Лекция 6
Инварианты графов

Внутренняя устойчивость
Паросочетания
Хроматическое число

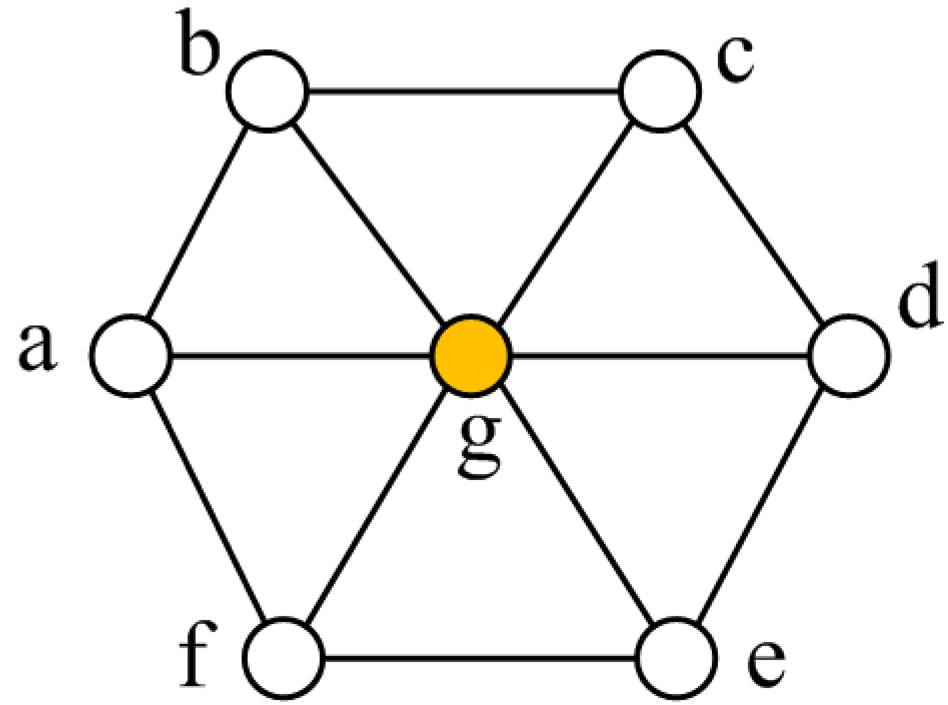
Независимые множества

Множество вершин графа называется независимым (внутренне устойчивым), если в этом множестве никакая пара вершин не смежна. Внутренне устойчивое множество называется максимальным, если оно максимально по включению.

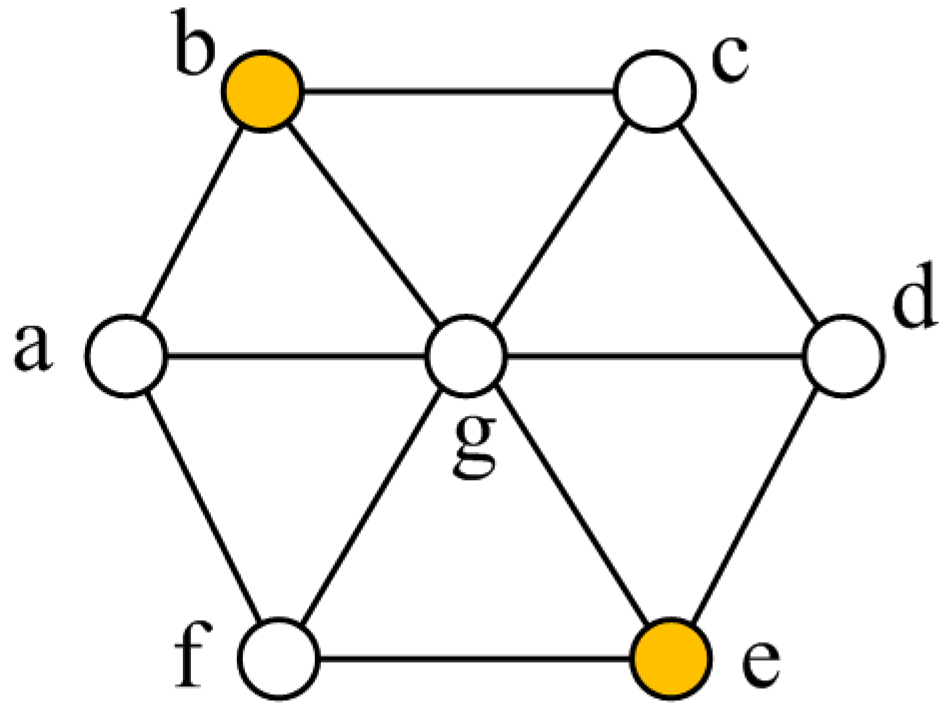
Независимые множества

Максимальное внутренне устойчивое множество называется ***пустым подграфом*** (подграф не содержит рёбер).

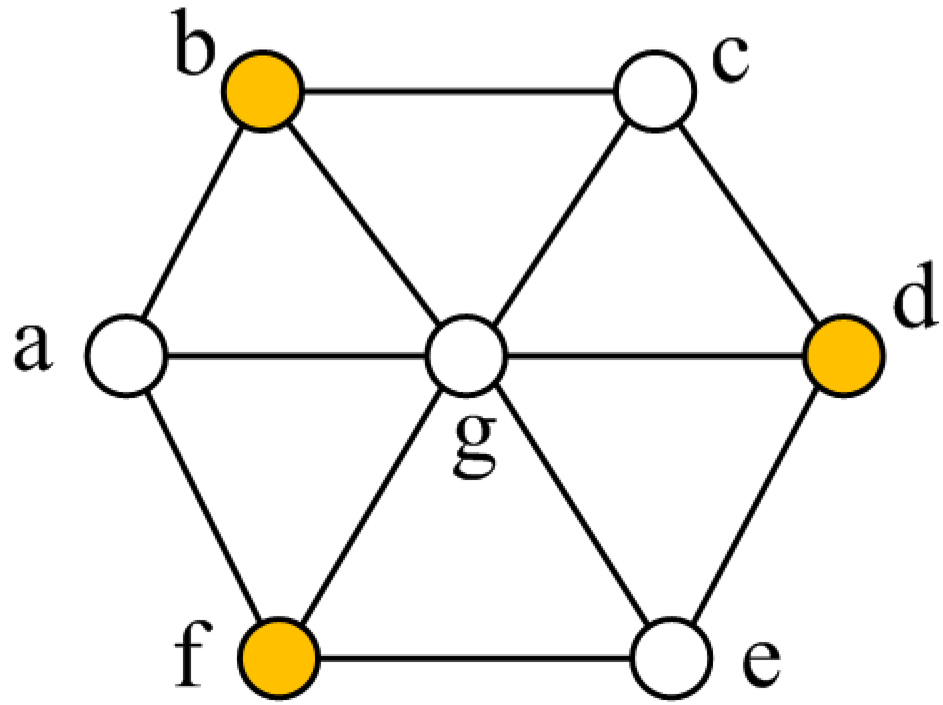
Пример



Пример



Пример



Число вершинной независимости

Число вершинной независимости (β_0) -наибольшая мощность внутренне устойчивого множества.

Внутренне устойчивое множество с мощностью β_0 - наибольшее независимое множество.

Алгоритм нахождения максимальных независимых множеств

1. Строится дерево с корнем, растущее вниз. Все вершины, кроме корня, имеют метку $\mathbf{v_i} \in \mathbf{V}$ и вес $\mathbf{W(v_i)} \subseteq \mathbf{V}$. Корень не метится, взвешивается всем носителем графа.

Алгоритм нахождения максимальных независимых множеств

2. Рекурсивная процедура построения: выбирается произвольная вершина $\mathbf{v_i}$ из веса **W(v)** некоторой вершины дерева **v**, помещается на следующий уровень. На этот же уровень помещаются все смежные с $\mathbf{v_i}$ вершины $\mathbf{v_j}$, из веса **W(v)** вершины **v**, они соединяются рёбрами с **v**.

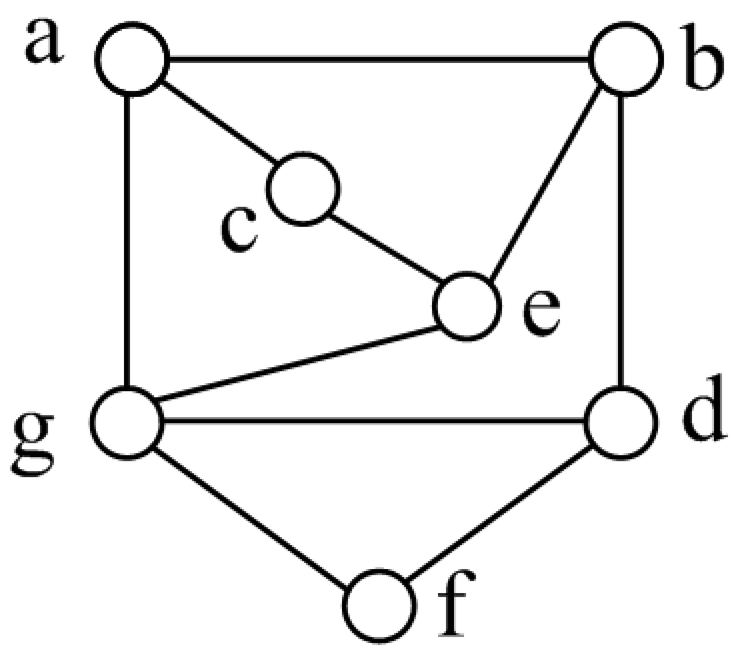
Алгоритм нахождения максимальных независимых множеств

Каждая из построенных вершин взвешивается множеством вершин, не смежных с ней, из веса **W(v)** вершины **v** предшествующего уровня. Процедура построения продолжается до получения пустого веса у всех построенных вершин.

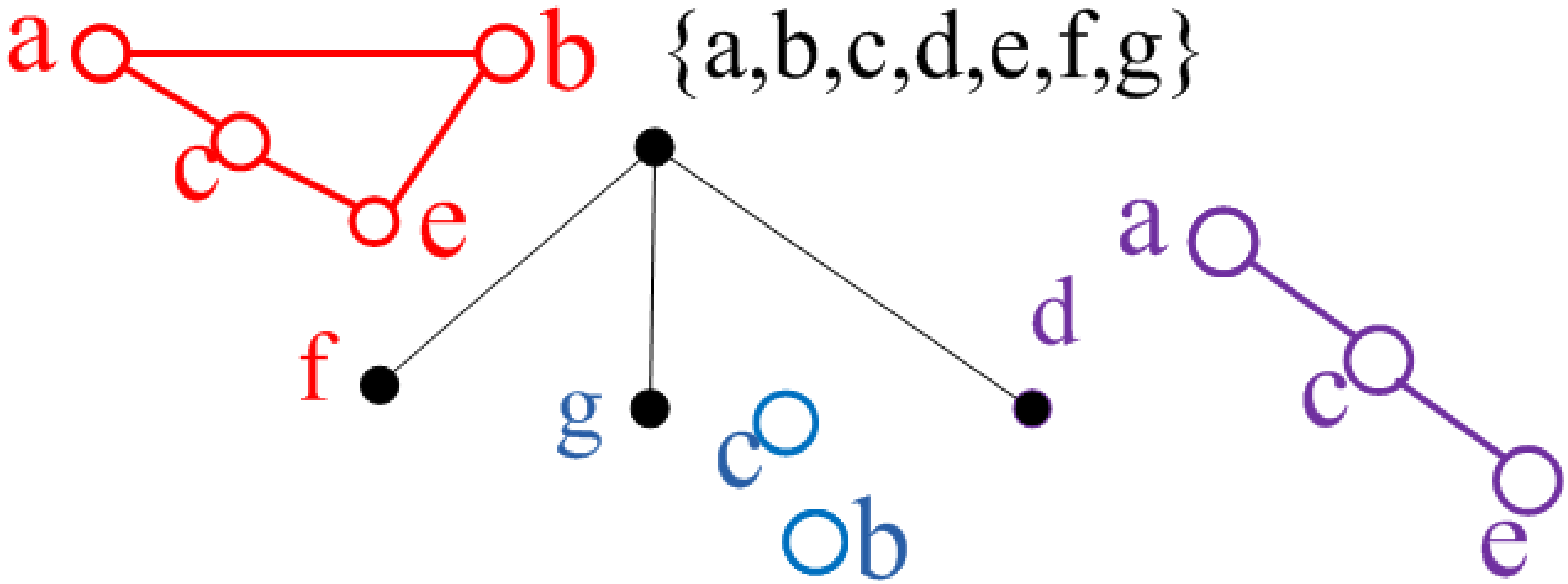
Алгоритм нахождения максимальных независимых множеств

3. Множество меток вершин каждой из ветвей дерева от корня до висячей вершины – пустой подграф.

