$$

称ρ为级，λ为下级.

定义 1.2.7 对于非常数亚纯函数f，f的级就定义为其特征函数$T_f(r)$的级

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+ T_f(r)}{\log r}，\quad \lambda=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^+ T_f(r)}{\log r}$$

如果$\rho<\infty$，那么f称为有限级的，如果$\rho=\infty$，那么f称为无限级的.

1.3 Nevanlinna 第二基本定理

Nevanlinna 通过精细的估计给出了第二基本定理，第二基本定表明了一个关于亚纯函数的特征函数的增长性的基本事实：即亚纯函数的特征函数可以被该亚纯函数取某几个值的次数所限制.我们陈述第二基本定理的一般形式.首先引入一些记号.

定义 1.3.1 假设f是$\mathbb{C}$上的亚纯函数，$a\in\hat{\mathbb{C}}$，其中$\hat{\mathbb{C}}$是扩充复平面，$\{\zeta_j\}_{j=1}^{V_r}$是$f(\zeta)=a$在$\overline{\mathbb{D}(r)}$中的零点，这里重级零点只计算一次.定义

$$\bar{n}_f(r,a)=V_r$$

$n_f(r,a)$即亚纯函数f在圆盘$\overline{\mathbb{D}(r)}$中不计算重数下取到a的次数.类似幂指量，定义精简幂指量$\bar{N}_f(r,a)$，即$\bar{n}_f(r,a)$的加权平均化.

$$\begin{aligned}\bar{N}_f(r,a)&=\int_0^r\frac{\bar{n}_f(s,a)-\bar{n}_f(0,a)}{s}ds+\bar{n}_f(0,a)\log r\\&=\bar{n}_f(0,a)\log r+\sum_{\zeta_j\neq 0}\log\left(\frac{r}{|\zeta_j|}\right)\end{aligned}$$

定义 1.3.2 对于非常数的整亚纯函数f，定义如下分歧项

$$N_{1,f}(r)=N_{f'}(r,0)+2N_f(r,\infty)-N_{f'}(r,\infty)$$

注意到$N_{1,f}(r)\geqslant 0$恒成立.

定理 1.3.3[4]（第二基本定理）假设f是$\mathbb{C}$上的非常数亚纯函数，$a_j,1\leqslant j\leqslant q$为$\hat{\mathbb{C}}$上$q(\geqslant 3)$个不同的点，则存在一个具有有限测度的子集$E\subseteq(0,\infty)$使得当$r\notin E,r\to\infty$时，有下式成立：

$$\sum_{j=1}^{q}m_f(r,a_j)+N_{1,f}(r)\leqslant 2T_f(r)+S_f(r)\tag{1.3.1}$$

这里余项$S_f(r)$满足如下性质：

$$S_f(r)=o(T_f(r)),r\to\infty,r\notin E$$

由第一基本定理（1.2.1），上式可重新整理为

$$\sum_{j=1}^{q}N_f(r,a_j)\geqslant(q-2)T_f(r)+N_{1,f}(r)-S_f(r) \tag{1.3.2}$$

第二基本定理的关键在这里的误差项在半径r充分大的情况下相对于特征函数$T_f(r)$是可以忽略的.Nevanlinna 对第二基本定理的原式证明依赖于下述一个对逼近函数$m_{f'/f}(r,\infty)$做估计的引理.因为$f'/f=(\log f)'$，所以该引理就被称为对数导数引理.

引理 1.3.4[4]（对数导数引理）对任何一个亚纯函数f，存在一个具有有限测度的子集$E\subseteq(0,\infty)$使得当$r\notin E,r\to\infty$时，有下式成立

$$m_{f'/f}(r,\infty)=O(\log(rT_f(r)))$$

下面给出一个用精简幂指量表达的第二基本定理，首先先观察到分歧项$N_{1,f}(r)$的一些性质，我们记

$$2N_f(r,\infty)-N_{f'}(r,\infty)=\int_0^r\frac{n_{1,f}(r,\infty)-n_{1,f}(0,\infty)}{t}dt+n_{1,f}(0,\infty)\log r$$

其中$n_{1,f}(t,\infty)=2n_f(t,\infty)-n_{f'}(t,\infty)$.若$f(z)$在$z_0$处有一个$k$重零点，则$n_{1,f}(r,\infty)$在$z_0$处计算$k-1$次.又若$a\in\mathbb{C}$，$f(z)-a$在$z_0$处有$k$重零点，则$n_{f'}(r,0)$在$z_0$计算$k-1$次，故记$n_{1,f}(t)=n_{1,f}(t,\infty)+n_{f'}(t,0)$，有

$$N_{1,f}(r)=\int_0^r\frac{n_{1,f}(t)-n_{1,f}(0)}{t}dt+n_{1,f}(0)\log r$$

所以分歧项$N_{1,f}(r)$是临界点（计算重数）的计数函数.对于$a\in\hat{\mathbb{C}}$，$f(z)-a$在z_0处有一个k重零点，则$n_{1,f}(t)$就计算$k-1$次，故有下式

$$\sum_{j=1}^{q}N_f(r,a_j)-N_{1,f}(r)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\bar{N}_f(r,a_j)$$

所以第二基本定理（1.3.2）可以改写为

$$\sum_{j=1}^{q}\bar{N}_f(r,a_j)+S_f(r)>(q-2)T_f(r) \tag{1.3.3}$$

公式（1.3.1）告诉我们，因为误差项比亚纯函数的特征函数增长的缓慢，故当半径变的很大的时候，下界在忽略误差时会被函数取某几个值的逼近函数所

控制.Nevanlinna 本人所给出的第二基本定理仅考虑了$q=3$的情况，其本意是希望给出 Picard 定理的一个定量版本从而直接证明 Picard 定理.

1.4 亏量关系

Nevanlinna 第二基本定理最直接的应用就是可以导出亏量关系，首先我们定义亏量和亏值的概念.

定义 1.4.1 假设f是非常数亚纯函数，给定$a\in\mathbb{C}$.定义a的亏量为

$$\delta_f(a)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m_f(r,a)}{T_f(r)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_f(r,a)}{T_f(r)}$$

注意这里由第一基本定理显然有$0\leqslant\delta_f(a)\leqslant1$.如果$\delta_f(a)>0$，那么我们就称$a$是$f$的亏值或者 Nevanlinna 例外值.粗糙的看，a是f的亏值实际上表明f在整个复平面上取到a的次数较少.

定理 1.4.2[2]（亏量关系）非常数亚纯函数f的亏值至多有可数个，且和不超过 2，即

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant2$$

对任意$\{a_j\}_{j=1}^{q}$成立.

证明：由第二基本定理，$\sum_{j=1}^{q}m_f(r,a_j)\leqslant2T_f(r)+S_f(r)$两边除以$T_f(r)$后取极限可得

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant\liminf_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{q}\frac{m_f(r,a_j)}{T_f(r)}\leqslant2+\lim_{r\to\infty}\frac{S_f(r)}{T_f(r)}$$

故得到

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant2$$

1.5 Picard 小定理和 Borel 定理

原始的 Picard 小定理的证明利用了模函数的理论，用现代几何的语言来说即是模函数给出了单位圆到扩充复平面挖掉三点的万有覆叠映射，所以任何亚纯函数都可以提升到其万有覆叠即圆盘上去，再利用 Liouville 定理可知提升因映射是有界的故一定为常数.从几何的角度来看，Picard 小定理是一个关于全纯映射退化性的结果.而利用 Nevnalinna 值分布理论导出的亏量关系可以看出经典的 Picard 小定理是其直接的推论.这也是通过函数论得到几何结论的经典应用.

定理 1.5.1[2]（Picard 小定理）假设f是$\mathbb{C}$上的亚纯函数，如果f在$\hat{\mathbb{C}}$上取不到三个点，那么f是常数.

证明：假设f为非常数的亚纯函数，且取不到a_1,a_2,a_3，则对$j=1,2,3$，显然有$N_f(r,a_j)=0$，故此时$\delta_f(a_j)=1,j=1,2,3$，这与

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant 2$$

矛盾.

