Лабораторная работа № 1

Исследование и решение задач линейного программирования геометрическим методом

1.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения задач линейного программирования графическим методом и использования инструмента **Поиск решения** среды Excel для нахождения оптимального допустимого решения.

1.2 Формулировка задачи линейного программирования

Рассмотрим пример с двумя переменными. Компания «Русские краски» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: М1 и М2 (табл. 1.1).

Таблица 1.1 – Основные данные для задачи

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход (в тыс. долл.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 тонн, а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

1.3 Математическая модель задачи линейного программирования

Задача линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента.

1. **Переменные**, которые следует определить;

2. **Целевая функция**, подлежащая оптимизации;

3. **Ограничения**, которым должны удовлетворять переменные.

В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

x_1 – ежедневный объем производства краски для наружных работ;

x_2 – ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию Z, как суммарный ежедневный доход, который должен возрастать.

$$Z = 5x_1 + 4x_2.$$

Ограничения на сырье можно записать следующим образом.

$$\begin{pmatrix} \textit{Используемый объем} \\ \textit{сырья для производства} \\ \textit{обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \textit{Максимально возможный} \\ \textit{ежедневный расход сырья} \end{pmatrix}.$$

Из таблицы с данными получим используемые объемы в тоннах:

$$\text{для сырья } M1 = 6x_1 + 4x_2;$$

$$\text{для сырья } M2 = 1x_1 + 2x_2.$$

Поскольку ежедневный расход сырья М1 и М2 ограничен соответственно 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 1x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$$

Существует еще два ограничения по спросу на готовую продукцию. Первое ограничение указывает, что ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну, т.е. $x_2 - x_1 \le 1$. Второе ограничение максимального ежедневного объема производства краски для внутренних работ двумя тоннами запишем, как $x_2 \le 2$. Учтем условие неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Окончательно задача будет записана следующим образом:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 Графический способ решения задачи линейного программирования

Графический способ решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов.

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.
2. Поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Этап 1. Построение пространства допустимых решений.

Проведем оси координат. На горизонтальной оси будут указываться значения переменной x_1, а на вертикальной – x_2 (рис. 1.1). Условия неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте (т.е. выше оси x_1 и правее оси x_2).

Учтем оставшиеся ограничения, заменив неравенства на равенства и получив уравнения прямых. Например, неравенство $6x_1 + 4x_2 \le 24$ заменяется уравнением прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$. Найдем две различные точки, лежащие на этой прямой. При $x_1 = 0, x_2 = 6$. Аналогично для $x_2 = 0, x_1 = 4$. Проведем искомую прямую через найденные точки (линия 1 на рис. 1.1).

Теперь рассмотрим, как графически интерпретируются неравенства. Точки плоскости, расположенные по одну сторону прямой, удовлетворяют неравенству (допустимое полупространство), а точки, лежащие по другую сторону, – нет. "Тестовой" точкой, может служить точка $(0, 0)$. Например, эта точка удовлетворяет первому неравенству $6x_1 + 4x_2 \le 24$. Это означает, что точки полупространства, содержащего начальную точку $(0, 0)$, удовлетворяют этому неравенству. На рис. 1.1 допустимые полупространства показаны стрелочками.

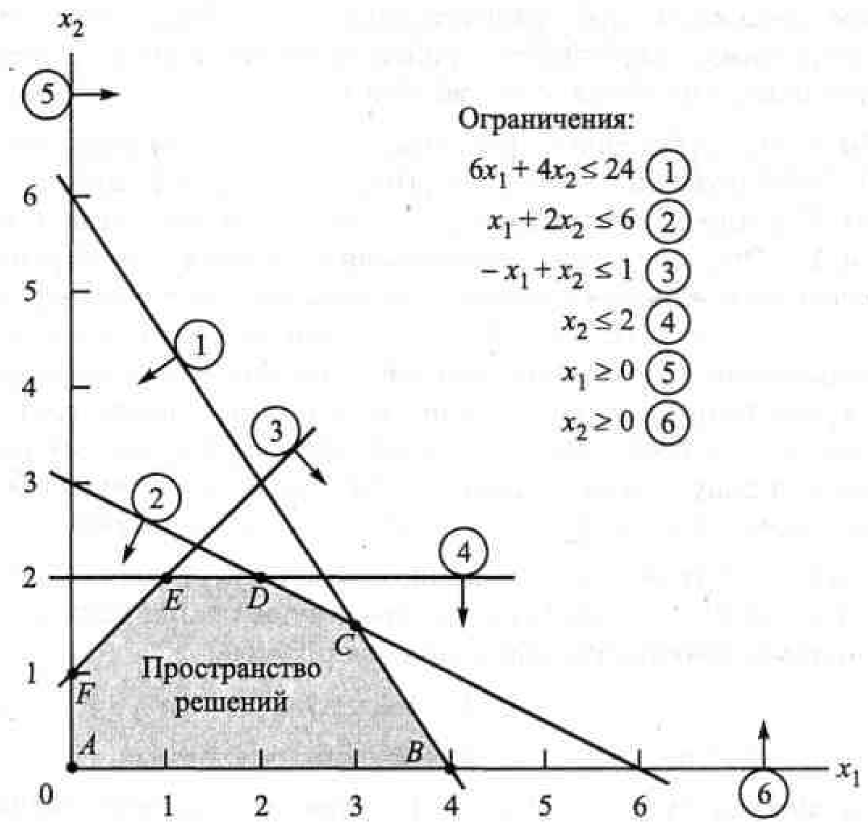


Рисунок 1.1 – Пространство допустимых решений модели

Если точка $(0, 0)$ не удовлетворяет неравенству, допустимым полупространством будет то, которое не содержит эту точку. Если же прямая проходит через эту точку, следует в качестве "тестовой" взять другую точку.

Этап 2. Поиск оптимального решения.

Точки пространства допустимых решений, показанного на рис. 1.1, удовлетворяют одновременно всем ограничениям. Это пространство ограничено отрезками прямых, которые соединяются в угловых точках A, B, C, D, E и F. Любая точка, расположенная внутри или на границе области, ограниченной ломаной ABCDEF, является допустимым решением, т.е. удовлетворяет всем ограничениям. Поскольку пространство допустимых решений содержит бесконечное число точек, необходима некая процедура поиска оптимального решения.

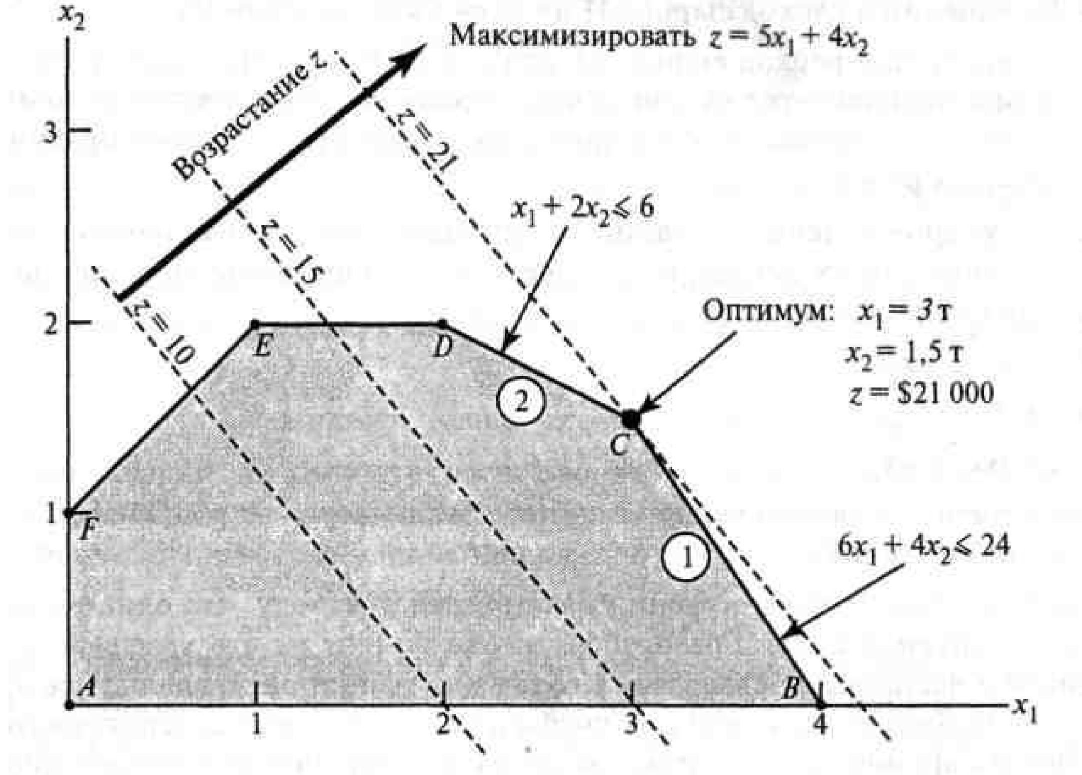


Рисунок 1.2 – Оптимальное значение модели

Для того чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление возрастания целевой функции $Z = 5x_1 + 4x_2$. Мы можем приравнять Z к нескольким возрастающим значениям, например 10 и 15. Получаем уравнения прямых $5x_1 + 4x_2 = 10$ и $5x_1 + 4x_2 = 15$. На рис. 1.2 эти прямые показаны штриховыми линиями. Направление возрастания целевой функции отмечено жирной стрелкой. Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие возрастающим значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет точкой оптимума.

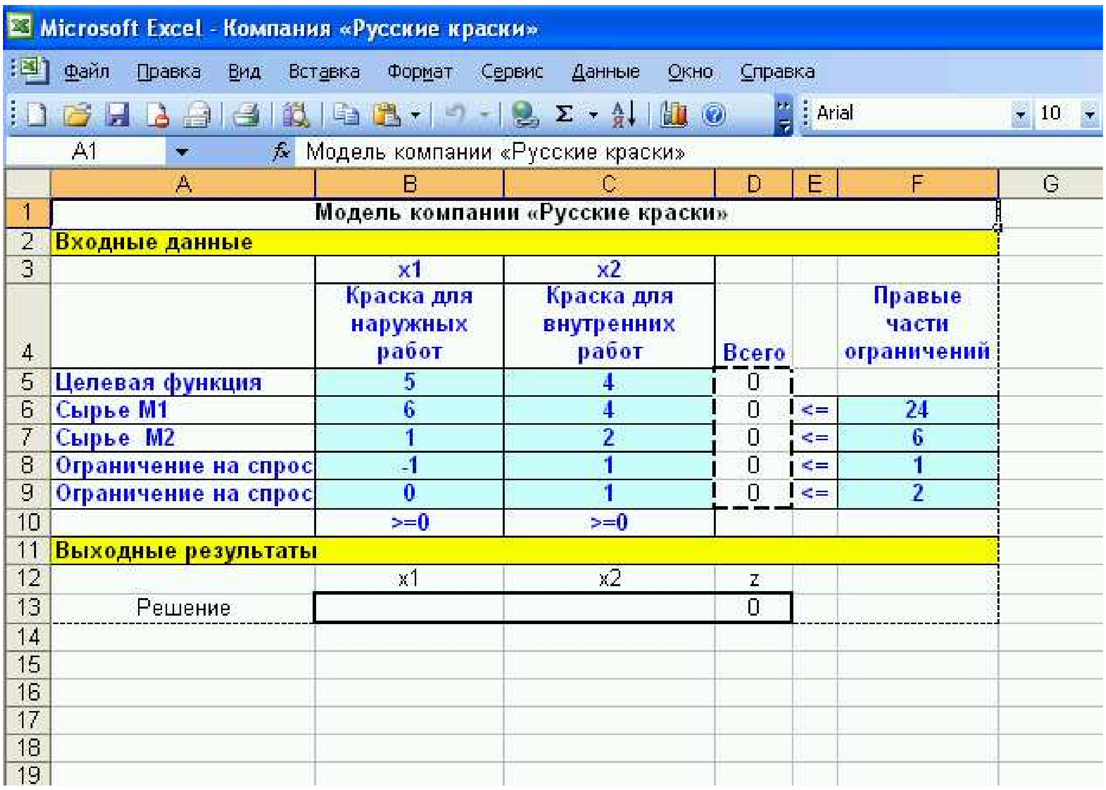
Оптимальное решение соответствует точке С. Ее координаты $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$ являются решением рассматриваемой задачи линейного программирования. При этом значение целевой функции равно

$Z = 5 \times 3 + 4 \times 1{,}5 = 21$. Полученное решение означает, что для компании «Русские краски» оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 тонн краски для наружных работ и 1,5 тонн краски для внутренних работ с ежедневным доходом в 21 000 долл.

1.5 Использование среды Excel для нахождения оптимального допустимого решения

Решение задачи линейного программирования может быть найдено в Excel с помощью инструмента **Поиск решения**. В верхней части рис. 1.3 показано табличное представление рассматриваемой модели. Здесь содержится 4 типа данных:

1) входные данные (затененные ячейки B5:C9 и F6:F9);
2) значения переменных и целевой функции (ячейки в прямоугольнике B13:D13);
3) формулы, по которым вычисляются значения целевой функции и левых частей ограничений (ячейки D5:D9);
4) поясняющие заголовки и надписи.



Microsoft Excel - Компания «Русские краски»

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

A1 | Модель компании «Русские краски»

	A	B	C	D	E	F	G
1	Модель компании «Русские краски»						
2	Входные данные						
3		x1	x2				
4		Краска для наружных работ	Краска для внутренних работ	Всего		Правые части ограничений	
5	Целевая функция	5	4	0			
6	Сырье M1	6	4	0	<=	24	
7	Сырье M2	1	2	0	<=	6	
8	Ограничение на спрос	-1	1	0	<=	1	
9	Ограничение на спрос	0	1	0	<=	2	
10		>=0	>=0				
11	Выходные результаты						
12		x1	x2	z			
13	Решение			0			
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Рисунок 1.3 – Табличное представление задачи в Excel

Поясняющие заголовки и надписи необходимы для того, чтобы сделать табличное представление модели более понятным и удобочитаемым. Относительное расположение ячеек, содержащих информацию разных типов, может быть другим.

Покажем соответствие между математической моделью и табличной. Начнем с соответствия формул этих моделей. Коэффициенты целевой функции и левых частей ограничений помещены в диапазон ячеек B5:C9. В следующей таблице приведены алгебраические формулы и эквивалентные им формулы Excel и ячейки, в которых эти формулы записаны.

	Алгебраическая формула	Формула Excel	Ячейка
Целевая функция z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*B$13+C5*C$13	D5
Ограничение 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*B$13+C6*C$13	D6
Ограничение 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*B$13+C7*C$13	D7
Ограничение 3	$-x_1 + x_2$	=B8*B$13+C8*C$13	D8
Ограничение 4	$0x_1 + x_2$	=B9*B$13+C9*C$13	D9

Формула первоначально вводится только в ячейку D5, а затем ее надо скопировать в ячейки D6:D9. Чтобы правильно скопировать формулы, в формуле ячейки D5 надо ссылки на ячейки B13 и C13 (содержащих значения x_1 и x_2) сделать абсолютными в виде $B$13 и $C$13. Для больших табличных моделей в ячейку D5 вводят формулу

= СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$13:$C$13)

и затем копируют ее в ячейки D6:D9.

После ввода исходных данных и расчетных формул табличная модель готова для использования средства **Поиск решения**. В меню Сервис выберите команду **Поиск решения**. Откроется одноименное диалоговое окно, показанное на рис. 1.4. В этом окне надо ввести адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции, указать, надо ли минимизировать или максимизировать целевую функцию, и ввести адреса ячеек, содержащих значения переменных. В нашей модели:

– в поле ввода **Установить целевую ячейку** вводится $D$5;

– устанавливается переключатель **Равной максимальному значению**;

– в поле ввода **Изменяя ячейки** вводится $B$13:$C$13.

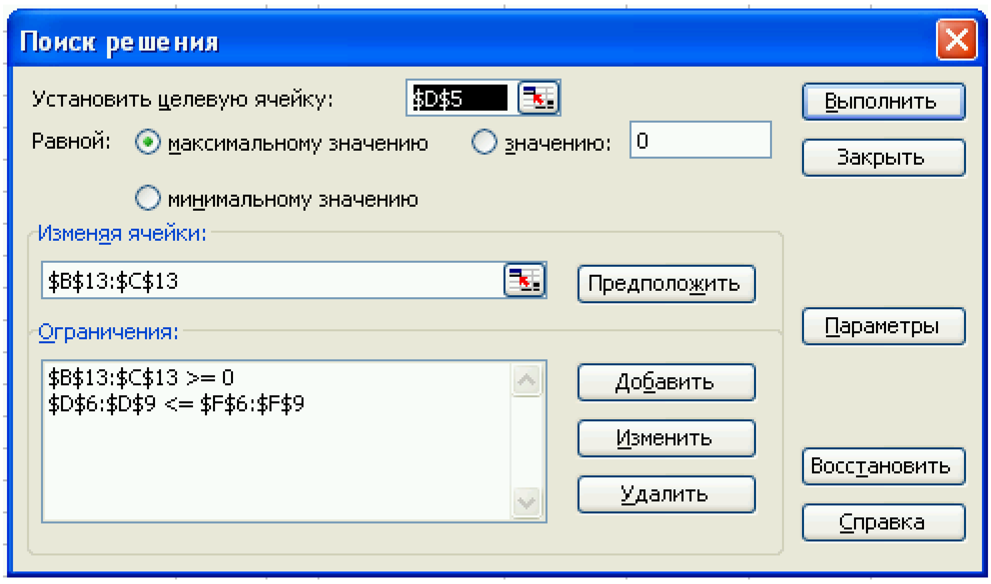


Рисунок 1.4 – Диалоговое окно **Поиск решения**

Эта информация указывает средству Поиск решения, что переменные находятся в ячейках В13 и С13, и надо найти максимум целевой функции, значение которой вычисляется в ячейке D5.