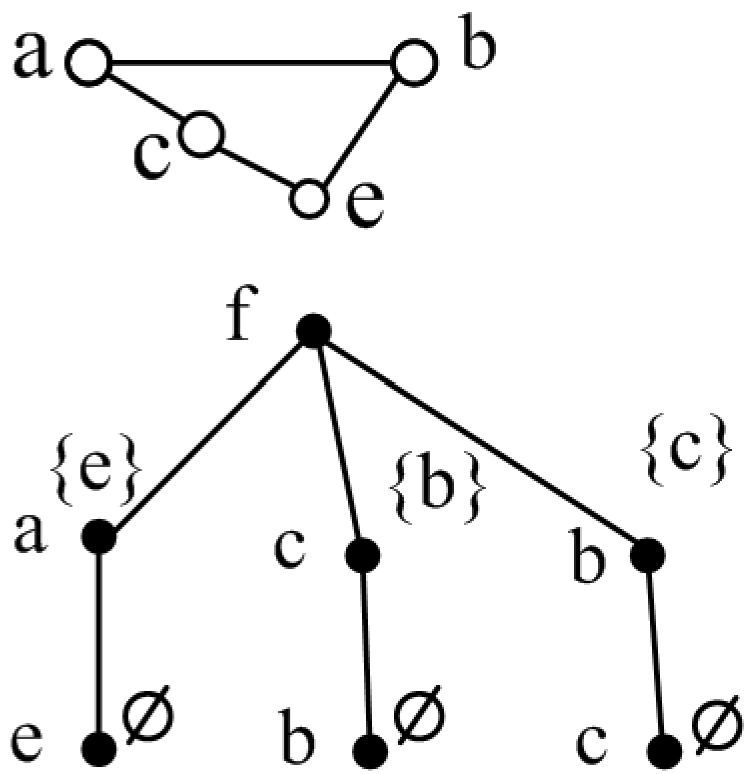
Пример



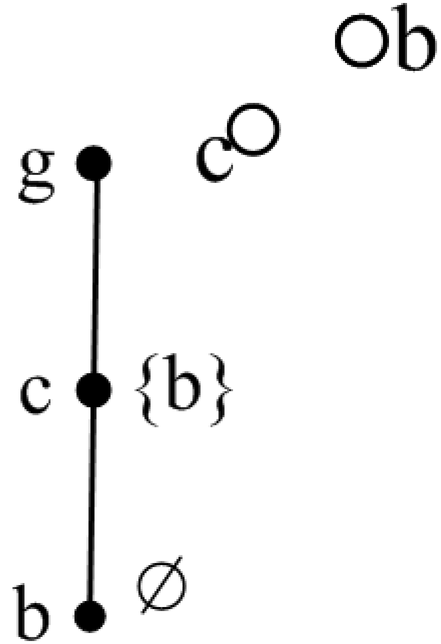
Построение дерева(пример)



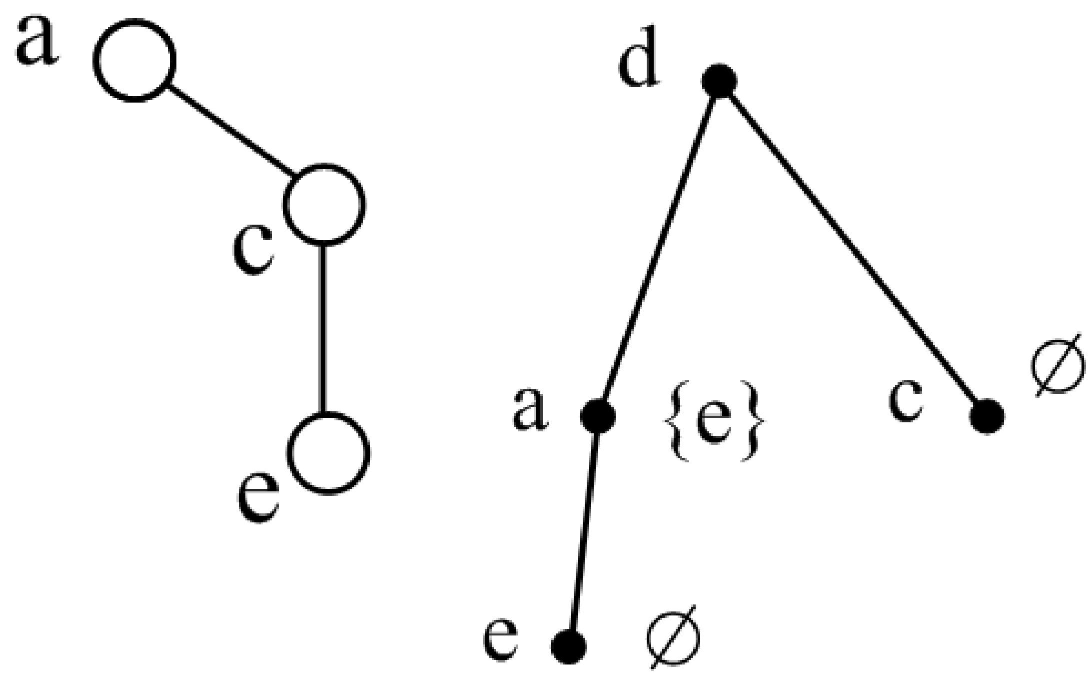
Построение дерева(пример)

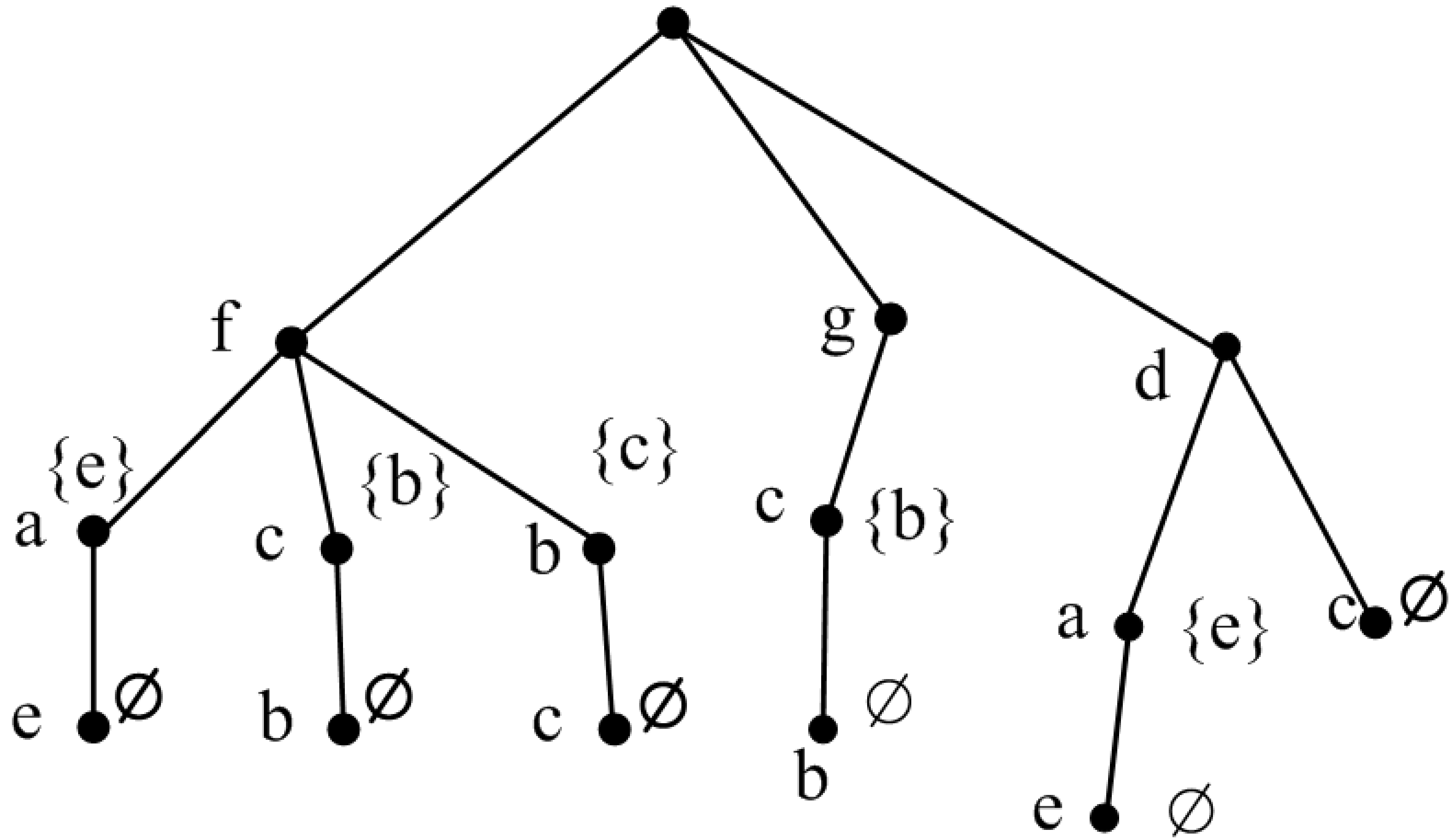


Построение дерева(пример)



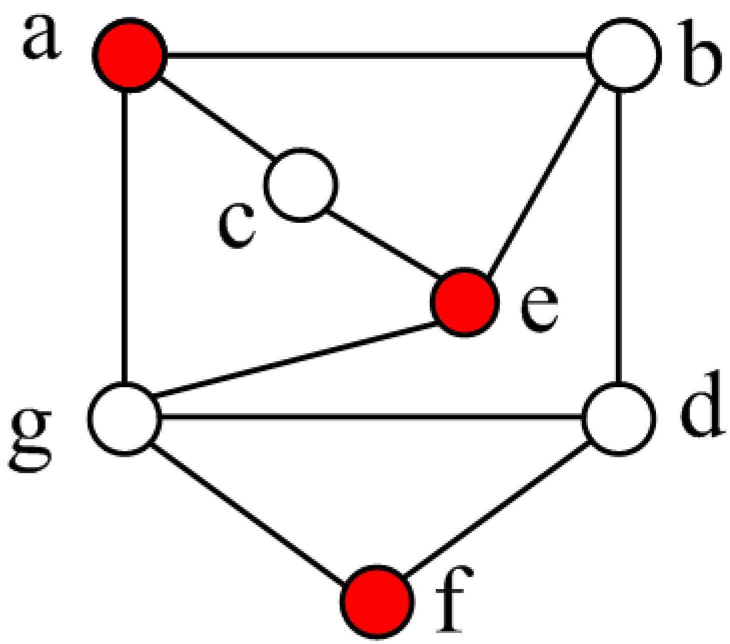
Построение дерева(пример)

