МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)

Л.А. ПЛЕТНЁВА, И.Г. КАГРАМАНОВА,
М.А. ЛЕЕВА

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО КУРСУ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МАДИ)

Л.А. ПЛЕТНЁВА, И.Г. КАГРАМАНОВА,
М.А. ЛЕЕВА

ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Утверждено
в качестве учебного пособия
редсоветом МАДИ

МОСКВА
МАДИ
2015

УДК 51
ББК 22.1
П384

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, доц., декан факультета довузовской подготовки МАДИ *Соловьев А.Н.*;
канд. техн. наук, ген. директор ООО «Институт экономико-математических методов в дорожно-транспортных исследованиях» *Еремин В.М.*

Плетнева, Л.А.
П384 Задачи линейного программирования по курсу «Прикладная математика»: учеб. пособие / Л.А. Плетнева, И.Г. Каграманова, М.А. Леева. – М.: МАДИ, 2015. – 120 с.

ISBN 978-5-7962-0204-3

Данное учебное пособие содержит определения, формулы и теоретические сведения, необходимые для решения задач линейного программирования. В нем дается подробное решение типовых задач с краткими пояснениями теоретических положений. Приводятся задачи для самостоятельного решения.

Многие из приведенных задач носят условный характер, а числовые параметры подобраны так, чтобы при решении этих задач можно было обойтись наиболее простыми вычислениями.

В книгах, приведенных в списке литературы, можно найти дополнительные сведения из теории, а также задачи для самостоятельного решения.

Для студентов экономических специальностей.

Первая и вторая главы написаны Л.А. Плетневой, третья – И.Г. Каграмановой и М.А. Леевой.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7962-0204-3

ВВЕДЕНИЕ

Развитие научно-технического прогресса в нашей стране тесным образом связано с использованием математических методов и средств вычислительной техники. Исключительную важность приобретает их использование при решении инженерных и экономических задач. В связи с этим студентам различных специальностей вузов необходимо знание возможностей применения математических методов и ЭВМ, а также понимание, возникающих при этом проблем.

Содержание математического программирования составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). Математическое программирование является одним из разделов науки об исследовании операций. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, а именно там, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании и т.д. Значительное количество задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т.е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При том ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в определенном смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем с возрастанием объема информации об изучаемом явлении – с помощью определенных прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает на современном промышленном предприятии с многосерийным производством, когда объем вводной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения современных электронных вычислительных машин. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения.

Под ***принятием решений*** в исследовании операций понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы.

1-й этап. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т.е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются.

2-й этап. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т.е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель – это записанная в математических символах абстракция реального явления, конструируемая так, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных – параметрами управления явлением.

Этот этап включает в себя также построение целевой функции переменных, т.е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.

Итак, в результате этих двух этапов формулируется соответствующая математическая задача, требующая привлечения математических знаний.

3-й этап. Исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических задач, возникающих на 2-м этапе принятия решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования.

Пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач. Необходимо обратить внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое количество переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных ЭВМ, а значит, требует либо создания программ для ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

4-й этап. Сопоставление результатов вычислений, полученных на предыдущем этапе, с моделируемым объектом, т.е. проведение экспертной проверки результатов.

Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации.

Здесь возможны два варианта.

1. Если результаты сопоставления неудовлетворительны, то уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи, уточняется или строится заново математическая модель, решается соответствующая математическая задача и снова производится сопоставление.

2. Если результаты сопоставления удовлетворительные, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании результатов вычислений, то возникает задача подготовки модели к эксплуатации.

Подготовка модели к эксплуатации предусматривает разработку специального математического обеспечения, без которого невозможно практическое использование модели: должна быть создана гибкая система программ, обеспечивающая пользователям удобный контакт с ЭВМ и не требующая при ее эксплуатации высокой математической квалификации пользователей.

В то же время математическое обеспечение так же, как и сама модель должны допускать модернизацию в связи с новыми требованиями, которые жизнь постоянно предъявляет к производству. Необходимо подчеркнуть, что именно модернизацию, а не создание каждый раз новой системы программ. Только при этих условиях возможно регулярное использование математических моделей и ЭВМ в процессе управления.

Поскольку курс математического программирования включает в себя доказательства значительного количества различных теорем и разбор разнообразных методов решения экстремальных задач, то может сложиться впечатление, что роль математика в решении прикладных задач ограничивается его участием на последнем этапе процесса моделирования. В то время как в остальных случаях заняты специалисты, знающие неформализованные стороны моделируемого объекта. Действительно, бывает и так, но, как правило, результаты такого разделения труда в процессе моделирования оказываются неудовлетворительными. Дело в том, что модель лишь приближенно отражает рассматриваемые свойства моделируемого объекта и степень этого приближения должна согласовываться с точностью входной информации.

Часто появляется желание построить такую математическую модель, в которой учитывалось бы огромное количество входных данных. Однако при тщательном анализе оказывается, что влияние многих из них на решение либо незначительно, либо отсутствует из-за невысокой точности входных данных. Кроме того, нельзя не учитывать то обстоятельство, что математическая модель, учитывающая большое количество параметров, приводит к задаче оптимизации функции с большим количеством переменных. Поэтому найти ее численное решение с точностью, согласованной с точностью входной информации, оказывается невозможным.

Таким образом, целый ряд условий, предъявляемый математическим моделям, требует участия математиков в решении прикладных задач уже на более раннем этапе процесса моделирования.

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1,...,x_n)$ при условиях:

$$\begin{cases} g_1(x_1,...,x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1,...,x_n) \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_j(x_1,...,x_n) \le b_j, \end{cases}$$

где f и g_j – заданные функции, b_j – некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_j математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом, если все функции f и g_j – линейные, то соответствующая задача является задачей ***линейного программирования***. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей ***нелинейного программирования***.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ.

1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Общая и основная задачи линейного программирования

Во всех задачах линейного программирования требуется найти максимум или минимум линейной функции при условии, что ее переменные принимали неотрицательные значения и удовлетворяли некоторой системе линейных уравнении или линейных неравенств либо системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Определение 1. Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

при условиях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,k \ , & (1.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = k+1,\dots,m), & (1.3) \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,p, p \le n \ , & (1.4) \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \le m$.

Определение 2. Функция (1.1) называется целевой функцией (или линейной формой) задачи, а условия (1.2…1.4) – ограничениями данной задачи.

Определение 3. Стандартной (или симметричной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.1) при выполнении условий (1.2) и (1.4), где $k = m$ и $p = n$.

Определение 4. Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.1) при выполнении условий (1.3) и (1.4), где $k = 0$ и $p = n$.

Определение 5. Совокупность чисел $X = (x_1,...,x_n)$, удовлетворяющих ограничениям (1.2…1.4) задачи, называется допустимым решением (или планом).

Определение 6. План $X^* = (x_1^*,...,x_n^*)$, при котором целевая функция (1.1) задачи принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным. $F(X)$ – значение целевой функции (1.1) при плане X. Следовательно, X^* – оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \le F(X^*)$, соответственно $F(X) \ge F(X^*)$.

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и, наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции $F = c_1x_1 + ... + c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F' = -F = -cx_1 - ... - c_nx_n$, поскольку $\min(F) = -\max(-F)$.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид $\le$, можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида $\ge$ – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Например, ограничение-неравенство $a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$ преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \quad (x_{n+1} \ge 0), \tag{1.5}$$

а ограничение-неравенство $a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$ – в ограничение-равенство

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \quad x_{n+1} \geq 0 \ . \tag{1.6}$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений (1.3) можно записать в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - ... - a_{in}x_n \geq -b_i. \end{cases} \tag{1.7}$$

Количество вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно количеству преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Отметим, наконец, что если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

1.2. Свойства основной задачи линейного программирования. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Она состоит в определении максимального значения функции (1.1) при условиях (1.3, 1.4).

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F = CX \tag{1.8}$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1P_1 + ... + x_nP_n = P_0, & (1.9) \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,...,n \ , & (1.10) \end{cases}$$

где $C = \ c_1,...,c_n$, $X = \ x_1,...,x_n$, CX – скалярное произведение; $P_0, P_1,...,P_n$ – m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \ P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ \dots \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 7. План $X = x_1,...,x_n$ называется опорным планом основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (1.9) с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m.

Определение 8. Опорный план называется невырожденным, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае, он называется вырожденным.

Свойства основной задачи линейного программирования (1.8…1.10) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 9. Пусть $X_1,...,X_n$ – произвольные точки евклидова пространства E_n. Выпуклой линейной комбинацией этих точек называется сумма $d_1X_1,...,d_nX_n$, где d_j – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} d_j = 1, & (1.11) \\ d_j \geq 0 \quad j = 1,...,n \ . & (1.12) \end{cases}$$

Определение 10. Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и произвольную их линейную комбинацию.

Определение 11. Точка X выпуклого множества называется угловой, если она не может быть представлена в виде линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1.1. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Определение 12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Теорема 1.2. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 1.3. Если система векторов $P_1,...,P_k$ $k \le n$ в разложении (1.9) линейно независима и такова, что

$$x_1P_1 + ... + x_kP_k = P_0, \tag{1.13}$$

где

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,...,n \ , \tag{1.14}$$

то точка $X = \ x_1,...,x_k,0,...,0$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 1.4. Если $X = \ x_1,...,x_n$ – вершина многогранника решений, то векторы P_j, соответствующие положительным значениям x_j в разложении (1.9), линейно независимы.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т.е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в стандартной форме, содержит не более двух переменных, или задача, записанная в основной форме, содержит не более двух свободных переменных. То есть $n - r \leq 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы, составленной из коэффициентов в системе ограничений задачи.

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{1.15}$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \leq b_j \quad j = 1,...,k \ , & (1.16) \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \ . & (1.17) \end{cases}$$

Каждое из неравенств (1.16), (1.17) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j \quad j = 1,...,k$, $x_i = 0 \quad i = 1,2$. В том случае, если система неравенств (1.16, 1.17) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, то областью допустимых решений задачи (1.15…1.17) является выпуклое множество, которое называется ***многоугольником решений*** (введенный ранее термин «многогранник решений» обычно употребляется, если $n \geq 3$). Стороны этого многоугольника находятся на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $C = c_1, c_2$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи. Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ передвигается не в направлении вектора $C = \ c_1, c_2$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования (1.15…1.17) на основе ее геометрической интерпретации включает в себя следующие этапы:

- строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.16) и (1.17) знаков неравенств на знаки точных равенств;
- находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи;
- находят многоугольник решений;
- строят вектор $C = \ c_1, c_2$;
- строят прямую: $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений;
- передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора C, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов;
- определяют координаты точки максимума функции, и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

1.3. Нахождение решения задачи линейного программирования. Симплексный метод

Решение любой задачи линейного программирования можно найти либо симплексным методом, либо методом искусственного базиса. Прежде, чем применять один из указанных методов, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план, и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{1.18}$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n \ . \end{cases} \tag{1.19}$$

Здесь a_{ij}, b_i, c_j $i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n; m < n$ – заданные постоянные числа $b_i > 0$.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.20}$$

при условиях $x_i \geq 0$ $i = 1,\ldots,n$ и

$$x_1P_1 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0, \tag{1.21}$$

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}; \ P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ldots \ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}; \ P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1\ m+1} \\ a_{2\ m+1} \\ \ldots \\ a_{m\ m+1} \end{pmatrix};$$

$$P_{m+2} = \begin{pmatrix} a_{1\ m+2} \\ a_{2\ m+2} \\ \ldots \\ a_{m\ m+2} \end{pmatrix}; \ \ldots \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1P_1 + ... + b_mP_m = P_0$, то по определению опорного плана вектор $X = \ b_1,...,b_m,0,...,0$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компонент вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов $P_1,...,P_m$, которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов $P_1,...,P_n$, а также вектор P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \quad j = 0,...,n \ . \tag{1.22}$$

Положим

$$\Delta_j = z_j - c_j \quad j = 1,...,n \ . \ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}. \tag{1.23}$$

Так как векторы $P_1,...,P_m$ – единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad j = 1,...,n \ . \ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}. \tag{1.24}$$

Теорема 1.5. (*Признак оптимальности опорного плана*). Опорный план $X^* = \ x_1^*,...,x_m^*,0,...,0$ задачи (1.20…1.21) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0 \quad j = 1,...,n$.

Теорема 1.6. Если существует такое *j*, что $\Delta_j < 0$ и среди чисел $a_{ij} \quad i = 1,...,m$ нет положительных $a_{ij} < 0$, то целевая функция (1.20) задачи (1.20…1.21) не ограничена на множестве ее планов.

Теорема 1.7. Если опорный план X задачи (1.20…1.21) не вырожден и $\Delta_j < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} < 0$), то существует опорный план X' такой, что $F \ X' \ > F \ X$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать так, как показано в симплекс-табл. 1.1.

Таблица 1.1

Симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	c_1	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	…	0	…	0	$a_{1\ m+1}$	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	…	0	…	0	$a_{2\ m+1}$	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	...	…	…	…	…	...	…	…	…	…
r	P_r	c_r	b_r	0	…	1	…	0	$a_{r\ m+1}$	…	a_{rk}	…	$a_{r\ n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m	0	…	0	…	1	$a_{m\ m+1}$	…	a_{mk}	…	$a_{m\ n}$
$m+1$			F_0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

В столбце $C_б$ этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

В симплекс-табл. 1.1 первые m строк определяются исходными данными задачи, а показатели $m+1$ -й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j – значение $\Delta_j = z_j - c_j \quad j = 1,...,n$.

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора $P_j \quad j = 1,...,m$ на вектор $C_б = \ c_1,...,c_m$ из (1.24).

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i. \tag{1.25}$$

После заполнения симплекс-табл. 1.1 исходный опорный план проверяют на оптимальность.

Для этого просматривают элементы $m+1$ -й строки табл. 1.1. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geq 0 \quad j = m+1,...,n$ и $\Delta_j = z_j - c_j \quad j = 1,...,m$. Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geq 0 \quad j = 1,...,n$;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого *j*, и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} \leq 0 \quad i = 1,...,m$;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов *j*, и для каждого такого *j*, по крайней мере, одно из чисел a_{ij} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора. В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j, имеющий индекс *j*, для которого $\Delta_j < 0$. Пусть, например, $\Delta_k < 0$ и решено ввести в базис вектор P_k.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находят $\min\ b_j / a_{jk}$ для всех $a_{jk} > 0$. Пусть этот минимум достигается при $j = r$. Тогда из базиса исключают вектор P_r, а число a_{rk} называют разрешающим элементом.

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют направляющими.

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Жордана-Гаусса. При этом можно показать, что положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам:

$$b_j^{'} = \begin{cases} b_j - a_{jk} \;\; b_r \,/\, a_{rk} \;\; , \; j \neq r, \\ b_r \,/\, a_{rk}, \; j = r, \end{cases} \quad j = 1,...,m \;\; , \tag{1.26}$$

а коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану, – по формулам:

$$a_{ij}^{'} = \begin{cases} a_{ij} - a_{ik} \;\; a_{rj} \,/\, a_{rk} \;\; , \; i \neq r, \\ a_{rj} \,/\, a_{rk}, \; i = r, \end{cases} \quad i = 1,...,m; j = 1,...,k-1, k+1,...,n \;\; . \tag{1.27}$$

После вычисления $b_j^{'}$ и $a_{ij}^{'}$ согласно формулам (1.26) и (1.27) их значения заносят в симплекс-табл. 1.2. Элементы $m+1$ -й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам:

$$F_0^{'} = F_0 - \;\; b_r \,/\, a_{rk} \;\; \Delta_k, \tag{1.28}$$

$$\Delta_j^{'} = \Delta_j - \;\; a_{rj} \,/\, a_{rk} \;\; \Delta_k, \tag{1.29}$$

либо на основании их определения.

Наличие двух способов нахождения элементов $m+1$ -й строки позволяет осуществлять контроль правильности проводимых вычислений.

Из формулы (1.28) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому целесообразнее ввести в базис вектор P_j, имеющий индекс *j*, при котором максимальным по абсолютной величине является число $b_r \,/\, a_{rk} \;\; \Delta_k \quad a_{rk} > 0, \Delta_k < 0$. Однако с целью упрощения вычислительного процесса в дальнейшем вектор, вводимый в базис, будем определять, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_k. Если же таких чисел несколько, то в базис будем вводить вектор, имеющий такой же индекс, как и максимальное из чисел c_k, определяемых данными числами $\Delta_k \quad \Delta_k < 0$.

Итак, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить как с помощью рекуррентных формул (1.26…1.29), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них. Эти правила состоят в следующем.

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляются единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента. В столбце $C_б$ в строке вводимого вектора проставляют величину c_k, где k – индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по правилу треугольника. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;

2) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;

3) число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в исходной симплекс-таблице, а третья – числу, находящемуся в новой симплекс-таблице. Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

После заполнения новой симплекс-таблицы просматривают элементы $m+1$ -й строки. Если все $z_j^{'} - c_j \geq 0$ $j = 1,...,n$, то новый опорный план является оптимальным. Если же среди указанных чисел имеются отрицательные, то, используя описанную выше последовательность действий, находят новый опорный план. Этот процесс продолжают до тех пор, пока либо не получают оптимальный план задачи, либо не устанавливают ее неразрешимость.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы, и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним. Более того, возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций, а также возможен возврат к первоначальному базису. В этом случае обычно говорят, что произошло зацикливание. Однако при решении практических задач такая ситуация встречается очень редко.

Таблица 1.2

Новая симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	c_1	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1'	1	…	a_{1k}'	…	0	$a_{1\ m+1}'$	…	0	…	a_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	…	a_{2k}'	…	0	$a_{2\ m+1}'$	…	0	…	a_{2n}'
…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…	…	…	…
r	P_k	c_k	b_r'	0	…	a_{rk}'	…	0	$a_{r\ m+1}'$	…	1	…	$a_{r\ n}'$
…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m'	0	…	a_{mk}'	…	1	$a_{m\ m+1}'$	…	0	…	$a_{m\ n}'$
$m+1$			F_0'	0	…	Δ_k'	…	0	Δ_{m+1}'	…	0	…	Δ_n'

Итак, нахождение оптимального плана симплексным методом включает в себя следующие этапы:

- находят опорный план;
- составляют симплекс-табл. 1.1;
- выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану;
- находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка – минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца;
- по формулам (1.26…1.29) определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов

P_j по векторам нового базиса и числа: $F_0^{'}$ и $\Delta_j^{'}$. Все эти числа записываются в новой симплекс-табл. 1.2;

- проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

1.4. Примеры решения задач

Пример. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Производство двух видов изделий *A* и *B*

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	*B*	
I II III	10 5 4	4 6 12	200 108 180
Прибыль от реализации одного изделия, тыс. руб.	25	50	

В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B*. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, то должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \le 200, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 108, \\ 4x_1 + 12x_2 \le 180, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B* составит $F = 25x_1 + 50x_2$.

Таким образом, появляется возможность рассмотреть следующую математическую задачу: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 = 200, & (CD) \\ 5x_1 + 6x_2 = 108, & (BC) \\ 4x_1 + 12x_2 = 180, & (AB) \\ x_1 = 0, & (Ox_2) \\ x_2 = 0. & (Ox_1). \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.1. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае, – другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $10x_1 + 4x_2 < 200$. Для этого, построив прямую $10x_1 + 4x_2 = 200$ (на рис. 1.1 это прямая *CD*), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку *O* (0; 0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству

$10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 200$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка *O* (0; 0), определяется неравенством $10x_1 + 4x_2 \leq 200$. Это показано штриховкой на рис. 1.1. Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

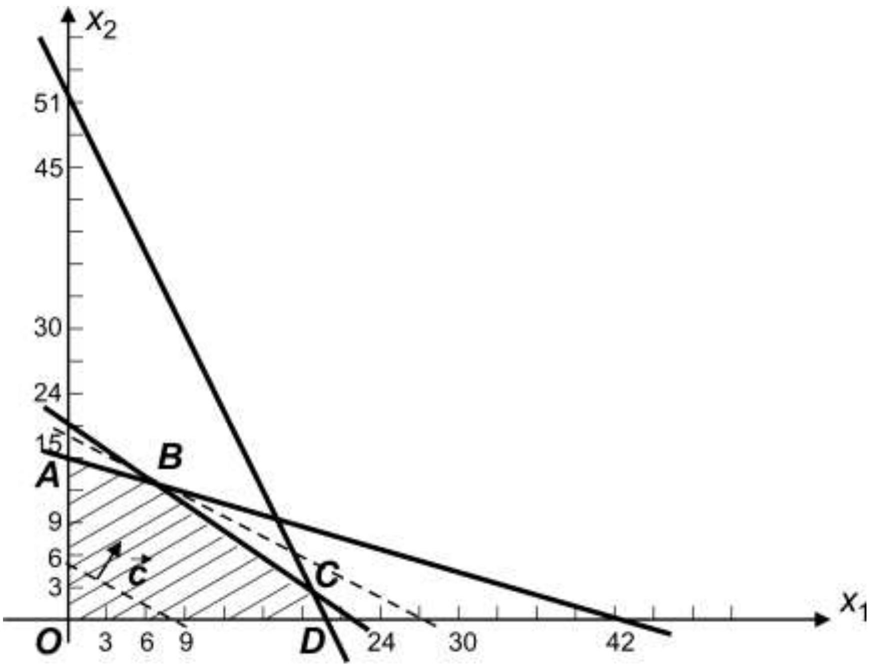

Рис. 1.1. Многоугольник решений

Как видно из рис. 1.1, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если будет возможно найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция *F* принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор *C* = (25; 50) и прямую $25x_1 + 50x_2 = h$, где *h* – некоторая постоянная такая, что прямая $25x_1 + 50x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h = 250$ и построим прямую $25x_1 + 50x_2 = 250$ (см. рис. 1.1).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации равна 250 тыс. руб. Далее, полагая *h* равным некоторому числу, большему чем 250, будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *A* и *B*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 250 тыс. руб.