所以非常数亚纯函数的像在扩充复平面上最多取不到两点，满足$\delta_f(a)=1$的两个点我们称为 Picard 例外值.利用亏量关系，我们得到了关于 Picard 小定理的重新表述：非常数亚纯函数的 Picard 例外值至多只有两个.例子$f=e^z$存在两个例外值$0,\infty$表明这里的上界2是精确的.所以 Nevanlinna 例外值实际上是比 Picard 例外值更精细的概念，亏量关系可以视为 Picard 小定理的推广.接下来介绍 Borel 定理，首先引入 Borel 例外值的概念.

定义 1.5.2 假设f是非常数亚纯函数，f的级ρ是有限的，对$a\in\hat{\mathbb{C}}$，如果a满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n_f(r,a)}{\log r}<\rho$$

则称a为 Borel 例外值.

引理 1.5.3 设f为具有有限级ρ非常数亚纯函数，则对$a\in\hat{\mathbb{C}}$，a是 Borel 例外值等价于

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log N_f(r,a)}{\log r}<\rho$$

证明；因

$$n_f(r,a)\leqslant\frac{1}{\log 2}\int_r^{2r}\frac{n_f(r,a)}{t}dt\leqslant\frac{1}{\log 2}N_f(2r,a)$$

又

$$N_f(r,a)-N_f(r_0,a)=\int_{r_0}^{r}\frac{n_f(t,a)}{t}dt\leqslant n_f(r,a)\log\frac{r}{r_0}$$

故易得

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log N_f(r,a)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n_f(r,a)}{\log r}$$

定理 1.5.4[4]（Borel 定理）设f是具有有限级ρ的非常数亚纯函数，则f至多只有两个 Borel 例外值.

证明：反证，假设结论不成立.则存在三个不同的$a_1,a_2,a_3\in\hat{\mathbb{C}}$ 为f的 Borel 例外值，则由引理 1.5.3，对$j=1,2,3$有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log N_f(r,a_j)}{\log r}<\rho$$

注意到f是有限级时$S_f(r)=O(\log r)$，利用第二基本定理的变式(1.3.2)可得f的级小于ρ，矛盾.

可以看到如果a是f的 Picard 例外值，那么a一定是 Borel 例外值，所以如果在亚纯函数f是有限级的情况下，Borel 定理就是 Picard 小定理的发展版本.

1.6 亚纯函数唯一性理论

Nevanlinna 值分布理论的一个最强有力的应用便是亚纯函数的唯一性理论，Nevanlinna 本人证明的五值定理是这个理论的第一个重要结果，这个理论首要的观察是如果两个亚纯函数分担了一定的值那么这两个亚纯函数在一些等价意义下相同，这类问题通常被称为值分担问题.首先注意这样一个例子，考虑函数$f(z)=e^z$和$g(z)=e^{-z}$，对于值$a=0,1,-1,\infty$，可以观察到f和g的原像集$f^{-1}(a)$和$g^{-1}(a)$是相同的.这种情况下，我们称f和g有公共的分担值a，对e^z和e^{-z}而言，这两个函数有4个公共分担值，但它们是不同的亚纯函数.Nevanlinna 利用他发展的值分布理论，得到了五值定理.

定义 1.6.2 对于亚纯函数f，假设$a\in\hat{\mathbb{C}}$，定义

$$V_f(a)=\{z:f(z)=a\}=f^{-1}(a)$$

若亚纯函数f和g满足$V_f(a)=V_g(a)$，则称a为亚纯函数的 IM 公共值.

定理 1.6.3[2]（五值定理）如果非常数的亚纯函数f和g有五个不同的 IM 公共值，即

$$V_f(a_i)=V_g(a_i),a_i\in\hat{\mathbb{C}},i=1,2,3,4,5$$

则$f=g$.

证明：假设$f\neq g$且$V_f(a_i)=V_g(a_i)$表明$\bar{N}_f(r,a_j)=\bar{N}_g(r,a_j)\equiv\bar{N}_j(r)$，由第二基本定理（1.3.3），可得到

$$T_f(r)\leqslant\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\sum_{j=1}^{5}\bar{N}_j(r)$$

对$T_g(r)$有同样的不等式.f和g都非常数，故

$$\sum_{j=1}^{5}\overline{N_j}(r)\to\infty \tag{1.6.1}$$

因为

$$T_{f-g}(r)\leqslant T_f(r)+T_f(g)+O(1)$$

故有

$$T_{f-g}(r)\leqslant\left(\frac{2}{3}+o(1)\right)\sum_{j=1}^{5}\overline{N_j(r)} \tag{1.6.2}$$

又因为$f-g=0$在$\cup V_f(a_j)$上成立，所以有

$$\sum_{j=1}^{5}\overline{N_j}(r)\leqslant N_{f-g}(r,0)\leqslant T_{f-g}(r)+O(1) \tag{1.6.3}$$

式（1.6.2）和式（1.6.3）表明

$$\left(\frac{1}{3}-o(1)\right)\sum_{j=1}^{5}\overline{N_j}(r)\leqslant O(1)$$

这与式（1.6.1）矛盾.

虽然五值定理在 IM 公共值的最少个数意义下是最好的结果，但亚纯函数唯一性理论特别是对于函数值分担问题的发展并未就此停止.对于四个值的情况，尽管不能得到唯一性的结论，但 Nevanlinna 对于四个分担值的情况证明了四值定理，四值定理声称如果在计算重数的情况下两个亚纯函数分担了四个值并满足一定限制的条件，则f和g之间仅相差一个 Möbius 变换[3].

2 值分布理论的高维推广

对于一个复平面上的亚纯函数f，经典的函数论问题是要尽可能的探究f的性质以及相应的值分布的情况，这也是 Nevanlinna 值分布理论的原始面貌.在二十世纪，多复变和复几何迅速发展，用现代几何学的观点来看，因为扩充复平面与一维复射影空间$\mathbb{CP}^1$全纯同构，故一个亚纯函数f便可以视为全纯映射$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^1$，所以整个亚纯函数值分布理论就是探究从复平面到一维复射影空间的全纯映射的值分布情况.为了充分探究复流形的性质，通过研究复流形间全纯映射来得到复流形本身的性质和分类是一种有效的途径.所以发展高维值分布

理论来研究全纯映射的性质成为了就成为了复几何发展的重要一步.从 1933 年 H.Cartan 建立了n维复射影空间上的第二基本定理后，Nevanlinna 值分布理论以几种不同的形式被推广到高维，其基本目标是在高维复流形上建立第一和第二基本定理，并导出亏量关系.本节简要介绍在历史上的几个重要的进展：

（1）1960 年陈省身将值分布理论推广到了$\mathbb{C}$到任意紧黎曼曲面之间的全纯映射情况.

（2）1933 年 H.Cartan 将 Nevanlinna 理论推广到了复平面到与超平面相交的n维复射影空间的全纯映射的情况.

（3）1965 年陈省身和 Raoul Bott 的某个任意复流形到一个复 Grassman 流形的全纯映射的值分布理论.

（4）1973 年 P.Griffiths 和 J.King 的等维数版本的值分布理论，并在之后提出了 Griffiths 猜想.

（5）1998 年 M.McQuillan 在一些技术性条件下证明了复曲面情况下的 Green-Griffiths-Lang 猜想

2.1 陈省身在紧 Riemann 曲面上的推广

1960 年，陈省身推广了 Nevanlinna 理论到全纯映射$f\colon \mathbb{C}\to M$的情况，其中M是一个紧 Reimann 曲面，即一维紧复流形**[6]**.注意到所有$\mathbb{C}$上的亚纯函数f都是全纯映射$f\colon \mathbb{C}\to \mathbb{CP}^1$.经典的 Nevanlinna 理论即在一维复射影空间上选取了合适的度量定义逼近函数并利用对数导数引理做估计得到第二基本定理.为了将$\mathbb{CP}^1$推广到任意的紧 Riemann 曲面M，首要问题是如何定义逼近函数使得第一基本定理成立，即在紧 Riemann 曲面M上找到合适的距离函数.我们用下述标准记号.