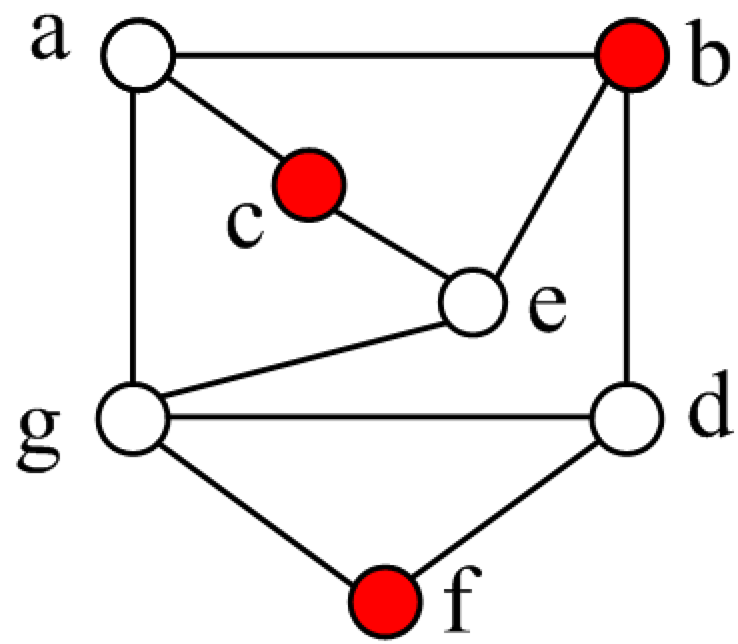




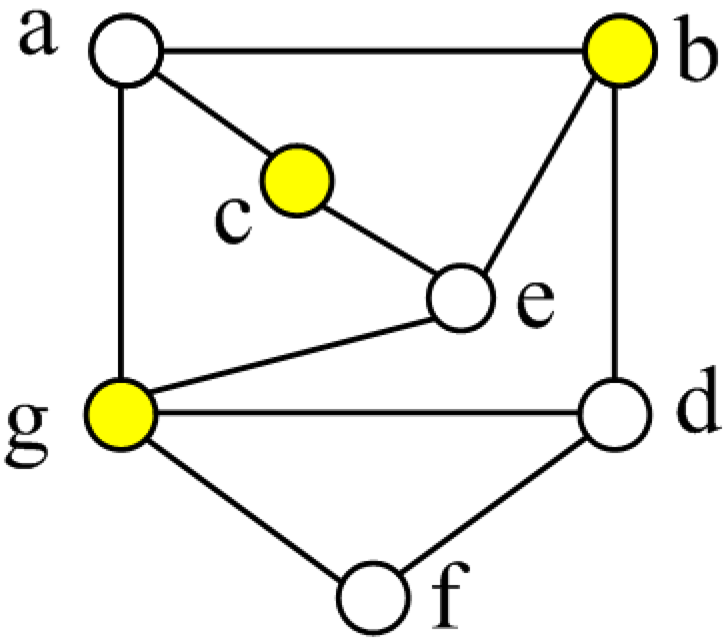
Пустые подграфы:
{f,a,e}, {f,c,b}, {g,c,b},{d,a,e},{d,c}

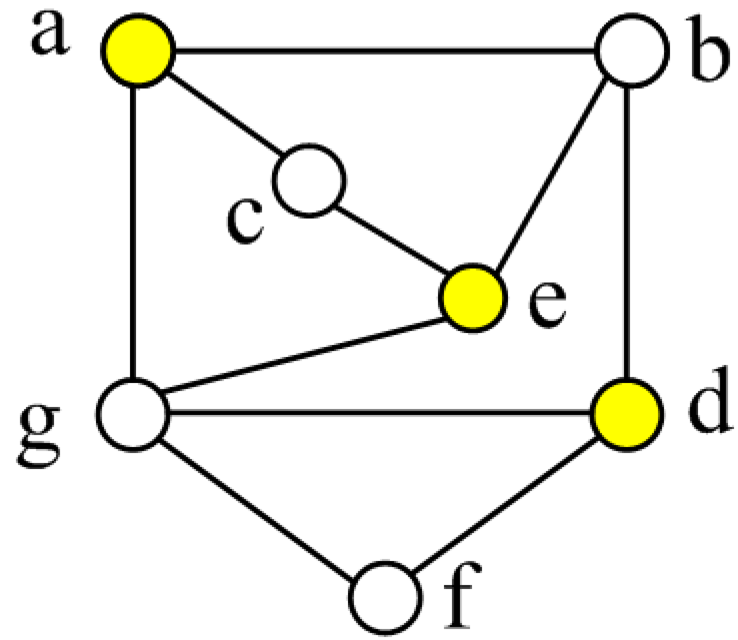
Пример {f,a,e}, {f,c,b},



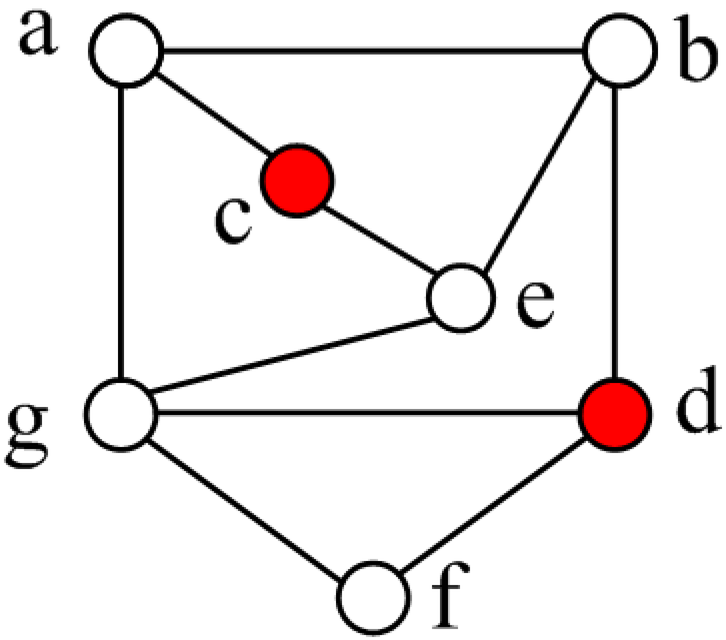


Пример{g,c,b},{a,d,e}





Пример {d,c}



Пустые подграфы:

{a,e,f},

{b,c,f},

{b,c,g},

{a,d,e}, {d,c}

$\beta_0(G)=3$

Клика графа

Клика графа G – максимальный по включению полный подграф графа G.

Каждая вершина графа принадлежит хотя бы одной клике.

Каждое ребро графа принадлежит хотя бы одной клике.

Клика графа

Для построения клик графа G используется тот же алгоритм, что и для построения пустых подграфов, только меняются местами выбор вершин на уровне и вес вершины в дереве.

Алгоритм нахождения клик графа

1. Строится дерево с корнем, растущее вниз. Все вершины, кроме корня, имеют метку $v_i \in V$ и вес $W(v_i) \subseteq V$. Корень не метится, взвешивается всем носителем графа.

Алгоритм нахождения клик графа

2. Рекурсивная процедура построения: выбирается произвольная вершина v_i из веса W(v) некоторой вершины дерева v, помещается на следующий уровень. На этот же уровень помещаются все вершины v_j, не смежные с выбранной v_i, из веса W(v)вершины v, они соединяются рёбрами с v.

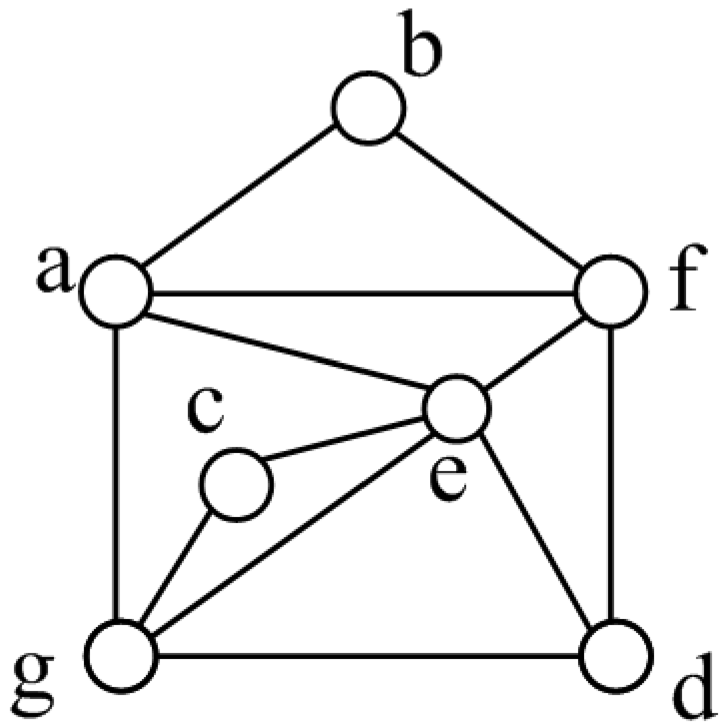
Алгоритм нахождения максимальных независимых множеств

Каждая из построенных вершин взвешивается множеством вершин, смежных с ней, из веса W(v) вершины v предшествующего уровня. Процедура построения продолжается до получения пустого веса у всех построенных вершин.

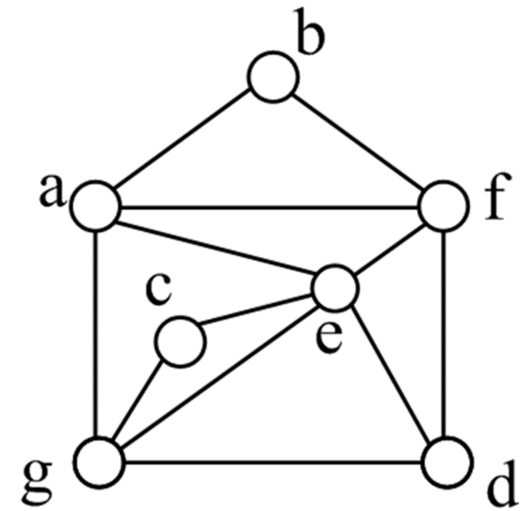
Алгоритм нахождения клик графа

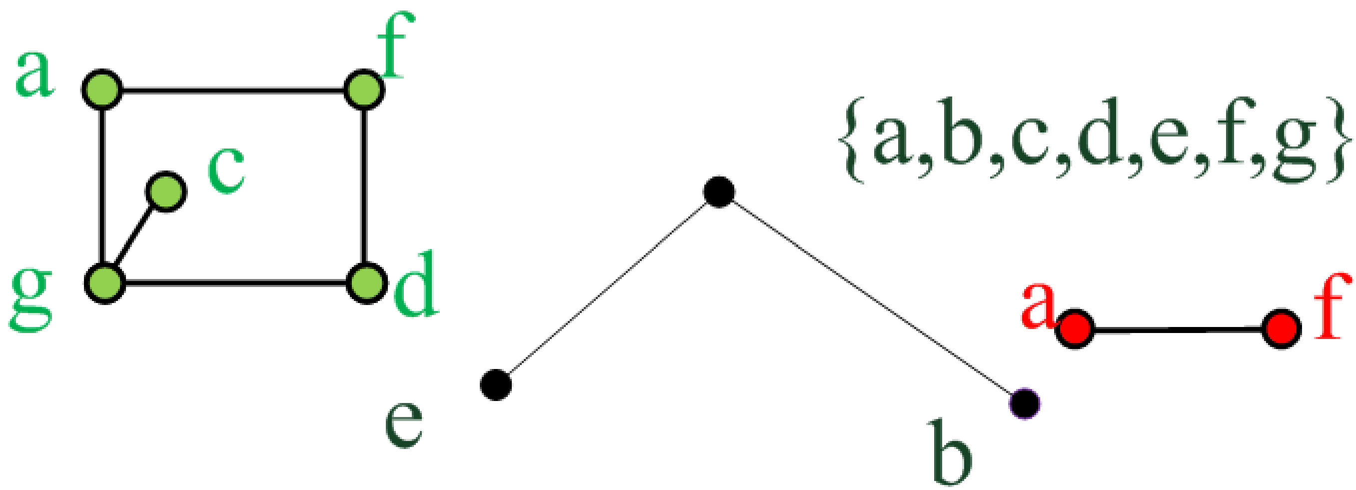
3. Множество меток вершин каждой из ветвей дерева от корня до висячей вершины соответствуют клике графа.