Далее надо задать ограничения модели, щелкнув на кнопке **Добавить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Отрывшееся диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 1.5), предоставляет средства для ввода всех частей ограничений (левой части, знака неравенства и значения правой части).

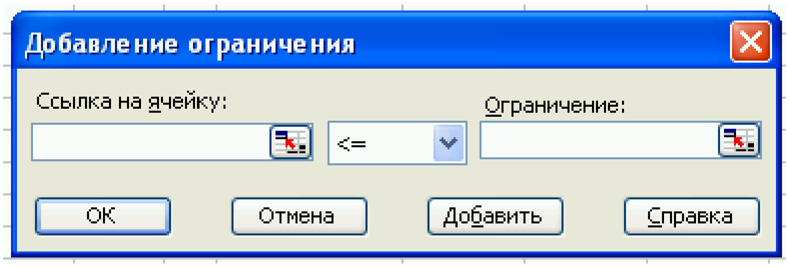


Рисунок 1.5 – Диалоговое окно **Добавление ограничения**

Используя это окно, вводим ограничения модели в таком виде $D$6:$D$9<=$F$6:$F$9. В ячейках F6:F9 записаны значения правых частей ограничений. Теперь осталось ввести ограничения неотрицательности для переменных. С помощью диалогового окна **Добавление ограничения** вводим $B$13:$C$13>=0

Установка параметров работы средства **Поиск решения** (максимальное время поиска решения, максимальное количество итераций, относительная погрешность и т.д.), производится в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 1.6).

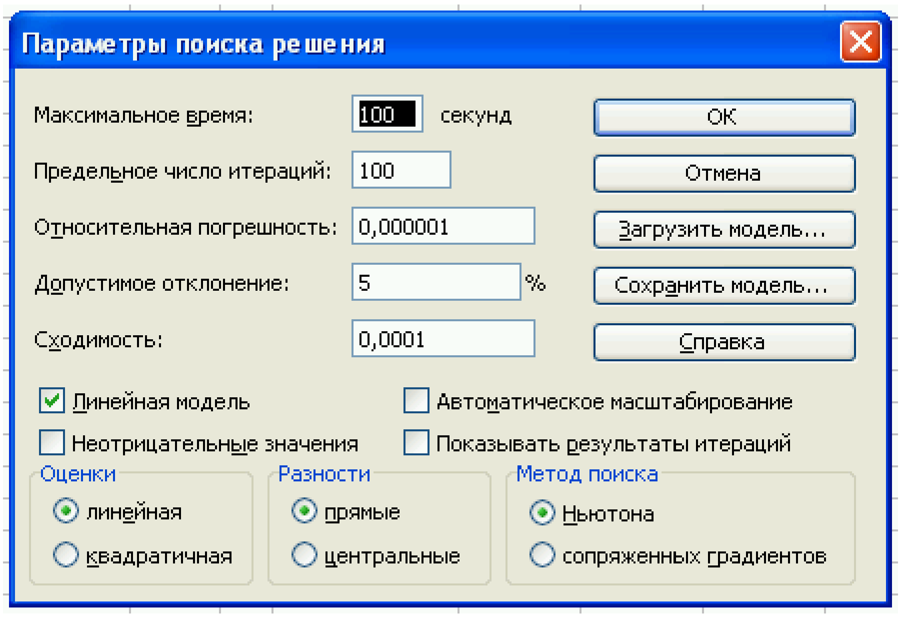


Рисунок 1.6 – Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Доступ к нему можно получить, щелкнув на кнопке **Параметры** в диалоговом окне **Параметры поиска решения**. В этом же окне можно указать требование о неотрицательности всех переменных опцией **Неотрицательные значения**. Основное условие при решении задачи линейного программирования использование опции **Линейная модель**.

Для решения задачи, необходимо щелкнуть на кнопке **Выполнить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Решение появится в выходных ячейках B13:D13 табличной модели (рис. 1.7). Оптимальное значение целевой функции появится в ячейке D5, а значения переменных x_1 и x_2 — в ячейках B13 и C13 соответственно. В ячейке D13 дублируются значения целевой функции, т.к. в эту ячейку введена формула =D5.

Также появится новое диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 1.8), которое даст возможность получить при необходимости более детальную информацию о решении в виде отчетов, включая важный отчет по устойчивости. Эти отчеты формируются на отдельных листах рабочей книги.

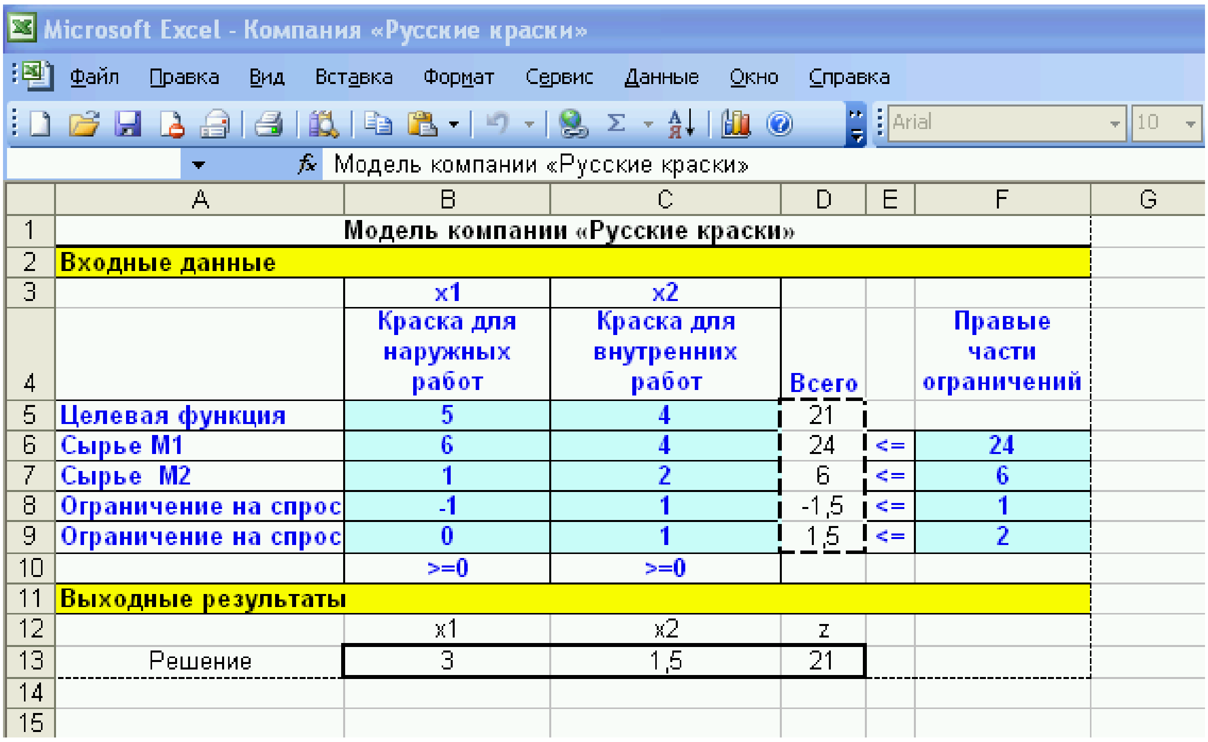


Рисунок 1.7 – Решение задачи в Excel

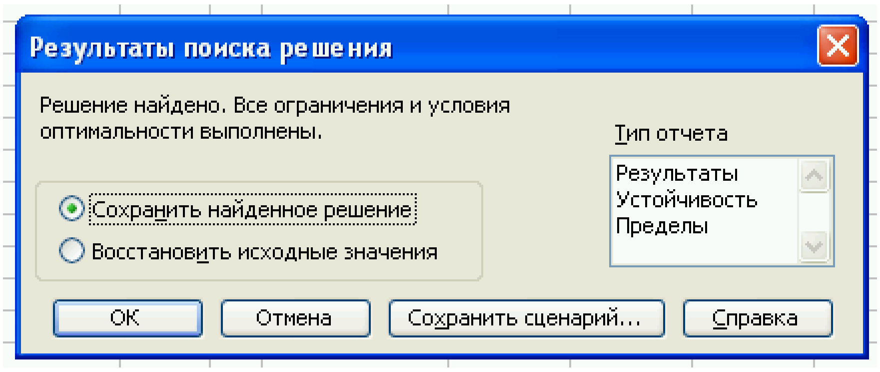


Рисунок 1.8 – Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

1.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 1.2.
2. Решить графическим методом задачу линейного программирования.
3. Проверить полученные результаты, найдя оптимальное допустимое решение аналитически, используя табличный редактор Excel.
4. Разработать словесную формулировку задачи линейного программирования с двумя переменными и учесть ее при составлении отчета.

Таблица 1.2 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Задача	№	Задача	№	Задача
1	$Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3. \end{cases}$	**8**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24. \end{cases}$	**15**	$Z = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$
2	$Z = -x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20. \end{cases}$	**9**	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$	**16**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases}$
3	$Z = 5x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 2x_2 \le 4. \end{cases}$	**10**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 2, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 3x_2 \le 3. \end{cases}$	**17**	$Z = 4x_1 + 6x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$
4	$Z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 3. \end{cases}$	**11**	$Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 20. \end{cases}$	**18**	$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2. \end{cases}$
5	$Z = -3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 3. \end{cases}$	**12**	$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$	**19**	$Z = 2x_1 - 3x_2 + 1 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$
6	$Z = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \le 0. \end{cases}$	**13**	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10. \end{cases}$	**20**	$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 0. \end{cases}$
7	$Z = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$	**14**	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10. \end{cases}$	**Для всех задач справедливы неравенства** $\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	

1.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка задачи линейного программирования с двумя переменными.
4. Последовательность действий при графическом способе решения задачи линейного программирования.
5. Последовательность действий при решении задачи линейного программирования в Excel.

Лабораторная работа № 2

Исследование и решение задач линейного программирования симплексным методом

2.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения задач линейного программирования симплексным методом и использования среды Machcad для решения задач об оптимальной производственной программе.

2.2 Формулировка задачи линейного программирования

Воспользуемся примером из лабораторной работы № 1. Напомним, что компания «Русские краски» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: М1 и М2 (табл. 2.1).

Таблица 1.1 – Основные данные для задачи

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		**Максимально возможный ежедневный расход сырья**
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	**24**
Сырье М2	1	2	**6**
Доход (в тыс. у. е.) на тонну краски	**5**	**4**	

Ежедневное производство краски для внутренних работ ограничено 2 тоннами. Ежедневное производство краски для внутренних работ не должно превышать более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

2.3 Математическая модель задачи линейного программирования

Математически рассматриваемая задача записывается следующим образом:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

где x_1 – ежедневный объем производства краски для наружных работ;

x_2 – ежедневный объем производства краски для внутренних работ;

Z – целевая функция.

2.4 Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Решение задачи проведем с применением симплексных таблиц. С помощью дополнительных переменных перейдем к системе уравнений. В данном случае дополнительные переменные вводятся со знаком «+», так как все неравенства имеют вид «$\le$». В случае наличия неравенств имеющих вид «$\ge$» дополнительные переменные в них вводят со знаком «–».

Эта задача в стандартной форме записывается так:

максимизировать $Z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$,

при ограничениях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 6, \\ -x_1 + x_2 + s_3 = 1, \\ x_2 + s_4 = 2, \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0. \end{cases}$$

где s_1, s_2, s_3, s_4 – дополнительные переменные. Целевую функцию представим в виде уравнения

$$Z - 5x_1 - 4x_2 = 0.$$

Перейдем к табличной форме представления задачи (табл. 2.2).

Таблица 2.2 – Первая симплекс-таблица

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение	
z	1	–5	–4	0	0	0	0	0	z-строка
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	s_1-строка
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	s_2-строка
s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	s_3-строка
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	s_4-строка

Начальная итерация симплекс-метода начинается из точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$, что определяет множества базисных и небазисных переменных.

Небазисные (нулевые) переменные: (x_1, x_2).

Базисные переменные: (s_1, s_2, s_3, s_4).

Для точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$ получим решение

$$Z = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2 .$$

В таблице базисные переменные перечислены в левом столбце "Базис", а их значения приведены в правом столбце "Решение".

Данное начальное решение не является оптимальным, поскольку переменные x_1 и x_2 равны нулю, а возрастание их приводит к увеличению значения целевой функции. Коэффициент при переменной x_1 в формуле целевой функции больше, чем коэффициент при x_2. Поэтому, в число базисных переменных следует ввести переменную x_1.

По симплекс-таблице, вводимая переменная определяется среди множества небазисных как переменная, имеющая наибольший отрицательный коэффициент в Z-строке. Если так случится, что все коэффициенты в Z-строке будут неотрицательными, то дальнейшее увеличение значения целевой функции будет невозможно; это будет означать, что достигнуто оптимальное решение.

Чтобы определить исключаемую переменную из симплекс-таблицы, надо вычислить точки пересечения всех функций ограничений с положительным направлением оси x_1. Координаты этих точек пересечения можно вычислить как отношения правых частей равенств (значение в столбце "Решение") к коэффициентам при переменной x_1 в этих равенствах, как показано в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Фрагмент первой симплекс-таблицы

Базис	Коэффициенты при x_1	Решение	Отношение (точка пересечения)
s_1	6	24	$x_1 = 24/6 = 4$ (минимум)
s_2	1	6	$x_1 = 6/1 = 6$
s_3	–1	1	$x_1 = 1/(-1) = -1$ (не подходит)
s_4	0	2	$x_1 = 2/0 = \infty$ (не подходит)

На рис. 2.1 видно, что неотрицательные отношения порождают точки пересечения на положительной полуоси x_1. Отношения, соответствующие переменным s_3 и s_4, исключаются из рассмотрения, поскольку для них точка пересечения лежит или на отрицательной полуоси, или отсутствует.

Минимальное неотрицательное отношение соответствует базисной переменной s_1. Это определяет переменную s_1 как исключаемую и на следующей итерации ее значение будет равно нулю. Значение вводимой переменной равно минимальному неотрицательному отношению $x_1 = 4$ (точка B на рис. 2.1). При этом значение целевой функции возрастет до 20.

Замена исключаемой переменной s_1 на вводимую переменную x_1 приводит к новым множествам базисных и небазисных переменных и новому решению в точке B.

Небазисные (нулевые) переменные: (s_1, x_2).

Базисные переменные: (x_1, s_2, s_3, s_4).

Теперь необходимо выполнить преобразования в первой симплекс-таблице так, чтобы в столбцах "Базис" и "Решения" получить новое решение, соответствующее точке B. Определим **ведущий столбец**, ассоциируемый с вводимой переменной, и **ведущую строку**, ассоциируемую с исключаемой переменной. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, назовем **ведущим элементом** (табл. 2.4).

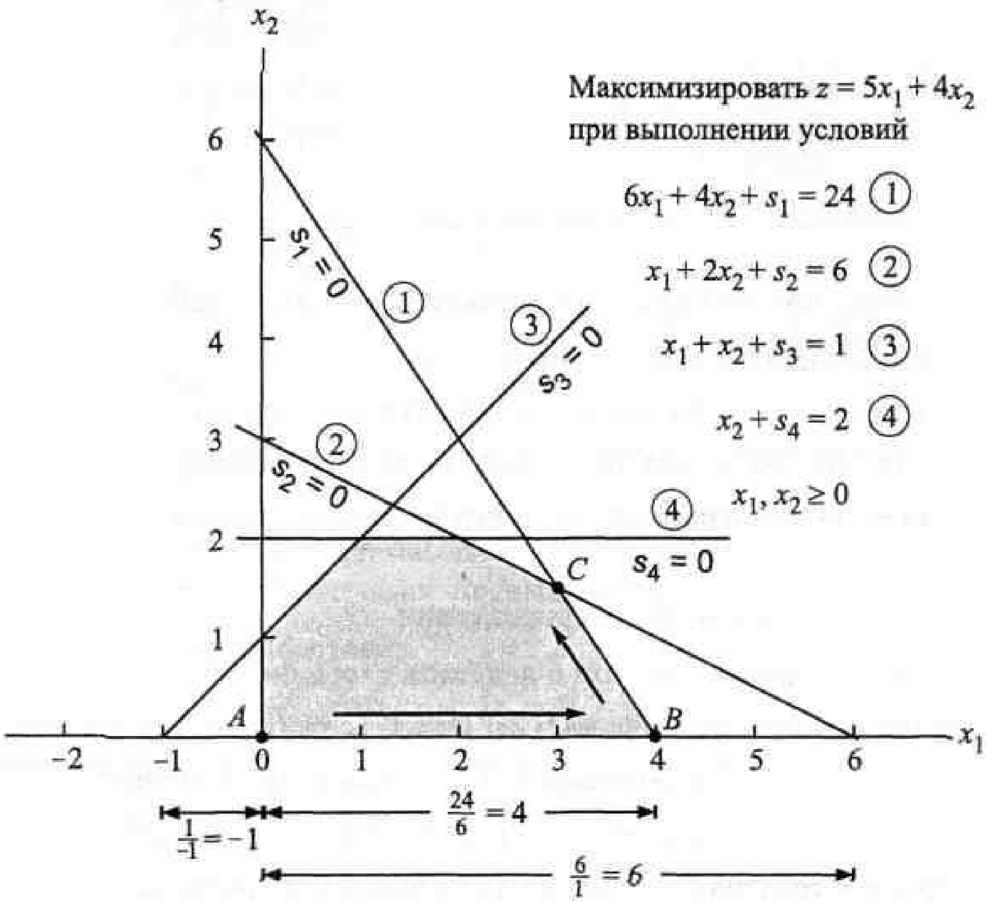


Рисунок 2.1 – Графическая интерпретация отношений как точек пересечения

Таблица 2.4 – Модифицированная первая симплекс-таблица

	Базис	z	x_1 ↓	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение	
	z	1	–5	–4	0	0	0	0	0	
←	s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Ведущая строка
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
	s_3	0	–1	1	0	0	1	0	1	
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
		Ведущий столбец								

Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов.