记号 2.1.1 令

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial z}dz,\bar{\partial}u=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

$$d=\partial+\bar{\partial},d^c=\frac{i}{4\pi}\left(\bar{\partial}-\partial\right)$$

注意到$dd^c=\dfrac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}$.

陈省身通过证明如下M上 Possion 方程解的存在来得到距离函数的存在性.

定理 2.1.2[6]令Ω为紧 Riemann 曲面M上C^1类的实值$\boldsymbol{2}$-形式使得

$$\int \omega = c > 0$$

且$a \in M$为M上任意给定的点，如下 Possion 方程

$$-2dd^c u = \frac{1}{c}\omega$$

具有解$u(p,a), p \in M$，满足如下条件：

（1）$u(p,a)$在$M \backslash \{a\}$上是C^2类函数

（2）如果z_a是局部坐标卡使得$z_a = 0$当$z = a$时成立，则$u(p,a) - \log|z_a|$在$\boldsymbol{a}$的邻域上是C^2类函数.

这里的条件（2）不依赖于坐标卡的选取.

直观的来看陈省身证明了对任意正定$(1,1)$-形式ω，点$a \in M$，上述 Possion 方程有一个在a处带对数奇点的解.利用这个$u(p,a)$，便可以对$f: \mathbb{C} \to M$定义逼近函数

定义 2.1.3 对$f: \mathbb{C} \to M$，$a \in M$，定义逼近函数

$$m_f(r,a) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(f(re^{i\theta}),a)d\theta$$

定义 2.1.4 令M是一个紧 Riemann 曲面，设$f: \mathbb{C} \to M$是一个全纯映射，令

$$\omega = h\frac{i}{2\pi}dz \wedge d\bar{z}$$

为M上的一个正定$(1,1)$-形式，定义f关于ω的特征函数为

$$T_{f,\omega}(r) = \int_0^r dt \int_{|\xi| \leq t} f^*\omega$$

可以看到给定一个正定ω，$T_{f,\omega}(r)$衡量了f的增长.

我们仍然有如下的第一基本定理.

定理 2.1.5[6]设M是一个紧黎曼曲面且ω是正定$(1,1)$-形式，对任意点$a \in M$，有

$$T_{f,\omega}(r) = m_f(r,a) + N_f(r,a) + O(1)$$

更进一步，陈省身证明了紧 Riemann 曲面上的第二基本定理

定理 2.1.6[6]假设M是紧 Riemann 曲面，令$\omega=h\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\bar{z}$为给定正定$(1,1)$-形式，令$f:\mathbb{C}\to M$为非常数全纯映射，$a_1,\cdots,a_q$为$M$上$q$个不同的点，固定一个$\delta>0$，存在一个具有有限测度的子集$E\subseteq(0,\infty)$（这里$E$与$\delta$有关）使得当$r\notin E,r\to\infty$时，有

$$\sum_{j=1}^{q}m_f(r,a_j)+T_{f,Ric(\omega)}(r)+N_{1,f}(r)\leqslant O(\log T_{f,\omega}(r))+\delta\log r$$

成立.这里$Ric(\omega)=dd^c(\log h)=-K\omega$为 Ricci 形式.

利用上述第二基本定理，我们可以导出一些关于紧 Riemann 曲面的一些重要结果，首先根据紧 Riemann 曲面的单值化定理，任何紧 Riemann 曲面都双全纯同构于以下三种曲面：环面T，一维复射影空间$\mathbb{CP}^1$和亏格大于2的曲面.所以对于紧 Riemann 曲面M，仅考虑这三种情况.

当$M=\mathbb{CP}^1$时，其上有如下典范的 Fubini-Study 度量，在标准的仿射坐标卡z下，可以写为

$$\omega=\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\bar{z}=dd^c(\log(1+|z|^2))$$

因此$Ric(\omega)=-2\omega$，故此时对任意的$\mathbb{C}$上的亚纯函数f，

$$T_{f,Ric(\omega)}(r)=T_{f,-2\omega}(r)=-2T_{f,\omega}(r)$$

这里

$$T_{f,\omega}(r)=\int_0^r\frac{dt}{t}\int_{|\xi|\leqslant t}f^*\omega=\int_0^r\frac{dt}{t}\int_{|\xi|\leqslant t}\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\frac{i}{2\pi}d\xi\wedge d\bar{\xi}.$$

此时的$T_{f,\omega}(r)$被称为 Ahlfors-Shimizu 特征函数,最早是由 Ahlfors 和 Shimizu 分别提出并用于给出 Nevanlinna 理论的几何解释.由于这里的 Ahlfors-Shimizu 特征函数与经典的 Nevanlinna 特征函数只差一个常数，所以紧 Riemann 曲面上的第二基本定理可以重新得到 Nevanlinna 的第二基本定理.

陈省身也同时给出了紧 Riemann 曲面版本的亏量关系，并进一步表明实际上经典的亏量关系中的亏值总和的上界是紧 Riemann 曲面的 Euler 特征数.由此亏量关系可以进一步得到在M为任意紧黎曼曲面情况下,全纯映射$f:\mathbb{C}\to M$的值分布情况.得到的结果可以视为 Picard 定理的某种推广.

定理 2. 1. 7[6]假设非常值全纯映射$f:\mathbb{C}\to M$，$a_1,a_2,\cdots,a_q\in M$为M上q个点，则有

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant\chi(M)$$

其中$\chi(M)$为M的 Euler 示性数.

利用亏量关系，我们可以分析全纯映射f的情况，如果M是$\mathbb{CP}^1$，那么其 Euler 示性数为 2，故此时就是经典的亏量关系.当M是环面时，其 Euler 示性数为 0，此时所有值的亏值都为 0,.如果M亏格大于等于 2 的紧 Riemann 曲面，则其亏格小于 0，与亏量关系矛盾，故此时没有从$\mathbb{C}$到M的非常值全纯映射.

2. 2 H.Cartan 的理论

H.Cartan 在 1933 年首次考虑了复流形M为n维复射影空间$\mathbb{CP}^n$的情况，高维版本的 Nevanlinna 理论首次诞生[7].值得注意的是，这套理论的出现比 Riemann 曲面的情况更早，因为复射影空间的概念出现比流形的概念出现的更早.$\mathbb{CP}^n$作为最简单的紧复流形，在其上推广值分布理论并不是非常困难，Cartan 在这套理论中发展的方法仍然是类比经典理论的对数导数估计. H.Cartan 的理论作为 Nevanlinna 值分布理论几何化的开端，对之后很多重要的理论都有重要影响，此之后很多高维版本的 Nevanlinna 值分布理论开始出现.首先引入复射影空间的一些相应的记号我们记$\mathbb{CP}^n:=\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\sim$，这里等价关系指$(a_0,a_1,\cdots,a_n)\sim(b_0,b_1,\cdots,b_n)$当且仅当$(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\lambda(b_0,b_1,\cdots,b_n),\lambda\in\mathbb{C}$，用$[a_0,a_1,\cdots,a_n]$表示$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$的等价类.$\mathbb{CP}^n$有典范的复结构使之构成一个$n$维紧复流形，我们记齐次坐标为$[z_0,z_1,\cdots,z_n]$.

定义 2. 2. 2 假设$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$是全纯映射，则在$\mathbb{A}_i=\{[x_0,x_1,\cdots,x_n]:x_i\neq 0\}$上，都诱导了一个全纯映射$f:U_i\to\mathbb{A}_i$，这里$U_i$是$\mathbb{C}$的开子集并使得$f$的第$i$个分量非$0$，所以我们可以将$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$写成如下非齐次坐标

$$f=[g_0,\cdots,g_{i-1},1,g_{i+1},\cdots,g_n]$$

对每一个$z\in\mathbb{C}$都存在一个指标i使得这些坐标函数都在z处全纯，则对任意商g_j/g_k都在z处亚纯.所以这些坐标函数$g_0,g_1,\cdots,g_n$都是$\mathbb{C}$上的亚纯函数.由 Weierstrass 因子分解定理，存在一个整函数g使得函数$gg_0,gg_1,\cdots,gg_n$都是整函数，并且这些函数没有公共零点.因此f可以被表示成满足如下条件的全纯映射

$$\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n+1},f(z)=(f_0(z),\cdots,f_n(z))$$

其中$f_i=gg_i, i=0,\cdots,n$ 且$f_0,\cdots,f_n$没有公共零点.$\widetilde{f}$ 称为f 的约化表示.