Перемещая построенную прямую $25x_1 + 50x_2 = 250$ в направлении перпендикулярного ей вектора $\vec{c}$, видим, что последней общей точкой прямой и многоугольника *OABCD* решений задачи служит точка *B*. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки *B* как точки пересечения прямых *AB* и *BC*. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 108, \\ 4x_1 + 12x_2 = 180. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1 = 6$, $x_2 = 13$. Следовательно, если предприятие изготовит шесть изделий вида *A* и тринадцать изделий вида *B*, то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{max} = 25 \cdot 6 + 50 \cdot 13 = 800$ тыс. руб.

Пример. Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 1.4

Таблица 1.4

Три различных вида сырья

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество, кг
	A	*B*	*C*	
I	10	8	10	270
II	6	2	8	108
III	4	1	2	150
Цена одного изделия, тыс. руб.	8	10	15	

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* через x_2, изделий *C* через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 270, \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \le 108, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 150. \end{cases} \tag{1.30}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B*, x_3 изделий *C* составляет

$$F = 8x_1 + 10x_2 + 15x_3. \tag{1.31}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{1.32}$$

Таким образом, сформулируем следующую математическую задачу: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (1.30) требуется найти такое, при котором функция (1.31) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 + x_4 = 270, \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_5 = 108, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 150. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают неиспользуемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 – это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix};\; P_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\; P_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix};\; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\; P_0 = \begin{pmatrix} 270 \\ 108 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеются три единичных вектора, то для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план: $X = \; 0; 0; 0; 270; 108; 150$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для I итерации (табл. 1.5), подсчитываем значения F_0, $z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = \; C, P_0 \; = 0;\; z_1 = \; C, P_1 = 0 \;;\; z_2 = \; C, P_2 = 0 \;;\; z_3 = \; C, P_3 = 0 \;;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 8 = -8;\; z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\; z_3 - c_3 = 0 - 15 = -15.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 1.5

Симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	8	10	15	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	270	10	8	10	1	0	0
2	P_5	0	108	6	2	8	0	1	0
3	P_6	0	150	4	1	2	0	0	1
4			0	–8	–10	–15	0	0	0

Как видно из табл. 1.5, значения всех основных переменных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения в соответствии с ограничениями задачи. Эти значения переменных соответствуют такому «плану», при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (т.е. стоимость произведенной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Это видно и из 4-й строки табл. 1.5, так как в ней имеются три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -8$; $z_2 - c_2 = -10$; $z_3 - c_3 = -15$.

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, насколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число «–8» означает, что при включении в план производства одного изделия *A* обеспечивается увеличение выпуска продукции на 8 тыс. руб. Если включить в план производства по одному изделию *B* и *C*, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 15 тыс. руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий *C*. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j находится в 4-й строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим $\min\left(270/10; 108/8; 150/2\right) = 108/8 = 16$, т.е. $\min\left(b_i/a_{i3}\right)$ для $a_{i3} > 0$. Найдя это число, можно определить, какое количество изделий *C* предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида соответственно имеется 270, 108 и 150 кг, а на одно изделие *C* требуется затратить сырья каждого вида соответственно 10, 8 и 2 кг, то максимальное количество изделий *C*, которое может быть изготовлено предприятием, равно

$$\min\left(270/10; 108/8; 150/2\right) = 108/8 = 16,$$

т.е. ограничивающим фактором для производства изделий *C* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить шестнадцать изделий *C*. При этом сырье II вида будет полностью использовано. Следовательно, вектор P_3 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.6).

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т.е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является 2-я строка. Элементы этой строки табл. 1.6 получаются из соответствующих элементов табл. 1.5 делением их на разрешающий элемент (т.е. на 8). При этом в столбце $C_б$

записываем коэффициент $c_3 = 15$, находящийся в столбце вводимого в базис вектора P_3. Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Таблица 1.6

Исходная симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	8	10	15	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	110	5/2	11/2	0	1	–5/4	0
2	P_3	15	16	3/4	1/4	1	0	1/8	0
3	P_6	0	118	5/2	1/2	0	0	–1/4	1
4			240	13/4	–25/4	0	0	15/8	0

Для определения остальных элементов табл. 1.6 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы табл. 1.6, находящиеся в столбце вектора P_0. Первый из них расположен в 1-й строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число из табл. 1.5, расположенное на пересечении столбца вектора P_0 и 1-й строки (270);

2) число из табл. 1.5, находящееся на пересечении столбца вектора P_3 и 1-й строки (10);

3) число из табл. 1.6, расположенное на пересечении столбца вектора P_0 и 2-й строки (16).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: $270 - 10 \cdot 16 = 110$; записываем его в 1-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.6.

Второй элемент столбца вектора P_0 табл. 1.6 был уже вычислен ранее. Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа. Первое из них (150) находится на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_3 табл. 1.5. Второе (2) – на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.5. Третье (16) – на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.5. Итак, указанный элемент есть $150-16\cdot 2=118$. Число 118 записываем в 3-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.5.

Значение P_0 в 4-й строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = \ C, P_0 \ $, т.е. $F_0 = 0\cdot 110+15\cdot 16+0\cdot 118=240$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами «0; –15; 16». Этот способ приводит к тому же результату: $0-(-15)\cdot 16=240$.

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным и менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора P_1 табл. 1.6. Для вычисления указанных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 1.5, а третье число из табл. 1.6. Это число стоит на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_1 табл. 1.6. В результате получаем значения искомых элементов: $10-10\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$; $4-2\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$.

Число z_1-c_1 в 4-й строке столбца вектора P_1 табл. 1.6 можно найти двумя способами:

- по формуле $z_1-c_1 = \ C, P_1 \ -c_1$ имеем $0\cdot\frac{5}{2}+15\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{5}{2}-8=\frac{13}{4}$;
- по правилу треугольника получим $-8-(-15)\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$.

Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника. Однако построенные для определения этих элементов треугольники выглядят иначе.

При вычислении элемента 1-й строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0, 10 и 1/8. Следовательно, искомый элемент равен $0-10\cdot\frac{1}{8}=-\frac{5}{4}$. Элемент, стоящий в 3-й строке данного столбца, равен $0-2\cdot\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$.

По окончании расчета всех элементов табл. 1.6 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j $(j = 1,6)$ через базисные векторы P_3, P_4, P_6 и значения $\Delta_j^{'}$ и $F_0^{'}$. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план $X = (0; 0; 16; 110; 0; 118)$. При данном плане производства изготовляется 16 изделий *C* и остается неиспользованным 110 кг сырья I вида и 118 кг сырья III вида. Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 240 тыс. руб. Указанные числа записаны в столбце вектора P_0 табл. 1.6. Как видно, данные этого столбца по-прежнему представляют собой параметры рассматриваемой задачи, хотя они претерпели значительные изменения. Изменились данные и других столбцов, а их экономическое содержание стало более сложным. Например, возьмем данные столбца вектора P_2. Число 1/4 во второй строке этого столбца показывает, насколько следует уменьшить изготовление изделий *C*, если запланировать выпуск одного изделия *B*. Числа 11/2 и 3/2 в первой и третьей строках вектора P_2 показывают соответственно, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия *B*, а число –25/4 в четвертой строке показывает, что если будет запланирован выпуск одного изделия *B*, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 6,25 тыс. руб. Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие *B*, то это потребует уменьшения выпуска изделия *C* на 1/4 ед. и потребует дополнительных затрат 11/2 кг сырья I вида и 1/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготовляемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 6,25 тыс. руб. Таким образом, числа 11/2 и 1/2 выступают как бы новыми «нормами» затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия *B* (как видно из табл. 1.5, ранее они были равны 8 и 1), что объясняется уменьшением выпуска изделий *C*.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 табл. 1.6. Несколько иное экономическое содержание имеют числа, записанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во второй строке этого столбца, показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий *C* на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 5/4 кг сырья I вида и 1/4 кг сырья

III вида. Увеличение выпуска изделий *C* на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 15/8 тыс. руб.

Из изложенного выше экономического содержания данных табл. 1.6 следует, что найденный на второй итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из четвертой строки табл. 1.6, поскольку в столбце вектора P_2 этой строки стоит отрицательное число –25/4. Значит, в базис следует ввести вектор P_2, т.е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *B*. При определении возможного числа изготовления изделий *B* следует учитывать имеющееся количество сырья каждого вида, а именно: возможный выпуск изделий *B* определяется $\min\left(b_i^{'}/a_{i2}^{'}\right)$ для $a_{i2}^{'} > 0$, т.е. находим

$$\min\left(\frac{110\cdot 2}{11};\frac{16\cdot 4}{1};\frac{118\cdot 2}{1}\right)=\frac{110\cdot 2}{11}=20.$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4, иными словами, выпуск изделий *B* ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида. С учетом имеющихся объемов этого сырья предприятию следует изготовить восемь изделий *B*. Число 11/2 является разрешающим элементом, а столбец вектора P_2 и первая строка табл. 1.6 являются направляющими. Составляем таблицу для третьей итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Итоговая симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	8	10	15	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	20	5/11	1	0	2/11	–5/22	0
2	P_3	15	11	7/11	0	1	–1/22	2/11	0
3	P_6	0	108	25/11	0	0	–1/11	–3/22	1
4			365	67/11	0	0	25/22	5/11	0

В табл. 1.7 сначала заполняем элементы первой строки, которая представляет собой строку вновь вводимого в базис вектора P_2. Элементы этой строки получаем из элементов первой строки табл. 1.6 делением последних на разрешающий элемент (т.е. на 11/2). При этом в столбце $C_б$, данной строки записываем $C_2 = 10$.

Затем заполняем элементы столбцов векторов базиса и по правилу треугольника вычисляем элементы остальных столбцов. В результате в табл. 1.7 получаем новый опорный план X = (0; 20; 11; 0; 0; 108) и коэффициенты разложения векторов P_j (j = 1, …, 6) через базисные векторы P_2, P_3, P_6, и соответствующие значения Δ_j'' и F_0''. Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим четвертую строку табл. 1.7. В этой строке среди чисел Δ_j'' нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max} = 365$.

Следовательно, план выпуска продукции, включающий в себя изготовление 20 изделий B и 11 изделий C, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остаётся неиспользованным 108 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 365 тыс. руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий A. Введение в план выпуска продукции изделий вида A привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из четвертой строки столбца вектора P_1, где число 25/11 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия A приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 25/11 тыс. руб.

Пример. Используя геометрическую интерпретацию, найдите решение задачи.

$$F = 2x_1 + 5x_2 \ \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и получим уравнения соответствующих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, & (AB) \\ x_1 + x_2 = 2, & (BC) \\ x_1 + 3x_2 = 3, & (CD) \\ x_1 = 0, & (Ox_2) \\ x_2 = 0. & (Ox_1) \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.2. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае, – другая полуплоскость.

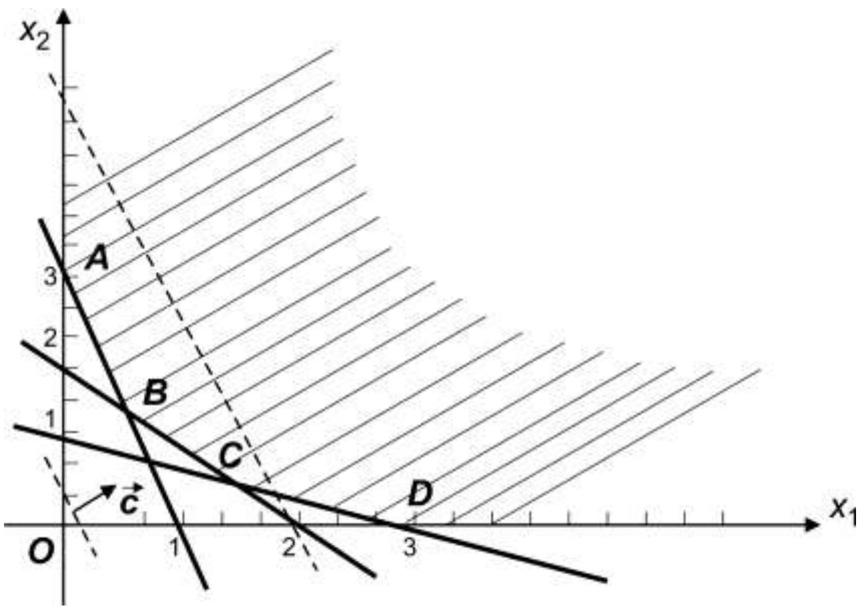

Рис. 1.2. Неограниченный многоугольник решений

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $3x_1 + x_2 \geq 3$. Для этого, построив прямую $3x_1 + x_2 = 3$ (на рис. 1.2 это прямая AB), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку O (0; 0). Координаты этой точки не удовлетворяют неравенству $3 \cdot 0 + 0 \geq 3$; значит, полуплоскость, которой не принадлежит точка *O* (0; 0), определяется неравенством $3x_1 + x_2 \geq 3.$ Это и показано штриховкой на рис. 1.2. Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 1.2, многоугольником решений является неограниченная часть плоскости *ABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому множеству, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если будет возможно найти точку, принадлежащую множеству *ABCD*, в которой функция *F* принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор *C* = (2; 5) и прямую $2x_1 + 5x_2 = h,$ где *h* – некоторая постоянная такая, что прямая $2x_1 + 5x_2 = h$ имеет общие точки с множеством решений. Положим, например, $h = 250$ и построим прямую $2x_1 + 5x_2 = 10$ (см. рис. 1.2).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации равна 10. Далее, полагая *h* равным некоторому числу, большему чем 10, будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *A* и *B*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 10.

Перемещая построенную прямую $2x_1 + 5x_2 = 10$ в направлении перпендикулярного ей вектора $\vec{c},$ видим, что последней общей точки прямой и множества *ABCD* решений задачи нет. Это значит, что целевая функция *F* не ограничена сверху на множестве допустимых решений. Следовательно, она не имеет максимума.

Пример. Используя геометрическую интерпретацию, найдите решение задачи.

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \geq 21, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и получим уравнения соответствующих прямых

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 = 21, & (BC) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (AC) \\ 5x_1 + 4x_2 = 10, & (AB) \\ x_1 = 0, & (Ox_2) \\ x_2 = 0. & (Ox_1) \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.3. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае, – другая полуплоскость.

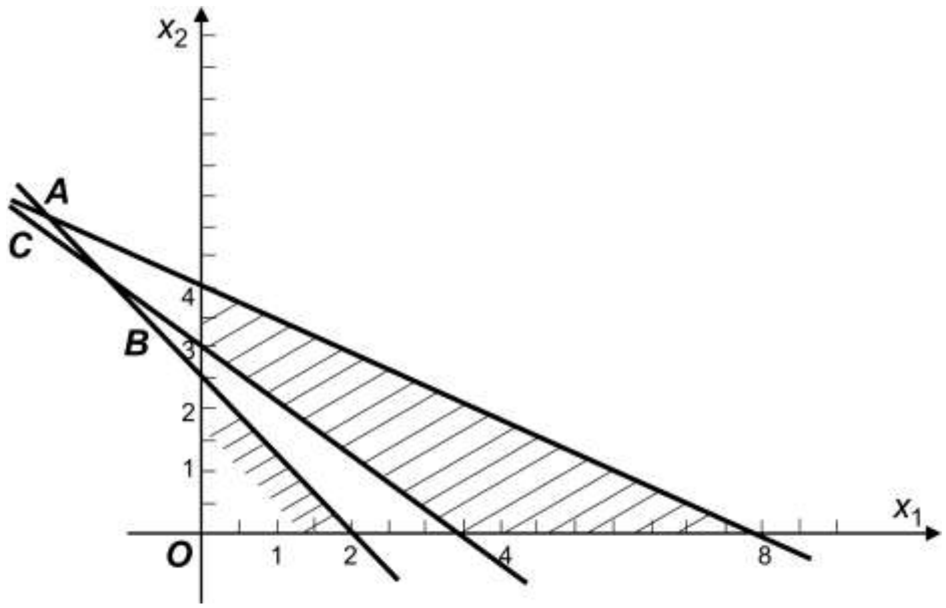

Рис. 1.3. Многоугольник решений – пустое множество

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $5x_1 + 4x_2 \le 10$. Для этого, построив прямую $5x_1 + 4x_2 = 10$ (на рис. 1.3

это прямая *AB*), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку *O* (0; 0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 10$, значит, полуплоскость, которой не принадлежит точка *O* (0; 0), определяется неравенством $5x_1 + 4x_2 \le 10$. Это и показано штриховкой на рис. 1.3. Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 1.3, многоугольником решений является пустое множество. Поэтому сформулированная задача не имеет решения.

1.5. Решение задач линейного программирования с помощью метода искусственного базиса

Из сказанного выше следует, что для задачи линейного программирования можно указать ее опорный план, если среди векторов P_j (j = 1, …, n) есть ровно m единичных, где m – количество ограничений в задаче, а n – число переменных. Если же такого количества единичных векторов нет, то для решения задачи линейного программирования применяется метод искусственного базиса. Он состоит в том, что вводятся k дополнительных переменных $x_{n+1}, ..., x_{n+k} \ge 0$, чтобы единичных векторов стало ровно m. Тогда векторная форма задачи (1.20, 1.21) примет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{j=n+1}^{n+k} x_j$$

при условиях $x_i \ge 0 \quad i = 1,...,n+k$ и $x_1 P_1 + ... + x_n P_n - ... \, M x_{n+k} P_{n+k} = P_0$,

где M – некоторое очень большое число, конкретное значение которого обычно не указывается. После этого составляется симплекс-таблица, в двух нижних строках которой присутствуют элементы, зависящие (m + 2-я строка) и не зависящие (m + 1-я строка) от M.

Пересчет симплекс-таблицы при переходе от одного опорного плана к другому производится по общим правилам симплексного метода. Причем итерационный процесс по (m + 2)-й строке ведется до тех пор, пока либо все искусственные векторы не будут исключены из базиса, либо не все искусственные векторы из него исключены, но в (m + 2)-й строке нет больше отрицательных элементов. Тогда, в первом случае продолжается итерационный процесс без (m + 2)-й строки, а во втором – оптимального плана не существует.

Рассмотрим решение задачи линейного программирования с помощью метода искусственного базиса на примере.

Задача. Найти минимум функции $F = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем условие в виде основной задачи.

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 6, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в условии только два единичных вектора P_3, P_4. Поэтому введем искусственный единичный вектор P_6, тогда условие задачи примет следующий вид

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - Mx_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = 6, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ge 0. \end{cases}$$

Составляется следующая симплекс-таблица (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Исходная симплекс-таблица с дополнительными данными

Строка	Базис	$C_б$	P_0	1	–3	2	0	0	–M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	2	158	2	–11	10	0	0	0
2	P_4	0	18	1	1	0	1	0	0
3	P_6	–M	6	1	–1	0	0	–1	1
4			30	3	–51	0	0	0	0
5			–6	–1	1	0	0	1	0

Разрешающий элемент табл. 1.8 находится на пересечении 1-го столбца и 3-й строки. Следовательно, последний искусственный вектор выводится из базиса, поэтому далее пересчитывается уже обычная симплекс-таблица (без 5-й строки и 6-го столбца).

Таблица 1.9

Исходная симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	1	–3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	38	0	11	10	0	2
2	P_4	0	12	0	2	0	1	1
3	P_1	1	6	1	–1	0	0	–1
4			12	3	–21	0	0	3

Итак, исходная табл. 1.9 выглядит следующим образом (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Итоговая симплекс-таблица

Строка	Базис	$C_б$	P_0	1	–3	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_2	–3	38	0	11	10	0	2
2	P_4	0	6	0	0	–2	1	–3
3	P_1	1	9	1	0	1	0	1
4			18	3	01	2	0	7

В результате в табл. 1.10 получаем новый опорный план X = (9; 3; 0; 6; 0). Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим четвертую строку табл. 1.7. В этой строке среди чисел нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max} = 18$, или $F_{\min} = -18$.

1.6. Решение задач линейного программирования с помощью Excel

1.6.1. Ввод условий задачи

Ввод условий задачи состоит из следующих основных шагов:

- создания формы для ввода условий задачи;
- ввода исходных данных;
- ввода зависимостей из математической модели;
- ввода ограничений и граничных условий.

Последовательность работ рассмотрим на примере.

Задача. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. 1.11.