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.

Новая ведущая строка =

= текущая ведущая строка / ведущий элемент.

2. Вычисление элементов остальных строк, включая Z-строку.

Новая строка = текущая строка – ее коэффициент в ведущем столбце × × новая ведущая строка.

В рассматриваемом примере выполняем такие вычисления.

1. Новая ведущая s_1-строка = текущая ведущая s_1-строка / 6.

2. Новая Z-строка = текущая Z-строка – (–5) × новая ведущая строка.

3. Новая s_2-строка = текущая s_2-строка – (1) × новая ведущая строка.

4. Новая s_3-строка = текущая s_3-строка – (–1) × новая ведущая строка.

5. Новая s_4-строка = текущая s_4-строка.

В итоге получим новую симплекс-таблицу, соответствующую новому базисному решению (x_1, s_2, s_3, s_4) (табл. 2.5).

Таблица 2.5 – Вторая симплекс-таблица

	Базис	z	x_1	↓ x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
	z	1	0	–2/3	5/6	0	0	0	20
	x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
←	s_2	0	0	4/3	–1/6	1	0	0	2
	s_3	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

В столбце "Решение" представлено новое базисное решение $(x_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 5, s_4 = 2)$ и новое значение целевой функции $Z = 20$. Полученное базисное решение не является оптимальным, поскольку в Z-строке переменная x_2 имеет отрицательный коэффициент. Как и в первой симплекс-таблице, строку Z можно интерпретировать как уравнение

$$Z = \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{6}s_1 + 20.$$

Соответственно увеличение значения переменной x_2 (ее текущее значение равно нулю) приведет к увеличению значения целевой функции. Переменная x_2 выбирается в качестве вводимой в базис.

Для определения исключаемой переменной, вычислим отношения правых частей равенств, соответствующих ограничениям, к коэффициентам, стоящим при x_2 в этих равенствах (табл. 2.6).

Таблица 2.6 – Фрагмент второй симплекс-таблицы

Базис	Коэффициенты при x_2	Решение	Отношение
x_1	2/3	4	$x_2 = 4/(2/3) = 6$
s_2	4/3	2	$x_2 = 2/(4/3) = $ **3/2** (минимум)
s_3	5/3	5	$x_2 = 5/(5/3) = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2/1 = 2$

Вычисления показывают, что минимальное неотрицательное отношение $x_2 = 3/2$ соответствует переменной s_2, которая становится исключаемой. Значения целевой функции составит

$$Z = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + 20 = 21.$$

В этой ситуации ведущей строкой будет s_2-строка, а ведущим столбцом будет столбец, соответствующий переменной x_2. Ведущий элемент равен $\frac{4}{3}$ (табл. 2.5). Вычислим элементы третьей симплекс-таблицы.

1. Новая ведущая s_2-строка = текущая ведущая s_2-строка / $\frac{4}{3}$.

2. Новая Z-строка = текущая Z-строка – $(-\frac{2}{3})$ × новая ведущая строка.

3. Новая x_1-строка = текущая x_1-строка $-\frac{2}{3}$ × новая ведущая строка.

4. Новая s_3-строка = текущая s_3-строка $-\frac{5}{3}$ × новая ведущая строка.

5. Новая s_4-строка = текущая s_4-строка – 1 × новая ведущая строка.

В итоге получим новую симплекс-таблицу, соответствующую новому базисному решению (x_1, x_2, s_3, s_4) (табл. 2.7).

Таблица 2.7 – Третья симплекс-таблица

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	−1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	−1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	−5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	−3/4	0	1	1/2

Поскольку Z-строка не имеет отрицательных коэффициентов, соответствующих небазисным переменным s_1 и s_2, полученное решение оптимально (табл. 2.8).

Таблица 2.8 – Результаты симплексного метода

Переменные задачи	Оптимальные значения	Интерпретация
x_1	3	Ежедневно следует производить 3 т краски для наружных работ
x_2	3/2	Ежедневно следует производить 1,5 т краски для внутренних работ
z	21	Ежедневный доход составляет 21 тыс. долл.

В данном примере велся поиск максимума целевой функции. В случае минимизации целевой функции Z, исключаемые переменные определяются точно так же, как и при ее максимизации. Вводимая переменная выбирается как небазисная с наибольшим **положительным коэффициентом** в Z-строке симплекс-таблицы, а минимум целевой функции будет достигнут тогда, когда все коэффициенты в Z-строке будут **неположительными**.

2.5 Использование среды Machcad для решения задач линейного программирования

Программа Machcad, используемая для решения задачи об оптимальной производственной программе приведена на рис. 2.2.

Целевая функция $Z(x) := 5 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1$

Начальное приближение $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ограничения по ресурсам и объемам производства

Given

$6 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1 \le 24 \quad x_0 + 2 \cdot x_1 \le 6$

$-x_0 + x_1 \le 1 \quad x_1 \le 2 \quad x_0 \ge 0 \quad x_1 \ge 0$

Вычисления

$m := \mathrm{Maximize}(Z, x)$

$m = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad Z(m) = 21$

Рисунок 2.2 – Решение задачи об оптимальной производственной программе в Machcad

2.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 2.9.
2. Решить симплексным методом задачу линейного программирования.
3. Проверить полученные результаты, найдя оптимальное допустимое решение в среде Machcad.
4. Разработать словесную формулировку задачи линейного программирования с двумя переменными и учесть ее при составлении отчета.

Таблица 2.9 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Задача	№	Задача	№	Задача
1	$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2. \end{cases}$	**7**	$Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 20. \end{cases}$	**13**	$Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$
2	$Z = 2x_1 - 3x_2 + 1 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$	**8**	$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5. \end{cases}$	**14**	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10. \end{cases}$
3	$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$	**9**	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10. \end{cases}$	**15**	$Z = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$
4	$Z = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$	**10**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24. \end{cases}$	**16**	$Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3. \end{cases}$
5	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases}$	**11**	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$	**17**	$Z = -x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20. \end{cases}$
6	$Z = 4x_1 + 6x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$	**12**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 2, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15. \end{cases}$		**Для всех задач справедливы неравенства** $\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

2.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка задачи линейного программирования с двумя переменными.
4. Последовательность действий при симплексном методе решения задачи линейного программирования.
5. Последовательность действий при решении задачи линейного программирования в Excel.

Лабораторная работа № 3

Исследование и определение оптимального распределения поставок и минимальных затрат при решении транспортных задач

3.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения транспортных задач и использования инструмента **Поиск решения** среды Excel для нахождения оптимального распределения поставок и минимальных затрат.

3.2 Формулировка транспортной задачи

Транспортная компания занимается перевозкой зерна специальными зерновозами от трех элеваторов к четырем мельницам. Максимально возможное количество отгружаемых зерновозов в сутки a_i составляет 15, 25 и 10. Суточные потребности мельниц b_j составляют 5, 15, 15 и 15 зерновозов. Затраты на перевозку зерна от i-го элеватора к j-ой мельнице в тыс. руб. представлены в виде матрицы.

$$C_{ij} = \begin{Vmatrix} 10 & 2 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 4 & 14 & 16 & 18 \end{Vmatrix}$$

Требуется определить структуру перевозок между элеваторами и мельницами с минимальной стоимостью.

3.3 Математическая модель транспортной задачи

Обозначим через x_{ij} переменную решения, т.е. количество зерновозов, отгружаемых от i-го элеватора к j-ой мельнице $\left(x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3, 4 \right)$. Тогда система ограничений задачи будет иметь вид:

1. Все возможное количество зерновозов в сутки должно быть отправлено

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10. \end{cases}$$

2. Весь спрос на зерно должен быть удовлетворен

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15. \end{cases}$$

3. Целевая функция имеет вид:

$$Z = 10 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 20 \cdot x_{13} + ... + 16 \cdot x_{33} + 18 \cdot x_{34} \to \min$$

Необходимо отметить, что выполняется условие сбалансированности, т.е. максимальный спрос равен максимальному предложению.

3.4 Решение транспортной задачи

Представим исходные данные задачи в виде таблицы.

Таблица 3.1 – Транспортная таблица

	Мельницы 1	2	3	4	Предложение
Элеваторы 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
Спрос	5	15	15	15	

Решение транспортной задачи состоит из двух этапов.

1. Определение начального базисного допустимого решения.
2. Поиск оптимального решения транспортной задачи.

Этап 1. Определение начального базисного допустимого решения.

Используем метод северо-западного угла. Выполнение начинается с верхней левой ячейки (северо-западного угла) транспортной таблицы, т.е. с переменной x_{11}.

Шаг 1. Переменной x_{11} присваивается максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение.

Шаг 2. Вычеркивается строка (или столбец) с полностью реализованным предложением (с удовлетворенным спросом). Это означает, что в вычеркнутой строке (столбце) мы не будем присваивать значения остальным переменным (кроме переменной, определенной на первом этапе). Если одновременно удовлетворяются спрос и предложение, вычеркивается только строка или только столбец.

Шаг 3. Если не вычеркнута только одна строка или только один столбец, процесс останавливается. В противном случае переходим к ячейке справа, если вычеркнут столбец, или к нижележащей ячейке, если вычеркнута строка. Затем возвращаемся к первому этапу.

Применив описанную процедуру, получим начальное базисное решение, представленное в табл. 3.2. В этой таблице стрелками показана последовательность определения базисных переменных.

Таблица 3.2 – Базисное решение транспортной задачи

	1	2	3	4	Предложение
1	10 **5**	2 **10**	20	11	**15**
2	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
3	4	14	16	18 **10**	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Получено следующее начальное базисное решение:

$$\begin{cases} x_{11}=5,\, x_{12}=10, \\ x_{22}=5,\, x_{23}=15,\, x_{24}=5, \\ x_{34}=10. \end{cases}$$

Соответствующая суммарная стоимость перевозок равна

$$Z=10\cdot 5+2\cdot 10+7\cdot 5+9\cdot 15+20\cdot 5+18\cdot 10=520 \text{ тыс. руб.}$$

Этап 2. Поиск оптимального решения транспортной задачи.

Используя полученное начальное базисное решение, произведем улучшение плана перевозок. В таблице 3.2 назначим потенциалы строк и столбцов. В методе потенциалов каждой i-ой строке и каждому j-му столбцу транспортной таблицы ставятся в соответствие числа (потенциалы) u_i и v_j, которые для базисных переменных удовлетворяют уравнению

$$u_i+v_j=c_{ij}.$$

Примем $u_1=0$, тогда

$$\begin{cases} u_1+v_1=c_{11}=10; \quad v_1=10; \\ u_1+v_2=c_{12}=2; \quad v_2=2; \\ u_2+v_2=c_{22}=7; \quad u_2=5; \\ u_2+v_3=c_{23}=9; \quad v_3=4; \\ u_2+v_4=c_{24}=20; \quad v_4=15; \\ u_3+v_4=c_{34}=18; \quad u_3=3. \end{cases}$$

Используя найденные значения потенциалов, для каждой небазисной переменной вычислим величины оценки $u_i+v_j-c_{ij}$

$$\begin{cases} u_1+v_3-c_{13}=-16; \\ u_1+v_4-c_{14}=4; \\ u_2+v_1-c_{21}=3; \\ u_3+v_1-c_{31}=9; \\ u_3+v_2-c_{32}=-9; \\ u_3+v_3-c_{33}=-9. \end{cases}$$

Найденные значения поместим в таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Модифицированная транспортная таблица

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Предложение
$u_1 = 0$	10 **5**	2 **10**	20 $\boxed{-16}$	11 $\boxed{4}$	**15**
$u_2 = 5$	12 $\boxed{3}$	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
$u_3 = 3$	4 $\boxed{9}$	14 $\boxed{-9}$	16 $\boxed{-9}$	18 **10**	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Среди небазисных переменных выберем переменную, имеющую максимальное значение оценки $u_i + v_j - c_{ij}$ (правый нижний угол ячейки). В данном случае будет выбрана ячейка соответствующая x_{31}. Нам необходимо найти величину перевозок по данному маршруту θ, которая уменьшит общую стоимость перевозок.

Построим замкнутый цикл перерасчета, включающий базовое распределение поставок и выбранную нами ячейку (табл. 3.4).

Таблица 3.4 – Замкнутый цикл перерасчета для переменной x_{31}

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Предложение
$u_1 = 0$	10 **5 − θ** −	2 **10 + θ** +	20 $\boxed{-16}$	11 $\boxed{4}$	**15**
$u_2 = 5$	12 $\boxed{3}$	7 **5 − θ** −	9 **15**	20 **5 + θ** +	**25**
$u_3 = 3$	4 **θ** + $\boxed{9}$	14 $\boxed{-9}$	16 $\boxed{-9}$	18 **10 − θ** −	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Максимально возможное значение θ определяется исходя из условий:

1. Выполнение ограничения на спрос и предложение.
2. Отсутствие перевозок с отрицательным объемом грузов.

Для удовлетворения ограничения по спросу и предложению, нужно поочередно отнимать и прибавлять θ к значениям базисных переменных, расположенных в угловых ячейках цикла (ячейка x_{23} пропускается).

Условие отсутствия перевозок с отрицательным объемом грузов сохраняется при выполнении следующих неравенств:

$$\begin{cases} x_{11} = 5 - \theta \geq 0, \\ x_{22} = 5 - \theta \geq 0, \\ x_{34} = 10 - \theta \geq 0. \end{cases}$$

Тогда максимально возможное значение $\theta = 5$ и $x_{11} = x_{22} = 0$. Соответственно можно определить значения базисных переменных и исключить из базиса x_{11} или x_{22}. Выбираем x_{11}. Получим новое базисное решение (табл. 3.5). Новая суммарная стоимость перевозок равна $Z = 475$ тыс. руб.

Таблица 3.5 – Транспортная таблица для второго базисного решения

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Предложение
$u_1 = 0$	10; $\boxed{-9}$	2; **15**	20; $\boxed{-16}$	11; $\boxed{4}$	**15**
$u_2 = 5$	12; $\boxed{-6}$	7; **0**	9; **15**	20; **10**	**25**
$u_3 = 3$	4; **5**	14; $\boxed{-9}$	16; $\boxed{-9}$	18; **5**	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Произведем вычисление новых значений потенциалов для строк и столбцов, по описанной выше методике. Определим для каждой небазисной переменной величины оценки $u_i + v_j - c_{ij}$. Результаты приведены в табл. 3.5.

Выбираем максимальное значение величины оценки, соответствующее ячейке x_{14}. Строим замкнутый цикл (табл. 3.6).

Таблица 3.6 – Замкнутый цикл перерасчета для переменной x_{14}

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Предложение
$u_1 = 0$	10; $\boxed{-9}$	2; **15 − θ**; –	20; $\boxed{-16}$	11; **θ**; +; $\boxed{4}$	**15**
$u_2 = 5$	12; $\boxed{-6}$	7; **0 + θ**; +	9; **15**	20; **10 − θ**; –	**25**
$u_3 = 3$	4; **5**	14; $\boxed{-9}$	16; $\boxed{-9}$	18; **5**	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Находим значение $\theta = x_{14} = 10$ и исключаем переменную x_{24}. Новое решение показано в табл. 3.7. Новая суммарная стоимость перевозок равна $Z = 435$ тыс. руб.

Таблица 3.7 – Транспортная таблица для третьего базисного решения

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	Предложение
$u_1 = 0$	10; $\boxed{-13}$	2; **5**	20; $\boxed{-16}$	11; **10**	**15**
$u_2 = 5$	12; $\boxed{-10}$	7; **10**	9; **15**	20; $\boxed{-4}$	**25**
$u_3 = 7$	4; **5**	14; $\boxed{-5}$	16; $\boxed{-5}$	18; **5**	**10**
Спрос	**5**	**15**	**15**	**15**	

Произведем вычисление значений потенциалов строк и столбцов, а так же величин оценки (табл. 3.7). Все значения величин оценки небазисных переменных отрицательные. Это указывает на то, что найденное решение транспортной задачи оптимально.