Пример

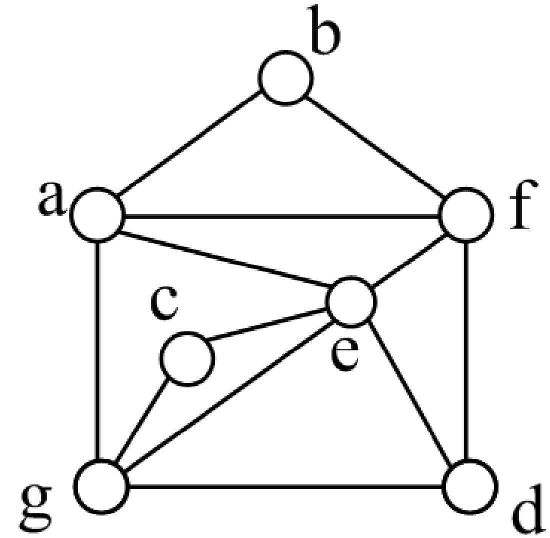


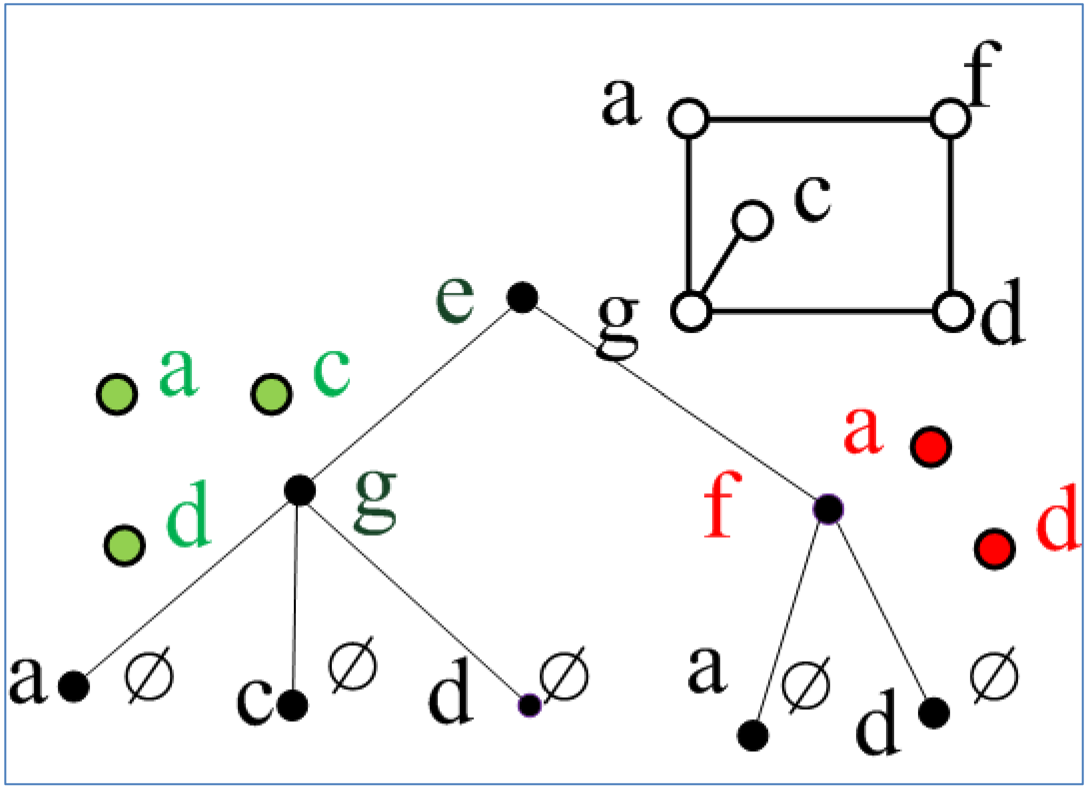
Пример

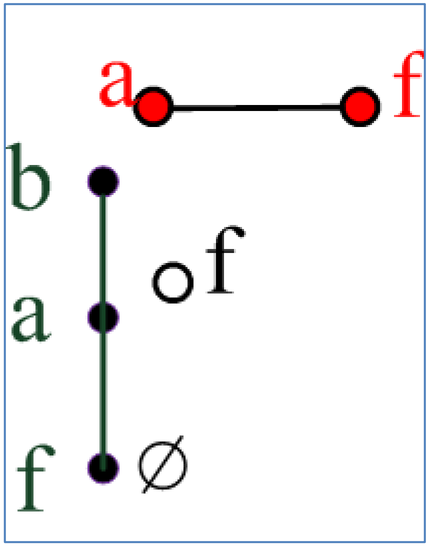




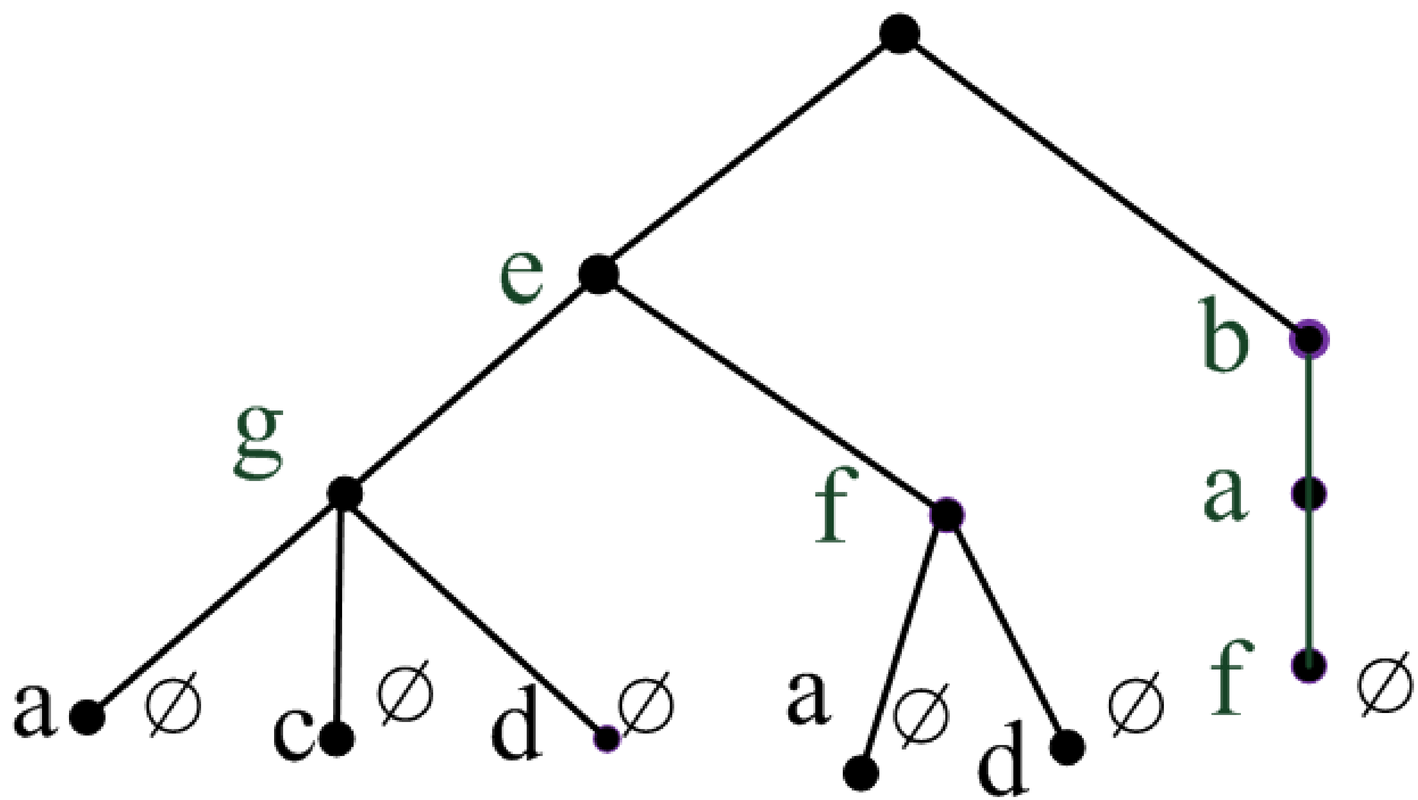
Пример



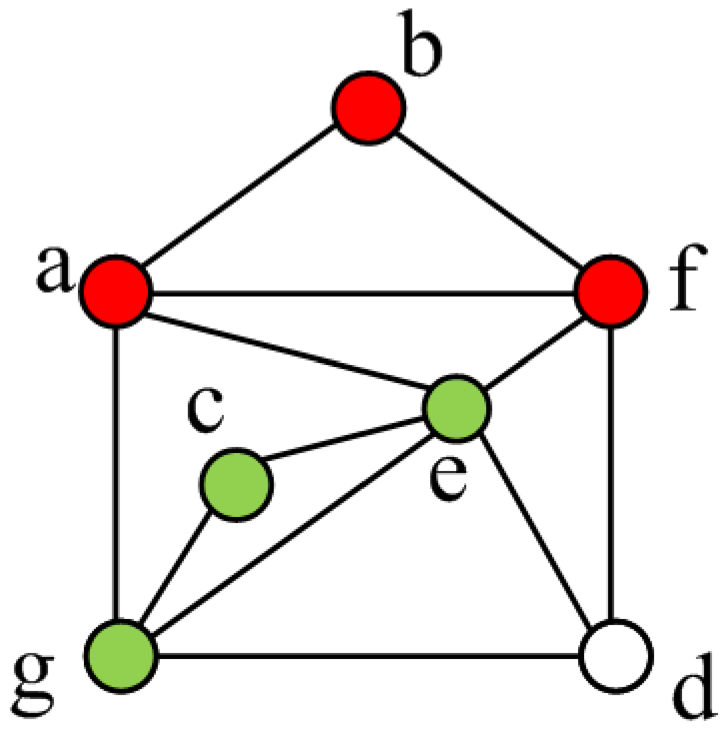




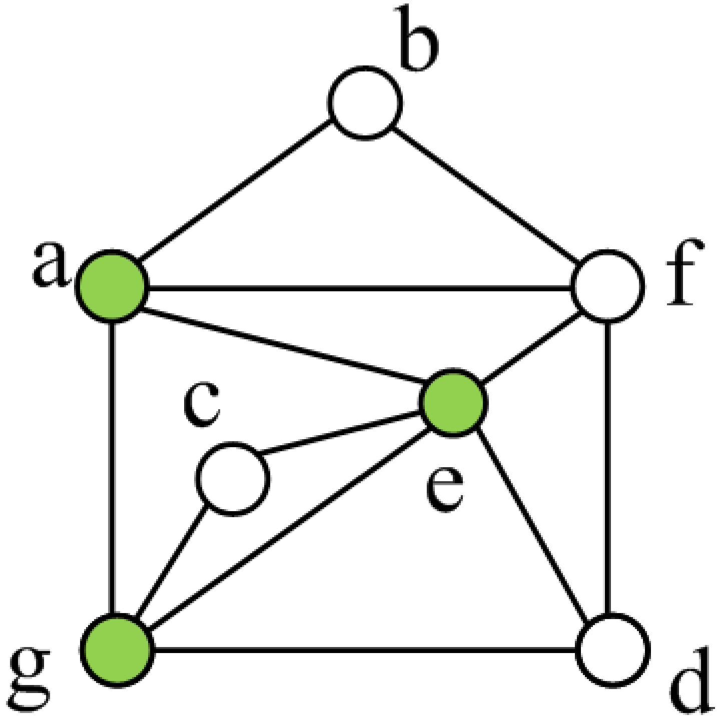
Клики:{a,e,g}, {c,e,g}, {d,e,g}, {a,e,f},{d, e,f}, {a,b,f}