В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Таблица 1.11

Нормы расхода тканей

Артикул ткани	Норма расхода ткани на одно изделие вида, м				Общее количество ткани, м
	1	2	3	4	
I	1	–	2	1	180
II	–	1	3	2	210
III	4	2	–	4	800
Цена одного изделия, руб.	9	6	4	7	

Для составления математической модели задачи обозначим через x_i – количество изделий i-го вида, тогда

$$9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

1. Для задачи, приведённой в примере 3, сделать форму для ввода условий задачи (рис. 1.4). Весь текст на рис. 1.4 является комментарием и на решение задачи не влияет.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	имя	изд1	изд2	изд3	изд4			
3	значение							
4	ниж. гр.							
5	верх. гр.					ЦФ		
6	коэф. ЦФ							
7			Ограничения					
8	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Артикул1							
10	Артикул2							
11	Артикул3							
12								

Рис. 1.4. Форма ЗЛП

2. Ввести исходные данные в форму (рис. 1.4). Необходимые исходные данные приведены в условиях примера 3. В результате получим (рис. 1.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	имя	изд1	изд2	изд3	изд4			
3	значение							
4	ниж.гр.	0	0	0	0			
5	верх.гр							
6	коэф. ЦФ(прибыль)	9	6	4	7	0		
7			Ограничения					
8	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Артикул1	1		2	1	0	<=	180
10	Артикул2		1	3	2	0	<=	210
11	Артикул3	4	2		4	0	<=	800

Рис. 1.5. Исходные данные

3. Ввести зависимость для целевой функции из математической модели примера 1 для этого выполним следующие действия:

- курсор в поле F6;
- курсор на кнопку Мастер функций;
- курсор в окно Категория на категорию математические;
- курсор в окно Функции на СУММПРОИЗВ;
- курсор в поле Далее (появляется диалоговое окно как на рис. 1.6);
- в массив 1 ввести B$3:E$3.

Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса (B6:E6) следует ввести в массив 2 и нажать ОК. На экране в поле F6 получено значение целевой функции. Это значение пока равно нулю, так как в строке значения нет данных.

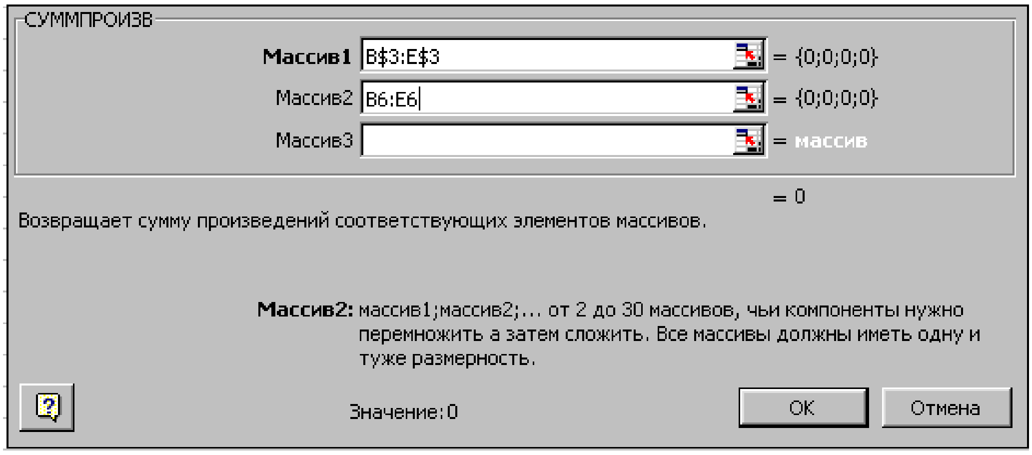

Рис. 1.6. Диалоговое окно

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные						
2	имя	изд1	изд2	изд3	изд4			
3	значение							
4	ниж.гр.	0	0	0	0			
5	верх.гр							
6	коэф. ЦФ(прибыль)	9	6	4	7	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6)		
7		Ограничения						
8	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Артикул1	1		2	1	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B9:E9)	<=	180
10	Артикул2		1	3	2	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)	<=	210
11	Артикул3	4	2		4	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)	<=	800

Рис. 1.7. Ограничения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные						
2	имя	изд1	изд2	изд3	изд4			
3	значение							
4	ниж.гр.	0	0	0	0			
5	верх.гр							
6	коэф. ЦФ(прибыль)	9	6	4	7	0		
7		Ограничения						
8	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Артикул1	1		2	1	0	<=	180
10	Артикул2		1	3	2	0	<=	210
11	Артикул3	4	2		4	0	<=	800

Рис. 1.8. Ограничения при отключенном режиме формул

4. Ввести зависимости для левых частей ограничений:

- курсор в поле F6 и его содержимое копировать в буфер обмена;
- курсор в поле F9 и вставить из буфера обмена формулу. В результате в поле F9 введется функция (рис. 1.7);

- скопировать содержимое поля F9 в поля F10:F11.

Результат показан на рис. 1.7.

Если режим представления формул отключен, то данные будут выглядеть как на рис. 1.8. На этом ввод данных закончен.

1.6.2. Работа в диалоговом окне «Поиск решения»

На экране: диалоговое окно «Поиск решения» (рис. 1.9).

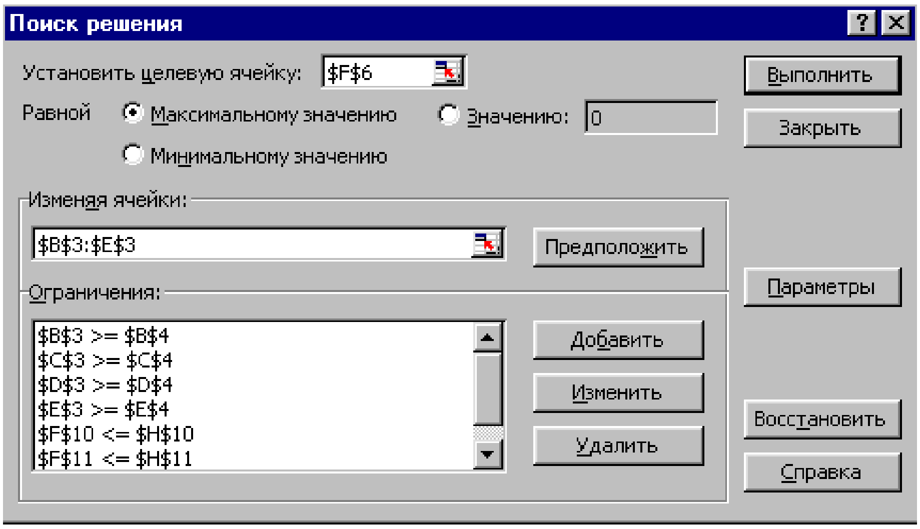

Рис. 1.9. Поиск решений

Чтобы решить поставленную задачу необходимо:

- установить целевую ячейку $F$6;
- установить направление целевой функции (максимум);
- установить изменяемые ячейки $B$3:$E$3;
- ввести граничные условия (см рис. 1.9), для этого нажать Добавить. Все ограничения, граничные условия и ограничения на неотрицательность переменных (рис. 1.10);
- выбрать Параметры: линейная модель;
- выбрать Выполнить.

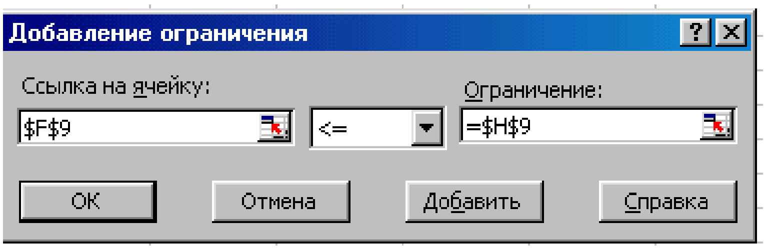

Рис. 1.10. Добавление ограничений

Если решение найдено, нажать ОК. Результат решения задачи представлен на рис. 1.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	имя	изд1	изд2	изд3	изд4			
3	значение	95	210	0	0			
4	ниж. гр.							
5	верх. гр.					ЦФ		
6	коэф. ЦФ	9	6	4	7	2115		
7			Ограничения					
8	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
9	Артикул1	1		2	1	95	<=	180
10	Артикул2		1	3	2	210	<=	210
11	Артикул3	4	2		4	800	<=	800
12								

Рис. 1.11. Результат

1.7. Решение ЗЛП с помощью MathCad

Для решения задачи примера 3 в системе MathCad необходимо представить модель задачи в канонической форме:

$$9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_7 = 800, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Для описания целевой функции и ввода начальных приближений используют знак присваивания «:=».

Далее для решения задачи используют блок функций Given … Maximize:

- ввести служебное слово Given;
- ввести систему ограничений и граничные значения, используя «**=**» (жирное равно);
- ввести вектор-столбец искомых параметров, знак присваивания, функцию Maximize с искомыми параметрами;
- ввести вектор-столбец искомых параметров и знак «=».

На рис. 1.12 показан процесс решения задачи 3.

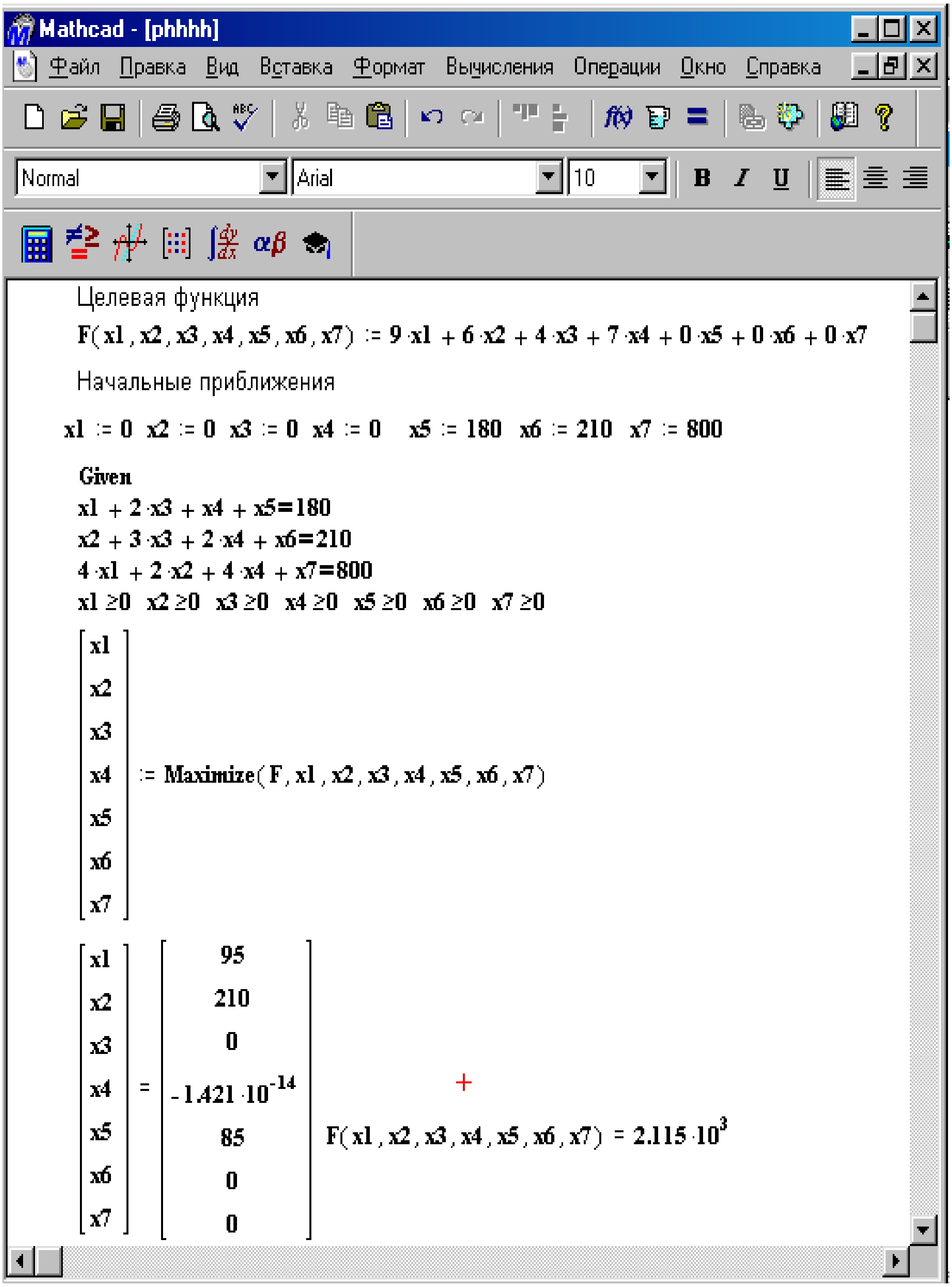

Рис. 1.12. Решение задачи

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Задача. Решить графически следующие ЗЛП:

1)

$$5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

2)

$$x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

3)

$$x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

4)

$$x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

5)

$$2x_1 - x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

6)

$$5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

7)

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

8)

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

9)

$$2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

10)

$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 9 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0.$$

11)

$$x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 6 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

12)

$$3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 7 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_1,\, x_2 \ge 0$$

1.9. Решение ЗЛП различными методами

1.9.1. Задачи распределения ресурсов

Задание 1. Решить задачу по следующему плану.

Составить математическую модель задачи.

Решить задачу, используя геометрическую интерпретацию.

Решить, используя симплексный метод для решения задач линейного программирования.

Решить задачу, используя электронные таблицы Excel.

Решить задачу, используя систему MathCad.

Задача. Для изготовления двух видов продукции *A* и *B* используются три вида сырья I, II, III. Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в табл. 1.12.

Таблица 1.12

Два вида продукции *A* и *B*

Сырье	Нормы расхода		Ресурсы
	A	*B*	
I	*A*1	*A*2	*B*1
II	*A*3	*A*4	*B*2
III	*A*5	*A*6	*B*3
Прибыль	*C*1	*C*2	

Требуется:

а) определить оптимальный план выпуска продукции из условия максимизации прибыли;

б) сформулировать экономически, записать и решить двойственную задачу.

Данные берутся из табл. 1.13.

Таблица 1.13

Исходные данные

№	*A*1	*A*2	*A*3	*A*4	*A*5	*A*6	*B*1	*B*2	*B*3	*C*1	*C*2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	7	3	5	5	2	60	45	20	20	50
2	1	7	3	5	5	2	70	90	40	20	40
3	1	7	3	5	5	2	70	50	40	40	20
4	1	7	3	5	5	2	50	50	40	40	20
5	1	7	3	5	5	2	15	40	50	50	50
6	3	2	4	2	2	3	50	70	60	50	40
7	3	2	4	2	2	3	50	50	60	60	40
8	3	2	4	2	2	3	40	45	60	60	40
9	3	2	4	2	2	3	50	45	60	40	50
10	3	2	4	2	2	3	50	90	60	40	50
11	2	3	4	1	2	1	50	100	30	50	30
12	2	3	4	1	2	1	50	40	30	50	40
13	2	3	4	1	2	1	50	40	20	30	40
14	2	3	4	1	2	1	70	30	40	30	40

Продолжение табл. 1.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	2	1	5	3	0	4	30	50	25	30	70
16	2	1	5	3	0	4	30	90	25	30	40
17	2	1	5	3	0	4	30	80	60	30	40
18	2	1	5	3	0	4	25	70	110	50	30
19	2	1	5	3	0	4	60	200	110	50	30
20	2	1	5	3	0	4	60	200	200	50	30
21	2	6	5	3	1	4	50	100	30	20	60
22	2	6	5	3	1	4	70	100	30	20	60
23	2	6	5	3	1	4	100	45	50	10	30
24	2	5	3	3	4	1	30	40	50	50	40
25	2	5	3	3	4	1	40	70	45	50	20

Задание 2. Решить задачи по следующему плану.

Составить математическую модель задачи.

Решить ее, используя электронные таблицы Excel.

Задача 1. На заводе производятся четыре вида машинного масла, а также используется соответствующее оборудование для его расфасовки и упаковки. Нормы затрат указанных ресурсов на производство 1 т масла приведены в табл. 1.14.

Таблица 1.14

Нормы затрат ресурсов

Ресурсы, кг	Норма расхода ресурса на 1 т масла				Общее количество ресурсов
	Масло I вида	Масло II вида	Масло III вида	Масло IV вида	
Ингредиент I	550	–	620	–	64 100
Ингредиент II	40	30	20	20	4800
Ингредиент III	30	40	30	30	55200
Ингредиент IV	86	110	150	52	22360
Ингредиент V	160	92	158	128	26240
Ингредиент VI	–	–	–	50	800
Ингредиент VII	–	158	30	50	7910
Производительность оборудования (машино-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации 1 т масла, руб.	315	278	573	370	–
Выпуск, т:					
минимальный	–	40	–	–	–
максимальный	–	–	120	–	–

В этой же таблице указана прибыль от реализации 1 т масла каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении завода, а также указаны минимально возможный выпуск масла II вида и максимально возможный выпуск масла III вида (эти границы определены на основе установившегося спроса на масло). Необходимо составить такой план изготовления масла, при котором общая прибыль будет максимальна.

Задача 2. По заказу автомобильного завода на ткацкой фабрике изготовляют ткани для обивки салона. Для изготовления трех артикулов ткани используются ткацкие станки двух типов, пряжа и красители. В табл. 1.15 указаны производительность станков каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 м ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющиеся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Необходимо составить такой план изготовления тканей, согласно которому будет произведено возможное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей будет максимальна.

Таблица 1.15

Нормы затрат ресурсов

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани соответствующего артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-часов):				
I типа	0,02	–	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа, кг	1,0	1,5	2,0	15000
Красители, кг	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1 м ткани, руб.	5	8	8	–
Выпуск ткани, м:				
минимальный	1000	2000	2500	–
максимальный	2000	9000	4000	–

Задача 3. Продукцией автомобильного завода являются расфасованные в пластиковые канистры антифриз, тосол и тормозная жидкость. На производство 1 т антифриза, тосола и тормозной жидкости требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг нефтепродуктов. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т антифриза и тосола

составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т тормозной жидкости заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства продукции завод может использовать 136000 кг нефтепродуктов. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке тормозной жидкости – 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т антифриза, тосола и тормозной жидкости соответственно равна 2800, 2000 и 13500 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т нефтепродуктов. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

1.9.2. Задача о смесях

Решить задачи по следующему плану.

Составить математическую модель задачи.

Решить ее, используя электронные таблицы.

Задача 1. Заводу требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Завод закупает три сорта угля *A*, *B* и *C* с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешать исходные продукты *A*, *B*, и *C*, чтобы получить 1 т смеси угля, которая удовлетворяла бы ограничениям на содержание примесей и имела минимальную цену?

Содержание примесей в каждом сорте угля приведено в табл. 1.16.

Таблица 1.16

Сорт угля

Содержание, %	Сорт угля		
	A	B	C
Фосфор	0,06	0,04	0,02
Зола	2	4	3
Цена за 1 т, руб.	300	300	450

Задача 2. Средства очистки пола оценивают по следующим трем показателям: очищающие свойства, дезинфицирующие свойства, раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 единиц. Продукт на рынке должен иметь, по крайней мере, 60 единиц очищающих свойств и не

менее 50 единиц дезинфицирующих свойств. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в табл. 1.17.

Таблица 1.17

Виды очистителей

Очиститель	Очищающие свойства, у.е.	Дезинфицирующие свойства, у.е.	Раздражающее воздействие на кожу, у.е.
A	90	30	70
B	65	86	50
C	45	70	10

Определить оптимальный состав 1 л смеси, чтобы при этом раздражающее воздействие на кожу было минимальным.

Задача 3. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей.

Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в табл. 1.18.

Таблица 1.18

Содержание питательных веществ

Питательные вещества	Содержание, г, питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	120	20	35	835	310	30	2
Углеводы	–	–	50	6	20	650	200
Минеральные соли	6	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов	54	30	8	65	87	15	6

Необходимо составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

1.10. Модели линейного программирования

1.10.1. Задача о раскрое

Данная модель задачи линейного программирования используется в области автомобилестроения при раскрое стальных листов для производства кузова, стекол и внутреннего интерьера автомобиля. Весь процесс автоматизирован, т.е. разработаны пакеты прикладных программ, в которых используется задача о раскрое.

На раскрой (распил, обработку) поступает s различных материалов. Требуется изготовить из них q различных изделий в количестве, пропорциональном числам b_1, b_2, …, b_k, … b_q.

Каждая единица j-го материала (j = 1, 2, …, s) может быть раскроена p различными способами, причем использование i-го способа (i = 1,2, …, p) дает a_{ik}^{j} единиц k-х изделий.

Необходимо найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов, если материалов j-го вида поступает a^j единиц.

Решение. Обозначим через x_i^j количество единиц j-го материала, раскраиваемых по i-му способу (всего таких переменных будет $p - s$). Переменные x_i^j, очевидно, должны удовлетворять ограничениям:

$$x_i^j \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.33}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^j = a^j, \ (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.34}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{p} x_i^j a_{ik}^j = b_k x, \ (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.35}$$

где x – число комплектов изготавливаемых изделий. Задача заключается в максимизации $z = x$ при условиях (1.33, 1.34 и 1.35).