1.5 Использование среды Excel для решения транспортной задачи

Решение транспортной задачи может быть найдено в Excel с помощью инструмента **Поиск решения**. Данный шаблон может быть использован для решения моделей, которые состоят из не более 10 пунктов отправления и не более 10 пунктов назначения. Рабочий лист состоит из разделов входных и выходных данных. На рис. 3.1 показаны входные данные транспортной задачи в Excel. В разделе входных данных обязательно должны содержаться следующие данные:

1) количество пунктов отправлений (ячейка B3);
2) количество пунктов назначений (ячейка B4);
3) транспортная таблица (диапазон B6:K15);
4) названия пунктов отправления (диапазон A6:A15);
5) названия пунктов назначения (диапазон B5:K5);
6) объемы предложения (диапазон L6:L15);
7) объемы спроса (диапазон B16:K16).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Транспортная модель												
2	Входные данные												
3	К-во п. отправления	3	<<максимум 10										
4	К-во п. назначения	4	<<максимум 10										
5	Матрица стоимостей	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*							Предложение	
6	*S1*	10	2	20	11							15	
7	*S2*	12	7	9	20							25	
8	*S3*	4	14	16	18							10	
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16	Спрос	5	15	15	15								

Рисунок 3.1 – Входные данные транспортной задачи в Excel

После заполнения раздела входных данных в рабочий лист необходимо ввести следующие формулы:

1. **Формула вычисления значения целевой функции в ячейке A19**: =СУММПРОИЗВ(B6:K15;B20:K29).

2. **Формулы вычисления объемов перевозок от пунктов отправления**: в ячейку L20 сначала вводится формула =СУММ(B20:K20), после чего она копируется в диапазон L21:L29.
3. **Формулы вычисления объемов перевозок до пунктов назначения**: в ячейку B30 вводится формула =СУММ(B20:B29), затем она копируется в диапазон C30:K30.

Ограничения модели связаны с отношениями объемов перевозок и объемов предложения в пунктах отправления и спросом в пунктах назначения. В меню Сервис выберите команду **Поиск решения**. Откроется одноименное диалоговое окно, показанное на рис. 3.3. В этом окне вводим адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции $A$19, и адреса ячеек, содержащих значения переменных $B$20:$K$29.

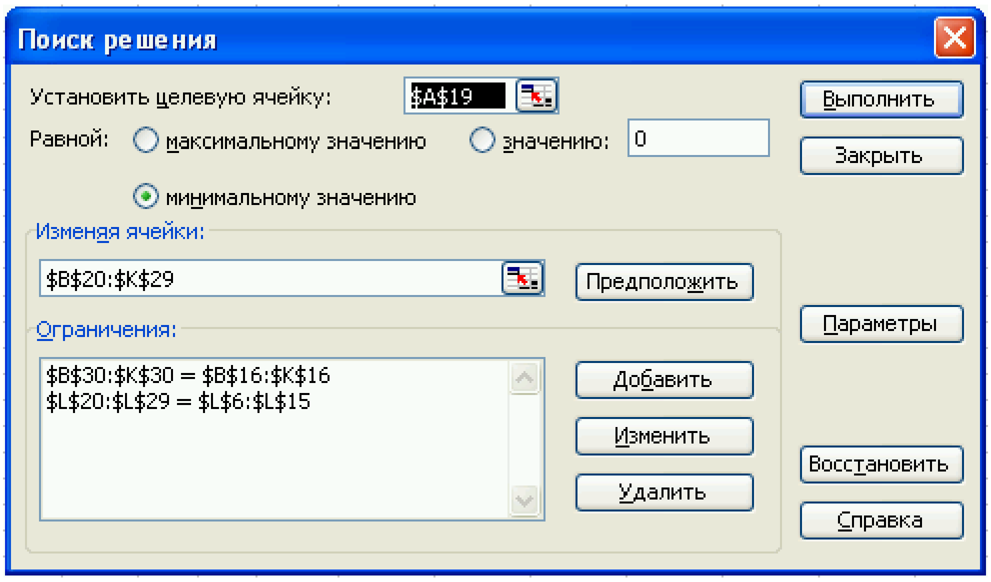


Рисунок 3.3 – Диалоговое окно **Поиск решения**

Используя диалоговое окно **Добавление ограничения** вводим ограничения модели в таком виде

$B$30:$K$30=$B$16:$K$16

$L$20:$L$29=$L$6:$L$15

После ввода исходных данных откройте средство Поиск решения и щелкните на кнопке ОК. Решение появится в диапазоне B20:K29 (рис. 3.2). Соответствующее значение общей стоимости вычислено в ячейке A19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
17	**Оптимальное решение**												
18	Общая стоимость												
19	**435**	D1	D2	D3	D4								
20	S1	**0**	**5**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	15	
21	S2	**0**	**10**	**15**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	25	
22	S3	**5**	**0**	**0**	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	10	
23		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
24		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
25		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
26		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
27		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
28		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
29		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0	
30		5	15	15	15	0	0	0	0	0	0		
31													
32													

Рисунок 3.2 – Выходные данные транспортной задачи в Excel

3.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 3.8.
2. Определить начальное базисное допустимое решение, используя метод северо-западного угла
3. Найти оптимальное решение транспортной задачи.
4. Проверить полученные результаты, найдя оптимальное решение транспортной задачи, используя табличный редактор Excel.
5. Разработать словесную формулировку транспортной задачи и учесть ее при составлении отчета.

Таблица 3.8 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Задача	№	Задача
1	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 1 & 8 & 2 & 3 & 35 \\ & 4 & 7 & 5 & 1 & 50 \\ & 5 & 3 & 4 & 4 & 15 \\ b_j & 15 & 15 & 40 & 30 & \end{array}$	**7**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 3 & 2 & 4 & 1 & 60 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 & 40 \\ & 3 & 2 & 4 & 4 & 10 \\ b_j & 30 & 25 & 35 & 20 & \end{array}$
2	$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & a_i \\ & 2 & 6 & 3 & 4 & 8 & 60 \\ & 1 & 5 & 6 & 9 & 7 & 30 \\ & 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 15 \\ b_j & 20 & 34 & 16 & 10 & 25 & \end{array}$	**8**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 1 & 3 & 3 & 4 & 50 \\ & 5 & 2 & 7 & 5 & 30 \\ & 6 & 4 & 8 & 2 & 30 \\ & 7 & 1 & 5 & 7 & 10 \\ b_j & 40 & 30 & 35 & 15 & \end{array}$
3	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 1 & 3 & 30 \\ & 5 & 6 & 5 & 4 & 20 \\ & 3 & 7 & 9 & 5 & 40 \\ & 1 & 2 & 2 & 7 & 50 \\ b_j & 35 & 20 & 55 & 30 & \end{array}$	**9**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 3 & 2 & 60 \\ & 3 & 1 & 2 & 3 & 65 \\ & 5 & 4 & 1 & 5 & 70 \\ b_j & 40 & 60 & 70 & 25 & \end{array}$
4	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\ & 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\ & 3 & 4 & 2 & 5 & 20 \\ b_j & 40 & 30 & 30 & 50 & \end{array}$	**10**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 6 & 4 & 4 & 5 & 200 \\ & 6 & 9 & 5 & 8 & 300 \\ & 8 & 2 & 10 & 6 & 100 \\ b_j & 150 & 250 & 100 & 100 & \end{array}$
5	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 4 & 5 & 5 & 7 & 100 \\ & 8 & 7 & 5 & 4 & 120 \\ & 9 & 6 & 4 & 5 & 150 \\ & 3 & 2 & 9 & 3 & 130 \\ b_j & 140 & 130 & 90 & 140 & \end{array}$	**11**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 25 \\ & 3 & 5 & 7 & 5 & 18 \\ & 1 & 8 & 4 & 5 & 12 \\ & 4 & 3 & 2 & 8 & 15 \\ b_j & 15 & 25 & 18 & 12 & \end{array}$
6	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 10 & 5 & 7 & 4 & 90 \\ & 7 & 4 & 9 & 10 & 25 \\ & 6 & 14 & 8 & 7 & 35 \\ b_j & 40 & 30 & 30 & 50 & \end{array}$	**12**	$\begin{array}{cccccc} & & & & & a_i \\ & 5 & 4 & 6 & 3 & 30 \\ & 4 & 5 & 5 & 8 & 70 \\ & 7 & 3 & 4 & 7 & 70 \\ b_j & 50 & 20 & 40 & 60 & \end{array}$

3.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка транспортной задачи.
4. Последовательность действий при поиске начального базисного допустимого решения.
5. Последовательность действий при поиске оптимального решения транспортной задачи
6. Последовательность действий при решении транспортной задачи в среде Excel.

Лабораторная работа № 4

Решение задачи о назначениях венгерским методом

4.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения задач о назначениях венгерским методом и использования табличного процессора Microsoft Excel, а также среды Machcad для поиска оптимального распределения работников по всем заявленным работам.

4.2 Формулировка задачи о назначениях

Общая задача назначения n работников на n работ представлена в табл. 4.1.

Таблица 4.1 – Задача назначения n работников на n работ

	Работа 1	…	*Работа j*	…	***Работа m***
Работник 1	c_{11}	…	$c_{1\,j}$	…	c_{1m}
…	…	…	…	…	…
Работник i	c_{i1}	…	$c_{i\,j}$	…	c_{im}
…	…	…	…	…	…
Работник m	c_{m1}	…	$c_{m\,j}$	…	$c_{m\,m}$

Коэффициент $c_{i\,j}$ равен стоимости назначения работника i на работу $j(i,\ j = 1, 2, ..., n)$.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой работники соответствуют пунктам отправления, а работы – пунктам назначения. В данном случае все величины спроса и предложения равны 1. Стоимость "транспортировки" рабочего i на работу j равна $c_{i\,j}$. Задачу о назначениях можно эффективно решить точно так же, как и транспортную задачу. Вместе с тем тот факт, что все величины спроса и предложения равны 1, привел к разработке упрощенного алгоритма решения, названного **венгерским методом.**

4.3 Математическая модель задачи о назначениях

Введем переменную x_{ij}, значение которой равно 1, если выполнение j-ой работы поручено i-му работнику, и равно 0 – в противном случае.

Тогда, поскольку на работе j может быть задействован только один работник, справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Так как один работник может выполнять только одну работу, то справедливо следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, ..., n.$$

Целевая функция определяет суммарные временные затраты всех работников на выполнение ими всех работ и, естественно, они должны быть минимальными:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \to \min.$$

4.4 Венгерский метод решения задачи о назначениях

Пример 1. Трое детей Анатолий, Владимир и Семен желают подзаработать на каникулах немного денег. Глава семьи Иванов выбрал три вида работ, которые дети выполнить могут за определенную плату: стрижка газона, уборка гаража и мойка автомобиля. Чтобы избежать ненужных споров между детьми, он опросил каждого, сколько за каждый вид работ они хотят получить. Результаты опроса (в у. е.) представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2 – Условия примера 1

Стрижка газона	Уборка гаража	Мойка машины
15	10	9
9	15	10
10	12	8

Основываясь на этой информации, как распределить работы между детьми с минимальными денежными потерями для Иванова? Решим эту задачу о назначениях венгерским методом.

Этап 1. В исходной матрице стоимостей определим в каждой строке минимальную стоимость и отнимем ее от других элементов строки.

Этап 2. В матрице, полученной на первом этапе, найдем в каждом столбце минимальную стоимость и отнимем ее от других элементов столбца.

Этап 3. Оптимальным назначениям будут соответствовать нулевые элементы, полученные на предыдущем этапе.

Обозначим через p_i и q_j минимальные стоимости соответственно в строке i и столбце j, определенные на первом и втором этапах описанного выше алгоритма. Минимальные стоимости по строкам находятся по исходной матрице стоимостей в табл. 4.3.

Таблица 4.3 – Минимальные стоимости по строкам

Таблица 5.33

Стрижка газона	Уборка гаража	Мойка машины	Минимумы по строкам
15	10	9	$p_1 = 9$
9	15	10	$p_2 = 9$
10	12	8	$p_3 = 8$

Вычтем минимальные стоимости из элементов соответствующих строк, и в результате получим следующую матрицу.

Таблица 4.4 – Модифицированная матрица

	Стрижка газона	Уборка гаража	Мойка машины
	6	1	0
	0	6	1
	2	4	0
Минимумы по столбцам	$q_1 = 0$	$q_2 = 1$	$q_3 = 0$

На втором этапе алгоритма находим минимальные значения по столбцам и вычитаем их из элементов соответствующих столбцов. В результате получим матрицу, представленную в виде табл. 4.5.

Таблица 4.5 – Итоговая матрица

Стрижка газона	Уборка гаража	Мойка машины
6	0	0
0	5	1
2	3	0

В последней матрице подчеркнутые нулевые элементы определяют оптимальное решение: Анатолий будет убирать в гараже, Владимир подстригать газон, а Семену достанется мойка машины. Эти работы обойдутся Иванову в 9 + 10 + 8 = 27 у. е.

В некоторых случаях нулевые элементы, полученные на первом и втором этапах венгерского метода, не позволяют непосредственно получить допустимое решение. Тогда необходимы дополнительные действия.

Пример 2. Предположим, что в примере 1 представлено четыре ребенка и четыре вида работ. Таблица 4.6 соответствует матрице стоимостей для этой задачи. Применение первого и второго этапов алгоритма к исходной матрице (при этом $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 4, p_4 = 5, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 3, q_4 = 0$) приводит к следующей матрице (табл. 4.7).

Таблица 4.6 – Условия примера 2

		Виды работ			
		1	2	3	4
Дети	1	1	4	6	3
	2	9	7	10	9
	3	4	5	11	7
	4	8	7	8	5

Таблица 4.7 – Промежуточная матрица

		Виды работ			
		1	2	3	4
Дети	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

В промежуточной матрице расположение нулевых элементов не позволяет назначить каждому ребенку одну работу. Например, если мы назначим первому ребенку работу 1, из дальнейшего рассмотрения исключается первый столбец, и тогда в строке третьего ребенка не окажется нулевых элементов. Подобные проблемы можно разрешить, добавив к описанной в примере 5 процедуре следующий этап.

Этап 2.1. Если после выполнения первого и второго этапов алгоритма не получено допустимое решение, выполните следующие действия.

1. В последней матрице проведите минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых по строкам и столбцам, чтобы вычеркнуть в матрице все нулевые элементы (табл. 4.8).
2. Найдите наименьший невычеркнутый элемент и вычтите его из остальных невычеркнутых элементов и прибавьте к элементам, стоящим на пересечении проведенных на предыдущем этапе прямых (табл. 4.9).
3. Если новое распределение нулевых элементов не позволяет построить допустимое решение, повторите этап 2.1. В противном случае решение найдено.

Таблица 4.8 – Модифицированная промежуточная матрица

		Виды работ			
		1	2	3	4
	1	0	3	2	2
Дети	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

Наименьший невычеркнутый элемент (он подчеркнут) равен 1. Этот элемент вычитаем из остальных невычеркнутых элементов и прибавляем к элементам, стоящим на пересечении прямых. В результате получим матрицу, представленную в виде табл. 4.9.

Таблица 4.8 – Итоговая матрица по примеру 2

		Виды работ			
		1	2	3	4
	1	**0**	2	1	1
Дети	2	3	0	**0**	2
	3	0	**0**	3	2
	4	4	2	0	**0**

Оптимальное решение, показанное в таблице подчеркнутыми нулями, предлагает первому ребенку работу 1, второму – работу 3, третьему – работу 2 и четвертому – работу 4. Соответствующее значение целевой функции равно 1 + 10 + 5 + 5 = 21 долл.

В ряде задач о назначениях показателями эффективности выполнения работ могут быть качество выполнения работ, прибыль от выполнения работ и т. д. То есть такие показатели, которые необходимо максимизировать при назначении работников на работы. В этом случае целевая функция должна максимизироваться, т.е. $Z \to \max$. Для того чтобы обеспечить полное соответствие математической модели задачи о назначениях стандартной транспортной модели, необходимо заменить максимизируемую целевую функцию Z на противоположную ей функцию $Z' = -Z$, которую уже необходимо минимизировать:

Если количество работников больше (меньше) количества работ, то соответствующая транспортная модель становится несбалансированной. В этом случае необходимо ввести фиктивную работу (фиктивного работника), а в матрицу затрат – дополнительный нулевой столбец (дополнительную нулевую строку). Тогда транспортная задача становится закрытой и для ее решения на компьютере применяется стандартная методика.

4.5 Использование табличного процессора Microsoft Excel для решения задачи о назначениях

Решение задачи о назначениях аналогично решению транспортной задачи, за одним исключением: так как переменные по смыслу задачи могут принимать только значения 0 и 1, то в ограничениях, задаваемых в диалоговом окне Поиск решения, необходимо указать, что переменные должны быть двоичными.

4.6 Использование среды Machcad для решения задачи о назначениях

Программа Machcad, используемая для решения задачи поиска оптимального распределения работников по всем заявленным работам приведена на рис. 4.1.