为了介绍 Cartan 的第二基本定理，首先需要定义特征函数和逼近函数，利用全纯映射f 的约化表示$\widetilde{f}$，可以定义如下的特征函数.Cartan 在引入逼近函数时做了一些限制，为此需要引入处于一般位置的超平面族.

定义 2.2.5（Cartan 特征函数）假设全纯映射$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$，其约化表示为

$$\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n+1}, f(z)=(f_0(z),\cdots,f_n(z))$$

定义f 的 Cartan 特征函数$T_f(r)$为

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left\|\widetilde{f}(re^{i\theta})\right\|d\theta-\log\left\|\widetilde{f}(0)\right\|$$

这里$\left\|\widetilde{f}\right\|=(|f_0|^2+\cdots+|f_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

定义 2.2.3 $\mathbb{CP}^n$ 中的超平面H是指如下方程的集合

$$H=\left\{[z_0,z_1,\cdots,z_n]\in\mathbb{CP}^n:\sum_{i=0}^{n}a_iz_i=0, a_i\in\mathbb{C}, 0\leqslant i\leqslant n\right\}$$

且记$a=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$为H 所对应的向量.

定义 2.2.4（Cartan 逼近函数）假设全纯映射$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$，其约化表示为

$$\widetilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n+1}, f(z)=(f_0(z),\cdots,f_n(z))$$

H 为$\mathbb{CP}^n$ 中的超平面，定义f 关于超平面H 的逼近函数为

$$m_f(r,H)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{\left\|\widetilde{f}(re^{i\theta})\right\|\|a\|}{\left\langle\widetilde{f}(re^{i\theta}),a\right\rangle}d\theta$$

其中$\left\langle\widetilde{f}(re^{i\theta}),a\right\rangle$为$\mathbb{C}^{n+1}$ 中的内积.

定义 2.2.5 条件同定义 2.2.4，下令$n_f(r,H)$为$\left\langle\widetilde{f}(re^{i\theta}),a\right\rangle$在$|z|<r$上的零点个数（计算重数），定义如下计数函数

$$N_f(r,H)=\int_0^{r}n_f(t,H)-n_f(0,H)\frac{dt}{t}+n_f(0,H)\log r$$

可以验证上述特征函数、逼近函数和计数函数的定义都不依赖于齐次坐标的

选取.Cartan 证明了如下版本的第一基本定理和第二基本定理.

定理 2.2.6[7]（第一基本定理）假设全纯映射$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$，其约化表示为

$$\tilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n+1},f(z)=(f_0(z),\cdots,f_n(z))$$

H为$\mathbb{CP}^n$中的超平面，则

$$T_f(r)=m_f(r,H)+N_f(r,H)+O(1)$$

定义 2.2.6 假设$H_k,k=0,\cdots,m$是$\mathbb{CP}^n$中m个超平面，称这些超平面处于一般位置，如果$m\geqslant n$且其中任意$n+1$个超平面都线性无关.

定理 2.2.7[7]（Cartan 第二基本定理）$H_k,k=0,\cdots,q$是$\mathbb{CP}^n$中q个处于一般位置的超平面，且全纯映射$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n$的像集$f(\mathbb{C})$不包含在任何超平面之中，则存在一个具有有限测度的子集$E\subseteq(0,\infty)$使得当$r\notin E,r\to\infty$时，有下式成立

$$\sum_{j=1}^{q}m_f(r,H_j)\leqslant(n+1)T_f(r)+O(\log^+T_f(r))+o(\log r)$$

注意到如果$n=1$，上述结果就退化为经典的第二基本定理.

在 Cartan 的理论中，一个重要的改变是经典值分布理论中关于某个点的增长此时被超平面所取代.

2.3 陈省身和 Raoul Bott 的结果

1965 年，陈省身和 Raoul Bott 考虑了一种不同于其它版本的值分布理论[8].通常的值分布理论都研究全纯映射$f:\mathbb{C}\to M$，这里定义域固定为复平面$\mathbb{C}$而M是某个高维复流形.我们知道经典的 Nevanlinna 值分布理论可以看成亚纯函数零点和极点增长性的一种理论. 陈省身和 Raoul Bott 所考虑的高维类比是考虑一个n维复流形M，且其上有一个n维全纯向量丛E，一般的全纯映射被替换为该向量丛的全纯截面$s:X\to E$，希望去研究清楚全纯截面s的零点增长和值分布情况.对于向量丛全纯截面的值分布理论，中心问题是当复流形X非紧的情况，因为如果X是紧无边的，则著名的 Poincaré–Hopf 定理表明

$$\sum_i \mathrm{index}_{x_i}(s)=\chi(M)=\int_X c_n(E)$$

即截面零点的代数和由E的最高次陈类的积分给出，这与全纯截面s的选取无关.基于这个观察，陈省身和 Raoul Bott 对于非紧情况的全纯截面值分布理论可以视为复流形上 Poincaré–Hopf 定理在非紧情况的推广.为了代替紧性，陈省身和 Raoul

Bott 假设了复流形X上存在凹穷竭函数的条件，并定义了相对应的特征函数和逼近函数，从而导出了第一基本定理和等分布定理.

定义 2.3.1 假设X是复流形，其上的穷竭函数是指一个正光滑函数$f{:}X\to\mathbb{R}_+$使得

（1）f是恰当映射，即当K是紧集时，$f^{-1}(K)$是紧集.

（2）当f充分大时，$dd^c f\leqslant 0$.

定义 2.3.2（特征函数）假设X是复流形且E是其上的全纯 Hermite 向量丛，$f{:}X\to\mathbb{R}_+$是其上的穷竭函数，定义E的特征函数

$$T(r)=\int_{-\infty}^{r}\left(\int_{X_r}c_n(E)\right)dr, X_r=\{x{:}f(x)\leqslant r\}$$

特征函数$T(r)$在$r\to\infty$的行为可以视为X为紧的情况下积分$\int_X c_n(E)$的类比.

定义 2.3.3（计数函数）假设X是复流形且E是其上的全纯 Hermite 向量丛，$f{:}X\to\mathbb{R}_+$是其上的穷竭函数.定义如下计数函数

$$N(r,s)=\int_{-\infty}^{r}\mathrm{zero}(s,X_r)dr$$

这里$\mathrm{zero}(s,X_r)=\sum\mathrm{zero}(s,p)$，其中$p$跑遍截面$s$在$X_r$内部的零点.

定理 2.3.4[8]（第一基本定理）假设复流形X上有凹穷竭函数f，E是X上的正定 Hermite 向量丛，s是E上的带有孤立零点的全纯截面，$N(r,s)$为这些零点的计数函数，则有

$$N(r,s)<T(r)+O(1)$$

其中$T(r)$为E的特征函数.特别地，如果在X某点处$c_n(E)>0$，则$\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N(r,s)}{T(r)}\leqslant 1$，故可以定义$s$的亏量$\delta(s)=1-\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{N(r,s)}{T(r)}$，则$\delta(s)$满足$0\leqslant\delta(s)\leqslant 1$.

假设V是一个复线性空间，用$P_n(V)$记V的所有n维子空间构成的 Grassman 流形. 陈省身和 Raoul Bott 观察到了可以将复向量丛上的全纯截面$f{:}X\to E$转化

为全纯映射$e:X\to P_m(V)$.首先定义V是全体全纯截面s构成的线性空间$\Gamma(V)$的一个有限维子空间，且满足如下的丰沛性条件：（1）对任意点$x\in X$，求值映射$e_x:V\to E_x, s\to s(x)$都是满射（2）存在$s\in V$和$x_0\in X$使得$s:X\to E$与E在x_0处的零截面横截相交.令$k(x)=\operatorname{Ker} e_x$，这是一个维数为$m=\dim V-\dim E_x$的子空间，故$x\to k(x)$就定义了一个从$X$到 Grassman 流形$P_m(V)$的全纯映射$e_V:X\to P_m(V)$.并且截面$s$的零点就恰好对应到$e_V(X)$与$z(s)$在$P_m(V)$中的相交数.反之，从一个全纯映射$e:X\to P_m(V)$出发，我们将$P_m(V)$的商丛的拉回，就得到了$X$上的一个全纯向量丛$E$并有一个$E$上全纯截面的有限维子空间$V$使得$e=e_V$.这里的$E$的构造为$X\times V/K$，其中$V=\{(x,v):v\in e(x)\}$.所以这两种观点在上述对应下是完全等价的.这样陈省身和 Raoul Bott 就将问题转移到了全纯映射$e:X\to P_m(V)$上.他们证明了如下的等分布定理.