Дальнейшее решение задачи проводится симплексным методом. В частном случае, когда на обработку поступает материал только одного образца (s = 1) в количестве a единиц, модель принимает более простой вид: максимизировать $z = x$ при условиях:

$$x_i \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.36}$$

$$\sum_i x_i = a, \tag{1.37}$$

$$\sum_i a_{ik} x_i = b_k x, \ (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{1.38}$$

Например, для раскроя трех типов стальных листов стандартной ширины площадью 0,6 м^2; 1,5 м^2 и 2,5 м^2 в соотношении 2:1:3 на пресс поступают листы площадью 3 м^2. Определить план раскроя, обеспечивающий максимальное количество комплектов.

Решение. Прежде всего, определим всевозможные способы раскроя листов, указав, сколько соответствующих частей при этом получается (табл. 1.19).

Таблица 1.19

Способы раскроя

Способы раскроя, *i*	Получаемые части			Количество листов, раскроенных по *i*-му способу
	0,6	1,5	2,5	
1	5	–	–	x_1
2	2	1	–	x_2
3	–	2	–	x_3
4	–	–	1	x_4

Теперь составляем математическую модель, приняв, что всего поступает на раскрой *a* листов (см. условия (1.36, 1.37 и 1.38)): максимизировать количество комплектов $z = x$ при условиях, что все листы должны быть раскроены $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a)$ и что количество частей каждого размера должно удовлетворять условию комплектности $5x_1 + 2x_2 = 2x;\ x_2 + 3x_3 = x;\ x_4 = 3x.$

Из последнего равенства, определив $x = \frac{1}{3}x_4$ и исключив x из остальных выражений, получим окончательно следующую задачу:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a, \\ 5x_1 + 2x_2 - \dfrac{2}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - \dfrac{1}{3}x_4 = 0. \end{cases} \qquad z = \frac{1}{3}x_4 (\max),$$

После решения ее симплексным методом получим оптимальное решение задачи $X_{опт}$ = (4/39, 5/39, 0, 10/13) и $z_{\max}$ = 10/39.

Таким образом, 10,2% общего числа поступающих листов следует раскраивать по 1-му способу, 12,8% – по 2-му способу и 77% – по 3-му способу; 4-й способ раскроя применять не следует.

1.10.2. Общая планово-производственная задача. Выбор интенсивностей использования различных технологических способов производства

Многие из ранее приведенных задач, а также ряд других планово-производственных задач «укладываются» в следующую общую задачу линейного программирования.

Некоторый производственный процесс может происходить в p различных технологических режимах (способах организации производства, способах обработки, раскроя и т.д.). В рассматриваемом процессе участвуют q производственных факторов (изделий, ресурсов и т.д.). Пусть a_{ik} означает объем производства k-го фактора (k = 1, 2, …, q) при применении i-го технологического режима (i = 1, 2, …, p) с единичной интенсивностью. При этом, если $a_{ik} > 0$, то i-й фактор производится (например, изделия, продукты и т.д.), а если $a_{ik} < 0$, то соответствующий фактор расходуется (например, ресурсы, сырье и т.д.).

Обозначим через $b_k > 0$ потребность в k-м факторе, если он производится, и через $b_k < 0$ – ресурсы k-го фактора, если он расходуется. Таким образом, с помощью введения чисел a_{ik} и b_k со знаками «+» или «–» устанавливается как бы формальное равноправие между ресурсами и потребностями.

Обозначим, наконец, через c_i оценку результата применения i-го технологического режима единичной интенсивностью. Необходимо определить производственный план (задаваемый величинами интенсивностей всех технологических способов), суммарная оценка которого будет наилучшей.

Решение. Обозначим через x_i интенсивность, с которой применяется i-й технологический режим. Тогда переменные x_i должны удовлетворять следующим двум видам ограничений:

$$x_i \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.39}$$

$$\sum_i a_{ik} x_i \geq b_k, \ (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{1.40}$$

В случае, когда k-й фактор есть производимый продукт, выражение (1.40) представляет собой ограничение по потребностям. Если k-й фактор есть расходуемый вид ресурсов, то в соответствии с принятым условием $a_{ik} < 0$ и $b_k < 0$, и поэтому неравенство (1.40) перепишется в виде $\sum |a_{ik}| x_i \le |b_k|$, что соответствует по характеру обычным ограничениям по ресурсам.

Суммарная оценка всего производственного процесса может быть получена с помощью формулы

$$z = \sum_i c_i x_i, \tag{1.41}$$

запись которой предполагает, что оценки каждого технологического способа пропорциональны интенсивности его применения, а, при использовании нескольких способов суммируются.

Задача заключается в том, чтобы максимизировать (или минимизировать) функцию (1.41), при условиях (1.39 и 1.40). Указанная модель задачи, очевидно, в общем случае должна исследоваться общими вычислительными методами.

Нетрудно видеть, что некоторые из ранее рассмотренных задач являются частными случаями данной, если соответственно истолковать понятия как «факторы производства» и «технологические способы» в конкретных терминах данной задачи.

В то же время указанная задача может непосредственно фигурировать как задача нахождения оптимального сочетания интенсивностей различных технологических режимов (способов производства).

1.10.3. Распределение ресурсов во времени. Оптимальное регулирование запасов

Планируется производство однородного продукта для удовлетворения потребностей, меняющихся во времени. Весь годичный период разделен на *n* периодов. Потребности на продукт в *i*-м периоде составляют b_i. Известны также затраты на выпуск дополнительной единицы продукта (*a* руб.) и на хранение той же единицы в течение одного периода (*c* руб.). Необходимо составить оптимальный график производства по периодам, минимизирующий суммарные затраты.

Решение. Обозначим через $x_i \ge 0$ выпуск продукции за *i*-й период, а через u_i – запасы, которые образуются в конце *i*-го периода за счет превышения накопленного выпуска продукции, начиная с 1-го периода до данного, над накопленным расходом. Пусть к началу планируемого периода выпуск продукции составляет x_0 единиц. Средний размер запасов, хранящихся в течение *i*-го периода, составит $u_{i-1} + u_i \Big/ 2$. Поэтому расходы на хранение за весь планируемый период будут составлять

$$z_{хр} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_{i-1} + u_i).$$

Введем две новые неотрицательные переменные y_i и z_i из соотношений

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \ (i = 2, 3, \ldots, n).$$

При этом в оптимальном графике производства y_i можно трактовать как величину, на которую произошло расширение производства в *i*-м периоде, а z_i – соответственно как свертывание производства. Исходя из этого, суммарные дополнительные затраты на расширение производства запишутся в виде

$$z_{\text{рас}} = a\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Таким образом, приходим окончательно к следующей модели задачи линейного программирования: минимизировать функцию

$$z = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_{i-1} + u_i) + a\sum_{i=2}^{n} y_i \tag{1.42}$$

при условиях:

$$y_i \geq 0,\ z_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.43}$$

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i \ (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{1.44}$$

$$u_i = u_0 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j-1}^{i} b_j \ \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.45}$$

$$u_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.46}$$

Модель можно упростить, исключив из нее переменные x_i. Для этого вычтем из уравнения (1.45) аналогичное уравнение для *i* – 1. Получим

$$u_i - u_{i-1} = \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i-1} x_j - \sum_{j=1}^{i} b_j + \sum_{j=1}^{i-1} b_j = x_i - b_i.$$

Аналогично, очевидно, $u_{i-1} - u_{i-2} = x_{i-1} - b_{i-1}$, откуда почленным вычитанием из предыдущего равенства получаем

$$x_i - x_{i-1} = u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2} + b_i - b_{i-1}.$$

Подставляя это выражение в левую часть равенства (1.44), запишем их в виде

$$u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2} + b_i - b_{i-1} = y_i - z_i \ (i = 1, \ldots, n). \qquad (1.47)$$

Дальнейшее решение задачи, описанной выражениями (1.42, 1.43, 1.46, 1.47), ведется как обычно.

Задача. Планируется поквартальный выпуск продукции для удовлетворения переменного спроса ($b_1 = 50,\ b_2 = 30,\ b_3 = 40,\ b_4 = 20$).

Составить оптимальный график работы предприятия, если затраты на дополнительный выпуск 1 ед. продукции составляют 30 руб., а затраты на хранение той же единицы в запасах в течение одного периода – 3 руб. При этом задано $u_0 = 5$.

Решение. Согласно рассмотренной выше общей модели обозначим соответственно выпуски продукции в I, II, III и IV кварталах через x_1, x_2, x_3 и x_4, запасы продукции через u_1, u_2, … и u_4, объем роста производства в i-м квартале через y_i и объем его свертывания через z_i.

Тогда выражения (1.42…1.46) приобретут следующий конкретный вид: минимизировать функцию

$$z = \frac{2}{3}\ 5 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4\ \ + 30\ \ y_2 + y_3 + y_4 \qquad (1.48)$$

при условиях

$$u_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, 4). \qquad (1.49)$$

$$\begin{cases} u_2 - 2u_1 + 5 - 20 = y_2 - z_2, \\ u_3 - 2u_2 + u_1 + 10 = y_3 - z_3, \\ u_4 - 2u_3 + u_2 - 20 = y_4 - z_4. \end{cases} \qquad (1.50)$$

Решение этой задачи с помощью симплексных таблиц дает следующий результат: $u_2 = 5$, $u_4 = 15$, $z_2 = 10$, $u_1 = u_3 = y_2 = y_3 = y_4 = z_3 =$ $= z_4 = 0$ и $z_{\min} = 45$ руб.

С помощью равенств (1.15) и (1.16) определяем значения x_i:

$$x_1 = b_1 + u_1 - u_0 = 45;\ x_2 = x_1 - z_2 = 35;\ x_4 = x_3 = x_2 = 35.$$

1.10.4. Оптимальные балансовые модели

Рассматривается n-отраслевая балансовая модель в стоимостном выражении с постоянными «технологическими» коэффициентами, задаваемыми матрицей затрат $A = |a_{ik}|$, где a_{ik} – затраты продукции

i-й отрасли на производство единицы продукции k-й отрасли. Необходимо определить оптимальный валовой выпуск каждой отрасли, при котором будет достигнут максимальный суммарный выпуск конечного продукта в стоимостном выражении, если производственные возможности i-й отрасли ограничивают ее валовой выпуск величиной d_i (где $i = 1, 2, \ldots, n$) и цены на конечный продукт задаются вектором $\overline{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n)$.

Решение. Обозначим через $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ векторы, характеризующие соответственно валовой выпуск продукции всех отраслей и конечный продукт. Тогда между векторами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ существует следующее соотношение: $\overline{X} = S\overline{Y}$, где $S = (E - A)^{-1}$.

Поэтому математическая модель задачи может быть сформулирована так: максимизировать функцию

$$z = \overline{C}\overline{Y} \tag{1.51}$$

при условиях

$$S\overline{Y} \le D, \tag{1.52}$$

$$\overline{Y} \ge 0, \tag{1.53}$$

где $D = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_k)$ и векторные неравенства означают, что каждая составляющая соответствующих векторов удовлетворяет аналогичному неравенству.

Дальнейшее решение задачи ведется обычными приемами.

Замечание. В задаче могут быть дополнительно указаны ограничения, налагаемые на конечный продукт в виде ассортиментного ограничения ($y_1{:}y_2{:} \ldots = b_1{:}b_2{:} \ldots$), ограничений сверху или снизу ($y_i \le b_i$ или $y_i \ge b_i$).

1.10.5. Метод разрешающих множителей

Данный метод будет рассмотрен на примере решения задачи формирования оптимального варианта загрузки оборудования, обеспечивающего максимальный комплектный выпуск определенной продукции. В общем случае этот метод используется для решения ряда задач управления, связанных с отысканием оптимального варианта распределения работ между группами взаимозаменяемого оборудования. При этом должны быть выполнены следующие требования к полученному решению:

- выпуск продукции должен быть как можно больше;
- отходов как можно меньше;
- виды сырья, материалы, транспорт и т.п. должны быть использованы наилучшим образом.

Для решения задачи методом разрешающих множителей должны быть выполнены следующие условия:

- оборудование должно быть взаимозаменяемым;
- полная загрузка оборудования в течение всего планового периода;
- комплектный выпуск деталей.

Взаимозаменяемыми группы оборудования считаются, если на них может производиться обработка детали и будут гарантированы ее параметры, соответствующие технической документации. При этом обработка одной и той же детали на различных группах оборудования может характеризоваться различными трудозатратами.

Очевидно, что максимальный выпуск деталей может быть обеспечен при закреплении каждой из них за оборудованием, имеющим по данной детали наибольшую производительность. Однако условие решения задачи предусматривает не только максимальный, но еще и комплектный выпуск. Поэтому решение производить выпуск части деталей на оборудовании с более низкой производительностью обусловлено условием комплектности выпуска продукции. Такое решение принимается тогда, когда при обработке какой-либо из деталей на оборудовании, дающем по ней наибольшую производительность, выпуск их превышает выпуск других деталей из общей комплектности, выпускаемых на других группах оборудования. Таким образом нарушается комплектность общего выпуска. Следовательно, необходимо часть времени работы высокопроизводительного оборудования использовать для обработки других деталей, для того чтобы увеличить выпуск последних и гарантировать комплектность всех изготовляемых деталей.

Из чисел a_{ij} составим матрицу производительности A (1.54), строки которой соответствуют номерам из комплектности выпускаемых деталей, а столбцы – номерам групп оборудования. Размерность матрицы $k \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \end{pmatrix}. \qquad (1.54)$$

Пусть $m_j = \dfrac{a_{(i+1)j}}{a_{ij}}$, тогда единице выработки на j-й группе оборудования детали i будет соответствовать m_j единиц детали i + 1, где $m_i \le m_j$ при $1 \le i \le j \le n$. Такой упорядоченный ряд дает возможность оценить, какие из рассматриваемых деталей i или i + 1 выгоднее, с точки зрения производительности, изготовлять на том или ином оборудовании. Следовательно, выгодность обработки с точки зрения получаемого количества деталей снижается при переходе к каждой последующей группе оборудования. Поэтому оборудование первых s групп необходимо закрепить за обработкой i-й детали, а оставшихся – (i + 1)-й детали. Таким образом, в соответствии с рассмотренным условием на указанном оборудовании в течение всего времени работы должны изготовляться либо i-е, либо (i + 1)-е детали.

Удобнее всего время работы каждой из групп оборудования в рассматриваемом временном интервале приравнять к единице (1.54). Пусть x_{ij} – выражение в долях единицы время, в течение которого i-я деталь будет изготовляться на j-ом оборудовании, тогда для описанного выше примера

$$x_{(i+1)j} = \begin{cases} 0, \ 1 \le j \le s, \\ 1, \ s+1 \le j \le n. \end{cases} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1, \ 1 \le j \le s, \\ 0, \ s+1 \le j \le n. \end{cases} \qquad (1.55)$$

В результате оборудование загружено полностью, однако пока не известно, выполнено ли еще одно условие – обеспечение комплектности выпуска. Таким образом, задача сводится к подбору и закреплению за каждой из деталей такого числа станков s, которое удовлетворяет следующим условиям (1.56):

$$\sum_{j=1}^{s-1} a_{ij} < \sum_{j=s}^{n} a_{(i+1)j}, \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \ge \sum_{j=s+1}^{n} a_{(i+1)j}. \qquad (1.56)$$

Т.е. закрепить за i-й деталью $s-1$ группу оборудования недостаточно, а s групп – много или достаточно при равенстве. Для определения более оптимального распределения времени работы s-й группы оборудования при обработки *i*-й и (*i* + 1)-й детали составляется и решается следующая система (1.57):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij} + a_{is} x_{is} = \sum_{j=s+1}^{n} a_{(i+1)j} + a_{(i+1)s} x_{(i+1)s}, \\ x_{is} + x_{(i+1)\backslash s} = 1. \end{cases} \tag{1.57}$$

При целенаправленном переборе возможных вариантов закрепления обрабатываемых деталей за группой оборудования используются разрешающие множители λ_i – показатели равновесия при максимальном распределении группы оборудования между рассматриваемыми деталями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{1}{\lambda_i}, \; 1 \le i \le k. \tag{1.58}$$

В процессе решения задачи разрешающие множители (1.58) корректируются.

Для удобства производимых вычислений в числителе вместо 1 можно использовать более удобное число, например 100, 1000 или любое другое.

При решении исходной задачи используется следующая модель:

1) $y_1 = y_2 = ... = y_k \to \max$, где $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$ – программа выпуска *i*-й детали;

2) $\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = 1$, где $x_{ij} \ge 0$ при $1 \le i \le k$;

3) $\lambda_i^0 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$, $\lambda_i^t = \lambda_i^{t-1} p_{ij}^t$ или $\lambda_i^t = \lambda_i^{t-1} : p_{ij}^t$, где $p_{rj}^t = \dfrac{\max\limits_{1 \le i \le k} \lambda_i a_{ij}}{\lambda_r a_{rj}}$ – коэффициент корректировки *r*-й детали на *t*-й итерации на *j*-й группе оборудования.

Основное условие задачи означает, что комплектный выпуск должен быть максимально возможным, но при оценке в качестве отправной точки выбирается минимальное из полученных значений по всем рассматриваемым деталям. Затем это число поэтапно увеличивается с помощью коэффициента корректировки: на него либо умножают разрешающие множители, либо делят.

Логическая схема реализации модели:

- расчет начальных значений разрешающих множителей по каждому виду деталей;
- построение таблицы значений разрешающих множителей, производительности труда по каждому виду деталей в разрезе групп оборудования;
- закрепление деталей за группами оборудования при условии максимизации их выпуска;
- проверка на комплектность выпуска деталей и при необходимости повторение расчета, начиная со второго этапа.

Алгоритм решения задачи. Определяются первоначальные значения разрешающих множителей: $\lambda_i = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}}$, для удобства его можно увеличить в любое число раз.

При этом эти значения заносятся в соответствующую графу табл. 1.20.

Таблица 1.20

Итерационные коэффициенты

Номер детали	Первоначальное значение	Коэффициент корректировки				Итоговый результат
		1-е приближение	2-е приближение	…	*t*-е приближение	
i_r	λ_r^0	p_r^1	p_r^2		p_r^t	$\lambda_r = \lambda_r^0 p_r^1 p_r^2 ... p_r^t$
i_1						
i_2						
…						
i_k						

Рассчитываются значения $\lambda_i a_{ij}$ по каждой из деталей и полученные результаты записывают в табл. 1.21.

По каждой *j*-й группе оборудования находятся максимальные значение $\max\limits_{1 \le i \le k} \lambda_i a_{ij}$.

Проверяется наличие по *j*-й группе оборудования нескольких максимальных значений $\lambda_i a_{ij}$. Если такие есть, то перейти к 13 пункту.

Таблица 1.21

Итерационная таблица

$\lambda_i a_{ij}$				$a_{ij}x_{ij}$				y_i
$\lambda_1 a_{11}$	$\lambda_1 a_{12}$	…	$\lambda_1 a_{1n}$	$a_{11}x_{11}$	$a_{12}x_{12}$	…		y_1
$\lambda_2 a_{21}$	$\lambda_2 a_{22}$		$\lambda_2 a_{2n}$				$a_{2n}x_{2n}$	y_2
…								…
$\lambda_k a_{k1}$	$\lambda_k a_{k2}$		$\lambda_k a_{kn}$					y_k

Распределяется загрузка между соответствующими группами оборудования следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \lambda_i a_{ij} = \max\limits_{1 \le i \le k} \ \lambda_i a_{ij} \ , \\ 0, \ \textit{если} \ \lambda_i a_{ij} \ne \max\limits_{1 \le i \le k} \ \lambda_i a_{ij} \ . \end{cases}$$

Рассчитывается количество выпуска по каждой i-й номенклатурной позиции: $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$, где y_{ij} – выпуск j-й группой оборудования i-й детали. Полученные результаты заносятся в табл. 1.21.

Оценивается комплектность выпуска, т.е. равенство $y_1 = y_2 = ... = = y_k$, с учетом пропорциональности каждой детали. Если равенство выполняется, то перейти к 14 пункту.

Выбирается r-й номер детали с минимальным значением $y_r = \min\limits_{1 \le i \le k} \ y_i$.

По данной r-й детали находятся показатели отклонения параметров $\lambda_i a_{ij}$ от их максимальных значений в каждой из j-й группе оборудования на t-м шаге итерации: $1 - \dfrac{1}{p_{rj}^t}$.

Выбирается минимальное значение из полученных в пункте 9 результатов: $\min\limits_{1 \le j \le n} \left(1 - \dfrac{1}{p_{rj}^t} \right)$.

Рассчитываются коэффициенты корректировки для j-й группы оборудования p_r^t, которые заносятся в соответствующие графы табл. 1.20.

Рассчитываются новые значения $\lambda_r a_{rj}$ для следующего шага итерации с учетом коэффициента корректировки, и записывается в следующую графу табл.1.21: $\lambda_r a_{rj}^{\ t} = \lambda_r a_{rj}^{\ t-1} p_{rj}^t$, а остальные не изменяются.

Перераспределяется время работы групп оборудования по тем деталям, по которым есть несколько максимальных значений $\lambda_r a_{rj}$, следующим образом:

- составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \\ y_{i_1} = y_{i_2} = \ldots = y_{i_l}, \end{cases}$$

где i_l – номера тех деталей, по которым получены максимальные значения $\lambda_{i_l} a_{i_l j}$;

- решается данная система для нахождения x_{ij}.

Перейти к пункту 5.

Результаты расчета заносятся в табл. 1.21.