Целевая функция

$$Z(x) := 15 \cdot x_{00} + 10 \cdot x_{01} + 9 \cdot x_{02} + 9 \cdot x_{10} + 15 \cdot x_{11} + 10 \cdot x_{12} + 10 \cdot x_{20} + 12 \cdot x_{21} + 8 \cdot x_{22}$$

Начальные приближения $x_{00} := 0 \quad x_{01} := 0 \quad x_{02} := 0$

$$x_{10} := 0 \quad x_{11} := 0 \quad x_{12} := 0 \quad x_{20} := 0 \quad x_{21} := 0 \quad x_{22} := 0$$

Ограничения по условиям задачи о назначениях

Given

$$x_{00} + x_{01} + x_{02} = 1 \qquad x_{10} + x_{11} + x_{12} = 1 \qquad x_{20} + x_{21} + x_{22} = 1 \qquad x \le 1 \qquad x \ge 0$$

$$x_{00} + x_{10} + x_{20} = 1 \qquad x_{01} + x_{11} + x_{21} = 1 \qquad x_{02} + x_{12} + x_{22} = 1$$

Вычисления

$$\begin{pmatrix} x_{00} \\ x_{01} \\ x_{02} \\ x_{10} \\ x11 \\ x_{12} \\ x_{20} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(Z, x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{20}, x_{21}, x_{22}) \qquad \begin{pmatrix} x_{00} \\ x_{01} \\ x_{02} \\ x_{10} \\ x11 \\ x_{12} \\ x_{20} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Z(x) = 27$$

Рисунок 4.1 – Решение задачи поиска оптимального распределения работников по всем заявленным работам в Machcad

4.7 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи.
2. Решить венгерским методом задачу о назначениях.
3. Проверить полученные результаты, найдя оптимальное распределение, используя табличный процессор Excel.

4. Проверить полученные результаты, найдя оптимальное распределение работников в среде Machcad.

4.8 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Последовательность действий при решении задачи о назначениях венгерским методом.
4. Последовательность действий при решении задачи о назначениях с использованием табличного процессора Excel.
5. Последовательность действий при решении задачи о назначениях в среде Machcad.

4.9 Варианты заданий для самостоятельного решения

Задание 1. Распределить десять работников A, B, ..., J на десять работ 1, 2, ..., 10 таким образом, чтобы суммарные затраты времени выполнения всех работ всеми работниками были минимальными, если каждый из работников может получить только одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним работником. Временные затраты на выполнение каждым работником каждой работы приведены в таблице:

Работник	Работа									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	17	9	1	15	1	9	3	4	6	3
B	4	14	11	11	4	12	2	3	5	3
C	10	17	18	16	9	16	4	6	7	1
D	4	17	10	12	16	14	3	7	3	1
E	2	5	18	8	18	5	1	6	1	3
F	7	17	6	8	8	17	7	3	2	7
G	3	1	1	3	2	3	4	5	3	5
H	6	3	2	1	1	5	4	10	1	1
I	5	1	3	7	4	3	5	2	2	4
J	3	3	5	2	3	9	3	1	1	8

Задание 2. Необходимо распределить шесть автомашин A, B, ..., F по шести маршрутам 1, 2, ..., 6 таким образом, чтобы минимизировать суммарное время перевозок груза всеми автомобилями по всем маршрутам,

при условии, что каждый автомобиль может быть отправлен только по одному маршруту.

Автомашины	Маршруты					
	1	2	3	4	5	6
A	10	2	8	9	4	3
B	8	12	14	7	1	3
C	9	10	6	3	4	8
D	12	2	1	1	7	16
E	9	14	2	4	6	13
F	10	3	3	7	8	2

Время доставки груза каждым автомобилем по каждому маршруту приведено в таблице.

Задание 3. Распределить шесть научных тем 1, 2, ..., 6 по шести научно-исследовательским лабораториям A, B, ..., F таким образом, чтобы суммарная эффективность выполнения всех работ всеми лабораториями была максимальной, причем одна лаборатория может выполнять только одну научную тему, а каждая тема может выполняться только одной лабораторией. Эффективность выполнения каждой научной темы каждой лабораторией, выраженная в экспертных оценках, приведена в таблице:

Лаборатория	Научные темы					
	1	2	3	4	5	6
A	3	5	4	9	10	13
B	15	7	3	9	5	7
C	5	5	11	3	16	11
D	2	8	6	11	17	14
E	18	11	3	5	14	6
F	12	16	8	11	8	10

Задание 4. Менеджер по управлению персоналом должен распределить шесть аудиторов A, B, ..., F для проверки финансового состояния шести фирм 1, 2, ..., 6 таким образом, чтобы суммарное время, затрачиваемое на подготовку к проверке всех фирм всеми аудиторами, было минимальным. Необходимо учесть, что один аудитор может проверять только одну фирму и каждая фирма может проверяться только одним аудитором.

Прогнозируемое время подготовки к проверке каждой фирмы каждым аудитором приведено в таблице:

Аудиторы	Фирмы					
	1	2	3	4	5	6
A	15	19	11	4	5	12
B	14	6	5	7	8	9
C	16	7	19	13	9	7
D	11	10	9	13	14	16
E	10	14	18	4	14	6
F	17	4	12	13	10	18

Задание 5. Компании S&C необходимо направить девять коммивояжеров A, B, ..., I в девять новых районов сбыта 1, 2, ..., 9. Назначение того или иного коммивояжера на определенный рынок сбыта измеряется ожидаемым увеличением прибыли. Прибыль, которую можно ожидать от конкретного коммивояжера в каждом районе сбыта, приведена в таблице:

Сотрудники	Новые районы сбыта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	17	9	16	13	11	8	11	9	15
B	4	14	4	10	10	5	6	12	11
C	10	17	5	10	7	6	9	16	16
D	4	5	6	5	4	2	11	14	12
E	2	17	7	4	3	7	10	5	8
F	7	9	5	11	11	4	12	17	8
G	11	5	4	6	10	3	13	9	11
H	2	17	6	7	5	11	5	10	16
I	4	9	7	8	13	7	5	12	12

Как должна компания S&C распределить своих сотрудников по районам, чтобы максимизировать общую ожидаемую прибыль, при условии, что в один район может быть послан только один коммивояжер и каждый коммивояжер может быть послан только в один район?

Задание 6. Компания B&D намеревается назначить восемь вице-президентов A, B, ..., H в восемь своих филиалов 1, 2, ..., 8, причем эффективность каждого претендента измеряется ожидаемым увеличением объема продаж, значения которого приведены в таблице:

Претендент	**Филиалы фирмы**							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	6	5	8	4	8	1	8
B	4	9	5	8	2	8	2	7
C	5	9	5	2	6	7	9	7
D	5	2	7	2	6	7	4	9
E	6	2	8	5	5	7	8	6
F	2	4	5	5	3	3	2	3
G	7	6	9	6	5	5	4	7
H	7	1	9	11	6	7	6	1

Необходимо назначить каждого претендента в вице-президенты в соответствующий филиал фирмы таким образом, чтобы максимизировать ожидаемый суммарный объем продаж, при условии, что в каждый филиал может быть послан только один претендент, а каждый претендент может быть послан только в один филиал.

Задание 7. Директор торгового центра намеревается расставить шесть продавцов A, B, ..., F по шести торговым участкам 1, 2, ..., 6 таким образом, чтобы максимизировать общий уровень обслуживания торгового центра. Уровень обслуживания, который может обеспечить каждый продавец на каждом участке, оценивается директором в баллах так, как показано в таблице:

Продавцы	**Торговые участки**					
	1	2	3	4	5	6
A	2	5	1	2	3	2
B	3	4	4	1	5	7
C	7	3	5	6	8	9
D	5	7	3	5	10	2
E	1	6	7	4	3	5
F	10	4	6	3	5	4

Необходимо учесть, что один продавец может обслуживать только один участок, а один участок может обслуживаться только одним продавцом.

Задание 8. Инвестор, намереваясь приступить к постройке шести объектов 1, 2, ..., 6, рассматривает предложения шести различных строительных компаний A, B, ..., F, каждую из которых он оценивает неким комплексным показателем, значения которого приведены в таблице (наилучшее значение показателя соответствует его минимуму):

Строительные компании	**Строительные объекты**					
	1	2	3	4	5	6
A	12	2	4	2	1	3
B	5	9	6	6	3	7
C	7	2	2	3	4	5
D	2	8	8	9	5	2
E	5	4	4	8	6	4
F	4	3	1	5	2	3

Инвестору необходимо поручить строительство объектов строительным компаниям исходя из условия минимизации общего показателя, учитывая при этом, что один объект возводится только одной строительной компанией и одна компания может возводить только один объект.

Задание 9. Транспортной компании необходимо распределить шесть водителей A, B, ..., F по шести автомобилям 1, 2, ..., 6 таким образом, чтобы общая эффективность грузоперевозок была максимальной. Эффективность грузоперевозок, оцениваемая баллами, назначаемыми каждому водителю его руководителем, приведена в таблице:

Водители	**Автомобили**					
	1	2	3	4	5	6
A	3	8	5	10	3	5
B	4	1	8	9	1	1
C	7	7	3	5	3	6
D	2	4	6	6	5	3
E	5	2	8	4	2	7
F	4	8	1	2	6	9

Задание 10. Руководитель телеканала намеревается осуществить шесть телепроектов 1, 2, ..., 6 и для этой цели отобрал шесть продюсеров A, B, ..., F по критерию ожидаемых денежных затрат каждого продюсера по каждому проекту (см. таблицу):

Продюсеры	**Телепроекты**					
	1	2	3	4	5	6
A	2	4	5	7	8	1

B	3	1	3	2	3	6
C	4	5	5	7	9	7
D	5	3	10	5	5	2
E	1	4	3	8	7	1
F	3	2	5	4	4	2

Руководитель телеканала хочет поручить выполнение проектов таким продюсерам, для которых суммарные затраты на выполнение всех проектов были бы минимальными. Необходимо учесть, что один телепроект может выполняться только одним продюсером, один продюсер может выполнять только один телепроект.

Задание 11. Распределить выполнение шести проектов 1, 2, ..., 6 по шести исполнителям A, B, ..., F таким образом, чтобы суммарная эффективность выполнения всех проектов была максимальной, причем один исполнитель может выполнять только один проект, а каждый проект может выполняться только одним исполнителем. Эффективность выполнения каждого проекта каждым исполнителем, оцениваемая в баллах, назначаемых экспертами, приведена в таблице:

Исполнители	**Проекты**					
	1	2	3	4	5	6
A	4	3	4	7	1	2
B	6	12	5	6	3	7
C	2	7	4	8	8	3
D	4	5	2	4	8	9
E	4	5	2	4	8	9
F	9	5	5	3	4	1

Задание 12. Распределить шесть работников A, B, ..., F на шесть работ 1, 2, ..., 6 таким образом, чтобы суммарные затраты времени выполнения всех работ всеми работниками были минимальными, причем каждый из работников может получить только одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним работником. Временные затраты на выполнение каждым работником каждой работы приведены в таблице:

Работники	**Работы**					
	1	2	3	4	5	6
A	3	7	3	3	1	9
B	5	5	5	9	5	2
C	2	9	2	8	3	6

D	7	8	8	6	5	4
E	1	2	6	5	1	2
F	9	4	3	6	2	4

Лабораторная работа № 5

Принятие решений в условиях неопределенности

5.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков принятия решений в условиях неопределенности и использования среды Excel для нахождения оптимальной стратегии.

5.2 Формулировка задачи принятия решений в условиях неопределенности

Рассмотрим пример. Компания «Турист» намеревается построить частную гостиницу. Возможное количество комнат a_i не определено и может равняться: 20, 30, 40 или 50. Среднее число занятых комнат b_j также не известно и может равняться: 20, 30, 40 или 50. Отклонение от идеальных потребностей влечет дополнительные затраты, обусловленные строительством избыточных площадей и потерей возможной прибыли в случае неудовлетворенного спроса. Таблица 5.1 содержит матрицу затрат (в млн. руб.) для данного примера.

Таблица 5.1 – Матрица затрат

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Необходимо определить оптимальную стратегию a_i.

5.3 Критерии принятия решений в условиях неопределенности

Для принятия решений в условиях неопределенности используется ряд критериев. Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет лицо, принимающее решение, при выборе в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа опирается на принцип, который гласит, что, поскольку распределение вероятностей состояний $P(s_j)$ неизвестно, нет причин считать их различными. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний природы равны между собой, т.е. $P(s_1)=P(s_2)=...=P(s_n)=1/n$.

Тогда при анализе матрицы прибылей, наилучшее решение находится по формуле:

$$\max_{a_i}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v(a_i,s_j)\right],$$

где $v(a_i,s_j)$ – элемент матрицы прибылей. Если величина $v(a_i,s_j)$ представляет расходы лица принимающего решение, то оператор «max» меняется на «min».

Максиминный (минимаксный) критерий основан на осторожном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших. Если величина $v(a_i,s_j)$ представляет получаемую прибыль, то в соответствии с максиминным критерием в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_{a_i}\left[\min_{s_j}v(a_i,s_j)\right].$$

Если величина $v(a_i,s_j)$ представляет затраты, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением

$$\min_{a_i}\left[\max_{s_j}v(a_i,s_j)\right].$$

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путем замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) $v(a_i, s_j)$ матрицей потерь $r(a_i, s_j)$, которая определяется следующим образом.

$$r(a_i, s_j)=\begin{cases} \max\limits_{a_k}\left[v(a_k, s_j)\right]-v(a_i, s_j), & \text{если v - доход,} \\ v(a_i, s_j)-\min\limits_{a_k}\left[v(a_k, s_j)\right], & \text{если v - затраты.} \end{cases}$$

В дальнейшем для анализа матрицы потерь используется минимаксный критерий.

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Если величины $v(a_i, s_j)$ представляют доходы, то решению соответствует

$$\max_{a_i}\left[\alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j)+(1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right],$$

где параметр α – показатель оптимизма $(0 \le \alpha \le 1)$. При $\alpha = 0$, критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия. При $\alpha = 1$ критерий Гурвица становится оптимистичным, ибо рассчитывает на наилучшие из наилучших условий. Степень оптимизма (или пессимизма) определяется выбором величины α.

Если $v(a_i, s_j)$ выражают потери, критерий Гурвица принимает вид:

$$\min_{a_i}\left[\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j)+(1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right].$$

5.4 Принятие решений в условиях неопределенности

Проанализируем поставленную задачу с точки зрения четырех рассмотренных выше критериев.

Критерий Лапласа. При $j = 1, 2, 3, 4$ вероятности $P(s_j) = \frac{1}{4}$. Тогда ожидаемые значения затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом.

$$M(a_1) = \frac{1}{4}(5 + 10 + 18 + 25) = 14{,}5,$$

$$M(a_2) = \frac{1}{4}(8 + 7 + 12 + 23) = 12{,}5 \leftarrow \textit{Оптимум},$$

$$M(a_3) = \frac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = 18,$$

$$M(a_4) = \frac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 15) = 21{,}5.$$

Минимаксный критерий.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	21 ← минимакс
a_4	30	22	19	15	30

Критерий Сэвиджа. Определим матрицу потерь, путем вычитания чисел 5, 7, 12 и 15 из элементов столбцов от первого до четвертого соответственно.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Максимум строк
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	8 ← минимакс
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Критерий Гурвица.

Альтернатива	Минимум строк	Максимум строк	α(минимум строки) + $(1-\alpha)$(максимум строки)
a_1	5	25	$25 - 20\alpha$
a_2	7	23	$23 - 16\alpha$
a_3	12	21	$21 - 9\alpha$
a_4	15	30	$30 - 15\alpha$

Подставив α определим оптимальную альтернативу. При $\alpha = 0{,}5$ оптимальными являются либо альтернатива a_1 либо a_2. При $\alpha = 0{,}25$ оптимальным является решение a_3.

5.5 Использование среды Excel для нахождения оптимальной стратегии

Оптимальная стратегия может быть найдена в Excel (рис. 5.1). Основой вычислений служит матрица затрат (диапазон B9:K18). Если надо использовать матрицу выигрышей, то все элементы этой матрицы надо умножить на – 1. Максимальный размер матриц 10х10.

	A	B	C	D	E	F	G	L	M	N	O	Q
1	Реализация критериев принятия решения в условиях неопределенности											
2	Критерии принятия решения							Результаты				
3	Лапласа							Значения критериев соответствующие оптимальной стратегии				
4	Минимакса											
5	Сэвиджа											
6	Гурвица	x	α =	0,5								
7	Начальная матрица затрат							12,5	21	8	15	
8		s1	s2	s3	s4	s5		Лапласа	Минимакса	Сэвиджа	Гурвица	
9	a1	5	10	18	25			14,5	25	10	15	
10	a2	8	7	12	23			12,5	23	8	15	
11	a3	21	18	12	21			18	21	16	16,5	
12	a4	30	22	19	15			21,5	30	25	22,5	
13	a5											
14												
20												
21												

Рисунок 5.1 – Нахождение оптимальной стратегии в Excel

Кроме матрицы затрат здесь содержится 4 типа данных:

1) значение показателя оптимизма α (ячейка E6);

2) формулы, по которым вычисляются значения критериев;

3) значения критериев для различных a_i (диапазон L9:O18);

4) значения критериев соответствующие оптимальной стратегии (диапазон L7:O7);

5) поясняющие заголовки и надписи.

При использовании критерия Сэвиджа в ячейках B20:K20 находим минимальные (максимальные) значения в столбцах начальной матрицы платежей. Матрицу потерь вычисляем в диапазоне ячеек B21:K30 (рис. 5.2).

	A	B	C	D	E	F	K
1				Реализация критериев принятия решения в усл			
2				Критерии принятия решения			
3	Лапласа						
4	Минимакса						
5	Сэвиджа						
6	Гурвица		x	α =	0,5		
7			Начальная матрица затрат				
8		s1	s2	s3	s4	s5	
9	a1	5	10	18	25		
10	a2	8	7	12	23		
11	a3	21	18	12	21		
12	a4	30	22	19	15		
13	a5						
18							
19							
20		5	7	12	15		
21		0	3	6	10		
22		3	0	0	8		
23		16	11	0	6		
24		25	15	7	0		
25							
30							

Рисунок 5.2 – Нахождение матрицы потерь

При использовании критерия Гурвица в ячейках Q9:R18 находим минимальные и максимальные значения в строках начальной матрицы платежей (рис. 5.3).