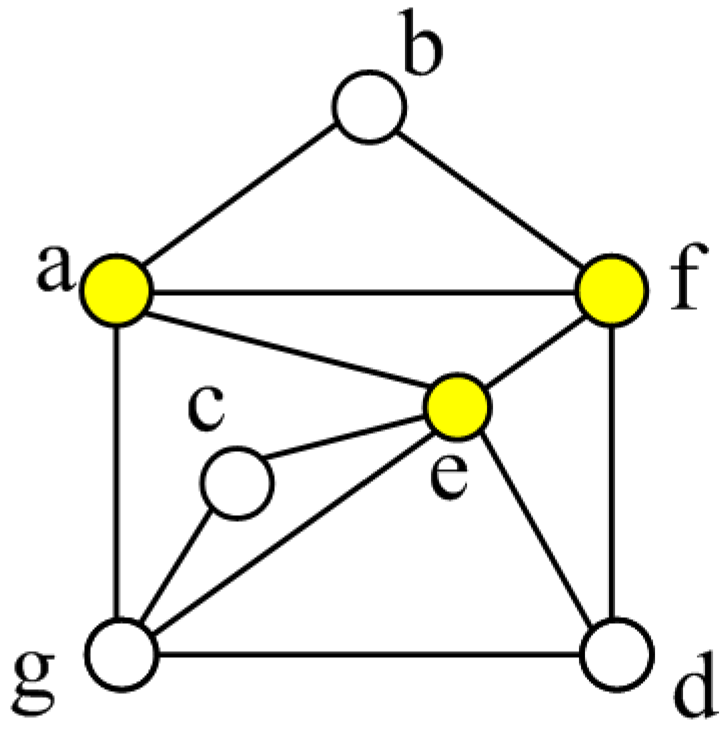
Клики:{c,e,g}, {a,b,f}



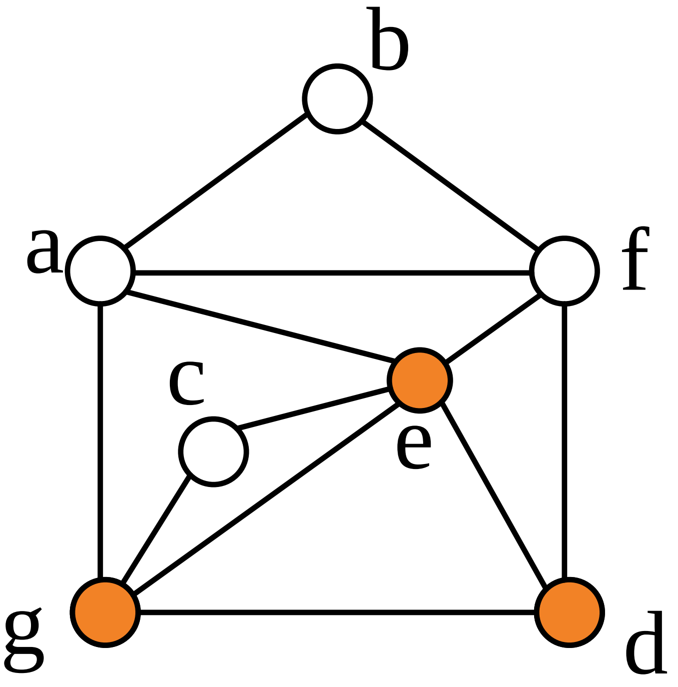
Клика:{a,e,g}



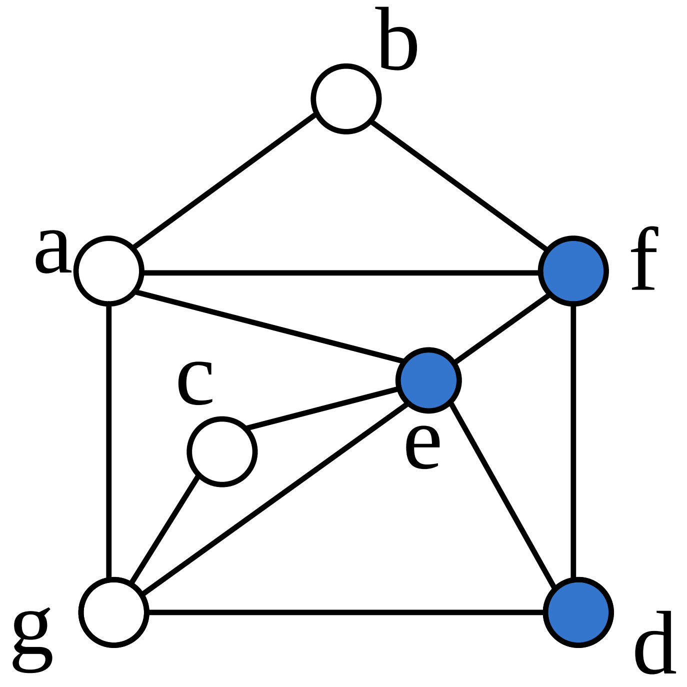
Клика:{a,e,f}



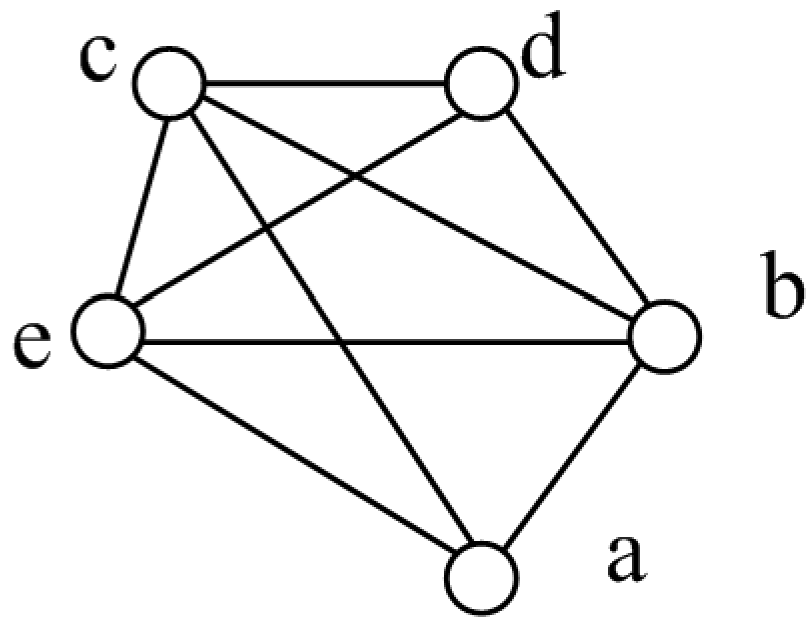
Клика:{d,e,g}



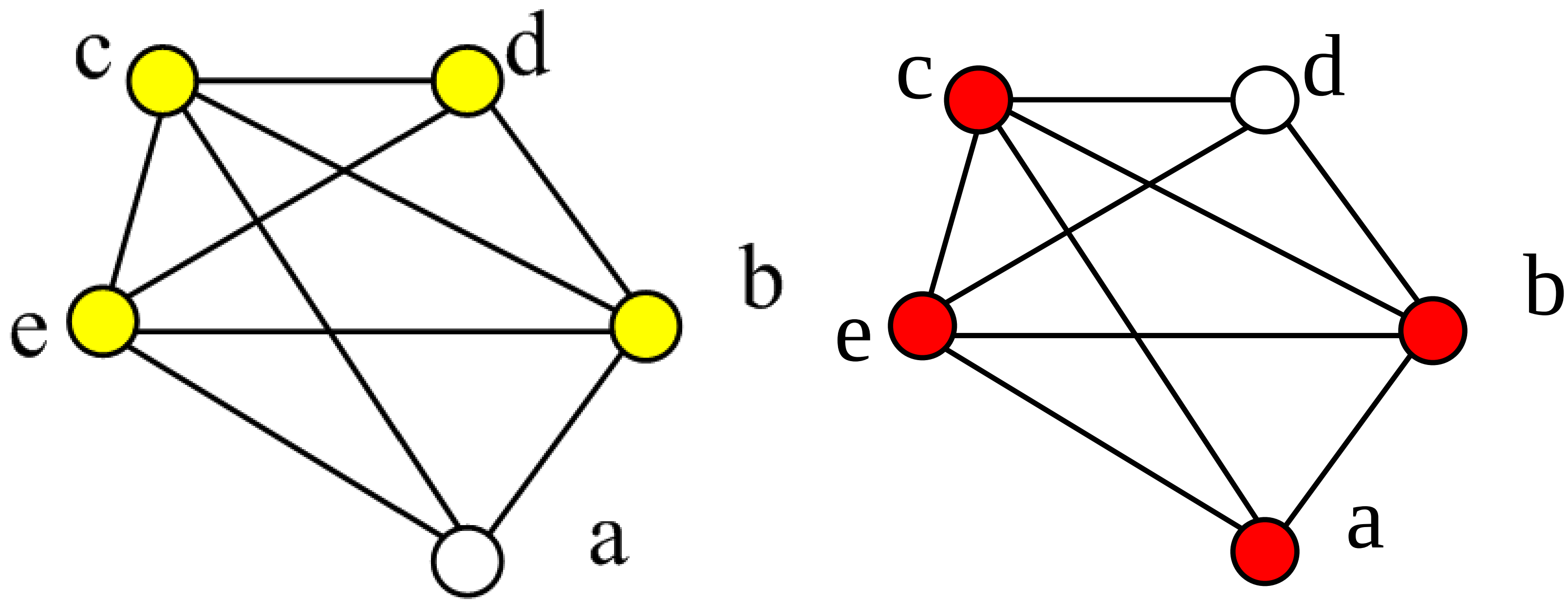
Клика:{d,e,f}



Клики. Пример



Клики. Пример



Граф клик

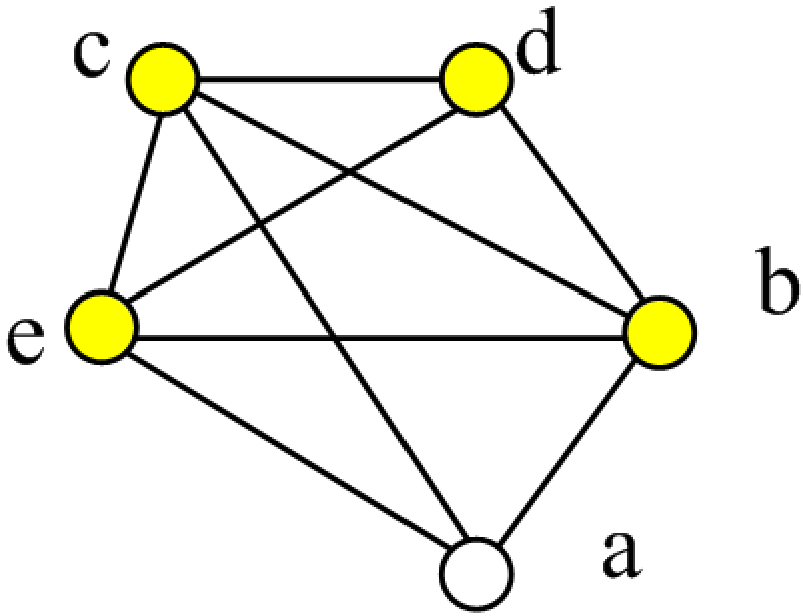
Пусть S – множество, $F=\{S_1,S_2,\dots,S_p\}$ – семейство его непустых подмножеств. ***Граф*** $G(F)=\langle F,U\rangle$ ***пересечений семейства F*** :

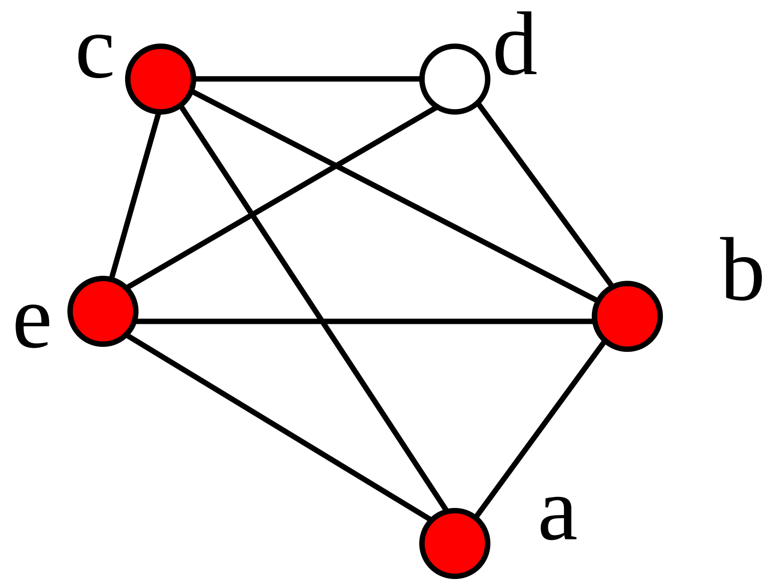
$$\langle S_i, S_j\rangle \in U \Leftrightarrow (i\neq j)\ \&(S_i\cap S_j\neq\varnothing).$$

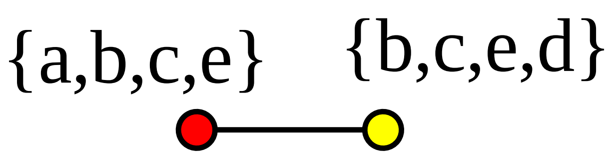
Граф клик

Граф клик – граф пересечений семейства всех клик графа G.