Задача. Определить в натуральном выражении программу выпуска 3-х деталей на 3-х видах оборудования, соблюдая комплектность выпуска и максимальную загрузку оборудования. Решить методом разрешающих множителей, используя данные из табл. 1.22. Применяемость каждой детали равна единице.

Таблица 1.22

Таблица исходных данных задачи

Номер детали	Производительность групп оборудования a_{ij}			$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
	1	2	3	
1	36	42	32	110
2	28	30	24	82
3	24	34	20	78

Решение. Первая итерация (t = 0).

Определение первоначальных значение разрешающих множителей, увеличенных для удобства в 100 раз: $\lambda_i^0 = \dfrac{100}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$.

$$\lambda_1^0 = \frac{100}{110} = 0,91,\ \lambda_2^0 = \frac{100}{82} = 1,22,\ \lambda_3^0 = \frac{100}{78} = 1,28.$$

Полученные данные заносятся в табл.1.23.

Таблица 1.23

Таблица итерационных коэффициентов

Номер детали	Первоначальное значение	Коэффициент корректировки		Итоговый результат
		1-е приближение	2-е приближение	
i_r	λ_r^0	p_r^1	p_r^2	$\lambda_r = \lambda_r^0 p_r^1 p_r^2$
1	0,91	1,0055	1,000	0,915
2	1,22	1,0000	1,000	1,220
3	1,28	1,0000	0,883	1,131

Рассчитываются следующие значения:

$$\lambda_1 a_{11} = 0,91 \cdot 36 = 32,76,\ \lambda_1 a_{12} = 0,91 \cdot 42 = 38,22,$$

$$\lambda_1 a_{13} = 0,91 \cdot 32 = 29,12,\ \lambda_2 a_{21} = 1,22 \cdot 28 = 34,16,$$

$$\lambda_2 a_{22} = 1,22 \cdot 30 = 36,60,\ \lambda_2 a_{23} = 1,22 \cdot 24 = 29,28,$$

$$\lambda_3 a_{31} = 1,28 \cdot 24 = 30,72,\ \lambda_3 a_{32} = 1,28 \cdot 34 = 43,52,$$

$$\lambda_3 a_{33} = 1,28 \cdot 20 = 25,60.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.24.

Таблица 1.24

Первая итерация

Номера деталей и оборудования	$\lambda_i a_{ij}$			$a_{ij} x_{ij}$			y_i
	1	2	3	1	2	3	
1	32,76	38,22	29,12				0
2	34,16	36,60	29,28	28		24	52
3	30,72	43,52	25,60		34		34

Выбираются по каждой группе оборудования максимальное значение. В табл. 1.24 они подчеркнуты.

Проверяются наличие в каждой колонке нескольких максимальных элементов – их нет, поэтому переход к 5 пункту.

Определяются загрузки групп оборудования:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 1,\ x_{31} = 0,\ x_{32} = 1,\ x_{33} = 0.$$

Рассчитываются количества выпуска по каждой детали на каждом виде оборудования:

$$y_1 = 36 \cdot 0 + 42 \cdot 0 + 32 \cdot 0 = 0,$$

$$y_2 = 28 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 1 = 52,$$

$$y_3 = 24 \cdot 0 + 34 \cdot 1 + 24 \cdot 0 = 34.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.24.

Оценка на комплектность. Так как $y_1 \neq y_2 \neq y_3$, то переход к 8 пункту.

Выбираем номер детали с минимальным выпуском:

$$\min_{1 \le i \le 3} y_i = y_1 = 0.$$

Оценка показателей отклонения параметров:

$$1 - \frac{1}{p_{11}^0} = 1 - \frac{32,76}{34,16} = 0,04, \; 1 - \frac{1}{p_{12}^0} = 1 - \frac{38,22}{43,52} = 0,12,$$

$$1 - \frac{1}{p_{13}^0} = 1 - \frac{29,12}{29,28} = 0,005.$$

Выбирается минимальное из трех отклонение

$$0,12 > 0,04 > 0,005, \text{ т.е. } \min_{1 \le j \le 3} \left(1 - \frac{1}{p_{1j}^0} \right) = 0,005.$$

Вторая итерация (t = 1).

Вычисляется коэффициент корректировки: $p_1^1 = \frac{29,28}{29,12} = 1,0055$, $p_2^1 = 1$, $p_3^1 = 1$.

Рассчитываются новые значения $\lambda_i a_{ij}$:

$$\lambda_1 a_{11} p_1^1 = 32,76 \cdot 1,0055 = 32,94,$$

$$\lambda_1 a_{12} p_1^1 = 38,22 \cdot 1,0055 = 38,43,$$

$$\lambda_1 a_{13} p_1^1 = 29,12 \cdot 1,0055 = 29,28.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.25.

Переход к пункту 3 алгоритма. По каждой группе оборудования выбирается максимальное значение из табл. 1.25.

Проверяются наличие в каждой колонке нескольких максимальных элементов – это третья колонка, поэтому переход к 13 пункту алгоритма.

Таблица 1.25

Вторая итерация

Номера деталей и оборудования	$\lambda_i a_{ij}$			$a_{ij} x_{ij}$			y_i
	1	2	3	1	2	3	
1	32,94	38,43	29,28			29,71	30
2	34,16	36,60	29,28	28		1,71	30
3	30,72	43,52	25,60		34		34

Перераспределяется время работы групп оборудования по тем деталям, по которым есть несколько максимальных значений $\lambda_r a_{r3}$, следующим образом. Составляется и решается система уравнений:

$$\begin{cases} x_{13} + x_{23} = 1, \\ y_1 = y_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} + x_{23} = 1, \\ 32x_{13} = 28 + 24x_{23}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = 0{,}93, \\ x_{23} = 0{,}07. \end{cases}$$

Переход к 5 пункту алгоритма.

Определяются загрузки групп оборудования:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0{,}93,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,$$
$$x_{23} = 0{,}07,\ x_{31} = 0,\ x_{32} = 1,\ x_{33} = 0.$$

Рассчитываются количества выпуска по каждой детали на каждом виде оборудования:

$$y_1 = 36 \cdot 0 + 42 \cdot 0 + 32 \cdot 0{,}93 = 29{,}7,$$
$$y_2 = 28 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 0{,}07 = 29{,}7,$$
$$y_3 = 24 \cdot 0 + 34 \cdot 1 + 24 \cdot 0 = 34.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.25.

Оценка на комплектность. Так как $y_1 \neq y_2 \neq y_3$, то переход к 8 пункту.

Выбираем номер детали с минимальным выпуском:

$$\min_{1 \le i \le 3} y_i = y_1 = y_2 = 30.$$

Оценка показателей отклонения параметров:

$$1 - \frac{1}{p_{12}^1} = 1 - \frac{38{,}43}{43{,}52} = 0{,}12,\ 1 - \frac{1}{p_{22}^1} = 1 - \frac{36{,}60}{43{,}52} = 0{,}16.$$

Выбирается минимальное из трех отклонение $0{,}16 > 0{,}12$, т.е. $\min\limits_{1 \le j \le 2}\left(1 - \dfrac{1}{p_{j2}^1}\right) = 0{,}12.$

Третья итерация (t = 2).

Вычисляется коэффициент корректировки: $p_1^2 = 1$, $p_2^2 = 1$, $p_3^2 = \frac{38,43}{43,52} = 0,88.$

Рассчитываются новые значения $\lambda_i a_{ij}$:

$$\lambda_3 a_{31} p_3^2 = 30,72 \cdot 0,88 = 27,13,$$

$$\lambda_3 a_{32} p_3^2 = 43,52 \cdot 0,88 = 38,43,$$

$$\lambda_3 a_{33} p_3^2 = 25,60 \cdot 0,88 = 22,61.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.26.

Переход к пункту 3 алгоритма. По каждой группе оборудования выбирается максимальное значение из табл. 1.26.

Таблица 1.26

Третья итерация

Номера деталей и оборудования	$\lambda_i a_{ij}$			$a_{ij} x_{ij}$			y_i
	1	2	3	1	2	3	
1	32,94	$\boxed{38,43}$	$\boxed{29,28}$		3,46	27,74	31
2	$\boxed{34,16}$	$\boxed{36,60}$	$\boxed{29,28}$	28		3,2	31
3	27,13	$\boxed{38,43}$	22,61		31,2		31

Проверяются наличие в каждой колонке нескольких максимальных элементов – это вторая и третья колонка, поэтому переход к 13 пункту алгоритма.

Перераспределяется время работы групп оборудования по тем деталям, по которым есть несколько максимальных значений $\lambda_r a_{r3}$, следующим образом. Составляется и решается система уравнений:

$$\begin{cases} x_{13} + x_{23} = 1, \\ x_{12} + x_{22} = 1, \\ y_1 = y_2 + y_3, \\ y_1 = y_2 - y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} + x_{23} = 1, \\ x_{12} + x_{32} = 1, \\ 34x_{32} = 28 + 24x_{23}, \\ 34x_{32} = 42x_{12} + 32x_{13}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = 0,08, \\ x_{13} = 0,87, \\ x_{32} = 0,92, \\ x_{23} = 0,13. \end{cases}$$

Переход к 5 пункту алгоритма.

Определяются загрузки групп оборудования:

$$x_{11} = 0,\ x_{12} = 0,08,\ x_{13} = 0,87,\ x_{21} = 1,\ x_{22} = 0,$$

$$x_{23} = 0{,}13,\ \ x_{31} = 0,\ \ x_{32} = 0{,}92,\ \ x_{33} = 0.$$

Рассчитываются количества выпуска по каждой детали на каждом виде оборудования:

$$y_1 = 36 \cdot 0 + 42 \cdot 0{,}08 + 32 \cdot 0{,}87 = 31,$$

$$y_2 = 28 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 0{,}13 = 31,$$

$$y_3 = 24 \cdot 0 + 34 \cdot 0{,}92 + 24 \cdot 0 = 31.$$

Полученные значения заносятся в табл. 1.26.

Оценка на комплектность. Так как $y_1 = y_2 = y_3$, то переход к 14 пункту.

Получено оптимальное решение, обеспечивающее выпуск 31 комплекта деталей.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Транспортная задача и особенности ее решения

Особый класс задач линейного программирования составляют транспортные задачи (Т-задачи), для решения которых разработаны особые методы, более простые по сравнению с методами решения общей задачи ЛП. В этих методах используется специфическая структура функций ограничений. Транспортная задача – это задача о наиболее экономном плане перевозок однородной или взаимозаменяемой продукции из пунктов производства (отправления) в пункты потребления, иными словами, Т-задача заключается в определении такого плана перевозок продукции с m складов к n потребителям, при котором общая стоимость перевозок минимальна и все заявки выполнены.

A_1, A_2, ..., A_m, у которых имеется соответственно a_1, a_2, ..., a_m единиц однородной продукции и n потребителей B_1, B_2, ..., B_n, подавших заявки на b_1, b_2, ..., b_n, единицы этой продукции, причем количество продукции, имеющейся у поставщиков, равно количеству продукции, затребованной потребителями, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = s. \tag{2.1}$$

Обозначим c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-го склада к j-му потребителю. Совокупность чисел c_{ij} (i = 1, …, m, j = 1, …, n) образует матрицу стоимостей $C = \| c_{ij} \|_{i,j=1}^{m,n}$. Будем также считать, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их количеству.

Если x_{ij} – количество единиц продукции, перевезенной от i-го поставщика j-му потребителю, то совокупность неизвестных x_{ij}, (i = 1, …, m, j = 1, …, n) составляет матрицу $X = \| x_{ij} \|_{i,j=1}^{m,n}$, называемую планом перевозок.

Решить Т-задачу – значит, определить значения переменных x_{ij} $x_{ij} \geq 0$, такие, что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, ...\ m, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \dots n, \tag{2.3}$$

а значение целевой функции (стоимость перевозок)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.4}$$

– минимально. Условие (2.2) гарантирует полный вызов продукции с m пунктов, а условие (2.3) гарантирует полное удовлетворение заявок n потребителей.

Целевая функция (2.4) и ограничения (2.2, 2.3) – линейные функции, следовательно, имеем дело с задачей ЛП. Путем непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что одно из возможных решений систем уравнений (2.2, 2.3) имеет вид:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{s},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \dots$$

Поскольку коэффициенты в уравнениях (2.2, 2.3) не отрицательны и конечны, то значения переменных x_{ij} ограничены сверху.

Таким образом, допустимое множество Т-задачи не пусто и ограничено, следовательно, Т-задача обладает оптимальным планом. Причем можно показать, что если все a_i, $i = 1, \dots, m$ и b_j, $j = 1, \dots, n$ – целые числа, то оптимальный план является предпочтительным.

Системы уравнений (2.2, 2.3) содержат $n + m$ уравнений, но в силу условия (2.1) только $m + n – 1$ из них линейно независимы. Общее число неизвестных x_{ij} равно mn. Поскольку эти неизвестные удовлетворяют $n + m – 1$ линейно-независимым уравнениям, то число базисных переменных равно $m + n – 1$. Остальные $nm – (m + n – 1) = (m –$ $– 1)(n + 1)$ переменные являются свободными. Как и в рассмотренных методах решения задач ЛП, будем полагать их равными нулю.

Особенность Т-задачи по сравнению с другими задачами ЛП – равенство единицы коэффициентов при всех неизвестных в ограничениях. Эта особенность используется в специальных методах решения Т-задачи.

2.2. Метод минимального элемента матрицы стоимостей

Согласно этому методу, вначале целесообразно осуществить наиболее дешевую поставку, затем самую дешевую из оставшихся и так далее до полного удовлетворения всех заявок на продукцию. Для решения Т-задачи используется так называемая транспортная таблица (табл. 2.1), содержащая информацию о запасах продукции и заявках на нее в каждом пункте отправления (ПО) и пункте назначения (ПН). В правом верхнем углу каждой внутренней клетки приведена соответствующая стоимость единицы продукции. При решении задачи в табл. 2.1 вносят значения искомых переменных x_{ij}.

Таблица 2.1

Матрица стоимостей

$A \setminus B$	B_1	B_2	…	B_n	A_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
b_i	b_1	b_2	…	b_n	s

Для построения начального опорного плана Т-задачи выбирается минимальный элемент матрицы стоимостей C. Допустим, что это элемент c_{ij}. Далее определяется величина перевозки x_{ij} как min (a_i, b_j). Найденное значение x_{ij} заносится в соответствующее поле табл. 2.1. Если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$. Это означает, что из пункта A_i отправлена вся продукция, а i-я строка табл. 2.1 из дальнейшего рассмотрения исключается. При этом потребитель B_j недополучил $b_j^{'} = b_j - a_i$ единиц продукции. Если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и заявка i-го потребителя полностью удовлетворена. Тогда j-й столбец исключается из дальнейшего рассмотрения, а у i-го отправителя остался запас $a_i^{'} = a_i - b_j$ единиц продукции. Наконец, когда $x_{ij} = a_i = b_j$, заявка j-го потребителя полностью удовлетворена, а у i-го поставщика не осталось запасов продукции; i-я строка и j-й столбец табл. 2.1 далее не рассматриваются.

После того как значение перевозки x_{ij} определено, значения a_i или b_j соответственно изменяются на $a_i^{'}$ или $b_j^{'}$ и затем выбирается минимальный из оставшихся в рассмотрении элементов матрицы C, определяется соответствующая ему перевозка, корректируются значения заявок или ресурсов. Процедура продолжается до получения опорного плана.

Поясним на примере построение опорного плана Т-задачи методом минимального элемента (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Заполненная таблица

Поставщик	Потребитель					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 –	6 –	11 –	4 –	3 4	4
A_2	2 8	8 –	7 –	5 11	6 –	19
A_3	4 –	5 8	8 –	11 –	6 –	8
A_4	10 –	11 2	12 6	9 1	8 1	10
b_j	8	10	6	12	5	41

Элемент c_{21}, равный двум, является минимальным элементом матрицы C, поэтому полагаем $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(19, 8) = 8$. При такой перевозке полностью удовлетворена заявка потребителя B_1, следовательно, первый столбец табл. 2.2 дальше не рассматривается, а у отправителя A_2 остался запас продукции $a_2^{'} = a_2 - b_1 = 19 - 8 =$ $= 11$. Далее продолжаем решение Т-задачи, положив $a_2 = 11$ и не принимая во внимание первый столбец табл. 2.2.

Минимальный из оставшихся в рассмотрении элементов матрицы стоимостей C элемент $c_{15} = 3$, поэтому $x_{15} = \min(a_1, b_5) = \min(4, 5) = 4$. Таким образом, из пункта A_1 вывезена вся продукция, а недопоставленная потребителю B_5 равна $b_5^{'} = b_5 - a_1 = 1$ единице продукции. В дальнейшем полагаем $b_5 = 1$ и первую строку табл. 2.2 исключаем из рассмотрения.

На следующем шаге минимальными из оставшихся элементов матрицы C являются два элемента $c_{32} = c_{25} = 5$. Поэтому полагаем $x_{24} = \min(a_2, b_4) = \min(11, 12) = 11$ и $x_{32} = \min(a_3, b_2) = \min(8, 10) = 8$. В результате таких перевозок из пунктов A_2 и A_3 будет вывезена вся продукция, а недопоставки потребителям B_2 и B_4 составят соответственно $b_4^{'} = b_4 - a_2 = 12 - 11 = 1$ и $b_2^{'} = b_2 - a_3 = 10 - 8 = 2$ единицы продукции. Далее полагаем $b_2 = 2$, $b_4 = 1$, а вторую и третью строки табл. 2.2 не рассматриваем. Теперь все дальнейшие поставки возможны только со склада A_4, т.е. рассмотреть осталось только последнюю строку табл. 2.2. Проанализировав элементы последней строки табл. 2.2, получим искомый опорный план Т-задачи.

Согласно табл. 2.2, базисными переменными построенного решения являются следующие восемь переменных: $x_{15} = 4$, $x_{21} = 8$, $x_{24} = 11$, $x_{32} = 8$, $x_{42} = 2$, $x_{43} = 6$, $x_{44} = 1$, $x_{45} = 1$. Пустые клетки табл. 2.2 соответствуют свободным переменным, значения которых равны нулю. Стоимость перевозок продукции, вычисленная по формуле, для найденного опорного плана равна 234.

Метод минимального элемента матриц стоимостей весьма часто позволяет получить опорный план близкий к оптимальному.

2.3. Переход к новому базису в Т-задаче

Изменение значения целевой функции Т-задачи, т.е. стоимостей перевозок, как и в других задачах ЛП, связано с переходом к новому базису. Покажем на примере Т-задачи (табл. 2.3), как можно перейти от одного опорного плана к другому, пока не задаваясь целью уменьшения значения стоимости перевозок.

Таблица 2.3

Перераспределение ресурсов

Поставщик	Потребитель					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 –	6 –	11 –	4 –	3 4	4
A_2	2 8	+8 Q	7 –	–5 $11 - Q$	6 –	19
A_3	4 –	5 8	8 –	11 –	6 –	8
A_4	10 –	–11 $2 - Q$	12 6	+9 $1 + Q$	8 1	10
b_j	8	10	6	12	5	41

Допустим, что в рассматриваемой Т-задаче (см. табл. 2.3) желательно ввести в базис свободную переменную x_{22}. Остальные свободные переменные сохраняются. Если переменная x_{22} становится базисной, то она должна принять некоторое положительное значение Q. Внесем значение Q в поле таблицы, содержащее переменную x_{22} (см. табл. 2.3). Тогда для сохранения поставок потребителю B_2 и сохранения вывоза от поставщика A_2 надо вычесть значение Q из каких-либо базисных переменных второго столбца и второй строки табл. 2.3. Пусть такими переменными будут x_{24} и x_{42}. Однако эти изменения влекут за собой и изменения других базисных переменных. Для сохранения вывоза от поставщика A_4 надо добавить Q к одной из базисных переменных четвертой строки табл. 2.3. Оба требования будут удовлетворены, если в качестве изменяемой базисной переменной выбрать x_{44}. В дальнейших изменениях нет необходимости.

Определим теперь значение Q. Очевидно, что оно не может быть больше двух, так как иначе переменная x_{42} примет значение, меньшее нуля. Положив Q = 2, получим новый опорный план (табл. 2.4). Этот опорный план отличается от опорного плана, приведенного в табл. 2.4, тем, что свободная переменная x_{22} введена в базис, а базисная переменная x_{42} стала свободной.

Таблица 2.4

После перераспределения ресурсов

Поставщик	Потребитель					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 –	6 –	11 –	4 –	3 4	4
A_2	2 8	8 2	7 –	5 9	6 –	19
A_3	4 –	5 8	8 –	11 –	6 –	8
A_4	10 –	11 –	12 6	9 3	8 1	10
b_j	8	10	6	12	5	41

Хотя решение вопроса о том, какому изменению подлежат базисные переменные при введении в базис новой переменной, зависит от этой переменной и от конкретного вида Т-задачи, можно сформулировать некоторые общие для всех Т-задач изменения базиса. Переменная Q должна один раз появиться в поле Т-таблицы, соответствующей свободной переменной, а в остальных случаях – в полях, соответствующих базисным переменным. Поскольку сумма элементов i-й строки a_i (i = 1, ..., m) и сумма элементов j-го столбца b_j (j = 1, ..., m) Т-таблицы должны сохраниться, переменная Q может или не появиться вообще, или появиться четное число раз в каждой строке и каждом столбце Т-таблицы, причем в половине случаев со знаком минус.