	L	M	N	O	Q	R
1	критериев принятия решения в условиях неопр					
2		Результаты				
3						
4	Значения критериев соответствующие					
5	оптимальной стратегии					
6						
7	12,5	21	8	15		
8	Лапласа	Минимакса	Сэвиджа	Гурвица		
9	14,5	25	10	15	5	25
10	12,5	23	8	15	7	23
11	18	21	16	16,5	12	21
12	21,5	30	25	22,5	15	30
13						
18						
19						

Рисунок 5.3 – Нахождение минимальных и максимальных значений в строках начальной матрицы

После ввода исходных данных и расчетных формул табличная модель готова к использованию.

5.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 5.2.
2. Найти оптимальную стратегию для различных критериев аналитическим методом.
3. Проверить полученные результаты, используя табличный редактор Excel.
4. Разработать словесную формулировку принятия решений в условиях неопределенности и учесть ее при составлении отчета.

5.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка принятия решений в условиях неопределенности.
4. Последовательность действий при аналитическом методе поиска оптимальной стратегии для различных критериев в условиях неопределенности.
5. Последовательность действий при поиске оптимальной стратегии в Excel.

Таблица 5.2 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№ 1

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	6	12	20	24
X_2	9	7	9	28
X_3	23	18	15	19
X_4	27	24	21	15

№ 2

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	16	12	10	14
X_2	19	17	9	18
X_3	13	18	15	9
X_4	17	14	11	15

№ 3

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	16	22	20	14	20
X_2	19	27	29	18	25
X_3	13	28	25	19	27
X_4	17	24	21	15	22

№ 4

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	6	2	10	14
X_2	9	7	9	18
X_3	13	18	15	9
X_4	17	14	11	15

№ 5

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	26	22	20	24
X_2	29	27	19	28
X_3	23	28	25	19
X_4	27	24	21	25

№ 6

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	6	18	12	20	24
X_2	9	7	7	9	28
X_3	23	13	18	15	19
X_4	27	19	24	21	15

№ 7

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	26	12	20	24
X_2	9	27	9	28
X_3	23	18	25	19
X_4	12	30	17	25
X_5	27	24	21	25

№ 8

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	16	12	10	14
X_2	18	23	20	16
X_3	19	17	9	18
X_4	13	18	15	9
X_5	17	14	11	15

№ 9

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	6	2	4	10	14
X_2	9	7	14	9	18
X_3	13	18	16	15	9
X_4	17	14	12	11	15
X_5	15	10	15	17	12

№ 10

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	16	12	10	24
X_2	19	17	29	18
X_3	13	28	15	9
X_4	27	14	11	15

№ 11

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	6	12	20	4
X_2	9	7	9	8
X_3	23	18	15	9
X_4	27	24	21	5

№ 12

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	20	24	23	26	22
X_2	19	28	25	29	27
X_3	25	19	30	23	28
X_4	21	25	19	27	24

№ 13

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	6	2	9	4
X_2	9	17	9	8
X_3	3	18	15	9
X_4	7	4	9	5

№ 14

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	26	12	20	24
X_2	9	27	9	28
X_3	23	18	25	19
X_4	27	24	21	25

№ 15

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	26	22	20	24	20
X_2	29	7	9	28	15
X_3	23	18	15	29	12
X_4	27	24	21	25	22

№ 16

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	26	12	10	24
X_2	29	17	19	28
X_3	23	18	15	29
X_4	27	14	11	25
X_5	27	24	21	5

№ 17

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	19	17	9	18
X_2	13	18	15	9
X_3	27	24	21	5
X_4	16	12	10	14
X_5	18	23	20	16

№ 18

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
X_1	17	14	12	11	15
X_2	15	10	15	17	12
X_3	19	28	25	29	27
X_4	6	2	4	10	14
X_5	9	7	14	9	18

№ 19

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	26	12	10	24
X_2	19	27	29	18
X_3	13	28	25	9
X_4	27	14	11	25

№ 20

	S_1	S_2	S_3	S_4
X_1	16	22	20	14
X_2	19	27	29	18
X_3	13	28	25	19
X_4	17	24	21	15

Для четных вариантов $\alpha = 0,25$.
Для нечетных вариантов $\alpha = 0,75$.

Лабораторная работа № 6

Исследование и решение игровых задач

6.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения игровых задач итерационным методом и использования инструмента **Поиск решения** среды Excel для решения игровых задач методом линейного программирования.

6.2 Формулировка игровой задачи

Рассмотрим экономическую задачу, сводящуюся к игровой. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2, A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырёх состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица $a_{i\,j}$, её элементы характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-ой продукции с j-м состоянием спроса:

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределённым.

6.3 Математическая модель игровой задачи

Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия А против спроса В может быть представлена расширенной платёжной матрицей.

Таблица 6.1 – Расширенная платёжная матрица.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	7	2	9
A_2	2	3	9	0
A_3	9	9	0	11

Перед решением задачи, нужно попытаться упростить игру, проведя анализ платёжной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие. Среди стратегий игрока А таких нет. Но для игрока В вторая стратегия (B_2) является явно невыгодной по сравнению с первой (B_1), так как цель игрока В – уменьшить выигрыш игрока А, т.е. свой проигрыш. Поэтому второй столбец можно отбросить. Получим матрицу P' размера 3×3:

$$P' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Определим нижнюю и верхнюю цену игры и проверим игру на наличие седловой точки (табл. 6.2)

Таблица 6.2 – Модифицированная платёжная матрица.

	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	7	2	9	2
A_2	2	9	0	0
A_3	9	0	11	0
β_j	9	9	11	

Тогда $\alpha = 2$, $\beta = 9$. В виду того что $\alpha \neq \beta$, седловая точка отсутствует, и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков. Оптимальными стратегиями игроков являются:

$$S^*{}_A = (p_1, p_2, p_3) \text{ и } S^*{}_B = (q_1, q_2, q_3).$$

Они обеспечивают цену игры ν.

6.4 Итерационный метод решения игровой задачи

Применим итерационный метод. Начнем с произвольно выбранной стратегии игрока А, например A_3. В таблице 6.3 приведены первые 15 шагов итерационного процесса.

Таблица 6.3 – Реализация итерационного процесса

k	i	B_1	B_3	B_4	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{\upsilon}$	$\overline{\upsilon}$	υ^*
1	3	9	0	11	3	2	9	0	0	9	4,5
2	2	11	9	11	3	4	18	0	4,5	9	6,75
3	2	13	18	11	4	13	18	11	3,67	6	4,84
4	2	15	27	11	4	22	18	22	2,75	5,5	4,13
5	1	22	29	20	4	31	18	33	4	6,6	5,3
6	3	31	29	31	3	33	27	33	4,84	5,5	5,17
7	1	38	31	40	3	35	36	33	4,43	5,14	4,79
8	2	40	40	40	3	37	45	33	5	5,61	5,3
9	2	42	49	40	4	46	45	44	4,45	5,11	4,78
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4,9	5,3	5,1
11	3	58	51	60	3	55	56	53	4,64	5,09	4,87
12	2	60	60	60	3	57	65	53	5	5,41	5,2
13	2	62	69	60	4	66	65	64	4,61	5,07	4,84
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4,93	5,21	5,07
15	3	78	71	80	3	75	76	73	4,74	5,06	4,9

В первом столбце дан номер партии k. Во втором столбце номер i выбранной в данной партии стратегии игрока А. В последующих трех столбцах указывается «накопленный выигрыш» за первые k партий при тех стратегиях, которые применяли игроки в предыдущих партиях и при стратегиях B_1, B_3, B_4 игрока В в данной партии. Число равное накопленному выигрышу получается прибавлением элементов соответствующей строки к элементам вышестоящей строки. Среди накопленных выигрышей выделяют минимальный. Он определяет ответный выбор стратегии игроком В в данной партии. Номер j, соответствующий выбранной стратегии, ставится в следующем столбце. В последующих трех столбцах дается накопленный выигрыш за k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока А. Число равное накопленному выигрышу получается прибавлением элементов соответствующей строки к элементам вышестоящей строки. Среди накопленных выигрышей выделяют максимальный. Он определяет ответный выбор стратегии игроком А в следующей партии, т.е. строкой ниже.

В последних трех столбцах таблицы 6.3 даны:

$\underline{\upsilon}$ – нижняя оценка цены игры, равная минимальному накопленному выигрышу, деленному на число партий k;

$\overline{\upsilon}$ – верхняя оценка цены игры, равная максимальному накопленному выигрышу, деленному на k;

υ^* – среднее арифметическое между верхней и нижней ценой игры.

Величина υ^* незначительно колеблется около значения равного 5. По таблице 6.3 можно вычислить частоты $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ использования стратегий игроками А и В. Получим:

$$\tilde{p}_1 = 4/15 \approx 0{,}266; \quad \tilde{p}_2 = 7/15 \approx 0{,}468; \quad \tilde{p}_3 = 4/15 \approx 0{,}266;$$
$$\tilde{q}_1 = 2/15 \approx 0{,}133; \quad \tilde{q}_3 = 8/15 \approx 0{,}534; \quad \tilde{q}_4 = 5/15 \approx 0{,}333.$$

6.5 Использование среды Excel для решения игровых задач методом линейного программирования

Решение игровой задачи методом линейного программирования может быть найдено в Excel с помощью инструмента **Поиск решения**. Для рассматриваемого примера построена платежная матрица (табл. 6.2) и определено отсутствие седловой точки. Определено, что оптимальные стратегии $S^*{}_A = (p_1, p_2, p_3)$ и $S^*{}_B = (q_1, q_2, q_3)$ обеспечивают цену игры v. На рис. 6.1. показано табличное представление платежной матрицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1								Решен	
2	Платежная матрица								
3									
4		B1	B2	B3	B4	B5	α i	α = 2	
5	A1	7	2	9			2		
6	A2	2	9	0			0		
7	A3	9	0	11			0		
8	A4								
9	A5								
10	β j	9	9	11					
11	β = 9								
12									

Рисунок 6.1 – Табличное представление платежной матрицы в Excel

Обозначим $x_i = p_i / \nu,\ i = 1,2,3;\ y_j = q_j / \nu,\ j = 1,2,3$ и составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования:

Задача 1

$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \geq 1, \\ 2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \geq 1, \\ 9 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

Задача 2

$$7 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 9 \cdot y_3 \leq 1,$$
$$2 \cdot y_1 + 9 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \leq 1,$$
$$9 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 11 \cdot y_3 \leq 1$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

$$Z' = y_1 + y_2 + y_3 \to \max.$$

Задачи 1 и 2 соответствующие игрокам А и В решаются на отдельных листах Excel обычным методом, с помощью инструмента **Поиск решения.** Табличное представление задачи 1 приведено на рис. 6.2.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Решение игровых задач								
2		1 задача линейного программирования							
3			X 1	X 2	X 3				
4									
5		1 уравнение	7	2	9	1	>=	1	
6		2 уравнение	2	9	0	1	>=	1	
7		3 уравнение	9	0	11	1	>=	1	
8		Z =	1	1	1	0,2	min		
9			>= 0	>= 0	>= 0				
10									
11			Результат						
12			X 1	X 2	X 3	Z			
13			0,05	0,1	0,05000	0,2			
14									

Рисунок 6.2 – Табличное представление задачи 1

Здесь содержится 4 типа данных:

1) входные данные (ячейки B5:D7 и L5:N8);
2) значения переменных и целевой функции (ячейки L13:O13);
3) формулы, по которым вычисляются значения целевой функции и левых частей ограничений (ячейки O5:O8);
4) поясняющие заголовки и надписи.

Диалоговое окно **Поиск решения** показано на рис. 6.3. В этом окне вводим адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции, указываем, что надо минимизировать целевую функцию, и вводим адреса ячеек, содержащих значения переменных.

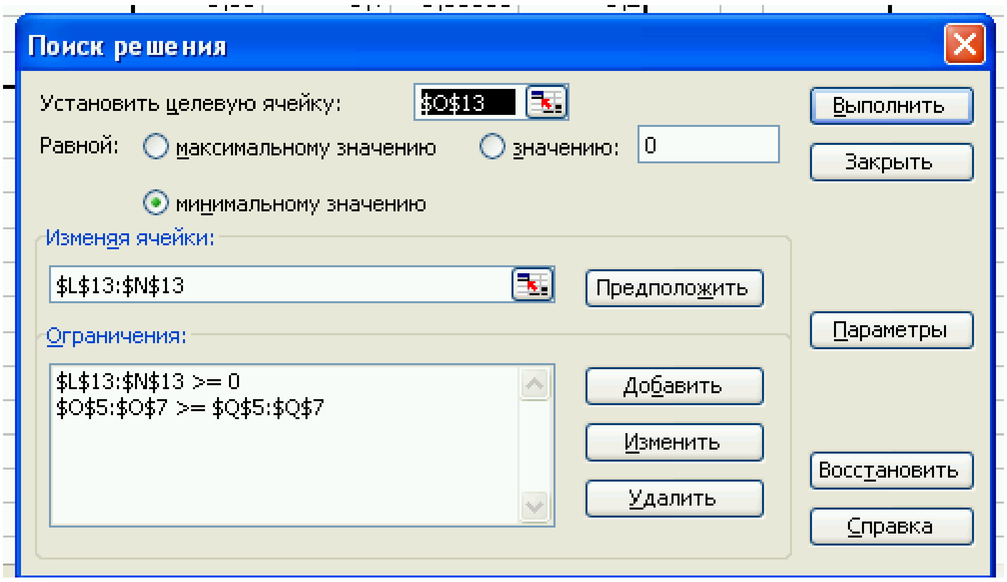


Рисунок 6.3 – Диалоговое окно **Поиск решения**

Здесь же можно задать ограничения модели, щелкнув на кнопке **Добавить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Для решения задачи, необходимо щелкнуть на кнопке **Выполнить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Решение появится в выходных ячейках L13:O13 табличной модели (рис. 6.2).

После решения задачи 1 необходимо перейти к решению задачи 2 используя другой лист Excel. Соблюдая аналогичную последовательность действий, получим табличное представление задачи 2 (рис. 6.4). Диалоговое окно **Поиск решения** показано на рис. 6.5. Решение появится в выходных ячейках L13:O13 табличной модели (рис. 6.4).

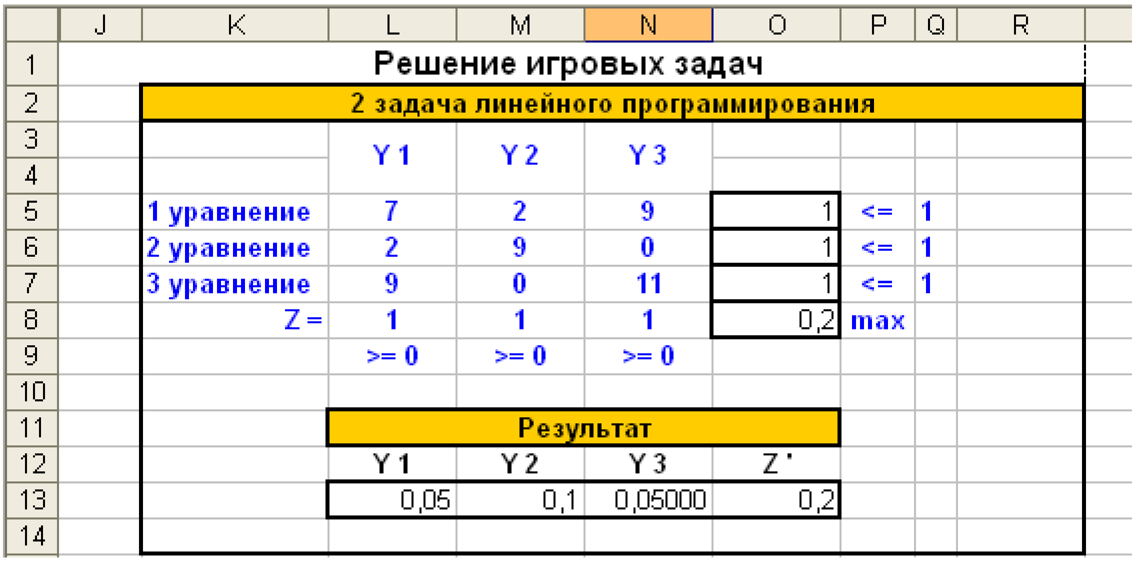


Рисунок 6.4 – Табличное представление задачи 2

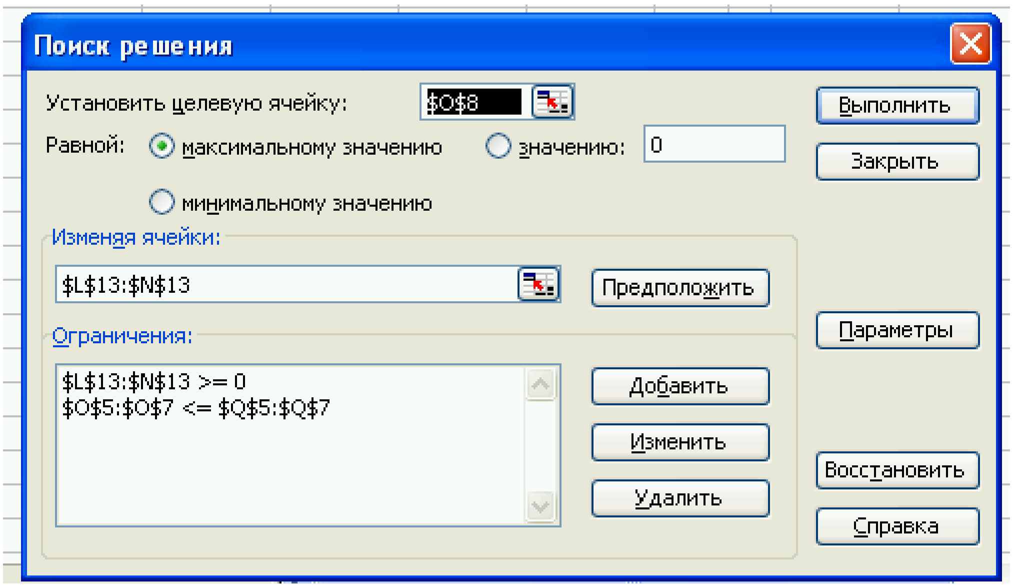


Рисунок 6.5 – Диалоговое окно **Поиск решения**

Результаты решения задачи 2 необходимо перенести на лист решения задачи 1 и введя в соответствующие ячейки (рис. 6.6).