定理 2.3.5[8]（等分布定理）假设E是具有凹穷竭函数的复流形X上的n维全纯向量丛，V是具有丰沛性条件的$\Gamma(V)$的一个有限维子空间.则除去一个零测集外，都有$\delta(s)$=0，其中$s\in V$.

该定理可以视为有凹穷竭函数的复流形版本下的亏量关系，它表明对几乎所有V中的全纯截面s，它们取到0的次数都相同.

2.4 P.Griffiths 和 J.King 的等维数版本的值分布理论

P.Griffiths 和 J.King 在 1973 年的等维数版本的值分布理论[9].这个版本的值分布理论主要研究高维的全纯映射$f:A\to M$，其中A和M为维数相等的复流形.首先注意到如果这里$\dim A<\dim M$，那么$f(A)$不会覆盖M中的任何开集.为了得到合适的推广，我们应该将点$a\in\mathbb{CP}^1$视为$\mathbb{CP}^1$的0维代数子簇.基于这个原因，高维情况下的 Nevanlinna 值分布理论经常考虑与M上除子相交的全纯映射.然而对高维的情况而言，建立相应第二基本定理是非常困难的事情.P.Griffiths 和 J.King 在上个世纪七十年代对等维数的全纯映射成功证明了第二基本定理，他们考虑了非退化全纯映射

$$f:\mathbb{C}^n\to V$$

这里V是一个n维复射影簇并证明了相应的第二基本定理导出了亏量关系.首先我们定义相应版本的特征函数和逼近函数.

首先我们定义高维情况的全纯映射的退化性.退化性表明了全纯映射的像不会弥散在整个空间中.

定义 2.4.1 假设X,Y是复流形，称全纯映射$f:X\to Y$是解析退化的，如果像集$f(X)$包含在Y的某个真解析子集中.Y包含在某个射影代数流形中，我们定义$f:X\to Y$是代数退化的,如果$f(X)$是包含在Y的代数子簇中.显然，如果Y本身是射影代数流形，那么由周炜良定理，可知解析退化性等价于代数退化性.

定义 2.4.2 假设M是复流形，M上的除子D称为具有正规交叉的，如果D局部上由方程

$$z_1\cdots z_k=0$$

定义，这里$(z_1,\cdots,z_k)$为M上的局部全纯坐标卡.如果此时D的每个不可约分支都光滑，那么称D具有简单正规交叉.当$M=\mathbb{CP}^n$且$D=H_1+H_2+\cdots+H_N$是超平面的线性组合，此时D具有正规交叉当且仅当超平面$H_i,i=1,2,\cdots,N$处于一般位置.

定义 2.4.3 假设M是复流形，(L,h)是M上的 Hermite 线丛.定义如下特征函数和逼近函数

$$T_{f,L}(r)=\int_0^r\frac{dt}{t}\int_{B_t}f^*c_1(L,h)\wedge\omega_0^{n-1}=\int_0^r\frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B_t}f^*c_1(L,h)\wedge\phi_0^{n-1}$$

$$m_f(r,D)=\int_{S_r}\log\frac{1}{\|f^*s\|}\sigma$$

其中$s\in H^0(M,L)$，D为由s定义的除子，$\phi_0=dd^c|z|^2$为$\mathbb{C}^n$中的典范形式，$\omega_0=dd^c\log|z|^2$，σ为 Poincaré 形式$\sigma=(d^c\log|z|^2)\wedge(dd^c\log|z|^2)^{n-1}$，$S_r$为半径为$r$的球.

定理 2.4.4[9]（第二基本定理）令M为n维射影簇，$f:\mathbb{C}^n\to M$为非退化全纯映射.假设L是M上正定线丛，除子$D=D_1+\cdots+D_k$具有简单正规交叉，则对任意$\delta>0$，存在一个具有有限测度的子集$E\subseteq(0,\infty)$（这里E与δ有关）使得当$r\notin E,r\to\infty$时，有

$$m_f(r,D)+T_{f,K_M}(r)+N_{S_f}(r)\leqslant O\left(\log\hat{T}_f(r)\right)+\delta\log r$$

成立.

定理 2.4.5[9]（亏量关系）假设A是光滑的仿射代数簇，V是有正定线丛$L\to V$的光滑射影簇，L其曲率形式是ω，$f:A\to V$是全纯映射.如果$f(A)$包含

了V中的一个开子集，$D_1,D_2,\cdots,D_k\in|L|$为除子且除子$D=D_1+D_2+\cdots+D_k$具有正规交叉，则

$$\sum_{j=1}^{k}\delta(D_j)\leqslant\frac{c(K_V^*)}{c(L)}+\kappa$$

其中κ为常数且当$A=\mathbb{C}^m$或者f是超越全纯映射时为0.这里

$$\delta(D_j)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(D_f,r)}{T(L,r)}$$

其中$D_f=f^{-1}(D)$.

P.Griffiths 和 J.King 得到的结果对于复流形上的函数论和整个复代数几何的发展都有重大意义，他们利用第二基本定理和亏量关系得到了很多关于高维复代数簇全纯映射的结果进而得到这些代数簇的解析性质，P.Griffiths 等人发展的研究复代数几何的思想和方法也被称为复代数几何的超越方法.以下是P.Griffiths得到的亏量关系的几个应用.

定义 2.4.6 假设V是光滑复射影簇，称V是一般型的如果有下式成立

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\dim H^0(V,K_V^k)}{k^n}>0$$

这里K_V是V上的典范丛.

定理 2.4.7[9]假设A是代数簇且V是复射影簇，则任何满足$f(A)$包含V中开集的全纯映射$f\colon A\to V$一定是有理映射

在复一维的情况，Picard 定理有如下推广：

定理 2.4.8[9]（Picard 定理）假设A是仿射代数曲线，则任何非退化全纯映射

$$f\colon A\to\mathbb{CP}^1\backslash\{0,1,\infty\}$$

都是有理映射，如果$A=\mathbb{C}$则这样的映射不存在.

利用亏量关系，P.Griffiths 和 J.King 得到了如下推广到高维的 Picard 定理：

定理 2.4.9[9]假设A是仿射代数簇，V是光滑射影簇，$L\to V$是正定线丛且$c(L)+c(K_V)>0$，使得$D\in|L|$是一个具有简单正规交叉的除子.我们设

$$f\colon A\to V\backslash D$$

是$f(A)$包含V中开集的全纯映射，则f是有理映射，并且如果$A=\mathbb{C}^m$，则这样的映射不存在.

P.Griffiths 基于上述第二基本定理提出了几个进一步的猜想[10]，这些猜想引导了复几何新的发展并为启发了新的工具和思想来解决这些问题.