Можно доказать, что введение каждой новой переменной в базис обуславливает однозначную схему изменения базисных переменных. Это означает, что переменная Q занесена в какую-либо свободную клетку Т-таблицы и дальнейшая расстановка Q и ($-Q$) по базисным клеткам Т-таблицы осуществляется единственным образом, притом так, чтобы не нарушить ограничения Т-задачи. В рассмотренной Т-задаче (см. табл. 2.4) число базисных переменных равно $m + n - 1$. Такая задача называется невырожденной. Однако и при определении опорного плана, и при его улучшении некоторые базисные переменные могут быть равны нулю. В этом случае речь идет о вырожденной Т-задаче. Для устранения врожденности и предотвращения зацикливания применяют ε – прием, в соответствии с которым рассматривают новую Т-задачу, в которой полагают: $a_i' = a_i + \varepsilon$, $i = 1, ..., m$,

$$b_j' = \begin{cases} b_j, \; j = 1, ..., n-1, \\ b_n + m\varepsilon, \; j = n, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало. Получив решение вспомогательной задачи и устремив ε к нулю, находят решение исходной Т-задачи.

Цель решения Т-задачи – составить план перевозок, соответствующий минимальной стоимости. При описании процедуры изменения базиса не рассматривались вопросы о том, какое изменение базиса обеспечит уменьшение стоимости перевозок и какой вид имеет признак оптимальности решения Т-задачи. Эти вопросы решаются с помощью метода потенциалов.

2.4. Метод потенциалов

Метод потенциалов позволяет на основе некоторого опорного плана перевозок построить за конечное число итераций решения Т-задачи. Метод основан на том факте, что для любого опорного плана могут быть найдены такие векторы $u^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $v^T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, что для всех базисных переменных опорного плана имеет метод равенство

$$u_i + v_j = c_{ij}. \qquad (2.5)$$

Переменные u_i, v_j называются симплекс-множителями или потенциалами. Выражение (2.5) представляет собой систему $m - n - 1$ линейных алгебраических уравнений с $m + n$ неизвестными. Такая система имеет бесконечное множество решений. Одно из них можно найти, положив какую-либо переменную (u_i или v_j) равной нулю. Определив значения векторов U и V как решение системы (2.5), вычислим для небазисных переменных значения

$$c'_{ij} = u_i + v_j, \qquad (2.6)$$

называемые псевдостоимостями. Тогда признак оптимальности опорного плана X имеет вид: если для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ выполняется соотношение

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \geq 0, \qquad (2.7)$$

то опорный план является оптимальным, иначе может быть построен новый опорный план, связанный с меньшим значением целевой функции. Величины Δ_{ij} играют роль относительных оценок свободных переменных x_{ij}. Поскольку решается задача минимализации, улучшение опорного плана достигается введением в базис свободной переменной x_{ij}. Для этого применяется рассмотренная процедура перехода к новому базису. Можно показать, что после введения x_{ij} в базис значение стоимости перевозок уменьшится на величину $\Delta z = \Delta_{ij}x_{ij}$.

Таким образом, алгоритм решения этой задачи методом потенциалов предусматривает следующие шаги.

1. Построить произвольный опорный план, в котором $m + n - 1$ переменных – базисные, остальные – свободные.

2. Определить потенциалы u_i, v_j для всех базисных переменных как решение системы уравнений (2.5), предварительно приняв значение одного из потенциалов равным нулю.

3. Вычислить по формуле (2.6) псевдостоимости c'_{ij} свободных переменных.

4. Проверить выполнение условий оптимальности опорного плана с помощью соотношения (2.7). Если $\Delta_{ij} \geq 0$, то для всех свободных переменных опорный план оптимален. В противном случае следует перейти к шагу 5.

5. Ввести в базис свободную переменную x_{ij}, для которой достигается минимум Δ_{ij}. Перейти к шагу 2.

Задача. Улучшить опорный план Т-задач (см. табл. 2.3) методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_5 = 3, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_4 = 5, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_4 + v_2 = 11, \\ u_4 + v_3 = 12, \\ u_4 + v_4 = 9, \\ u_4 + v_5 = 8. \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение. Компоненты векторов $u^T = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ и $v^T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ определяются как решение системы уравнений (2.8).

Таблица 2.5

Улучшение плана перевозок

Поставщик	Потребитель					a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	1 9 –	6 6 –	7 11 –	4 4 –	3 3 4	4	3
A_2	2 2 8	7 8	8 7 Q	5 5 11 – Q	4 6 –	19	4
A_3	0 4 –	5 5 8	6 8 –	3 11 –	2 6 –	8	2
A_4	6 10 –	11 11 2	12 12 6 – Q	9 9 1 + Q	8 8 1	10	8
b_j	8	10	6	12	5	41	–
v_j	–2	3	4	1	0	–	–

Положив $v_5 = 0$, находим $u^T = (2, 4, 2, 80)$, $v^T = (–2, 3, 4, 1, 0)$. Результаты вычислений псевдостоимостей свободных переменных записаны в верхнем левом углу табл. 2.5. Для удобства вычислений дополнительно вводится столбец u_i и строка v_j. Клетки, соответствующие базисным переменным, обведены жирными линиями.

Поскольку $\Delta_{23} = c_{23} - c_{23}^{'}$ = 7 – 8 = –1 < 0, опорный план не оптимален и его возможно улучшить введением в базис переменной x_{23}. Кроме того, запишем также переменную Q с разными знаками в некоторые базисные клетки табл. 2.5, чтобы сохранить поставки и заказы для каждого пункта. Из условия неотрицательности всех перевозок по табл. 2.5 определяем, что x_{23} = Q. При этом из базиса выводится переменная x_{43}, а значение целевой функции уменьшается на величину Δz = $|\Delta_{23}|x_{23}$ = 6. Новый опорный план, а также результаты расчета соответствующих ему потенциалов псевдостоимостей свободных переменных приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Оптимальный план перевозок

Поставщик	Потребитель					a_i	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	1 9 –	6 6 –	6 11 –	4 4 –	3 3 4	4	3
A_2	2 2 8	7 8	7 7 6	5 5 5	4 6 –	19	4
A_3	0 4 –	5 5 8	5 8 –	3 11 –	2 6 –	8	2
A_4	6 10 –	11 11 2	11 12 –	9 9 7	8 8 1	10	8
b_j	8	10	6	12	5	41	–
v_j	–2	3	3	1	0	–	–

Сравнив значения стоимостей и псевдостоимостей, видим, что условие оптимальности (2.7) выполнено, следовательно, опорный план (см. табл. 2.6) является оптимальным. Ему соответствует минимальная стоимость перевозок z = 228.

2.5. Открытые транспортные задачи

До сих пор предполагалось, что количество продукции, хранящейся у поставщиков, равно количеству продукции, необходимой потребителям, т.е. справедливо равенство (2.1).

Рассмотрим так называемые открытые Т-задачи, в которых или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j, \text{ или } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2.9)$$

Несмотря на то, что в первом случае нельзя удовлетворить заявки всех потребителей, а во втором – вывезти всю продукцию от поставщиков, можно построить опорный план, соответствующий минимальным издержкам. Введением дополнительного поставщика или потребителя обе Т-задачи можно свести к обычной Т-задаче.

Допустим, что $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Тогда дополним список из m поставщиков еще одним поставщиком, запас продукции которого составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ единиц. Стоимости перевозок между (m + 1)-м (фиктивным) поставщиком и потребителями принимаются равными нулю. Таким образом, размерность Т-задачи увеличивается до $n(m + 1)$. Новая Т-задача далее решается, как обычная Т-задача. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то введением ($n$ + 1)-го (фиктивного) потребителя со спросом $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ открытая Т-задача сводится к обычной Т-задаче размерности $(n + 1)m$.

2.6. Задачи транспортного типа с учетом дополнительных требований

При некоторых условиях перевозки груза из определенного пункта отправления A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что тарифы перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j являются сколь угодно большой величиной M и при этом условии находят решение новой транспортной задачи. Если при этом потребность данного потребителя не превышает наличия груза у остальных поставщиков, то клетка A_iB_j в оптимальном решении останется незагруженной.

В определенных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j требуется обязательно перевезти z_{ij} единиц груза. Тогда в клетку A_iB_j таблицы данных транспортной задачи записывается указанное число z_{ij} и в дальнейшем эту клетку не рассматривают, считают свободной со сколь угодно большим тарифом M.

Если требуется найти решение транспортной задачи, при котором из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза v_{ij}, то для решения такой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на v_{ij} единиц. После этого определяют оптимальный план новой задачи, на основании которого получают опорный план исходной задачи, добавив в клетку A_iB_j величину v_{ij}.

2.7. Пример решения транспортной задачи с помощью Excel

Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10 и 20 ед. Тарифы перевозок единицы продукции для каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Необходимо ввести исходные данные и зависимости описанные в математической модели (см. рис. 2.1). Для задания формул функциональных ограничений используйте кнопку $\sum$ на панели инструментов, затем выделите массив, данные которого должны быть просуммированы.

Для задания целевой функции используйте математическую функцию СУММПРОИЗВ. Если режим представления формул отключен, то данные будут как на рис. 2.2.

Затем выполнить команду Сервис, Поиск решения и в появившемся диалоговом окне (см. рис. 2.3):

- ввести целевую ячейку $F$7;
- отметить условие, что решаемая задача на минимум;
- ввести изменяемые ячейки, выделив мышью массив $B$3:$E$5;
- для ввода ограничений нажать кнопку Добавить, а затем ввести ограничения. Обвести мышью массив $B$3:$E$5 и задать условие, что искомые решения целые и больше нуля. Обвести мас-

сив, содержащий формулы ограничений, выбрать знак равенства и обвести массив, содержащий ограничения;

- нажать кнопку Параметры и установить условие, что модель линейная;
- нажать кнопку ОК;
- вернуться в окно Поиск решения и нажать кнопку Выполнить.

Результат поиска решения представлен на рис. 2.4.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		пункт1	пункт2	пункт3	пункт4	
3	объект1	10	20	0	20	50
4	объект2	20	0	10	0	30
5	объект3	0	10	0	0	10
6		30	30	10	20	
7	Общая стоимость					140
8						
9		Тарифы перевозок				
10		пункт1	пункт2	пункт3	пункт4	Огр.по запасам
11	объект1	1	2	4	1	50
12	объект2	2	3	1	5	30
13	объект3	3	2	4	4	10
14	Огр.по потребн.	30	30	10	20	

Рис. 2.4. Результат поиска решения

2.8. Задания для самостоятельного выполнения практических работ

2.8.1. Решение транспортной задачи

Решить транспортную задачу, используя рассмотренные методы.

Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных А1, А2 и А3 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных В1, В2, В3, В4 и В5 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой продукции, задаются матрицей С.

Вариант 1

$A1 = 180$ $A2 = 60$ $A3 = 80$

$B1 = 120$ $B2 = 40$ $B3 = 60$ $B4 = 80$ $B5 = 20$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$A1 = 180$ $A2 = 350$ $A3 = 20$

$B1 = 110$ $B2 = 90$ $B3 = 120$ $B4 = 80$ $B5 = 150$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$A1 = 80$ $A2 = 160$ $A3 = 150$

$B1 = 120$ $B2 = 50$ $B3 = 60$ $B4 = 100$ $B5 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$A1 = 220$ $A2 = 160$ $A3 = 80$

$B1 = 120$ $B2 = 80$ $B3 = 60$ $B4 = 100$ $B5 = 100$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$A1 = 180$ $A2 = 160$ $A3 = 70$

$B1 = 60$ $B2 = 50$ $B3 = 60$ $B4 = 80$ $B5 = 160$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$A1 = 90$ $A2 = 150$ $A3 = 140$

$B1 = 120$ $B2 = 70$ $B3 = 50$ $B4 = 100$ $B5 = 40$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 12 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$A1 = 280$ $A2 = 160$ $A3 = 170$

$B1 = 90$ $B2 = 140$ $B3 = 60$ $B4 = 110$ $B5 = 210$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$A1 = 180$ $A2 = 350$ $A3 = 20$

$B1 = 110$ $B2 = 90$ $B3 = 120$ $B4 = 80$ $B5 = 150$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 11 & 3 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$A1 = 180$ $A2 = 60$ $A3 = 150$

$B1 = 120$ $B2 = 50$ $B3 = 60$ $B4 = 100$ $B5 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 11 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$A1 = 220$ $A2 = 160$ $A3 = 180$

$B1 = 120$ $B2 = 80$ $B3 = 160$ $B4 = 110$ $B5 = 90$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & 12 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$A1 = 280$ $A2 = 160$ $A3 = 170$

$B1 = 60$ $B2 = 150$ $B3 = 160$ $B4 = 80$ $B5 = 160$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$A1 = 110$ $A2 = 150$ $A3 = 160$

$B1 = 120$ $B2 = 90$ $B3 = 50$ $B4 = 100$ $B5 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8.2. Постройте опорный план. Построить опорные планы следующих задач и проверить их на оптимальность

Вариант 1

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	16	30	17	10	16	4
*A*2	20	27	26	9	23	6
*A*3	13	4	22	3	1	10
*A*4	3	1	5	4	24	10
Заявки	7	7	7	7	2	

Вариант 2

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	17	20	9	26	25	15
*A*2	3	4	5	15	4	15
*A*3	19	2	22	4	13	15
*A*4	20	7	2	17	19	15
Заявки	11	11	11	16	11	

Вариант 3

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	10	12	5	6	7	20
*A*2	11	3	4	15	10	12
*A*3	2	7	8	9	2	20
*A*4	8	11	12	5	15	20
Заявки	20	15	15	15	15	

Вариант 4

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	20	22	21	15	10	15
*A*2	7	10	20	10	21	15
*A*3	10	11	12	17	21	20
*A*4	16	18	10	12	11	10
Заявки	15	10	10	10	5	

Вариант 5

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	22	11	12	15	18	100
*A*2	15	14	23	17	19	50
*A*3	6	7	5	7	15	100
*A*4	12	12	10	7	14	80
Заявки	70	70	70	70	70	

Вариант 6

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	15	11	22	19	11	20
*A*2	21	18	11	4	3	20
*A*3	26	29	3	26	24	20
*A*4	26	11	3	19	27	20
Заявки	15	11	22	19	11	

Вариант 7

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	16	3	17	10	16	10
*A*2	20	27	26	9	23	20
*A*3	13	4	22	3	1	10
*A*4	3	1	5	4	24	10
Заявки	12	12	15	20	12	

Вариант 8

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	6	3	7	10	6	4
*A*2	20	7	6	9	3	6
*A*3	13	4	12	3	1	10
*A*4	3	1	5	4	14	10
Заявки	5	5	5	5	5	

Вариант 9

Поставщик	Потребитель					**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	5	5	9	14	12	20
*A*2	9	10	15	12	20	10
*A*3	22	5	15	10	6	10
*A*4	12	11	20	14	6	35
Заявки	15	25	15	15	10	

Вариант 10

Поставщик	Потребитель					Запасы
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	4	5	8	9	10	25
*A*2	10	12	7	5	10	25
*A*3	11	16	7	10	15	25
*A*4	20	4	12	17	8	30
Заявки	20	30	30	10	10	

Вариант 11

Поставщик	Потребитель					Запасы
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	10	5	8	9	12	7
*A*2	11	15	14	8	7	7
*A*3	11	4	6	10	15	9
*A*4	7	15	12	8	9	10
Заявки	5	5	10	5	5	

Вариант 12

Поставщик	Потребитель					Запасы
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	
*A*1	16	20	17	10	16	40
*A*2	20	27	26	9	23	60
*A*3	13	4	22	3	11	70
*A*4	3	11	5	4	24	70
Заявки	30	30	50	50	50	

2.8.3. Решите транспортную задачу с запрещающими перевозками

Вариант 1

Поставщик	Потребитель				Запасы
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	5	4	10	500
*A*2	8	8	2	5	400
*A*3	–	8	2	5	500
*A*4	9	4	–	6	200
Заявки	400	200	550	250	

Вариант 2

Поставщик	Потребитель				Запасы
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	5	7	12	150
*A*2	8	8	2	–	100
*A*3	5	–	7	5	200
*A*4	2	4	15	6	150
Заявки	100	50	250	100	

Вариант 3

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	70	50	18	–	30
*A*2	38	30	45	50	25
*A*3	27	25	60	45	40
*A*4	25	70	50	80	50
Заявки	70	50	18	–	

Вариант 4

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	6	5	4	–	500
*A*2	8	8	2	5	400
*A*3	8	8	2	5	500
*A*4	9	–	7	6	100
Заявки	400	200	550	250	

Вариант 5

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	–	12	15	10	15
*A*2	18	12	–	20	20
*A*3	12	20	15	12	20
*A*4	25	15	17	10	20
Заявки	15	20	20	25	

Вариант 6

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	70	50	–	40	30
*A*2	38	30	45	50	25
*A*3	–	25	60	45	40
*A*4	25	70	50	80	50
Заявки	30	40	20	50	

Вариант 7

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	5	7	–	200
*A*2	8	8	2	5	600
*A*3	8	8	7	5	500
*A*4	2	4	–	6	200
Заявки	400	500	250	250	

Вариант 8

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	22	50	20	40	30
*A*2	38	–	45	50	25
*A*3	40	25	16	45	50
*A*4	25	70	50	–	50
Заявки	30	40	25	50	

Вариант 9

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	12	15	20	100
*A*2	18	12	20	20	200
*A*3	–	20	15	12	100
*A*4	25	15	17	–	120
Заявки	150	100	120	200	

Вариант 10

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	22	50	20	40	55
*A*2	38	30	45	40	25
*A*3	40	25	–	45	50
*A*4	25	70	50	–	50
Заявки	30	55	25	50	

Вариант 11

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	12	15	–	20
*A*2	8	7	15	20	20
*A*3	10	6	9	12	50
*A*4	25	15	17	15	50
Заявки	15	55	55	50	

Вариант 12

Поставщик	Потребитель				**Запасы**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	12	15	8	100
*A*2	8	12	10	11	100
*A*3	–	9	15	12	100
*A*4	25	15	17	–	150
Заявки	200	100	120	200	

Примечание. Прочерк в таблицах означает запрещение перевозок.

2.9. Целочисленные задачи линейного программирования

Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.10}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, ..., m), \tag{2.11}$$

$$x_j \geq 0 \text{ – целые } (j = 1, ..., n). \tag{2.12}$$

Если найти решение задачи симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана задачи требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является метод Гомори, в основу которого положен описанный выше симплексный метод.

Метод Гомори. Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи без учета целочисленности переменных. После того как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования. Если же в оптимальном плане задачи переменная x_j принимает дробное значение, то к системе уравнений добавляют неравенство и находят решение задачи.

$$\sum f(a_{ij}^*)\, x_j \geq f(b_i^*), \tag{2.13}$$

где a_{ij}^* и b_i^* – преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i, значения которых взяты из последней симплекс-таблицы; $f(a_{ij}^*)$ и $f(b_i^*)$ – дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа *a* понимается наименьшее неотрицательное число *b* такое, что разность между *a* и *b* есть целое).

Если в оптимальном плане задачи дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане задачи переменные принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное количество итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются ***частично целочисленными***. Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых получается из предыдущей с помощью введения дополнительного ограничения. В этом случае такое ограничение имеет вид:

$$\sum v_{ij} x_j \geq f(b_i^*), \tag{2.14}$$

где v_{ij} определяется из следующих соотношений:

1) если x_j принимает целочисленные значения, то

$$v_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left| a_{ij}^* \right| & \text{при } a_{ij}^* < 0; \end{cases} \tag{2.15}$$

2) если x_j, принимает нецелочисленные значения, то

$$v_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} (1 - f(a_{ij}^*)) & \text{при } f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \tag{2.16}$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает в себя следующие основные этапы.

1. Используя симплексный метод, находят решение задачи без учета требования целочисленности переменных.

2. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (2.10–2.12) имеет максимальное

дробное значение, а в оптимальном плане задачи (2.10–2.14) должна быть целочисленной.

3. Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, получающейся из задачи (2.10–2.12) в результате присоединения дополнительного ограничения.

В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана задачи (2.10–2.13) или установления ее неразрешимости.

2.9.1. Пример решения задачи целочисленного программирования

Методом Гомори найти максимальное значение функции, учитывая целочисленность и неотрицательность переменных x_1 и x_2:

$$(x_1 + 4x_2) \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \le 19/3,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 4.$$

Решение. Перепишем условие так:

$$(x_1 + 4x_2) \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_j \ge 0 \ (j = 1...4),$$

причем целыми должны быть только x_1 и x_2.

Находим симплексным методом решение поставленной задачи.

Таблица 2.7

Симплекс-таблица после II итерации

Строка	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	19/3	2	1	1	0
2	P_4	0	4	1	3	0	1
			0	–1	–4	0	0
1	P_3	0	5	5/3	0	1	–1/3
2	P_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3
			16/3	1/3	0	0	4/3

После II итерации получаем оптимальный план X = (0; 4/3; 5; 0) (табл. 2.7). При этом плане переменная x_2 принимает нецелое значение (4/3), поэтому необходимо перейти к новой задаче с дополнительным условием $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$ или

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1,$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,..., \ 5).$$

Находим симплексным методом решение новой поставленной задачи.