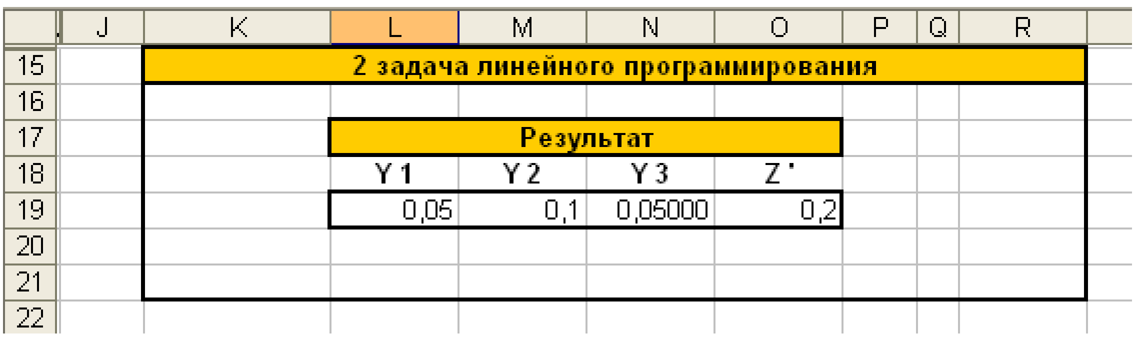


Рисунок 6.6 – Результаты решения задачи 2.

Используя результаты вычислений задач 1 и 2, получим оптимальные стратегии игроков и цену игры (рис. 6.7).

Рисунок 6.7 – Решение игровой задачи

В ячейке F27 содержится результат вычисления цены игры v. Учитывая значение v в ячейках C20:H20 вычисляются значения оптимальной стратегии игрока А $S^*{}_A = (p_1, p_2, p_3)$. В ячейках C25:H25 вычисляются значения оптимальной стратегии игрока В $S^*{}_B = (q_1, q_2, q_3)$.

Полученные результаты в целом примерно совпадают с результатами применения итерационного метода. Несовпадение наблюдается только в значении q_1, что указывает на большую погрешность итерационного метода при малом количестве шагов.

6.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в виде платежной матрицы в таблице 6.4.

2. Решить игровую задачу итерационным методом.

3. Проверить полученные результаты, решив игровую задачу методом линейного программирования, используя табличный редактор Excel.

4. Разработать словесную формулировку игровой задачи и учесть ее при составлении отчета.

Таблица 6.4 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Задача	№	Задача	№	Задача	№	Задача
1	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	**7**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

6.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка игровой задачи.
4. Последовательность действий при итерационном методе решения игровой задачи.
5. Последовательность действий при решении игровой задачи методом линейного программирования в Excel.

Лабораторная работа № 7

Исследование и решение многокритериальных задач принятия решений

7.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков нахождения решения в задачах векторной оптимизации с использованием среды Machcad.

7.2 Формулировка задачи с несколькими целевыми функциями

Рассмотрим пример с двумя переменными. Компания «Русские краски» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: M1 и M2 (табл. 7.1).

Таблица 7.1 – Основные данные для задачи

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		**Максимально возможный ежедневный расход сырья**
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье M1	6	4	**24**
Сырье M2	1	2	**6**
Доход (в тыс. у. е.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 тонн, а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Себестоимость продукции складывается из расходов на производство краски для наружных и внутренних работ (4 и 2 у. е.) и расходы на обеспечение производства (1 у. е.).

Требуется найти оптимальное решение по производству краски для наружных и внутренних работ, чтобы доход и количество выпускаемой продукции были максимальными, а себестоимость минимальной.

7.3 Математическая модель задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями

Ранее сформулированная многокритериальная задача принятия решений будет записана следующим образом:

$$Z_1 = 5x + 4y \to \max,$$
$$Z_2 = x + y \to \max,$$
$$Z_3 = 4x + 2y + 1 \to \min,$$
$$\begin{cases} 6x + 4y \le 24, \\ x + 2y \le 6, \\ -x + y \le 1, \\ y \le 2, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

7.4 Методы решения задач с несколькими целевыми функциями

Рассмотрим четыре метода решения многокритериальной задачи принятия решений:

1. Метод независимой оптимизации целевых функций.
2. Метод обобщенного критерия.
3. Метод минимизации общей относительной уступки.
4. Метод последовательных уступок.

Первый метод предусматривает сведение многокритериальной задачи к однокритериальной, путем выбора наиболее важного критерия. Оптимизационная задача решается по выбранному критерию, а оставшиеся критерии не учитываются.

Второй метод предусматривает введение весовых показателей $w_1, w_2, w_3 = 1 - w_1 - w_2$ и поиск максимума обобщенного показателя – функции $Z = w_1 Z_1 + w_2 Z_2 + w_3(-Z_3)$.

В третьем методе оптимизационные задачи сначала решают по каждому показателю в отдельности и находят максимумы первого и второго показателей m_1, m_2 и минимум третьего m_3. Затем вводится общая относительная уступка l, задаются коэффициенты показателей k_1,k_2,k_3 и ставится задача нахождения минимума l при ограничениях, содержащих исходные целевые функции:

$$\begin{cases} 6x+4y \le 24, \\ x+2y \le 6, \\ -x+y \le 1, \\ y \le 2, \\ x \ge 0,\ y \ge 0, l \ge 0, \\ Z_1 \ge m_1 - k_1 \times l, \\ Z_2 \ge m_2 - k_2 \times l, \\ Z_3 \le m_3 + k_3 \times l, \end{cases}$$

где в качестве параметров k_1,k_2,k_3 можно использовать значения m_1,m_2,m_3.

В четвертом методе сначала находят максимум первой функции m_1. Затем исходя из практических соображений и принятой точности расчетов, назначаются величины допустимых отклонений $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ (объективно оправданных уступок) первого и второго показателей. На втором этапе ищется максимум второго показателя m_2 при дополнительном условии

$$Z_1(x, y) \ge m_1 - \delta_1.$$

На третьем этапе ищется минимум третьего показателя m_3 при дополнительных условиях

$$Z_1(x, y) \ge m_1 - \delta_1$$
$$Z_2(x, y) \ge m_2 - \delta_2.$$

Значения x и y соответствующие оптимальному показателю m_3 будут являться решением многокритериальной задачи методом последовательных уступок.

Сравнение результатов полученных при применении различных методов и выбор наиболее подходящего из них или их пересчет с другими весами или уступками остается за человеком.

7.5 Использование среды Machcad для решения задач с несколькими целевыми функциями

Геометрическая интерпретация пространства допустимых решений модели приведена на рис. 7.1.

$f1(x) := 6 - 6\frac{x}{4}$ $\quad f2(x) := 3 - \frac{x}{2}$ $\quad f3(x) := 1 + x$ $\quad f4(x) := 2$

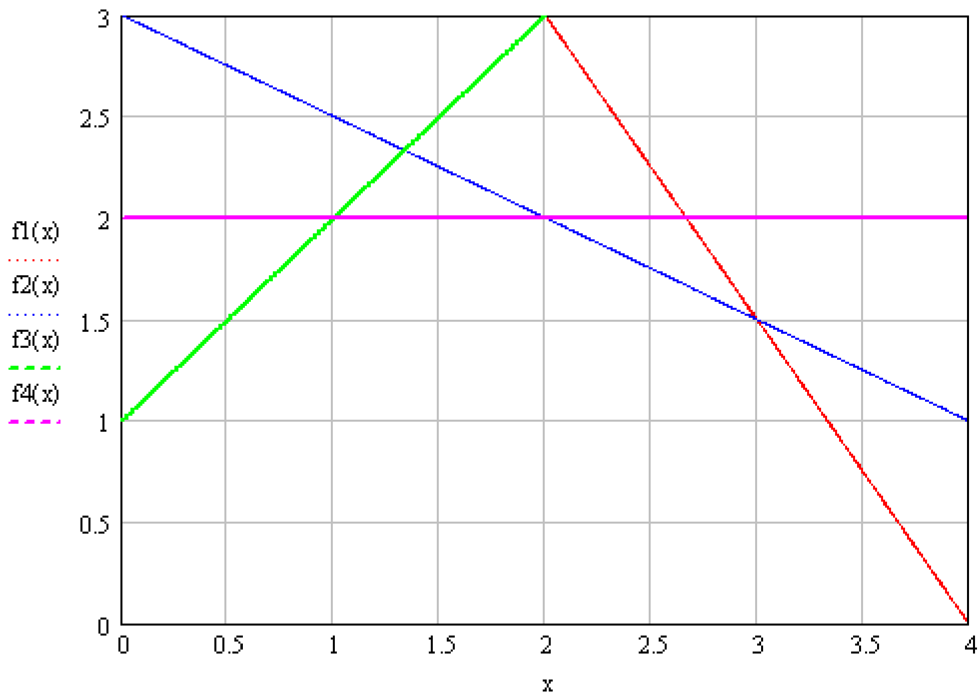


Рисунок 7.1 – Пространство допустимых решений модели в Machcad

Программа Machcad, используемая для решения многокритериальной задачи принятия решений методом независимой оптимизации целевых функций приведена на рис. 7.2.

Метод независимой оптимизации целевых функций

Целевые функции $Z1(x,y) := 5 \cdot x + 4 \cdot y$ Максимум дохода

$Z2(x,y) := x + y$ Максимум количества

$Z3(x,y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y + 1$ Минимум себестоимости

Начальное приближение $x := 0$ $y := 0$

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$ $x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1$ $y \le 2$ $x \ge 0$ $y \ge 0$

Вычисления

$L1 := \text{Maximize}(Z1, x, y)$ $L1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ $xp := L1_0$ $yp := L1_1$

$m1 := Z1(xp, yp)$ $m1 = 21$ - максимальная прибыль

Начальное приближение $x := 0$ $y := 0$

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$ $x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1$ $y \le 2$ $x \ge 0$ $y \ge 0$

Вычисления

$L2 := \text{Maximize}(Z2, x, y)$ $L2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ $xk := L2_0$ $yk := L2_1$

$m2 := Z2(xk, yk)$ $m2 = 4.5$ - максимальное количество изделий

Начальное приближение $x := 0$ $y := 0$

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$ $x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1$ $y \le 2$ $x \ge 0$ $y \ge 0$

Вычисления

$L3 := \text{Minimize}(Z3, x, y)$ $L3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $xs := L3_0$ $ys := L3_1$

$m3 := Z3(xs, ys)$ $m3 = 1$ - минимальная себестоимость

Рисунок 7.2 – Решение задачи методом независимой оптимизации целевых функций

Программа Machcad, реализующая метод обобщенного критерия приведена на рис. 7.3.

Программа Machcad, используемая для решения многокритериальной задачи принятия решений методом нахождения минимума общей относительной уступки приведена на рис. 7.4.

Метод обобщенного критерия

Целевые функции $Z1(x,y) := 5 \cdot x + 4 \cdot y$

$Z2(x,y) := x + y$

$Z3(x,y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y + 1$

Начальное приближение $x := 0$ $y := 0$

Целевая функция для обобщенного критерия

$Z(x,y) := 0.7 \cdot Z1(x,y) + 0.2 \cdot Z2(x,y) - 0.1 \cdot Z3(x,y)$

Ограничения по ресурсам и обьемам производства

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$ $x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1$ $y \le 2$ $x \ge 0$ $y \ge 0$

Вычисления

$L := \mathrm{Maximize}(Z, x, y)$ $L = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ $xr := L_0$ $yr := L_1$

$Z(xr, yr) = 14$

$Z1(xr, yr) = 21$ - максимальная прибыль

$Z2(xr, yr) = 4.5$ - максимальное количество изделий

$Z3(xr, yr) = 16$ - минимальная себестоимость

Рисунок 7.3 – Решение задачи методом обобщенного критерия

Метод минимизации общей относительной уступки

Целевые функции $Z1(x,y) := 5 \cdot x + 4 \cdot y$ Максимум дохода

$Z2(x,y) := x + y$ Максимум количества

$Z3(x,y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y + 1$ Минимум себестоимости

$V(x,y,l) := l$

$x := 0$ $y := 0$ $l := 0$

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$ $x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1$ $y \le 2$ $x \ge 0$ $y \ge 0$ $l \ge 0$

$Z1(x,y) \ge 21 \cdot (1 - l)$ $Z2(x,y) \ge 4.5 \cdot (1 - l)$ $Z3(x,y) \le 1 \cdot (1 + l)$

Вычисления

$W := \mathrm{Minimize}(V, x, y, l)$ $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.457 \\ 0.913 \end{pmatrix}$ $xo := W_0$ $yo := W_1$

$Z1(xo, yo) = 1.826$ - максимальная прибыль

$Z2(xo, yo) = 0.457$ - максимальное количество изделий

$Z3(xo, yo) = 1.913$ - минимальная себестоимость

Рисунок 7.4 – Решение многокритериальной задачи методом нахождения минимума общей относительной уступки

Программа Machcad, реализующая метод последовательных уступок приведена на рис. 7.5.

Метод последовательных уступок

Целевые функции $Z1(x,y) := 5 \cdot x + 4 \cdot y$ Максимум дохода

$Z2(x,y) := x + y$ Максимум количества

$Z3(x,y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y + 1$ Минимум себестоимости

$x := 0 \quad y := 0 \quad \delta1 := 5 \quad \delta2 := 2$

Given

$6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24 \quad x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1 \quad y \le 2 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

$L1 := \mathrm{Maximize}(Z1, x, y) \quad L1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad xp := L1_0 \quad yp := L1_1$

$m1 := Z1(xp, yp) \quad m1 = 21$ - максимальная прибыль

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$Z1(x,y) \ge m1 - \delta1 \quad 6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24 \quad x + 2 \cdot y \le 6$

$-x + y \le 1 \quad y \le 2 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

Вычисления

$L2 := \mathrm{Maximize}(Z2, x, y) \quad L2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad xk := L2_0 \quad yk := L2_1$

$m2 := Z2(xk, yk) \quad m2 = 4.5$ - максимальное количество изделий

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$Z1(x,y) \ge m1 - \delta1 \quad Z2(x,y) \ge m2 - \delta2 \quad 6 \cdot x + 4 \cdot y \le 24$

$x + 2 \cdot y \le 6 \quad -x + y \le 1 \quad y \le 2 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

Вычисления

$L3 := \mathrm{Minimize}(Z3, x, y) \quad L3 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad xs := L3_0 \quad ys := L3_1$

$m3 := Z3(xs, ys) \quad m3 = 11.4$ - минимальная себестоимость

Рисунок 7.5 – Решение многокритериальной задачи методом последовательных уступок

Результаты использования различных методов решения многокритериальных задач сведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2 – Результаты расчетов

	x	y	Прибыль	Количество изделий	Себестоимость
Независимая оптимизация целевых функций					
1	3.0	1.5	21	4.5	16
2	3.0	1.5	21	4.5	16
3	0	0	0	0	1
Метод обобщенного критерия					
	3.0	1.5	21	4.5	16
Минимизация общей относительной уступки					
	0	0.457	1.826	0,457	1.913
Метод последовательных уступок					
	1.6	2	16	3.6	11.4

7.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 7.3 учитывая, что для всех задач справедливо требование

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

2. Решить задачу векторной оптимизации последовательно применив различные методы решения.

3. Графически отобразить полученные результаты на пространство допустимых решений.

7.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Последовательность действий при различных методах решения задачи векторной оптимизации.