问题 2.4.10[10]令D为$\mathbb{CP}^n$上的具有正规交叉的除子，在除子的次数$\deg D$和D的分支数$|D|$为多少时，全纯映射$f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{CP}^n\setminus D$一定是常值映射？

问题 2.4.11[10]令D为$\mathbb{CP}^n$上的具有正规交叉的除子且有全纯映射

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^n\setminus D$$

如果$\deg D\geqslant n+2$，像集$f(\mathbb{C})$是否会包含在$\mathbb{CP}^n$的某个代数子簇中？

问题 2.4.12[10]条件同定理 2.4.4，假设全纯映射$f:\mathbb{C}\to V$满足$f(\mathbb{C})$不在某个除子$D\in|L+K_V|$中，则是否仍有

$$\sum_{j=1}^{k}\delta(D_j)\leqslant\frac{c(K_V^*)}{c(L)}$$

问题 2.4.13[10]假设V是具有正定典范丛的代数曲面并且$f:\mathbb{C}\to V$是一个全纯映射，是否$f(\mathbb{C})$包含在V的某个代数曲线中？

问题 2.4.14[10]假设V是n维复环面，$f:\mathbb{C}^n\to V$是非退化的全纯映射，则$f(\mathbb{C}^n)$是否会在V中 Zariski 稠密？

2.6 Green-Griffiths-Lang 猜想

在 P.Griffiths 提出了他的一系列猜想后，S.Lang 又加强了这一系列猜想，提出了 Green-Griffiths-Lang 猜想，其表明了高维的一般型复代数簇上的非平凡整全纯曲线具有退化性.同时启发了很多除了值分布理论以外其他复几何上一些工具的发展，对整个复几何和复代数几何领域都有非常大的影响力，且由于其表述的一般性，我们很容易做出该猜想在算术几何的形式上的类比，所以这些猜想又进一步诱导了数论和算术几何的新理论的发展.首先需要意识到整全纯曲线的存在性，与复流形上的 Kobayshi 双曲概念有关，这个刻画对于理解该猜想非常重要，从某种意义下来说 Kobayshi 双曲是用度量来对复流形上的整全纯曲线存在性进行具体量化.首先我们介绍 Kobayshi 双曲的概念[12].

定义 6.1 对复流形X，给定两点$p,q\in X$，从p到q的解析圆盘链是指一个全纯映射序列$f_0,f_1,\ldots,f_k:\mathbb{D}(1)\to X$，并且有$k$对点$a_0,b_0,\cdots,a_k,b_k\in\mathbb{D}(1)$使得

$$p=f_0(a_0),q=f_k(b_k),f_i(b_i)=f_{i+1}(a_{i+1}),i=0,1,\cdots,k-1$$

记这样一个链为α，定义它的长度$l(\alpha)$为$l(\alpha)=d_P(a_1,b_1)+\cdots+d_P(a_k,b_k)$，其中$d_P$是圆盘$\mathbb{D}(1)$上的 Poincaré 度量.定义复流形$X$上的 Kobayashi 伪度量为

$$d_X^K(p,q)=\inf_{\alpha} l(\alpha)$$

定义 6.2 我们称复流形X是 Kobayashi 双曲的，如果d_X^K是一个度量，换句话说d_X^K满足对所有不同的点$p,q\in X$，都有$d_X^K(p,q)>0$.

Brody 将 Kobayshi 双曲性质与整全纯曲线的存在性相联系起来，对于紧复流形，他证明了如下等价性定理[13].

定理 6.3[13]（Brody）令X是一个紧复流形，X是 Kobayashi 双曲的等价于X上不存在任何非常值的整全纯曲线$f:\mathbb{C}\to X$，即不存在从$\mathbb{C}$到X的非常值全纯映射.后者我们也称为 Brody 双曲的.

在非紧的情况下，Kobayshi 双曲比 Brody 双曲要严格强.现在假设复流形X不是 Kobayashi 双曲的，一个基本的问题是去分析整全纯曲线$f:\mathbb{C}\to X$的几何性质.更进一步的,是去分析和研究X上所有整全纯曲线的 Zariski 闭包，即如下整全纯曲线轨迹

$$\mathrm{ECL}(X)=\overline{\bigcup_f f(\mathbb{C})}^{\mathrm{Zar}}$$

之后 S.Lang 提出了 Green-Griffiths-Lang 猜想[14]，其强形式如下.

猜想 6.5[14]（Green-Griffiths-Lang 猜想）假设X是一般型的复射影代数簇，则每一个X上的整全纯曲线都代数退化，且存在一个真闭代数子簇$E\subset X$使得E包含了所有非常值的整全纯曲线，即$Y=\mathrm{ECL}(X)$是X的真代数子簇.这个代数子簇称为X的例外集.换句话说，$X\setminus Y$是 Brody 双曲的.

如果$X\subseteq\mathbb{CP}^n$是定义在某个数域k_0上，此时同样可以定义它的 Mordell 轨迹，记为$\mathrm{Mordell}(X)$，为最小的复子代数簇Y使得对所有数域$k\supseteq k_0$，k-点集

$\mathrm{X}(k)\backslash Y$ 都是有限的.S.Lang 猜想此时总有 $\mathrm{Mordell}(X)=\mathrm{ECL}(X)$ 成立.这个算术类型的猜想可以视为 Mordell-Faltings 定理的推广.这也是为先研究几何版本的 Green-Griffiths-Lang 猜想提供了强有力的动机.在 1998 年，Mcquillan 证明了如下复曲面情形的 Green-Griffiths-Lang 猜想[15].

定理 6. 6[15]（M.Mcquillan）假设 M 是一般型的代数曲面，且其陈类满足 ${c_1}^2-c_2>0$，则 M 上所有整全纯曲线都退化.

Mcquillan 的证明非常的复杂和困难，并且在文章中利用了很多工具，包括全纯叶状结构的理论和 Ahlfors 流.其证明的核心是利用如下结果：对于一个一般型的复曲面，考虑其上一个奇异或者非奇异的全纯叶状结构，则这个叶状结构的任何双曲叶片都是代数退化的.

3 Diophantine 逼近与值分布理论

C.F.Osgood 在 1981 年发现 Nevanlinna 值分布理论与 Diophantine 逼近中 Roth 定理的证明有某些相似之处[16]. 1987 年 P.Vojta 扩展了并建立精确的对应字典关系.Diophantine 逼近作为数论中活跃的部分之一，其最基本的问题是无理数被有理数逼近到何种程度**[13]**.举例来说，对于无理数$\sqrt{2}$，由于有理数集$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以此时我们可以选取合适的有理数p/q使得$|p/q-\sqrt{2}|$任意小，而所谓 Diophantine 逼近所考虑的问题是：能否在p和q不充分大的情况下使得p/q任意小的逼近$\sqrt{2}$.

以下两个基本的定理给了讨论 Diophantine 逼近问题的一个合适方向.

定理 3. 1[16]（Dirichlet 逼近定理）令$\alpha\in\mathbb{R},\alpha\neq\mathbb{Q}$，则存在无穷多个有理数$p/q\in\mathbb{Q}$满足

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|<\frac{1}{q^2}$$

定理 3. 2[16]（Liouville 逼近定理）令α为一个次数大于等于2的代数数.存在常数$C>0$（依赖于α）使得对所有有理数p/q有

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\geqslant\frac{C}{q^d}$$

定理 3. 1 告诉我们任何无理数都可以至少被逼近到$1/q^2$的程度，但定理 3.2 表明一个d次代数数最多可以被逼近到C/q^d.故一个自然的问题是对一个给定的代数数α，最佳的指数κ为多少，使得只存在有限多个$p/q\in\mathbb{Q}$满足如下形式的不等式

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|<\frac{c}{|q|^{\kappa}}$$

其中$c>0$为常数.Roth 在 1955 年得到了一个关键性的结果，称为 Roth 定理，证明了这里的$\kappa=2+\varepsilon$.

定理 3. 3[16]（Roth 定理）固定代数数$\alpha>0$，$\varepsilon>0$和$C>0$，则存在有限多个有理数p/q使得下式成立

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\leqslant\frac{C}{|q|^{2+\varepsilon}}$$

Roth 定理这里的指数为最佳的逼近指数且无法改进为更小的数.数论中的 Diophantine 方程问题就是期望能判断 Diophantine 方程的整数解或有理解的分布情况.从下面一个例子我们可以看出 Roth 定理作为应用对于理解和解决 Diophantine 方程问题具有很大的作用.

定理 3.4[16]方程$x^3-2y^3=11$,$x,y\in\mathbb{Z}$只有有限多个解.

证明：如果(x,y)是一个解且$y\neq0$，则$\dfrac{x}{y}$满足

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt[3]{2}\right|=\left|\frac{11}{y\left(x^2+xy\sqrt[3]{2}+y^2\sqrt[3]{4}\right)}\right|\ll\frac{1}{|y|^3}$$

由 Roth 定理可知，这样的(x,y)只有有限多对.