Граф клик

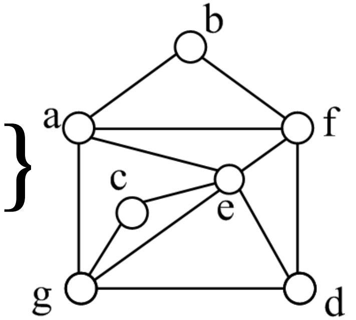


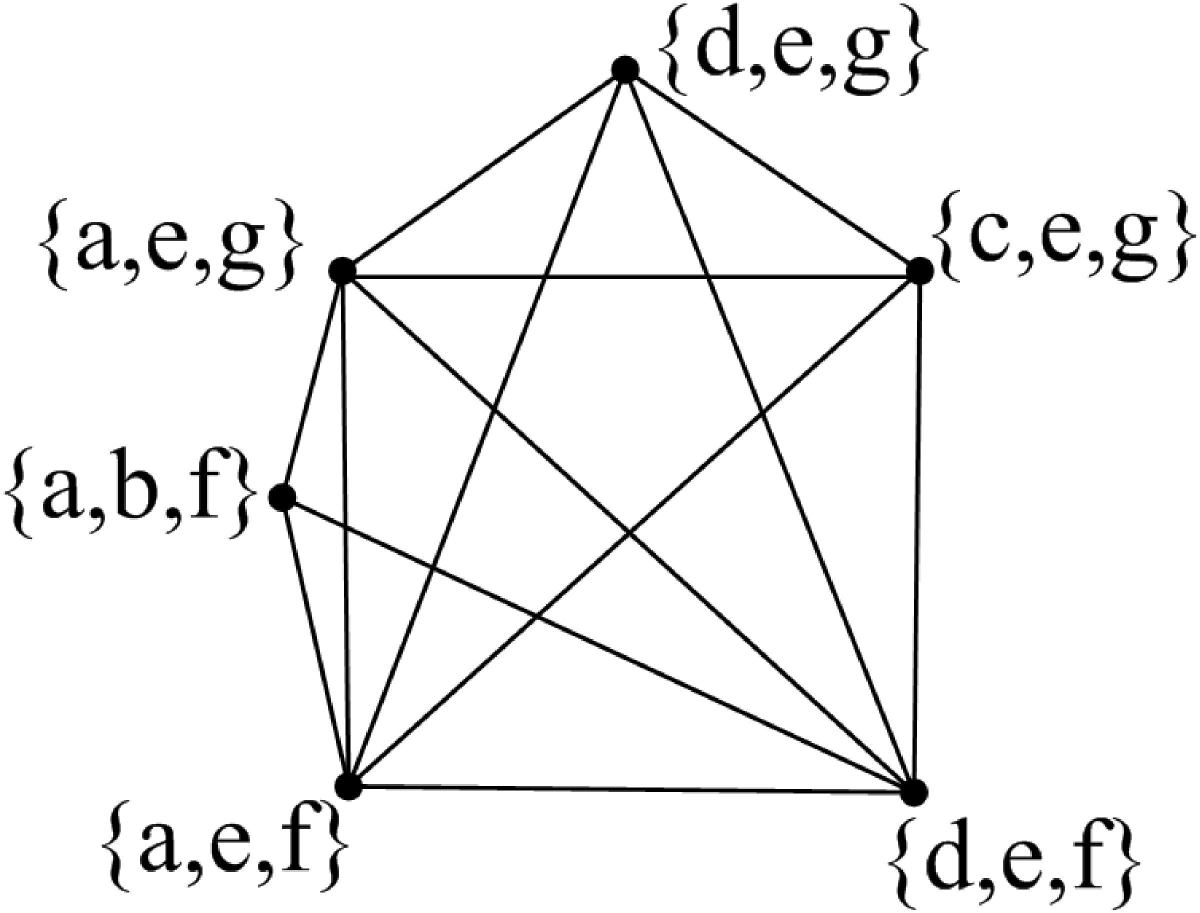




Граф клик.

Клики:{a,e,g}, {c,e,g}, {d,e,g}
{a,e,f},{d, e,f}, {a,b,f}





Паросочетания

Паросочетанием неориентированного графа $G=\langle V,U \rangle$ называется $M \subseteq U$, такое, что никакие два ребра из M не смежны.

Частный случай

Для двудольного графа – задача о назначениях.

Паросочетания

Паросочетание ***совершенно***, если любая вершина инцидентна паросочетанию (покрыта паросочетанием)[Н. Кристофидес].

Паросочетание ***максимальное (наибольшее)***, если в графе нет паросочетания большей мощности.

Совершенное=> максимальное

Паросочетания

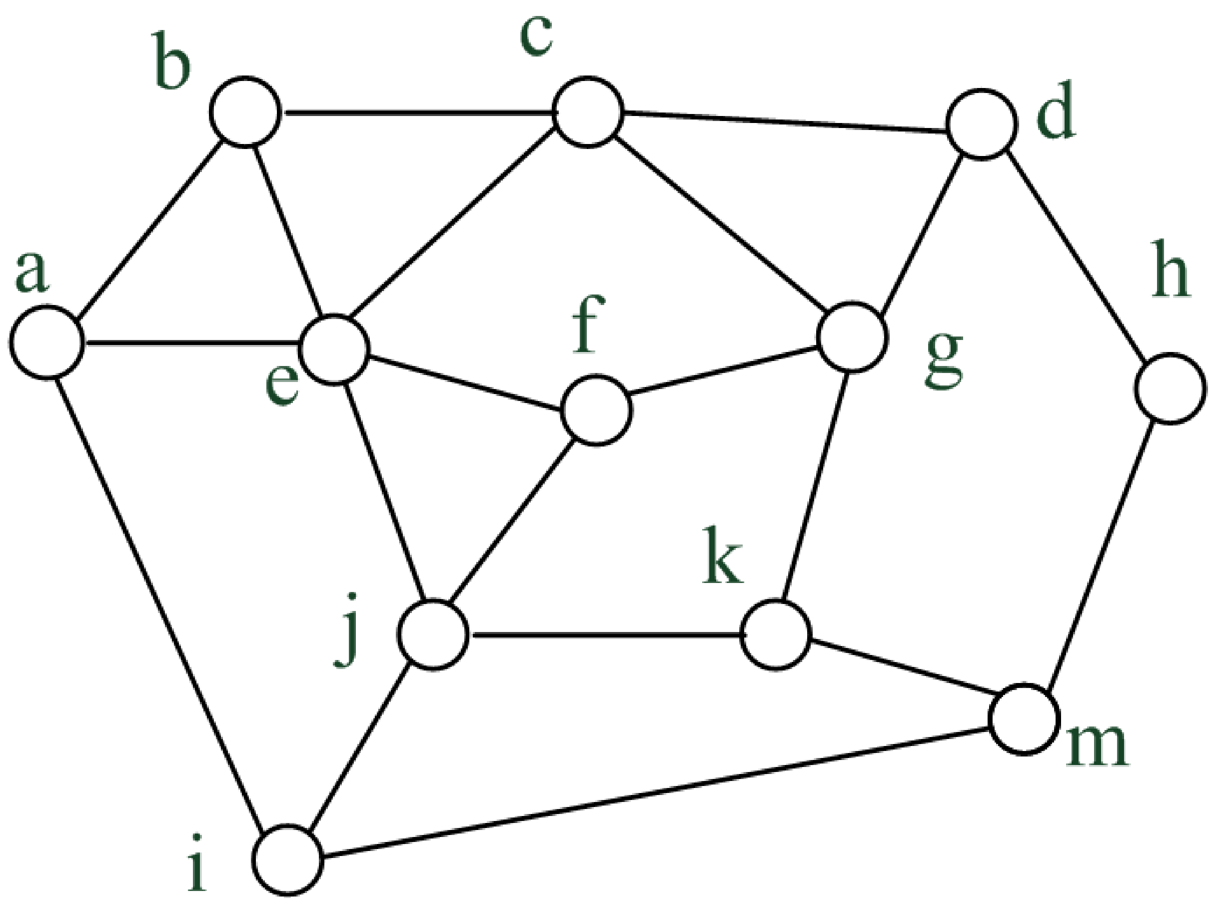
Чередующаяся цепь в графе G – цепь, в которой из каждой пары смежных рёбер ровно одно принадлежит паросочетанию.

Чередующееся расширение в графе G – чередующаяся цепь, концевые вершины которой не покрыты паросочетанием.

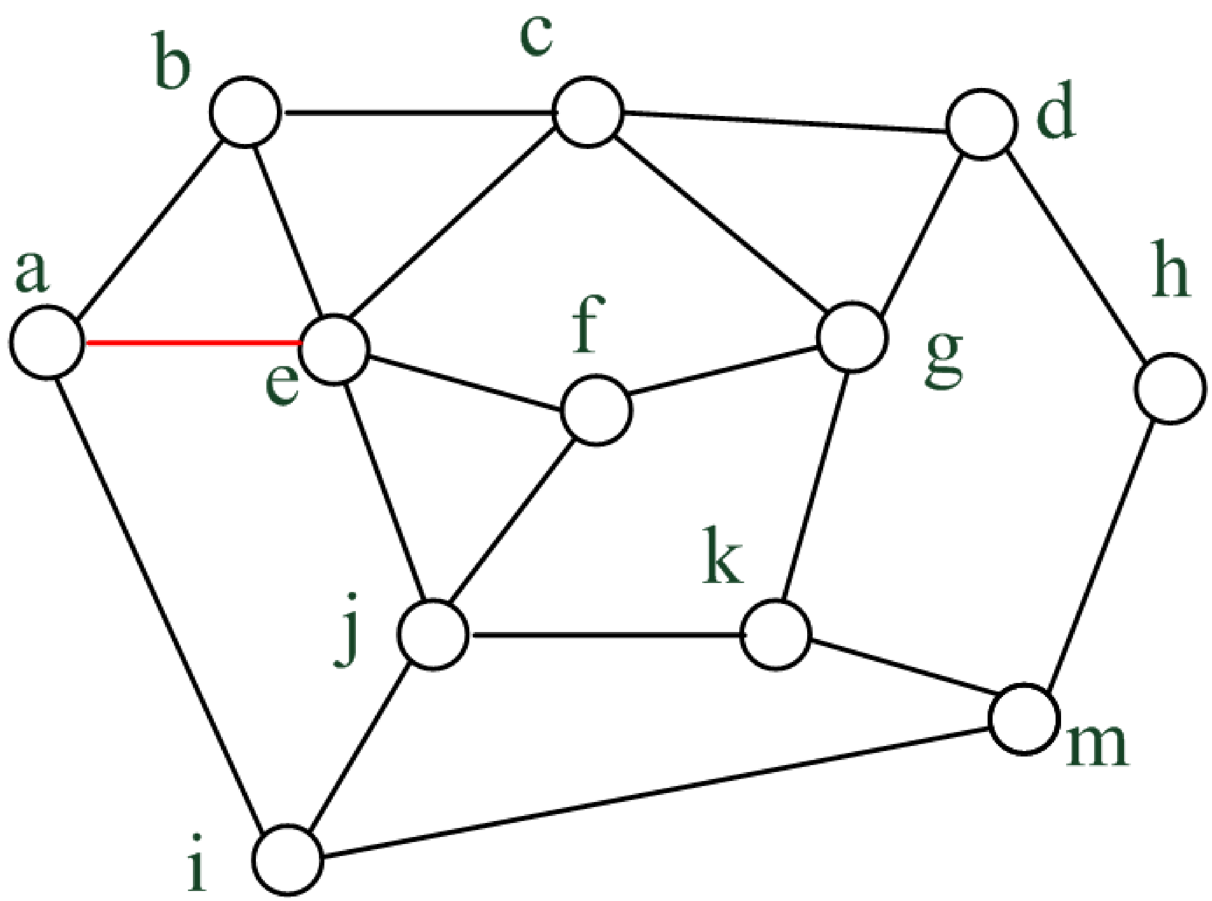
Упрощённый алгоритм нахождения максимального паросочетания

1. Пусть есть некоторое паросочетание M (в начале $M=\varnothing$).
2. Находим чередующееся расширение C. Если его нет, конец.
3. Строим новое паросочетание как $M \oplus C$, $|M \oplus C| = |M|+1$.
Возвращаемся к шагу 2.