Таблица 2.8

Симплекс-таблица с оптимальным планом

Строка	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1 2	P_3 P_2	0 4	5 4/3	5/3 1/3	0 1	1 0	–1/3 1/3	0 0
3	P_5	0	–1	–1	0	0	–1	1
			16/3	1/3	0	0	4/3	0
1	P_3	0	10/3	0	0	1	–2	5/3
2	P_2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	P_1	1	1	1	0	0	1	–1
			5	0	0	0	1	1/3

Получаем оптимальный план X = (1; 1; 10/3; 0; 0) (табл. 2.8). При этом плане переменные x_1 и x_2 принимают целые значения.

2.9.2. Задачи целочисленного программирования

Задание 1. Решить задачу целочисленного программирования, учитывая целочисленность и неотрицательность переменных x_1 и x_2.

Вариант 1. $(x_1 + 3x_2) \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leq 5,$
$2x_1 + 2x_2 \leq 7.$

Вариант 2. $(9x_1 + 3x_2) \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leq 5,$
$2x_1 + 2x_2 \leq 9.$

Вариант 3. $(10x_1 + 6x_2) \to \max,$
$x_1 + 2x_2 \leq 8,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 5.$

Вариант 4. $(3x_1 + 5x_2) \to \max,$
$2x_1 + x_2 \leq 4,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 7.$

Вариант 5. $(x_1 + 4x_2) \to \max$,
$2x_1 + x_2 \le 5$,
$2x_1 + 2x_2 \le 7$.

Вариант 6. $(2x_1 + x_2) \to \max$,
$3x_1 + 8x_2 \le 48$,
$5x_1 + 2x_2 \le 30$.

Вариант 7. $(3x_1 + 5x_2) \to \max$,
$2x_1 - 3x_2 \le 6$,
$x_1 + 2x_2 \le 9$.

Вариант 8. $(3x_1 + 3x_2) \to \max$,
$2x_1 + x_2 \le 5$,
$x_1 + 2x_2 \le 6$.

Вариант 9. $(2x_1 + x_2) \to \max$,
$x_1 + 2x_2 \le 8$,
$3x_1 + 4x_2 \le 14$.

Вариант 10. $(13x_1 + 5x_2) \to \max$,
$4x_1 + 4x_2 \le 18$,
$2x_1 + x_2 \le 7$.

Вариант 11. $(x_1 + 3x_2) \to \max$,
$4x_1 + 4x_2 \le 18$,
$2x_1 + x_2 \le 7$.

Вариант 12. $(2x_1 + 3x_2) \to \max$,
$7x_1 + 8x_2 \le 28$,
$3x_1 + 5x_2 \le 15$.

Задание 2. Решить задачи по следующему плану: составить математическую модель задачи; решить ее, используя электронные таблицы.

Задача 1. Для перевозок груза на трех линиях могут быть использованы суда трех типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуется данными, приведенными в табл. 2.9. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объемы перевозок на каждой из линий. Определите, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учетом возможного времени их эксплуатации.

Таблица 2.9

Данные задачи 1

Тип судна	Производительность судов, млн. тонно-миль в сутки, на линии			Общее время эксплуатации судов, сутки
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданный объем перевозок, млн. тонно-миль	3000	5400	3300	

Задача 2. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах соответственно 24, 31, 18 шт. Каждый лист может быть разрезан на заготовки двумя способами. Величина отходов при каждом способе разреза приведена в табл. 2.10.

Таблица 2.10

Данные задачи 2

Вид заготовки	Количество заготовок при раскрое	
	1-й способ	2-й способ
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов	1,2	1,6

Определить, сколько листов фанеры и каким способом следует раскроить, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Задача 3. На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диван-кровати, кресла-кровати и тахты.

Определить план производства продукции, при котором прибыль от реализации будет максимальной. Нормы расхода ресурса на единицу продукции и общее количество ресурса приведены в табл. 2.11.

Таблица 2.11

Данные задачи 3

Используемые ресурсы	Нормы расхода ресурса на единицу продукции					Общее к-во ресурса
	Стол	Шкаф	Диван-кровать	Кресло-кровать	Тахта	
Трудозатраты, ч	4	8	12	9	10	3456
Древесина, $м^3$	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань, м	–	–	6	4	5	2400
Прибыль от реализации, у.е.	8	10	16	14	12	
Выпуск минимальный	120	90	20	40	30	
Выпуск максимальный	480	560	180	160	120	

Задача 4. Есть четыре варианта использования ресурсов. Прибыль, которую приносит каждый вариант, ресурсы как потребные, так и располагаемые, приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Данные задачи 4

Ресурс	Вариант						Наличие ресурса
	1	2	3	4	5	6	
Трудовые	10	15	22	28	31	38	80
Финансы	200	180	240	220	220	250	750
Прибыль	70	80	90	120	150	210	–

Требуется выбрать такие варианты использования ресурсов, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

Задача 5. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами *A* и *B*. Машина *A* спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина *B* – для литровых, но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии с приведенными в табл. 2.13 сведениями о работе машин.

Таблица 2.13

Данные задачи 5

Машина	Количество бутылок, заполняемых в минуту	
	Пол-литровые	Литровые
A	50	20
B	40	30

Каждая машина работает ежедневно по 5 часов. Прибыль от пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а от литровой – 7 центов. При этом рынок принимает не более 7000 пол-литровых бутылок и 3500 литровых ежедневно. Производитель хочет максимизировать свою прибыль при имеющихся средствах.

Задача 6. Из листового проката нужно выкроить заготовки четырех видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в следующей табл. 2.14.

Таблица 2.14

Данные задачи 6

Длина заготовки, см	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе следующим способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	–	–	–	–	–
50	–	1	–	–	2	–	1	1	3	2	1	–	–
65	–	–	1	–	–	2	1	–	–	1	2	1	–
85	–	–	–	1	–	–	–	1	–	–	–	1	2
Величина отходов, см	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

2.9.3. Задачи параметрического программирования

Задание 1. Найти решение задачи при условии неотрицательности переменных и $\lambda \in -\infty;\infty$:

Вариант 1

$(2-\lambda)x_1+(3+\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1+x_2 \le 100,$

$x_1+2x_2 \le 50.$

Вариант 2

$(-2\lambda)x_1+(4-\lambda)x_2 \to \max,$

$3x_1-2x_2 \le 10,$

$x_1+2x_2 \le 15.$

Вариант 3

$5(1-\lambda)x_1-15x_2 \to \max,$

$2x_1+4x_2 \le 50,$

$x_1-3x_2 \le 60.$

Вариант 4

$(-2\lambda)x_1+(4-\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1-2x_2 \le 5,$

$x_1+2x_2 \le 4.$

Вариант 5

$(2-\lambda)x_1+(1+2\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1-x_2 \le 200,$

$x_1+2x_2 \le 400.$

Вариант 6

$(1-\lambda)x_1+(3-\lambda)x_2 \to \max,$

$3x_1+2x_2 \le 30,$

$4x_1+8x_2 \le 40.$

Вариант 7

$(1-\lambda)x_1+(\lambda-2)x_2 \to \max,$

$x_1+x_2 \le 4,$

$-2x_1-x_2 \le 1.$

Вариант 8

$(-2\lambda)x_1+(1-\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1+3x_2 \le 12,$

$3x_1+x_2 \le 9.$

Вариант 9

$(1+\lambda)x_1+(\lambda-3)x_2 \to \max,$

$x_1+4x_2 \le 20,$

$3x_1+x_2 \le 30.$

Вариант 10

$(3-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1+x_2 \le 10,$

$-2x_1+3x_2 \le 15.$

Вариант 11

$-\lambda x_1-(1+\lambda)x_2 \to \max,$

$5x_1+3x_2 \le 48,$

$3x_1+2x_2 \le 30.$

Вариант 12

$(2-\lambda)x_1+(6-\lambda)x_2 \to \max,$

$2x_1+x_2 \le 200,$

$x_1+2x_2 \le 100.$

Задание 2. Решить задачи, используя Excel.

Задача 1. Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех типов, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы, чтобы прибыль от реализации была максимальной. Нормы расхода, наличие располагаемого ресурса, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены в табл. 2.15.

Таблица 2.15

Ресурсы

Ресурс	Вид продукта				Наличие ресурса
	1	2	3	4	
Трудовой	1	1	1	1	16
Сырьевой	6	5	4	3	110
Финансовый	4	6	10	13	50
Прибыль	60	70	120	130	

Требуется просмотреть и проанализировать отчет по устойчивости.

Решить задачу при разных значениях в ячейке табл. 2.15 Наличие ресурса – Финансовый: 50, 100, 150, 200, 250.

Задача 2. Имеется несколько потенциальных объектов для инвестирования. Данные об этих объектах приведены в табл. 2.16.

Для приобретения активов должны быть соблюдены условия:

- суммарный объем капитала должен составлять 100000$;
- доля средств, вложенных в один объект, не может превышать четверти всего объема капитала;
- не менее половины средств должно быть вложено в долгосрочные активы (сроком погашения не ранее 2009 г.);
- доля активов, имеющих надежность менее 4-х баллов, не может превышать трети от суммарного объема.

Таблица 2.16

Объекты для инвестирования

Объект	Доходность, %	Срок выкупа, год	Надежность, балл
А	5.5	2006	5
Б	6.0	2010	4
В	8.0	2015	2
Г	7.5	2007	3
Д	5.3	2005	5
Е	7.0	2008	4

Требуется определить, сколько средств и куда следует вложить, чтобы получить максимальную прибыль.

3. ЗАДАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

3.1. Варианты задач линейного программирования

1. Преобразовать следующие задачи линейного программирования в каноническую форму:

1.1 $z = 3x_1 + 3x_2 \to \min;$
$3x_1 - 4x_2 \geq 7,$
$-x_2 \leq 0,$
$3x_1 - 4x_2 = 5,$
$2x_1 - 4x_2 \leq 7,$
$x_2 \geq 0.$

1.2 $z = 2x_1 - x_2 \to \min;$
$-x_2 \leq 6,$
$-4x_2 \geq 7,$
$x_1 = 5,$
$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$

1.3 $z = -x_1 - 3x_3 \to \max;$
$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6,$
$-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 8,$
$x_1 + 2x_3 \geq 8,$
$x_2 \geq 0, x_3 \leq 0.$

1.4 $z = 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \max;$
$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8,$
$-4x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 0,$
$x_1 - 3x_2 \leq 4,$
$x_2 \geq 0.$

1.5 $z = 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \min;$
$-x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 0,$
$3x_1 - x_2 - x_3 \geq 8,$
$3x_1 + 4x_3 \leq 7,$
$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8,$
$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$

1.6 $z = -4x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min;$
$2x_3 \geq 8,$
$4x_1 + x_3 \leq 6,$
$-4x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6,$
$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0.$

1.7 $z = 2x_2 + 2x_3 \to \min;$
$4x_1 + 2x_3 \leq 4,$
$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4,$
$x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6,$
$x_1 \leq 0, x_3 \geq 0.$

1.8 $z = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5,$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 0,$
$2x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1 \leq 0, x_3 \geq 0.$

1.9 $z = -x_1 + 2x_3 \to \max;$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 5,$
$4x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 0,$
$2x_2 + 4x_3 \geq 6,$
$x_2 + 2x_3 = 8,$
$x_1 \leq 0, x_3 \geq 0.$

1.10 $z = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \to \min;$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6,$
$2x_1 \geq 3,$
$-3x_2 + x_3 \leq 3,$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$x_2 \leq 0, x_3 \geq 0.$

1.11 $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min;$
$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3,$
$4x_1 + 2x_2 \leq 7,$
$2x_1 + 3x_3 = 5,$
$-2x_1 + 2x_2 = 5,$
$x_3 \geq 0.$

1.12 $z = 3x_1 + x_2 \to \min;$
$4x_1 + x_2 \leq 5,$
$2x_1 - 3x_2 \geq 7,$
$x_1 - 3x_2 \leq 7,$
$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$

1.13 $z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max;$
$-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$
$2x_2 + 3x_3 \geq 6,$
$3x_1 - x_2 + x_3 = 5,$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$

1.14 $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$2x_1 + 4x_2 \geq 4,$
$-3x_1 + 4x_2 \leq 4,$
$x_1 + 4x_2 \geq 5,$
$3x_1 \geq 8,$
$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0.$

1.15 $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$
$x_2 + 2x_3 \geq 7,$
$x_1 + 2x_3 \leq 7,$
$4x_1 + 3x_3 = 7,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$
$x_1 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.16 $z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min;$
$-x_2 + x_3 \leq 5,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0.$

1.17 $z = 2x_2 - 3x_3 \to \max;$
$2x_1 - x_2 \leq 3,$
$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6,$
$x_1 + x_3 \leq 6,$
$2x_1 + x_3 \leq 2,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \leq 0.$

1.18 $z = -3x_1 - 2x_3 \to \min;$
$-3x_1 - 3x_3 \leq 0,$
$3x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 7,$
$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 0,$
$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.19 $z = 3x_1 + x_2 \to \min;$
$-3x_1 - 4x_3 \leq 5,$
$x_2 - 2x_3 \leq 2,$
$3x_1 + 3x_3 \leq 7,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.20 $z = -2x_1 + 2x_3 \to \max;$
$-4x_3 \geq 8,$
$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5,$
$4x_1 - 2x_2 \leq 7,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.21 $z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min;$
$2x_1 + 2x_3 \leq 3,$
$4x_1 + 2x_2 \leq 8,$
$2x_1 + 4x_2 = 8,$
$x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 6,$
$x_1 \geq 0.$

1.22 $z = -2x_2 - 2x_3 \to \min;$
$-x_1 + 2x_3 \geq 8,$
$-4x_2 + 3x_3 \geq 7,$
$4x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 6,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0.$

1.23 $z = 4x_1 + 4x_3 \to \max;$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4,$
$-4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 7,$
$-4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 6,$
$x_1 \geq 0.$

1.24 $z = x_1 + x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \geq 8,$
$4x_1 = 7,$
$3x_1 + 4x_2 \geq 7,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 8.$

1.25 $z = -\,3x_2 \to \max;$
$2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 6,$
$2x_2 \leq 4,$
$x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq 4,$
$-x_2 - x_3 \leq 8,$
$x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.26 $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min;$
$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3,$
$2x_1 \geq 4,$
$-x_1 + 2x_3 \leq 3,$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 7,$
$x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

1.27 $z = 4x_1 + 2x_2 \to \min;$
$3x_1 = 0,$
$x_1 + 4x_2 \geq 7,$
$3x_1 - 3x_2 \geq 8,$
$x_1 + 3x_2 \geq 5,$
$x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0.$

1.28 $z = x_1 + 2x_3 \to \min;$
$2x_2 - 3x_3 \leq 0,$
$-4x_2 \geq 8,$
$3x_1 + x_2 = 0,$
$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 2,$
$x_2 \geq 0.$

1.29 $z = -2x_1 \to \min;$
$-4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7,$
$x_1 \geq 3,$
$4x_1 - 2x_3 \geq 7,$
$-3x_1 + 2x_2 \leq 6,$
$x_2 \leq 0.$

1.30 $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$
$x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 6,$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3,$
$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 3,$
$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0.$

2. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом:

2.1 $z = 2x_1 + 4x_2 \to \min;$
$x_1 - 3x_2 \leq 8,$
$-4x_1 + 2x_2 \geq 5,$
$-2x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.2 $z = 3x_1 \to \max;$
$4x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$4x_1 + 3x_2 \leq 5,$
$2x_1 - x_2 \leq 4,$
$3x_1 + 2x_2 \leq 8,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.3 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$
$3x_2 \leq 4,$
$2x_1 - 2x_2 \leq 6,$
$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$
$4x_1 + 2x_2 \geq 4,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.4 $z = -3x_1 + x_2 \to \min;$
$x_1 + 4x_2 \leq 6,$
$3x_1 + 4x_2 \leq 4,$
$4x_1 + 4x_2 \leq 0,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.5 $z = 2x_1 - x_2 \to \min;$
$-4x_1 + 4x_2 \leq 6,$
$-x_1 + 3x_2 \leq 5,$
$3x_1 - x_2 \leq 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.6 $z = 4x_1 - x_2 \to \min;$
$4x_2 \leq 5,$
$2x_1 + 4x_2 \leq 0,$
$2x_1 \leq 3,$
$-4x_1 + 2x_2 \leq 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.7 $z = -3x_2 \to \max;$
$4x_1 - 2x_2 \geq 5,$
$3x_1 + x_2 \leq 5,$
$4x_1 + x_2 \geq 4,$
$-4x_1 + 4x_2 \leq 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.8 $z = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$2x_1 - 3x_2 \geq 4,$
$2x_1 + 2x_2 \leq 4,$
$4x_1 + 3x_2 \geq 5,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2.9 $z = x_1 + 3x_2 \to \min;$
$-4x_1 + x_2 \le 7,$
$x_1 + 2x_2 \le 5,$
$x_1 + 3x_2 \ge 0,$
$2x_1 + x_2 \le 7,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.10 $z = x_1 - x_2 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 \le 5,$
$4x_1 + 4x_2 \ge 4,$
$-x_1 + x_2 \le 6,$
$4x_1 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.11 $z = x_1 + 3x_2 \to \min;$
$-x_1 + 4x_2 \ge 6,$
$-3x_2 \le 4,$
$2x_1 + x_2 \le 8,$
$3x_1 - 3x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.12 $z = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$-x_1 \le 6,$
$x_1 + 4x_2 \le 6,$
$x_1 - 3x_2 \le 5,$
$-2x_2 \le 5,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.13 $z = -4x_2 \to \max;$
$-x_1 \ge 4,$
$2x_1 + x_2 \ge 5,$
$-3x_2 \ge 8,$
$-2x_1 + 4x_2 \ge 5,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.14 $z = -4x_1 + 2x_2 \to \min;$
$x_1 - 3x_2 \le 3,$
$3x_1 - 4x_2 \le 4,$
$-3x_1 + 2x_2 \ge 7,$
$3x_1 + 4x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.15 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$
$2x_2 \ge 5,$
$2x_1 - 3x_2 \le 7,$
$4x_1 + 3x_2 \ge 8,$
$-3x_1 + x_2 \le 8,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.16 $z = -4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$4x_2 \le 4,$
$x_1 + 3x_2 \le 3,$
$4x_1 - 2x_2 \le 7,$
$x_1 + 3x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.17 $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$
$2x_2 \le 8,$
$4x_1 - x_2 \le 5,$
$3x_1 - 3x_2 \le 5,$
$4x_1 - 2x_2 \ge 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.18 $z = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$
$-4x_1 + 3x_2 \le 4,$
$-x_1 + 2x_2 \le 6,$
$2x_1 \le 6,$
$x_1 + 3x_2 \ge 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.19 $z = -3x_1 + x_2 \to \min;$
$x_1 + 3x_2 \ge 5,$
$4x_1 - 4x_2 \le 6,$
$4x_1 - x_2 \le 6,$
$x_1 + 3x_2 \ge 5,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.20 $z = 2x_1 - 2x_2 \to \min;$
$2x_1 \le 2,$
$-x_1 + 2x_2 \le 6,$
$3x_1 - 4x_2 \le 8,$
$x_1 - 3x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.21 $z = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$-4x_1 + 4x_2 \le 8,$
$4x_1 + 3x_2 \ge 6,$
$-2x_1 + 3x_2 \le 0,$
$2x_1 + 2x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.22 $z = -2x_2 \to \min;$
$2x_1 + 3x_2 \le 8,$
$-2x_1 + 3x_2 \ge 3,$
$-2x_1 + x_2 \le 6,$
$2x_1 + 4x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.23 $z = -4x_1 + 4x_2 \to \max;$
$-3x_1 + 2x_2 \le 4,$
$-x_1 + 4x_2 \le 7,$
$4x_1 + 4x_2 \ge 7,$
$x_1 + 4x_2 \le 8,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.24 $z = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$
$-4x_1 + 3x_2 \le 8,$
$x_1 + 4x_2 \le 6,$
$3x_2 \le 5,$
$3x_1 + x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.25 $z = -x_1 + 4x_2 \to \min;$
$4x_1 + 3x_2 \ge 0,$
$x_1 - 3x_2 \le 6,$
$4x_1 + 4x_2 \le 4,$
$x_1 + 3x_2 \le 5,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.26 $z = 3x_2 \to \min;$
$x_1 - 4x_2 \le 0,$
$4x_1 - 3x_2 \le 8,$
$4x_1 + 2x_2 \ge 5,$
$-3x_1 + 3x_2 \ge 8,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.27 $z = -3x_1 \to \max;$
$3x_2 \ge 4,$
$2x_1 + x_2 \ge 4,$
$-4x_1 + 3x_2 \le 4,$
$-3x_1 + x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.28 $z = -x_2 \to \min;$
$-2x_1 + 4x_2 \ge 6,$
$-x_1 + 4x_2 \ge 7,$
$2x_1 - x_2 \le 3,$
$3x_1 + x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.29 $z = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$x_1 + 3x_2 \le 6,$
$3x_1 - x_2 \le 6,$
$4x_1 + 3x_2 \ge 6,$
$-3x_1 + 3x_2 \le 6,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2.30 $z = x_1 + x_2 \to \min;$
$4x_1 - 4x_2 \le 7,$
$4x_1 - x_2 \le 8,$
$-2x_1 + 4x_2 \ge 7,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. Решить следующие задачи линейного программирования графическим методом, предварительно преобразовав их к стандартному виду:

3.1 $z = -2x_2 - 3x_3 + 4x_5 \to \max;$
$4x_1 - x_2 + 4x_5 = 7,$
$3x_3 + x_4 - x_5 = 6,$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 7,$
$x_j \ge 0,\ j = 1,5.$

3.2 $z = -3x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max;$
$3x_1 - 3x_2 + x_4 = 7,$
$3x_1 + x_3 + x_5 = 7,$
$-x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 6,$
$x_j \ge 0,\ j = 1,5.$

3.3 $z = x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \min;$
$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5,$
$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

3.5 $z = 3x_3 - 2x_5 \rightarrow \max;$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$
$-3x_1 + x_5 = 6,$
$4x_3 + 4x_5 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.7 $z = -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$
$2x_1 + x_2 - 4x_4 = 7,$
$-4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

3.9 $z = 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \min;$
$-4x_2 + 3x_4 + x_5 = 7,$
$2x_3 + 4x_4 = 7,$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.11 $z = 3x_2 + x_3 + 3x_5 \rightarrow \min;$
$2x_3 + 4x_4 = 6,$
$x_1 + x_2 = 5,$
$-4x_3 - 4x_4 + x_5 = 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.13 $z = 2x_1 - 2x_4 + 2x_5 \rightarrow \min;$
$2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,$
$-4x_1 + 3x_3 - x_5 = 5,$
$-4x_1 - 3x_2 + x_5 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.15 $z = -3x_3 - x_4 \rightarrow \max;$
$-4x_2 + x_4 + 3x_5 = 4,$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$
$4x_1 - 2x_4 + x_5 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.17 $z = 3x_1 - 2x_3 \rightarrow \max;$
$-3x_1 + 2x_2 + x_5 = 6,$
$4x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$
$3x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.4 $z = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$
$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 7,$
$x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

3.6 $z = 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$
$-3x_1 + x_3 + 3x_5 = 7,$
$-2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7,$
$3x_1 + x_2 + 4x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.8 $z = x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \min;$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$
$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

3.10 $z = x_4 + 4x_5 \rightarrow \min;$
$-3x_1 + 4x_3 + 2x_5 = 6,$
$2x_1 + x_2 - 3x_4 = 6,$
$x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.12 $z = 4x_2 - x_3 + 4x_5 \rightarrow \min;$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5,$
$3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 4,$
$2x_1 - 2x_4 + x_5 = 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.14 $z = 4x_1 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \min;$
$-3x_2 - 2x_4 + x_5 = 6,$
$-3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0,$
$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.16 $z = 4x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max;$
$-4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7,$
$-x_3 + 3x_4 + x_5 = 3,$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.18 $z = -x_2 - 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min;$
$x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 5,$
$x_3 + x_5 = 7,$
$4x_1 + x_2 - 3x_4 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,5.$

3.19 $z = 2x_1 + 2x_3 \to \max;$
$-3x_2 + x_3 = 5,$
$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$
$2x_1 - 2x_4 + x_5 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.20 $z = 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max;$
$x_1 - x_4 = 6,$
$x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 7,$
$x_3 + 2x_4 + x_5 = 8,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.21 $z = -2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \to \max;$
$2x_3 + x_5 = 6,$
$2x_1 + 3x_3 - x_5 = 0,$
$x_1 + x_2 + x_4 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.22 $z = 4x_3 + x_5 \to \max;$
$-4x_2 + 3x_3 - 4x_5 = 6,$
$3x_1 + 3x_2 + x_5 = 8,$
$-3x_1 + 4x_3 + x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.23 $z = -2x_2 + 2x_3 - x_5 \to \max;$
$x_3 + 3x_4 + x_5 = 5,$
$-2x_1 - x_2 + 2x_4 = 4,$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.24 $z = -3x_2 - 2x_3 + 3x_5 \to \max;$
$x_1 + x_3 = 3,$
$4x_1 + 3x_2 + x_4 = 5,$
$-3x_2 + x_4 + x_5 = 6,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.25 $z = -3x_1 + 4x_3 + x_4 \to \min;$
$x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 8,$
$3x_1 + 4x_5 = 5,$
$2x_1 + 2x_3 + x_4 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.26 $z = 4x_1 + x_3 - x_4 \to \max;$
$-x_1 + x_2 + x_5 = 3,$
$x_4 - 4x_5 = 8,$
$4x_1 + x_3 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.27 $z = 4x_1 + x_3 + 3x_4 \to \min;$
$x_1 + x_2 + 4x_4 = 7,$
$3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

3.28 $z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 \to \min;$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$
$2x_2 + x_4 + 3x_5 = 0,$
$-2x_1 - 3x_4 - 4x_5 = 8,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3.29 $z = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 +$
$+ x_4 \to \min;$
$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 6,$
$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

3.30 $z = -x_1 + 2x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,$
$-3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

3.2. Варианты задач линейного программирования с использованием симплекс-метода

Решить следующие задачи:

1. $z = 3x_1 - 4x_2 + x_4 \to \min;$
$-x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6,$
$4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 - 2x_2 - 3x_4 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

2. $z = x_1 + x_2 \to \min;$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4,$
$4x_1 + 3x_4 \leq 5,$
$-3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 8,$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

3. $z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \max;$
$3x_1 + 2x_2 = 8,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 7,$
$3x_2 \geq 3,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

4. $z = -4x_1 + 4x_3 \to \min;$
$-4x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$
$3x_1 + 2x_2 = 4,$
$4x_1 + 4x_2 \geq 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

5. $z = -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 \to \max;$
$-4x_2 + 2x_3 = 5,$
$3x_2 + 2x_3 \geq 8,$
$x_1 + 4x_2 = 4,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

6. $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min;$
$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 7,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 3,$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

7. $z = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$
$2x_1 - x_2 - 2x_2 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6,$
$-3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 6,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

8. $z = 4x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max;$
$-4x_1 - 3x_2 = 4,$
$4x_1 + 4x_2 \geq 4,$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

9. $z = -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max;$
$-2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$
$-4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0,$
$x_j \geq 0, j = 1,4.$

10. $z = -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max;$
$x_1 + 3x_2 \leq 5,$
$-x_1 + 3x_2 = 7,$
$-4x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

11. $z = 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \to \min;$
$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5,$
$4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5,$
$-x_2 + 4x_3 \geq 6,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

12. $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min;$
$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 7,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 3,$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 4,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

13. $z = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6,$
$-3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 6,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

14. $z = 4x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max;$
$-4x_1 - 3x_2 = 4,$
$4x_1 + 4x_2 \geq 4,$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

15. $z = -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max;$
$-2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$
$-4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0,$
$x_j \geq 0, j = 1,4.$

16. $z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$
$3x_3 \leq 7,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8,$
$2x_2 \geq 2,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

17. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min;$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,$
$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 7,$
$x_j \geq 0, j = 1,3.$

18. $z = 3x_2 - x_3 + 3x_4 \to \min;$
$x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,$
$-x_1 - 3x_2 + 3x_4 \leq 6,$
$4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq 0,$
$x_j \geq 0, j = 1,4.$

19. $z = 3x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7,$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 7,$
$x_1 + 4x_2 \ge 0,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}3.$

20. $z = -x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 - 3x_3 \le 7,$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = 7,$
$3x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}3.$

21. $z = 4x_1 + 3x_2 +$
$+ 2x_3 + 3x_4 \to \max;$
$4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8,$
$x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$-2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

22. $z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to$
$\to \max;$
$3x_1 + 3x_3 \le 5,$
$x_2 - 2x_3 + x_4 = 7,$
$3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

23. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$
$-4x_1 + x_2 - 4x_3 = 4,$
$3x_1 + 3x_2 \ge 5,$
$-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

24. $z = 3x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min;$
$2x_1 - 2x_2 = 4,$
$3x_1 + 4x_2 \ge 6,$
$-4x_1 + x_3 = 7,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}3.$

25. $z = 3x_2 + 2x_3 \to \min;$
$-3x_2 - 4x_3 \le 5,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4,$
$4x_1 + 3x_3 + x_4 \ge 8,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

26. $z = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 4,$
$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8,$
$4x_1 - 4x_2 + 4x_3 \ge 0,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}3.$

27. $z = -2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max;$
$3x_1 + 3x_2 \le 4,$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$3x_1 + 4x_2 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}3.$

28. $z = -3x_2 - 4x_3 - 3x_4 \to \max;$
$-4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 7,$
$2x_1 + 3x_4 = 8,$
$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

29. $z = -x_1 + 4x_2 + 4x_3 +$
$+ 3x_4 \to \min;$
$4x_1 + x_4 \le 4,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 = 5,$
$-x_1 + 3x_3 - 4x_4 \ge 4,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

30. $z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 +$
$+ 2x_4 \to \max;$
$x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5,$
$x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 8,$
$2x_3 - 4x_4 \ge 0,$
$x_j \ge 0,\ j = 1{,}4.$

3.3. Варианты задач линейного программирования с использованием двойственных задач

Решив одну из задач, найти решение другой:

1. $z = -4x_2 + 3x_3 \to \max;$
$-x_1 + x_4 = 5,$
$-x_2 + x_3 = 5,$
$x_1 + 3x_2 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

2. $z = -3x_2 + 4x_4 \to \min;$
$x_1 + x_2 = 3,$
$-2x_2 + 2x_3 \geq 5,$
$-4x_3 + x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

3. $z = -x_2 + 4x_3 \to \max;$
$x_1 + 2x_3 \leq 7,$
$x_2 - 3x_3 = 5,$
$2x_1 \geq 2,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,3.$

4. $z = -3x_2 - 2x_4 \to \max;$
$2x_2 + 2x_3 \geq 5,$
$x_1 + x_4 = 7,$
$2x_2 + 3x_3 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

5. $z = 4x_1 + x_3 \to \min;$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6,$
$4x_1 \leq 4,$
$-4x_2 + 3x_3 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,3.$

6. $z = -4x_1 - 2x_3 \to \max;$
$3x_1 + 2x_3 = 5,$
$x_2 + 2x_3 = 7,$
$4x_1 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,3.$

7. $z = 4x_1 - 3x_3 \to \max;$
$x_1 + 4x_2 \leq 4,$
$3x_2 - x_3 \leq 5,$
$x_1 + 4x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,3.$

8. $z = 4x_3 \to \max;$
$-3x_1 + 3x_3 + x_4 = 3,$
$3x_1 \geq 3,$
$x_2 + 2x_3 = 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

9. $z = 3x_2 + x_3 \to \min;$
$3x_2 + 4x_3 \geq 4,$
$4x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + 2x_2 = 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

10. $z = 3x_1 - 2x_3 \to \max;$
$-2x_1 + x_2 = 5,$
$3x_1 - 2x_3 \leq 0,$
$4x_3 \geq 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,3.$

11. $z = 2x_1 + 4x_4 \to \min;$
$x_1 + x_2 = 5,$
$-x_3 + 2x_4 \geq 4,$
$-4x_3 + x_4 \geq 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

12. $z = 2x_1 - 2x_3 \to \min;$
$x_1 - 4x_4 = 7,$
$x_2 + 2x_3 = 7,$
$4x_3 - 3x_4 \geq 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

13. $z = 4x_3 + x_4 \to \min;$
$3x_2 - 3x_3 \geq 0,$
$4x_2 + x_4 = 7,$
$x_1 - 2x_3 = 8,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

14. $z = -3x_2 + 3x_3 \to \min;$
$-4x_1 + 3x_3 \geq 7,$
$x_2 + x_3 \geq 3,$
$3x_1 + x_4 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

15. $z = x_1 + 3x_2 \to \min;$
$x_2 + 4x_4 = 7,$
$x_1 + 3x_3 = 0,$
$x_3 + 3x_4 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

16. $z = x_2 + 2x_3 \to \max;$
$-2x_2 + x_3 \geq 2,$
$-x_2 + x_4 = 7,$
$x_1 + 3x_3 = 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1,4.$

17. $z = 3x_1 + x_2 \to \max;$
$3x_1 + 3x_2 \leq 6,$
$2x_1 + 4x_2 \geq 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}2.$

18. $z = 3x_3 \to \min;$
$x_1 + x_4 = 2,$
$-3x_2 + 2x_3 \geq 5,$
$x_2 + 3x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

19. $z = -3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 = 2,$
$x_3 + 2x_4 = 5,$
$2x_2 + 2x_4 \geq 8,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

20. $z = 2x_3 - x_4 \to \max;$
$x_2 + x_3 = 0,$
$4x_1 + 4x_4 \geq 6,$
$2x_1 - 2x_4 \geq 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

21. $z = -3x_2 - 3x_3 \to \max;$
$2x_2 - 2x_3 \geq 0,$
$x_1 + x_4 = 4,$
$x_2 + x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

22. $z = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$
$-x_2 + 3x_4 \geq 3,$
$x_3 + 2x_4 = 8,$
$x_1 - 2x_2 = 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

23. $z = 3x_3 - x_4 \to \max;$
$x_2 + 4x_3 = 6,$
$x_1 + 4x_3 + x_4 = 8,$
$4x_1 \geq 6,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

24. $z = 3x_2 + 3x_3 \to \min;$
$x_2 + x_3 = 6,$
$x_2 - 2x_4 \geq 6,$
$2x_2 + 4x_4 \geq 4,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

25. $z = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$
$4x_1 + 4x_3 \leq 7,$
$x_2 = 4,$
$4x_1 + 3x_3 \geq 0,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}3.$

26. $z = -3x_2 - x_4 \to \max;$
$x_1 - 4x_4 = 6,$
$x_2 + x_3 = 6,$
$x_3 - 3x_4 \geq 3,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

27. $z = x_2 - 3x_3 \to \max;$
$x_2 + x_4 = 3,$
$4x_1 + 2x_3 \geq 7,$
$4x_1 + x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

28. $z = -3x_1 + 3x_3 \to \max;$
$2x_2 + 4x_3 \leq 5,$
$2x_1 - 2x_2 \leq 8,$
$x_1 - 3x_3 \geq 5,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}3.$

29. $z = -2x_2 + 4x_3 \to \min;$
$4x_2 + x_3 = 5,$
$-2x_1 + 4x_3 \leq 4,$
$4x_1 - 2x_2 \geq 7,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}3.$

30. $z = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$
$2x_1 + 3x_3 \geq 8,$
$4x_1 + x_4 = 0,$
$x_2 - x_3 = 7,$
$x_j \geq 0,\ j = 1{,}4.$

3.4. Варианты для транспортной задачи

Продукция определённого типа производится в городах *A*1, *A*2, *A*3 и потребляется в городах *B*1, *B*2, *B*3, *B*4.

В таблице указаны: объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции.

Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна.

Предварительно следует проверить, сбалансирована ли данная транспортная задача. Если задача не сбалансирована, то нужно ввести фиктивных потребителей или производителей, добавляя к исходной таблице столбцы и строки.

Вариант 1

Производители	Потребители				**Объем производства**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	20	47	31	13	49
*A*2	3	38	44	10	18
*A*3	11	32	46	17	68
Спрос	45	30	10	45	

Вариант 2

Производители	Потребители				**Объем производства**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	47	31	13	45	34
*A*2	20	47	31	13	44
*A*3	4	42	41	2	68
Спрос	30	45	41	80	

Вариант 3

Производители	Потребители				**Объем производства**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	31	13	45	35	48
*A*2	38	44	10	33	48
*A*3	20	47	31	13	44
Спрос	40	41	45	44	

Вариант 4

Производители	Потребители				**Объем производства**
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	13	45	35	7	49
*A*2	47	31	13	45	47
*A*3	32	46	17	27	68
Спрос	45	80	44	45	

Вариант 5

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	45	35	7	43	48
*A*2	44	10	33	46	41
*A*3	42	41	2	38	49
Спрос	44	12	88	44	

Вариант 6

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	35	7	43	39	45
*A*2	31	13	45	35	33
*A*3	47	31	13	45	19
Спрос	6	10	30	41	

Вариант 7

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	7	43	39	10	41
*A*2	10	33	46	16	22
*A*3	46	17	27	47	61
Спрос	38	30	19	87	

Вариант 8

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	43	39	10	40	34
*A*2	13	45	35	7	18
*A*3	41	2	38	44	86
Спрос	48	45	5	30	

Вариант 9

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	39	10	40	43	26
*A*2	33	46	16	28	18
*A*3	31	13	45	35	58
Спрос	15	50	10	22	

Вариант 10

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	10	40	43	6	16
*A*2	45	35	7	43	27
*A*3	17	27	47	23	68
Спрос	31	44	24	42	

Вариант 11

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	40	43	6	36	15
*A*2	46	16	28	47	39
*A*3	2	38	44	9	71
Спрос	50	28	36	1	

Вариант 12

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	43	6	36	45	14
*A*2	35	7	43	39	48
*A*3	13	45	35	7	22
Спрос	23	16	45	10	

Вариант 13

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	6	36	45	13	24
*A*2	16	28	47	22	52
*A*3	27	47	23	22	85
Спрос	24	18	49	20	

Вариант 14

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	36	45	13	31	34
*A*2	7	43	39	10	52
*A*3	38	44	9	34	81
Спрос	50	38	49	80	

Вариант 15

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	45	13	31	46	42
*A*2	28	47	22	23	47
*A*3	45	35	7	43	72
Спрос	30	49	44	88	

Вариант 16

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	13	31	46	19	49
*A*2	43	39	10	40	88
*A*3	47	23	22	47	58
Спрос	17	48	35	45	

Вариант 17

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	31	46	19	26	58
*A*2	47	22	23	47	24
*A*3	44	9	34	46	78
Спрос	49	36	21	49	

Вариант 18

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	46	19	26	47	54
*A*2	39	10	40	43	19
*A*3	35	7	43	39	44
Спрос	36	15	6	50	

Вариант 19

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	19	26	47	25	52
*A*2	22	23	47	28	13
*A*3	23	22	47	29	12
Спрос	10	19	10	48	

Вариант 20

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	26	47	25	20	48
*A*2	10	40	43	6	28
*A*3	9	34	46	15	71
Спрос	47	81	25	44	

Вариант 21

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	47	25	20	47	41
*A*2	23	47	28	17	41
*A*3	7	43	39	10	79
Спрос	40	46	88	37	

Вариант 22

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	25	20	47	30	32
*A*2	40	43	6	36	49
*A*3	22	47	29	16	46
Спрос	13	50	46	28	

Вариант 23

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	20	47	30	14	22
*A*2	47	28	17	46	58
*A*3	34	46	15	29	78
Спрос	43	42	50	18	

Вариант 24

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	47	30	14	45	10
*A*2	43	6	36	45	61
*A*3	43	39	10	40	60
Спрос	44	23	48	6	

Вариант 25

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	30	14	45	35	10
*A*2	28	17	46	33	44
*A*3	47	29	16	46	41
Спрос	15	43	41	6	

Вариант 26

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	14	45	35	7	22
*A*2	6	36	45	13	83
*A*3	46	15	29	47	56
Спрос	39	24	30	18	

Вариант 27

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	45	35	7	43	83
*A*2	17	46	33	10	18
*A*3	39	10	40	43	82
Спрос	47	42	15	29	

Вариант 28

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	4	5	6	10	530
*A*2	8	6	3	8	405
*A*3	7	10	4	11	540
Спрос	425	415	335	400	

Вариант 29

Производители	Потребители				Объем производства
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	3	7	4	8	513
*A*2	9	6	4	4	448
*A*3	6	10	5	8	522
Спрос	437	417	333	396	

Вариант 30

Производители	Потребители				Объем производства
	*В*1	*В*2	*В*3	*В*4	
*А*1	35	30	10	10	53
*А*2	21	41	53	10	28
*А*3	39	32	27	20	61
Спрос	47	38	23	24	

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986.

2. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972.

3. Громова, Н.Б. Методы исследования операций в моделировании организационно-экономических задач / Н.Б. Громова, Э.В. Минько, В.И. Прохоров. – М: МАИ, 1992.

4. Курицкий, Б.Н. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0 в примерах / Б.Н. Курицкий. – М., 1997.

5. Коршунова, Н.П. Математика в экономике / Н.П. Коршунова, В.В. Плясунов. – М.: Вита пресс, 1996.

6. Кремер, Н.Ш. Математическое программирование / Н.Ш. Кремер. – М.: Финстатинформ, 1995.

7. Калихман, И.Л. Сборник задач по математическому программированию / И.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1975.

8. Карманов, В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1975.

9. Ларионов, А.И. Экономико-математические методы в планировании / А.И. Ларионов, Т.И. Юрченко. – М.: Высшая школа, 1984.

10. Гольштейн, Е.Г. Новые направления в линейном программировании / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Советское радио, 1966.

11. Плетнёва, Л.А. Задания к лабораторным работам студентов по курсу «Исследование операций» / Л.А. Плетнёва. – М.: МАДИ, 2012.

12. Вуколов, Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL: учеб. пособие / Э.А. Вуколов. – М.: ФОРУМ, ИНФРА, 2014.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПЛЕТНЕВА Лариса Александровна
КАГРАМАНОВА Ивета Гарриковна
ЛЕЕВА Марина Александровна

ЗАДАЧИ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ПО КУРСУ
«ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор И.А. Короткова

Подписано в печать 22.10.2015 г. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 7,5. Тираж 300 экз. Заказ . Цена 245 руб.
МАДИ, 125319, Москва, Ленинградский пр-т, 64.