由上述这个例子可以看出更一般的情况，如果$f\in\mathbb{Z}[x,y]$为次数大于等于3的齐次多项式且没有重复因子,则对任意的$a\in\mathbb{Z}$,$f(x,y)=a$都只有有限多个解.所以 Roth 定理对于理解 Diophantine 方程具有重大意义.

在 1981 年，C.F.Osgood 发现 Nevanlinna 值分布理论中的第二基本定理与 Roth 定理有相似之处，后来 P.Vojta 在 1987 年顺着 Osgood 的发现精确的建立了值分布理论和 Diophantine 逼近之间的字典关系.为了介绍这两个不同领域之间的关系，首先引入数论当中的一些概念.

定义 3.5 设F为一个域，F上的一个绝对值，是指一个F上的实值函数$|\cdot|:F\to\mathbb{R}$满足下述条件：

（1）$|a|\geqslant0$且$|a|=0$当且仅当$a=0$

（2）$|ab|=|a||b|$

（3）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$

如果条件（3）换成如下更强的条件（4）$|a+b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$,则称$|\cdot|$为非 Archimedean 绝对值，否则称为 Archimedean 绝对值.称F的两个绝对值$|\cdot|_1$和$|\cdot|_2$等价如果存在正常数λ使得$|\cdot|_1=\lambda|\cdot|_2$.显然对任意的域$F$，总可以定义一个平凡绝对值：如果$x\neq0,x\in F$，则$|x|=1$，如果$x=0$，则$|x|=0$.对于一个域$F$，其上的非平凡绝对值的等价类我们称其为素位，我们记域F上的所有素位全体为Ω_F,若$v\in\Omega_F$为非 Archimedean 的,则称v为有限素位,若其是 Archimedean 的则称其为无限素位.域F关于素位v的完备化记为F_v.

例 3.6 对理数域$\mathbb{Q}$，其上的素位只有通常的绝对值$|\cdot|_\infty$代表的等价类，和p-adic 绝对值$|\cdot|_p$代表的等价类，其中p为素数$p=2,3,5,\cdots$.所以我们写Ω_F为

$$\Omega_F=\{\infty,2,3,5,\cdots\}$$

为了看到值分布理论如何与 Diophantine 逼近如何产生联系，我们仅考虑如下在数论中应用最多的域.

定义 3.7 称有理数域$\mathbb{Q}$的一个有限扩张k为一个数域.

对于一个数域k，$\mathbb{Q}$上的绝对值可以自然的延拓到k上.我们假设域扩张$k/\mathbb{Q}$的次数为$n=[k:\mathbb{Q}]$.由标准的域扩张理论可知k恰好只有n个不同的嵌入$\sigma:k\hookrightarrow\mathbb{C}$，每一个这样的嵌入都可以定义一个$k$上的绝对值$|x|_\sigma:=|\sigma(x)|_\infty$，这里$|\cdot|_\infty$是$\mathbb{C}$上的通常绝对值.任何嵌入$\sigma:k\hookrightarrow\mathbb{C}$可以分为实嵌入（$\sigma(k)\subseteq\mathbb{R}$）和复嵌入（$\sigma(k)\nsubseteq\mathbb{R}$）.实嵌入和复嵌入对应的绝对值$|\cdot|_\sigma$的等价类分别称为$k$的实素位和复素位.对于一个复嵌入$\sigma$，取其共轭显然可以得到一个新的复嵌入$\bar{\sigma}$.对于这$n$个嵌入，我们定义如下拟范数：

$$\|x\|_\sigma:=\begin{cases}|x|_\sigma,\sigma\text{是实嵌入}\\|x|_\sigma^2,\sigma\text{是复嵌入}\end{cases}$$

对于$\mathbb{Q}$上的非 Archimedean 绝对值$|\cdot|_p$，其可以扩充到一个k上的非 Archimedean 绝对值，对$x\in k$，定义

$$|x|_v=|N_{k_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_v^{\frac{1}{[k_v:\mathbb{Q}_p]}}$$

其中$N_{k_v/\mathbb{Q}_p}$为域扩张$k_v/\mathbb{Q}_p$的范数.再定义如下拟范数

$$\|x\|_v=|x|_v^{[k_v:\mathbb{Q}_p]}=|N_{k_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$$

这里便产生了数域k上所有的素位.

对于任意一个数域k而言，我们有如下著名的 Artin-Whaples 乘积公式.

定理 3.8[16]（Artin-Whaples 乘积公式）假设k为某一个数域，Ω_k为其所有素位.则对任意$x\in k,x\neq 0$，有

$$\prod_{v\in\Omega_k}\|x\|_v=1$$

之后我们会看到上述乘积公式就是值分布理论 Jensen 公式在 Diophantine 逼近中

的对应.

接下来我们定义高度函数、逼近函数和计数函数.从形式上看这些函数与值分布理论中的 Nevanlinna 定义的函数相对应.高度函数的概念本质是为了去测量整数或者代数簇整点的复杂性.

定义 3.9 设k为某一个数域，$x\in k$，定义其高度（Weil 高度）为

$$H_k(x)=\prod_{v\in\Omega_k}\max\{\|x\|_v,1\}$$

可以看到当$k=\mathbb{Q}$时，设$x=p/q,(p,q)=1$则此时$H_{\mathbb{Q}}(p/q)=\max\{|p|,|q|\}$.如果我们对高度函数取对数，就得到如下的对数高度$h_k(x)=\log H_k(x)=\prod_{v\in\Omega_k}\log^+\|x\|_v$.

定义 3.10 令k为某一个数域，$S\subseteq\Omega_k$为一个包含k的所有 Archimedean 素位的有限子集，对$x\in k$我们定义下述逼近函数

$$m_S(x)=\sum_{v\in S}\log^+\|x\|_v$$

且对$a\in k,a\neq x$，定义

$$m_S(a,x)=m_S\left(\frac{1}{x-a}\right)=\sum_{v\in S}\log^+\left\|\frac{1}{x-a}\right\|_v$$

类似的对不同的$a,x\in k$，定义计数函数

$$N_S(x)=\sum_{v\notin S}\log^+\|x\|_v$$

和

$$N_S(a,x)=N_S\left(\frac{1}{x-a}\right)=\sum_{v\notin S}\log^+\left\|\frac{1}{x-a}\right\|_v$$

注意显然有如下关系

$$h_k(x)=m_S(x)+N_S(x)$$

即高度函数是逼近函数和计数函数的和，所以高度函数就是 Nevanlinna 特征函数在 Diophantine 逼近下的对应.同样的在 Diophantine 逼近中，我们有如下的第一基本定理.

定理 3.11[16]（第一基本定理）令k为某一个数域，$S\subseteq\Omega_k$为一个包含了k的所有 Archimedean 素位的有限子集，固定$a\in k$则

$$h_k(x)=m_S(a,x)+N_S(a,x)+O(1)$$

这里的常数$O(1)$近依赖于k和a.实际上这里的常数可以取为$h_k(a)+[k:\mathbb{Q}]\log 2$.

接下来考虑第二基本定理，实际上我们可以把 Roth 定理改写成数域上的如下等价版本.

定理 3.12[16]令k为某一个数域，$S\subseteq \Omega_k$为一个包含k的所有 Archimedean 素位的有限子集，固定不同的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q\in k$，令$\varepsilon>0$且$c\in\mathbb{R}$则下述不等式除了在有限多个$x\in k$外均成立.

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in S}\sum_{i=1}^{q}\log^+\left\|\frac{1}{x-\alpha_i}\right\|_v\leqslant(2+\varepsilon)h_k(x)+c$$

上述定理 3.12 与 Roth 定理等价.观察到如果利用之前定义的逼近函数和计数函数的记号，则上式就改为

$$\sum_{j=1}^{q}m_S(a_j,x)\leqslant(2+\varepsilon)h_\varepsilon(x)+c$$

所以由此就看到 Roth 定理就是 Nevanlinna 理论中第二基本定理在 Diophantine 逼近中的对应.