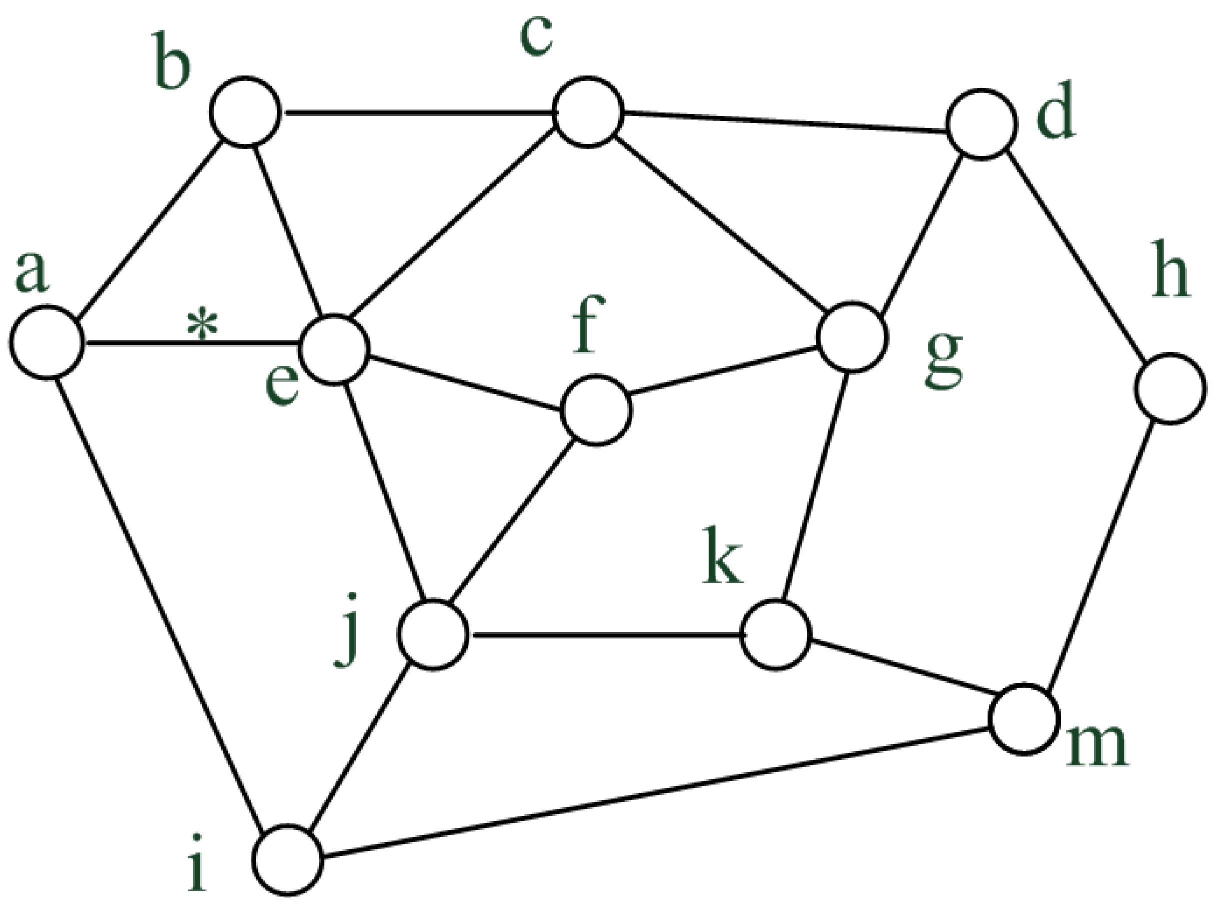
Пример



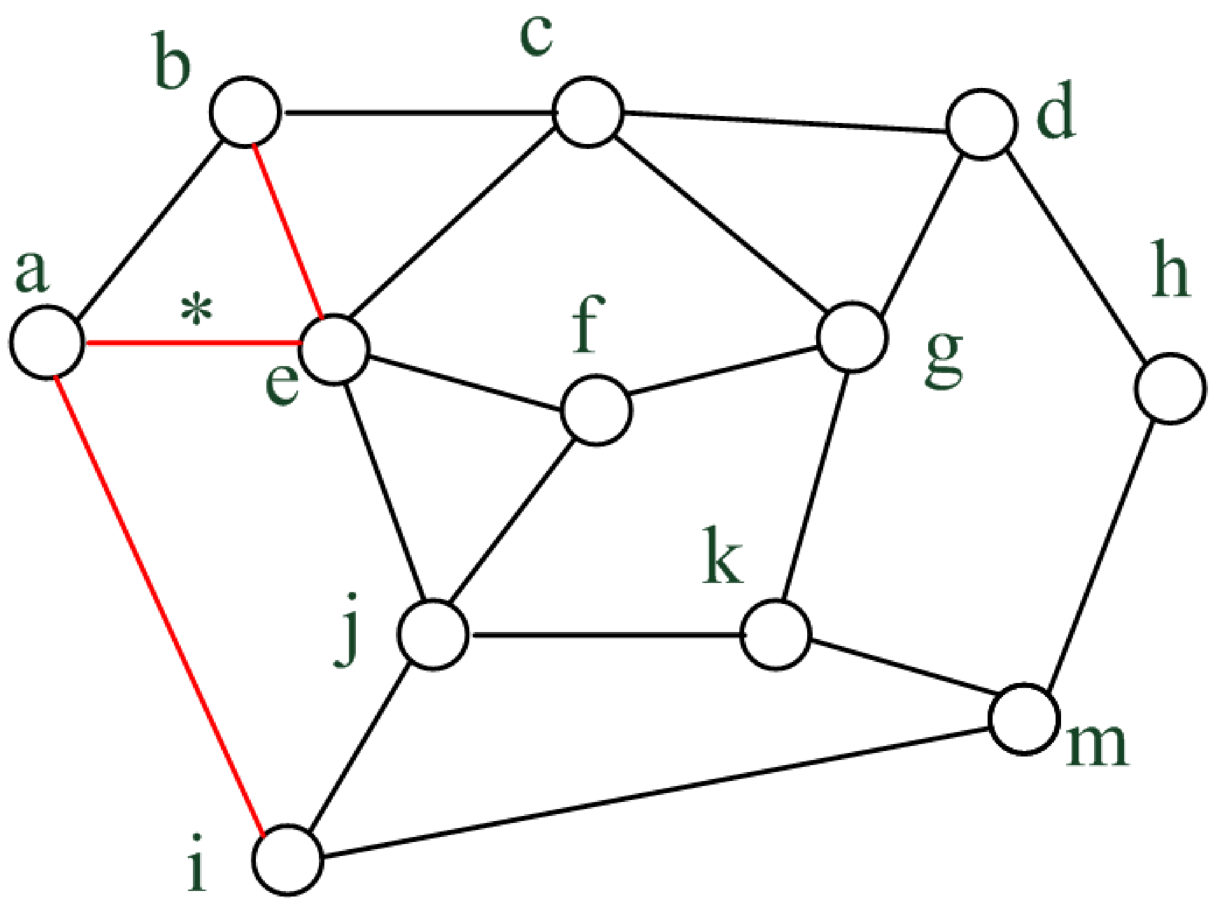
Пример



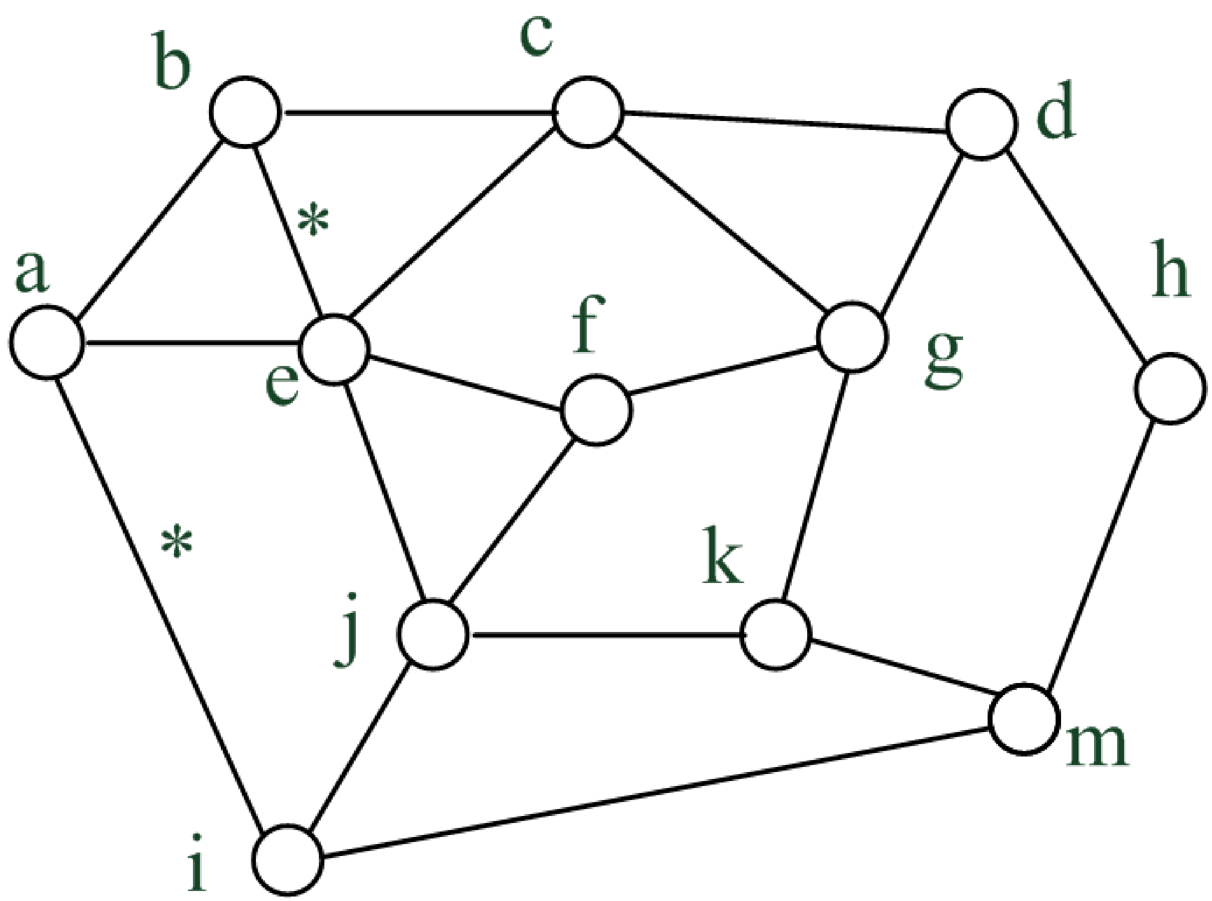
Пример



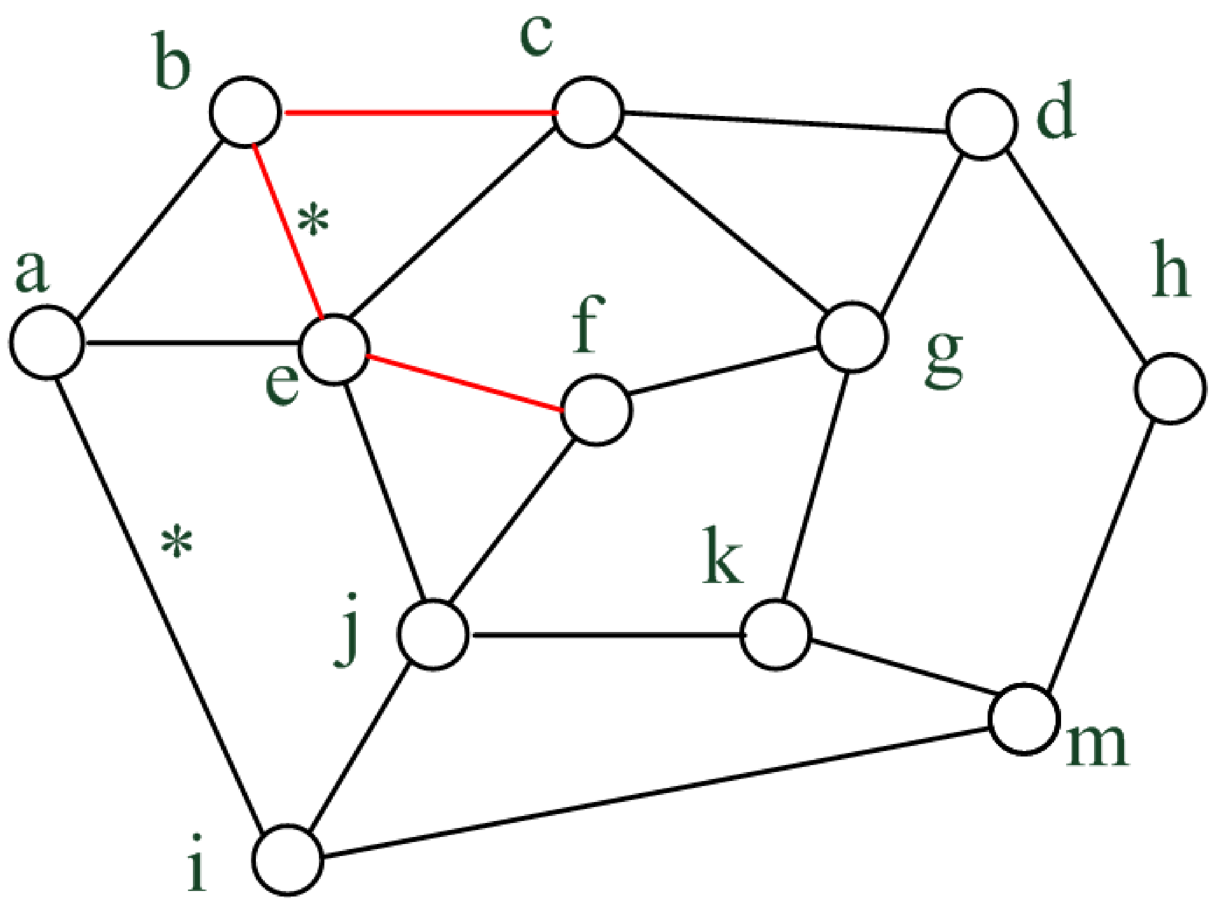