Таблица 7.3 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Задача	№	Задача	№	Задача	№	Задача	№	Задача
1	$Z = 5x_1 + 5x_2 \to \min$ $Z = -x_1 + 3x_2 \to \min$ $Z = x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \end{cases}$	5	$Z = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $Z = x_1 + 5x_2 \to \max$ $Z = -x_1 + 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$	9	$Z = -3x_1 - x_2 \to \min$ $Z = 3x_1 - x_2 \to \min$ $Z = x_1 + 5x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$	13	$Z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$ $Z = 3x_1 - 5x_2 \to \max$ $Z = -x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \quad x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$	17	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $Z = -2x_1 - x_2 \to \min$ $Z = -5x_1 + 5x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$
2	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = x_1 - 5x_2 \to \min$ $Z = x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 2 \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$	6	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = x_1 - 3x_2 \to \max$ $Z = -x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 3x_2 \le -9 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \end{cases}$	10	$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$ $Z = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $Z = 2x_1 - 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 20 \end{cases}$	14	$Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $Z = 5x_1 + 7x_2 \to \max$ $Z = x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \quad x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$	18	$Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $Z = -3x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ -x_1 - 2x_2 \le -10 \end{cases}$
3	$Z = 5x_1 - x_2 \to \min$ $Z = 3x_1 - 2x_2 \to \min$ $Z = -x + 5x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0 \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \end{cases}$	7	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$ $Z = 6x_1 + 2x_2 \to \min$ $Z = x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \end{cases}$	11	$Z = 4x_1 + 6x_2 \to \min$ $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = 5x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$	15	$Z = 2x_1 - 3x_2 + 1 \to \min$ $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $Z = -3x - x \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \quad x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$	19	$Z = x_1 - x_2 \to \max$ $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$ $Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$
4	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min$ $Z = -x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + .3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5, \quad 3x_1 \le 21 \end{cases}$	8	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = x_1 - 5x_2 \to \min$ $Z = x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 2 \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$	12	$Z = x_1 + x_2 \to \max$ $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$ $Z = x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \le 0 \end{cases}$	16	$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ $Z = 2x_1 - x_2 \to \min$ $Z = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \end{cases}$	20	$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$ $Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$

Лабораторная работа № 8

Исследование и решение задач динамического программирования

8.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения задач динамического программирования и использования среды Excel для решения задач об оптимальной загрузке транспортного средства неделимыми предметами.

8.2 Формулировка задачи об оптимальной загрузке

В 4-тонный самолет загружаются предметы трех наименований. Приведенная ниже таблица содержит данные о весе одного предмета w_i (в тоннах) и прибыли r_i (в млн. руб.), получаемой от одного загруженного предмета. Необходимо загрузить самолет так, чтобы получить максимальную прибыль.

Предмет i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Так как вес одного предмета w_i для всех наименований и максимальный вес $W = 4$ принимают целочисленные значения, состояние x_i может принимать лишь целочисленные значения.

8.3 Математическая модель задачи об оптимальной загрузке

Пусть m_i – количество предметов i-го наименования, подлежащих загрузке, тогда общая задача об оптимальной загрузке имеет вид следующей целочисленной задачи линейного программирования.

Максимизировать $z = r_1 m_1 + r_2 m_2 + ... + r_n m_n$

при условии, что

$$w_1 m_1 + w_2 m_2 + ... + w_n m_n \le W,$$

$$m_1, m_2, ..., m_n \ge 0 \text{ и целые.}$$

Три элемента модели динамического программирования определяются следующим образом.

1. Этап i ставится в соответствие предмету i-го наименования, $i = 1, 2, ..., n$.

2. Варианты решения на этапе i описываются количеством m_i, предметов i-го наименования, подлежащих загрузке. Значение m_i, заключено в пределах от 0 до $\left[\frac{W}{w_i}\right]$, где $\left[\frac{W}{w_i}\right]$ – целая часть числа $\frac{W}{w_i}$. Соответствующая прибыль равна $r_i m_i$.

3. Состояние x_i на этапе i выражает суммарный вес предметов, решения, о погрузке которых приняты на этапах i, i+1, ..., n. Это определение отражает тот факт, что ограничение по весу является единственным, которое связывает n этапов вместе.

Обозначим максимальную суммарную прибыль от этапов i, i+1, ..., n при заданном состоянии x_i как $f_i(x_i)$. Тогда рекуррентное уравнение имеет вид

$$f_i(x_i) = \max_{m_i}\{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

В приведенной формуле учитывается максимальная суммарная прибыль на этапе i+1 с учетом того, что вес предметов загруженных на данном этапе должен быть не больше, чем $x_i - w_i m_i$.

8.4 Решение задачи об оптимальной загрузке

Для удобства вычислений расположим предметы i по убыванию веса w_i. Решение методом обратной прогонки начнем с предмета имеющего самый малый вес (предмет 3).

Этап 3. Точный вес, который может быть загружен на 3 этапе, заранее неизвестен, но он должен принимать одно из значений 0, 1, 2, 3, 4 (так как $W = 4$ тонны).

Вес $w_3 = 1$ тонне, тогда максимальное количество единиц этого типа, которое может быть загружено, равно [4/1] = 4. Это означает, что возможными значениями m_3 будут 0, 1, 2, 3 и 4. Решение m_i является допустимым лишь при условии, что $w_i m_i \le x_i$. Следовательно, все недопустимые альтернативы (те, для которых $w_3 m_3 > x_3$) исключены. Следующее уравнение является основой для сравнения альтернатив на этапе 3.

$$f_3(x_3) = \max_{m_3}(14m_3), \quad \max(m_3) = \left[\frac{4}{1}\right] = 4.$$

В следующей таблице сравниваются допустимые решения для каждого значения x_3.

x_3	$14m_3$					Оптимальное решение	
	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	—	—	—	—	0	0
1	0	14	—	—	—	14	1
2	0	14	28	—	—	28	2
3	0	14	28	42	—	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Этап 2. Аналогично получим уравнение для сравнения альтернатив на этапе 2.

$$f_2(x_2) = \max_{m_2}(47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)), \quad \max(m_2) = \left[\frac{4}{3}\right] = 1.$$

x_2	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Оптимальное решение	
	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	14	0
2	0 + 28 = 28	—	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Этап 1.

$$f_1(x_1) = \max_{m_1}\left(31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\right), \quad \max(m_1) = \left[\frac{4}{2}\right] = 2.$$

x_1	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Оптимальное решение	
	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	—	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	—	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	—	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	—	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

Нами найдены возможные оптимальные варианты при последовательной оптимизации по одной переменной. Окончательное оптимальное решение определяется теперь следующим образом. Первый этап решения задачи при $x_1 = 4$ дает оптимальное решение $m^*{}_1 = 2$, которое означает, что два предмета первого наименования будут загружены в самолет. Эта загрузка оставляет $x_2 = x_1 - 2m^*{}_1 = 4 - 2 \times 2 = 0$ тонн. Решение на втором этапе при $x_2 = 0$ приводит к оптимальному решению $m^*{}_2 = 0$, которое, в свою очередь, дает $x_3 = x_2 - 3m^*{}_2 = 0 - 3 \times 0 = 0$. Далее этап 3 при $x_3 = 0$ приводит к $m^*{}_3 = 0$. Следовательно, оптимальным решением задачи является $m^*{}_1 = 2$, $m^*{}_2 = 0$ и $m^*{}_3 = 0$. Соответствующая прибыль равна 62 000 млн. руб.

8.5 Использование среды Excel для решения задачи об оптимальной загрузке

Решение задачи об оптимальной загрузке с одним ограничением может быть найдено в среде Excel. На рис. 8.1 показан рабочий лист Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ																		
2	Входные данные и этапы вычисления																Общее оптимальное решение		
3	Кол-во этапов, N =				Ограничение загрузки, W=					Max m i =		######			Оптимальное решение этапа i				
4	Этап i =				Вес одного предмета w i =					Прибыль r i =									
5	Допустимо ли значение m i ?			######	######	######	######	######	######	######	######	######	######	######			x	f	m
6	Этап	m i =		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
7	i+1	r i * m i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######					
8	f i+1	w i * m i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	f i	m i			
9		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
10		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
11		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
12		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
13		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
14		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
15		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
16		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
17		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
18		x i =		######	######	######	######	######	######	######	######	#ДЕЛ/0!	######	######	######				
19																			

Рисунок 8.1 – Рабочий лист Excel

Рабочий лист разбит на два раздела. В разделе ограниченном столбцами Q:S, заносятся результаты вычислений. Другой раздел ограничен столбцами A:P. Здесь содержится 4 типа данных:

1) входные данные (ячейки D3:D4, I3:I4, и L4);
2) формула, по которой вычисляется максимально возможное количество предметов i-го наименования m_i (ячейка L3)

=ОКРВНИЗ(I3/I4;1)

3) формулы, по которым вычисляются значения $r_i m_i$ (ячейки D7:N7), например для ячейки D7

=ЕСЛИ(D6<=$L$3;ПРОИЗВЕД($L$4;D6);"")

4) формулы, по которым вычисляются значения $w_i m_i$ (ячейки D8:N8), например для ячейки D8

=ЕСЛИ(D6<=$L$3;ПРОИЗВЕД($I$4;D6);"")

5) формулы для вычисления допустимых решений (ячейки D9:N18),

например для ячейки D9

=ЕСЛИ($D$8<=$C9;$D$7+СМЕЩ($A9;-$D$8;0);"-")

6) формулы, по которым вычисляются оптимальные значения $f_i(x_i)$ (ячейки O9:O18);

7) оптимальные значения $m^*{}_i$ вносятся в ячейки P9:P18;

8) возможные значения x_i вносятся в ячейки C9:C18;

9) оптимальные значения i+1 этапа $f_{i+1}(x_i)$ (ячейки A9:A18);

10) поясняющие заголовки и надписи.

Вычисления начинаются с этапа 3, для которого надо ввести следующие данные.

1. Количество этапов, N = 3 (ячейка D3);
2. Текущий этап i = 3 (ячейка D4);
3. Ограничение загрузки, W = 4 (ячейка I3);
4. Вес одного предмета $w_i = 1$ (ячейка I4);
5. Прибыль $r_i = 1$ (ячейка L4);

После ввода данных для этапа 3 рабочий лист выполняет вычисления значений $r_i m_i$ и $w_i m_i$ автоматически в строках 7 и 8 для допустимых значений m_i (рис. 8.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗК											
2	Входные данные и этапы вычисления											
3	Кол-во этапов, N =			3	Ограничение загрузки, W=				4	Max m i =		4
4	Этап i =			3	Вес одного предмета w i =				1	Прибыль r i =		14
5	Допустимо ли значение m i ?			да	да	да	да	да	нет	нет	нет	нет
6	Этап	m i =		0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	i+1	r i * m i =		0	14	28	42	56				
8	f i+1	w i * m i =		0	1	2	3	4				

Рисунок 8.2 – Промежуточные вычисления

Введя в ячейки C9:C13 варианты возможных загрузок, получим оптимальные значения $f_3(x_3)$ в ячейках O9:O13. Введем значения $m^*{}_3$

соответствующие оптимальным значениям $f_3(x_3)$ в ячейки P9:P13. Результаты вычислений на 3 этапе приведены на рис. 8.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ															
2	Входные данные и этапы вычисления															
3	Кол-во этапов, N =			3	Ограничение загрузки, W=				4	Max m i =		4			Оптимальное решение этапа i	
4		Этап i =		3	Вес одного предмета w i =				1	Прибыль r i =		14				
5	Допустимо ли значение m i ?			да	да	да	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет		
6	Этап	m i =		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
7	i+1	r i * m i =		0	14	28	42	56								
8	f i+1	w i * m i =		0	1	2	3	4							f i	m i
9		x i =	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
10		x i =	1	0	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	1
11		x i =	2	0	14	28	-	-	-	-	-	-	-	-	28	2
12		x i =	3	0	14	28	42	-	-	-	-	-	-	-	42	3
13		x i =	4	0	14	28	42	56	-	-	-	-	-	-	56	4
14		x i =		0	-	-	-	-	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	
15		x i =		0	-	-	-	-	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	
16		x i =		0	-	-	-	-	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	
17		x i =		0	-	-	-	-	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	
18		x i =		0	-	-	-	-	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	
19																

Рисунок 8.3 – Результаты вычислений 3 этапа.

Закончив вычисления этапа 3, необходимо выполнить следующие шаги для создания постоянной записи оптимального решения текущего этапа и подготовки рабочего листа к следующему этапу вычислений.

Шаг 1. Скопируйте значения x_3 (диапазон C9:C13) и вставьте их в ячейки диапазона Q7:Q11, где будет храниться оптимальное решение 3-го этапа. Далее скопируйте значения f_3 и m^*_3 (диапазон O9:P13) и вставьте их в диапазон R7:S11. При этом необходимо скопировать и вставить только значения (а не формулы, по которым вычислялись эти значения). Для этого после копирования данных и выделения диапазона, где будут вставлены эти данные, выполните команду **Правка → Специальная вставка** и после появления одноименного диалогового окна установите в нем переключатель **Значения**; затем щелкните на кнопке **ОК**.

Шаг 2. Скопируйте значения f_3 из диапазона R7:R11 в диапазон A9:A13 (без использования диалогового окна **Специальная вставка**).

Шаг 3. Введите число 2 в ячейку D4, а также новые значения w_2 и r_2. На этом заканчивается подготовка к выполнению этапа 2.

Результаты вычислений на 2 этапе приведены на рис. 8.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ																		
2	Входные данные и этапы вычисления																Общее оптимальное решение		
3	Кол-во этапов, N =			3	Ограничение загрузки, W=				4	Max m i =		1							
4		Этап i =		2	Вес одного предмета w i =				3	Прибыль r i =		47							
5	Допустимо ли значение m i ?			да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	Оптимальное решение этапа i		x	f	m
6	Этап	m i =		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			Этап 3		
7	i+1	r i * m i =		0	47												0	0	0
8	f i+1	w i * m i =		0	3										f i	m i	1	14	1
9	0	x i =	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	2	28	2
10	14	x i =	1	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	0	3	42	3
11	28	x i =	2	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28	0	4	56	4
12	42	x i =	3	42	47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	1			
13	56	x i =	4	56	61	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	1	Этап 2		
14		x i =		0	-	#ЗНАЧ!	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		0	0	0
15		x i =		0	-	#ЗНАЧ!	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		1	14	0
16		x i =		0	-	#ЗНАЧ!	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		2	28	0
17		x i =		0	-	#ЗНАЧ!	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		3	47	1
18		x i =		0	-	#ЗНАЧ!	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		4	61	1
19																			

Рисунок 8.4 – Результаты вычислений 2 этапа.

После выполнения этапа 2 рабочий лист следует подготовить к этапу 1 так же, как описано выше. Результаты вычислений на 1 этапе приведены на рис. 8.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКЕ																		
2	Входные данные и этапы вычисления																Общее оптимальное решение		
3	Кол-во этапов, N =			3	Ограничение загрузки, W=				4	Max m i =		2							
4		Этап i =		1	Вес одного предмета w i =				2	Прибыль r i =		31							
5	Допустимо ли значение m i ?			да	да	да	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	нет	Оптимальное решение этапа i		x	f	m
6	Этап	m i =		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			Этап 3		
7	i+1	r i * m i =		0	31	62											0	0	0
8	f i+1	w i * m i =		0	2	4									f i	m i	1	14	1
9	0	x i =	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	2	28	2
10	14	x i =	1	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	0	3	42	3
11	28	x i =	2	28	31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	31	1	4	56	4
12	47	x i =	3	47	45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	0			
13	61	x i =	4	61	59	62	-	-	-	-	-	-	-	-	62	2	Этап 2		
14		x i =		0	-	-	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		0	0	0
15		x i =		0	-	-	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		1	14	0
16		x i =		0	-	-	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		2	28	0
17		x i =		0	-	-	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		3	47	1
18		x i =		0	-	-	######	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!	#ЗНАЧ!		4	61	1
19																			
20																	Этап 1		
21																	0	0	0
22																	1	14	0
23																	2	31	1
24																	3	47	0
25																	4	62	2

Рисунок 8.5 – Результаты вычислений 1 этапа.

После завершения этапа 1 полученное оптимальное решение интерпретируется аналогично.

8.6 Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить у преподавателя № задания и выбрать условия задачи в таблице 8.1 учитывая, что $W = 10$ тоннам.
2. Решить задачу об оптимальной загрузке методом обратной прогонки.
3. Проверить полученные результаты, решив задачу об оптимальной загрузке, используя табличный редактор Excel.
4. Разработать словесную формулировку задачи об оптимальной загрузке с одним ограничением и учесть ее при составлении отчета.

8.7 Содержание отчета

1. Наименование и цель работы.
2. Вариант задания для самостоятельного решения.
3. Словесная формулировка задачи об оптимальной загрузке с одним ограничением.
4. Последовательность действий при решении задачи об оптимальной загрузке методом обратной прогонки.
5. Последовательность действий при решении задачи об оптимальной загрузке в Excel.

Таблица 8.1 – Варианты заданий для самостоятельного решения

№	w_1	r_1	w_2	r_2	w_3	r_3	w_4	r_4
1	1	4	5	34	2	21	-	-
2	6	22	1	16	4	12	-	-
3	5	13	9	35	1	7	-	-
4	8	15	5	47	1	4	-	-
5	7	48	1	5	3	38	-	-
6	1	2	7	6	2	19	-	-
7	2	6	1	3	5	22	-	-
8	9	51	3	42	1	2	-	-
9	5	49	1	4	8	11	-	-
10	1	2	6	35	3	29	2	31
11	4	35	1	4	6	44	3	39
12	7	17	7	25	1	2	7	23
13	8	13	2	34	4	32	1	4
14	3	16	7	19	1	4	4	43
15	9	28	1	4	4	24	8	35
16	1	3	7	16	5	33	4	16
17	4	22	1	3	9	12	6	19
18	6	43	8	52	1	5	6	48
19	2	15	6	46	7	59	1	7
20	8	38	5	45	1	3	3	14