在值分布理论中，由第二基本定理就可以得到亏量关系这个直接推论，这里同样可以得到 Diophantine 逼近版本的亏量关系.类似的也可以定义亏值的概念.

定义 3.13 令k为某一个数域，$S\subseteq\Omega_k$为一个包含k的所有 Archimedean 素位的有限子集，$a\in k$且令Σ为k的一个无穷子集.定义a的亏量为

$$\delta_S(a)=\limsup_{x\in\Sigma}\frac{m_S(a,x)}{h_k(x)}$$

通过定理 3.12 我们同样可以得到下述亏量关系.

定理 3.14[16]（亏量关系）对数域k的任何q个点$a_j,j=1,2,\cdots,q$，有

$$\sum_{j=1}^{q}\delta_S(a_j)\leqslant 2$$

尽管从上面的讨论已经看出值分布理论和 Diophantine 逼近可以成功的建立一些对应关系，然而在 Roth 定理和 Nevanlinna 第二基本定理的证明之间确并没有一个合适的对应，Roth 定理的证明是通过取足够多不满足结论的$x\in k$，引入

辅助多项式通过导出一个与多项式消失性质的矛盾来完成证明.而 Nevanlinna 第二基本定理尽管有许多证明但本质都是要去做关于对数导数的估计.这种对对数导数进行估计的方法还未在 Diophantine 逼近中发现，所以寻找其在 Diophantine 逼近中的对应仍是一个尚未解决的问题.

F.Osgood 最初并没有建立一个在 Nevanlinna 值分布和 Diophantine 逼近两个领域之间精确完整的字典来比较这两个领域，后来 P.Vojta 给出了一个精确的字典[16]（表格 3.15）.

表格 3.15 一维情形的字典

Nevanlinna 理论	数论
非常数亚纯函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^1$	数域k中的无限序列 $\{x_i\}\subseteq k$
r	$x\in k$
θ	$v\in\Omega_k$
$\lvert f(re^{i\theta})\rvert$	$\lVert x\rVert_v, v\in\Omega_k$
Nevanlinna 特征函数 $T_f(r)$	对数高度函数 $h_k(x)$
逼近函数 $m_f(r,a)$	逼近函数 $m_S(a,x)$
幂指量 $N_f(r,a)$	计数函数 $N_S(a,x)$
第一基本定理	第一基本定理
$N_f(r,a)+m_f(r,a)=T_f(r)+O(1)$	$N_S(a,x)+m_S(a,x)=h_k(x)+O(1)$
第二基本定理	修正版本的 Roth 定理
$\sum_{j=1}^{q} m_f(r,a_j)+N_{1,f}(r)\leqslant 2T_f(r)$ $+O(r\log T_f(r))$	$\sum_{j=1}^{q} m_S(a_j,x)\leqslant 2h_k(x)+O(\log h_k(x))$
亏量 $\delta_f(a)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m_f(r,a)}{T_f(r)}$	亏量 $\delta_S(a)=\limsup_{x\in\Sigma}\frac{m_S(a,x)}{h_k(x)}$
亏量关系 $\sum_{j=1}^{q}\delta_f(a_j)\leqslant 2$	亏量关系 $\sum_{j=1}^{q}\delta_S(a_j)\leqslant 2$
Jensen 公式	Artin-Whaples 乘积公式
$\log\lvert c_f\rvert=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\lvert f(re^{i\theta})\rvert d\theta$ $+N_f(r,\infty)-N_f(0,\infty)$	$\prod_{v\in\Omega_k}\log\lVert x\rVert_v=0$

在这个字典当中，最重要的一点就是去理解值分布理论的研究对象亚纯函数在 Diophantine 逼近中的对应是数域上的一个无穷序列.经典的定理在这个字典当中被联系起来，包括两个领域的第一基本定理、Jesnen 公式和 Artin-Whaples 乘

积公式、第二基本定理和 Roth 定理等.值得一提的是从几何的角度出发，Nevanlinna 值分布理论只是一维的理论.因为值分布理论可以推广到高维复流形，自然可以猜测高维的值分布理论仍然可以与算术几何有相应的对应关系.这就是高维版本的值分布理论和数论的对应字典.例如如果目标流形换成任意的紧黎曼曲面，则此时值分布理论会对应到算术曲线的整点问题.如果是高维复流形的整全纯曲线理论，则就对应到数域k上的高维代数簇的k-有理点问题.例如著名 Green-Griffiths-Lang 猜想有一个相对应的算术版本的 Lang 猜想.值得注意的是算术几何中绝大部分关于高维算术概形上有理点的分布和稠密性的猜想大多仍未被解决，这些问题都非常的困难.比如实际上下述 Lang 猜想也是著名的 Mordell 猜想的某种推广，而 Faltings 在 1983 年才证明了 Mordell 猜想并因此获得 Fields 奖，其证明用到 Néron 模型等深刻的算术几何和数论的工具.

猜想 3. 16[16]假设$M \subseteq \mathbb{P}^n$是定义在数域k上的复子流形，如果M作为复子流形而言是 Kobayashi 双曲的，则M只存在有限多个k-有理点.

注意到当$\dim M = 1$时，M是 Kobayashi 双曲等价于M的亏格大于等于2.因此此时该猜想就等价于 Mordell 猜想.

参考文献

[1]Nevanlinna R. Zur theorie der meromorphen funktionen[J]. Acta Mathematica，1925,46(1/2):1-99.

[2]Barry Simon. Advanced Complex Analysis:A Comprehensive Course in Analysis,Part 2B[M]. Amer Mathematical Society,2015.

[3]Norbert Steinmetz. Nevanlinna Theory,Normal Famlilies,and Algebraic Differential Equations[M]. Switzerland: Springer International Publishing AG，2017.

[4]杨乐.值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社，1982

[5]张南岳,陈怀惠.复变函数论选讲[M]. 北京：北京大学出版社，1995

[6]S.S.Chern. Complex analytic mappings of Riemann surfaces I[J]. Amer J Math,1960,82(2):323-337

[7]Cartan H. Sur les zeros des combinaisions linearires de p fonctions holomorpes donnees[J]. Mathematica:Cluj,1933,7:80-103.

[8]Raoul Bott,S.S.Chern. Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections[J]. Acta Mathematica volume 114, 1965,114:71–112.

[9]Carlson J,Griffiths P. A defect relation for equidimensional Holomorphic mappings between algebraic varieties[J]. Ann of Math,1972,95(3):557-584.

[10]Griffiths,P.A. Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems[J]. Bull.Am.Math.Soc.78,1972: 374–382.

[11]S.Kobayashi. Hyperbolic complex spaces.Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften,volume 318[M]. Berlin:Springer-Verlag,1998.

[12]Lang,S. Hyperbolic and Diophantine analysis[J]. Bull.Am.Math.Soc.14,1986：159-205.
[13]R.Brody. Compact manifolds and hyperbolicity[J].Trans.Amer.Math.Soc.235, 1978:213–219
[14]Paul Vojta.Diophantine approximations and value distribution theory,volume 1239 of Lecture Notes in Mathematics[M]. Berlin:Springer-Verlag,1987.
[15]McQuillan M. Diophantine approximations and foliations[J].Publ.Math.IHÉS 87,1998:121–174.
[16]C.F.Osgood.A number theoretic-differential equations approach to generalizing Nevanlinna theory[J]. Indian J. Math.,1981,23(1-3):1–15.

Nevanlinna value distribution theory with its applications and generalizations

Abstract: R. Nevanlinna established the value distribution theory of meromorphic functions in 1925. A series of profound results in complex analysis can be obtained by Nevanlinna value distribution theory. The value distribution theory reveals the asymptotic behavior of the growth of zeros and poles of meromorphic functions. The most basic tool is Nevanlinna characteristic function, which measures the growth rate of meromorphic functions. In this paper, the first main theorem and the second main theorem, which are the core of classical value distribution theory, will be given, and some applications in complex analysis will be introduced.Finally, the generalization of value distribution theory in high-dimensional complex manifolds in recent decades and the relationship between value distribution theory and Diophantine approximation are introduced.

Key words: Nevanlinna value distribution theory；the first basic theorem；the second basic theorem；characteristic function；function theory