

$$1. \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2(k-1)}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$2. \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, +1).$$

$$3a. \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, +1).$$

$$3b. \operatorname{arcctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}, \quad x \in (+1, +\infty).$$

$$3c. \operatorname{arcctg} x = \pi + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}, \quad x \in (-\infty, -1).$$

$$4. \operatorname{arth} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

$$5. \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1, 1).$$

$$6. \operatorname{arth} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$7. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

$$8. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$9. e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$10. e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$11. \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$12. \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$13. \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$14. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$15. \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), x \neq 0.$$

$$16. \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k-1}}{(2k-1)(x+1)^{2k-1}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$17. \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{kx^k}, \quad x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$$

$$18. \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}, \quad x \in (0, 2].$$

$$19. \ln \frac{x+1}{x} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2x+1)^{2k-1}}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

$$20. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

$$21. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$22. \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$2 \arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$24. \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$25. \ln \left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} \right) = \frac{a}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)x^{2k+1}},$$

$x \in (-a, a), \quad x \neq 0, \quad a > 0.$

$$26. \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right) = \frac{x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)a^{2k+1}},$$

$x \in (-a, a), \quad a > 0.$

$$27. (1+x)^R = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(R-1)\dots(R-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1), \quad R - \text{любое}$$

вещественное число.

$$28. (1-x)^R = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{R(R-1)\dots(R-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1, 1), \quad R -$$

любое вещественное число.

В последующих примерах для вычисления чисел Бернулли B_1, B_{2k} можно воспользоваться следующими рекуррентными формулами:

$B_0 = 1, 1 + C_1^1 B_1 + C_2^2 B_2 + \dots + C_k^{k-1} B_{k-1} = 0, k=1, 2, \dots;$ и тем, что $B_k=0$ для всех нечетных $k>1$.

$$29. \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (-2\pi, 2\pi), x \neq 0.$$

$$30. \operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}, \quad x \in (-\pi, \pi), x \neq 0.$$

$$31. \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in (-\pi, \pi), x \neq 0.$$

$$32. \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

$$3 \operatorname{th} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$34. \operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$