Пример



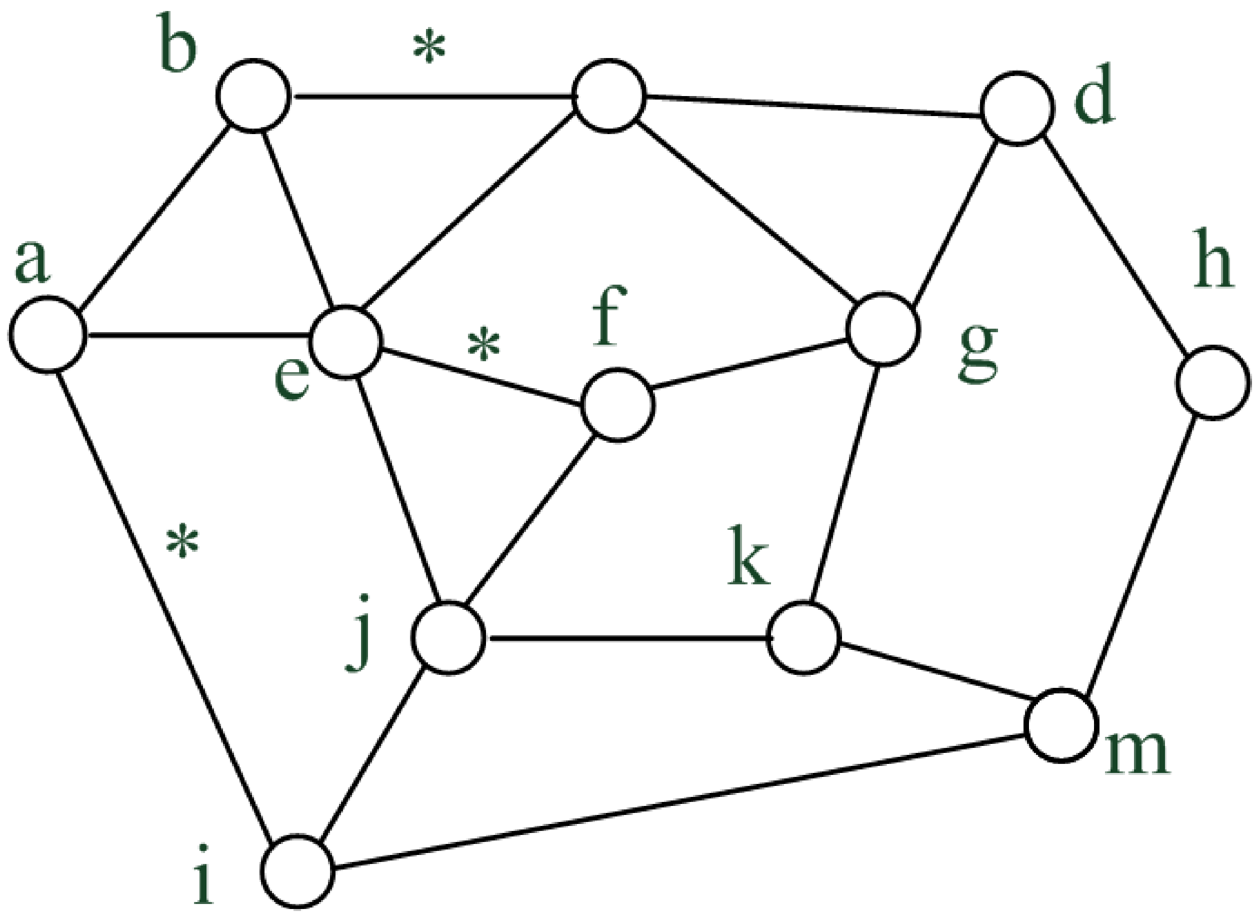
Пример



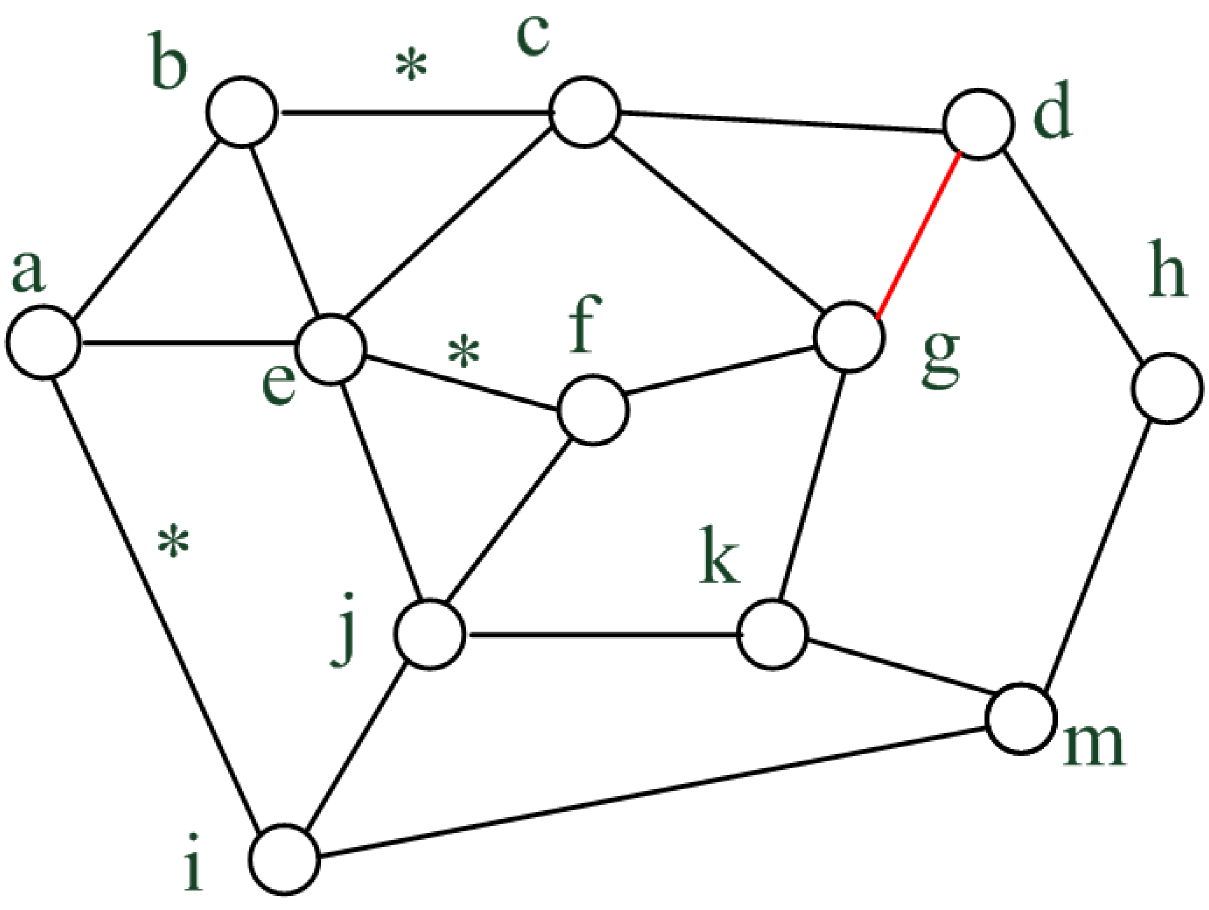
Пример



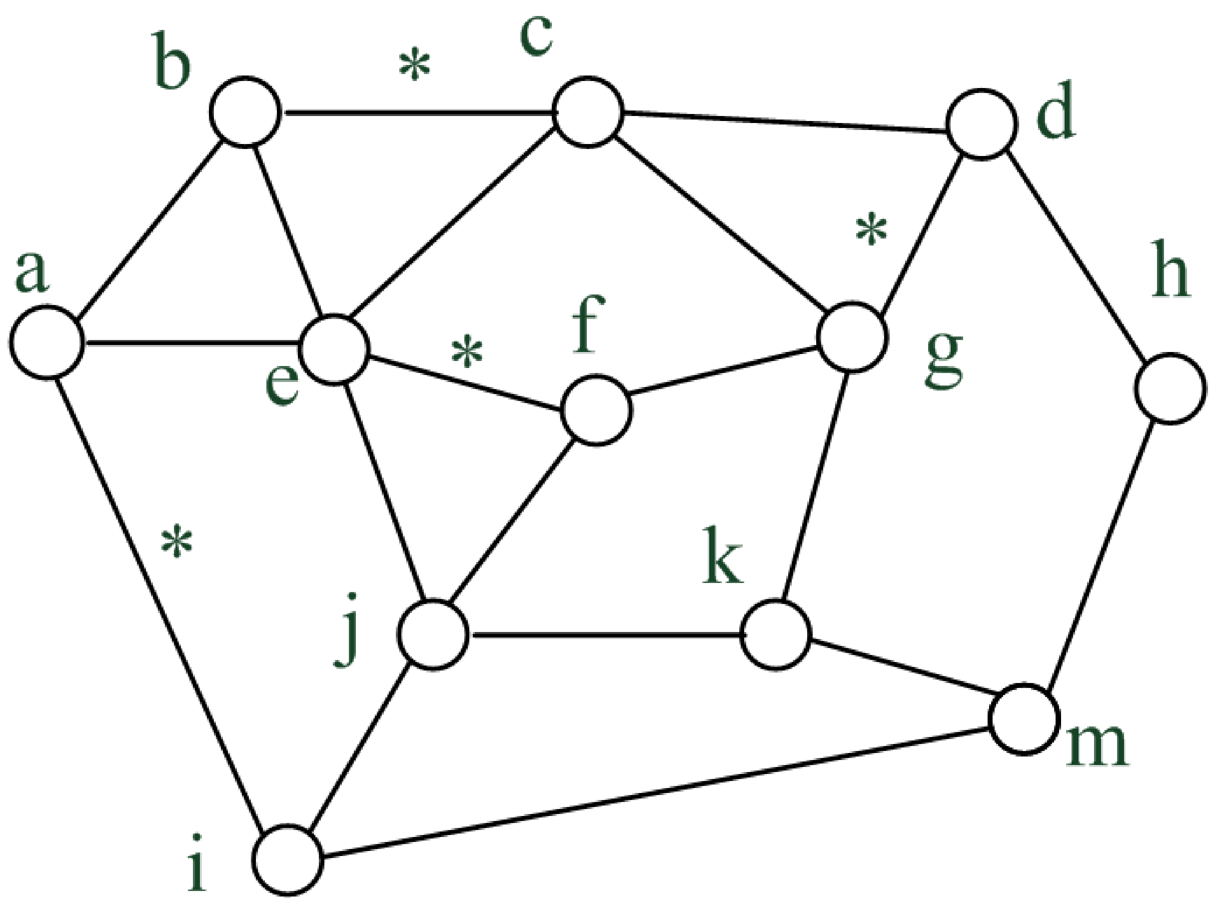
Пример



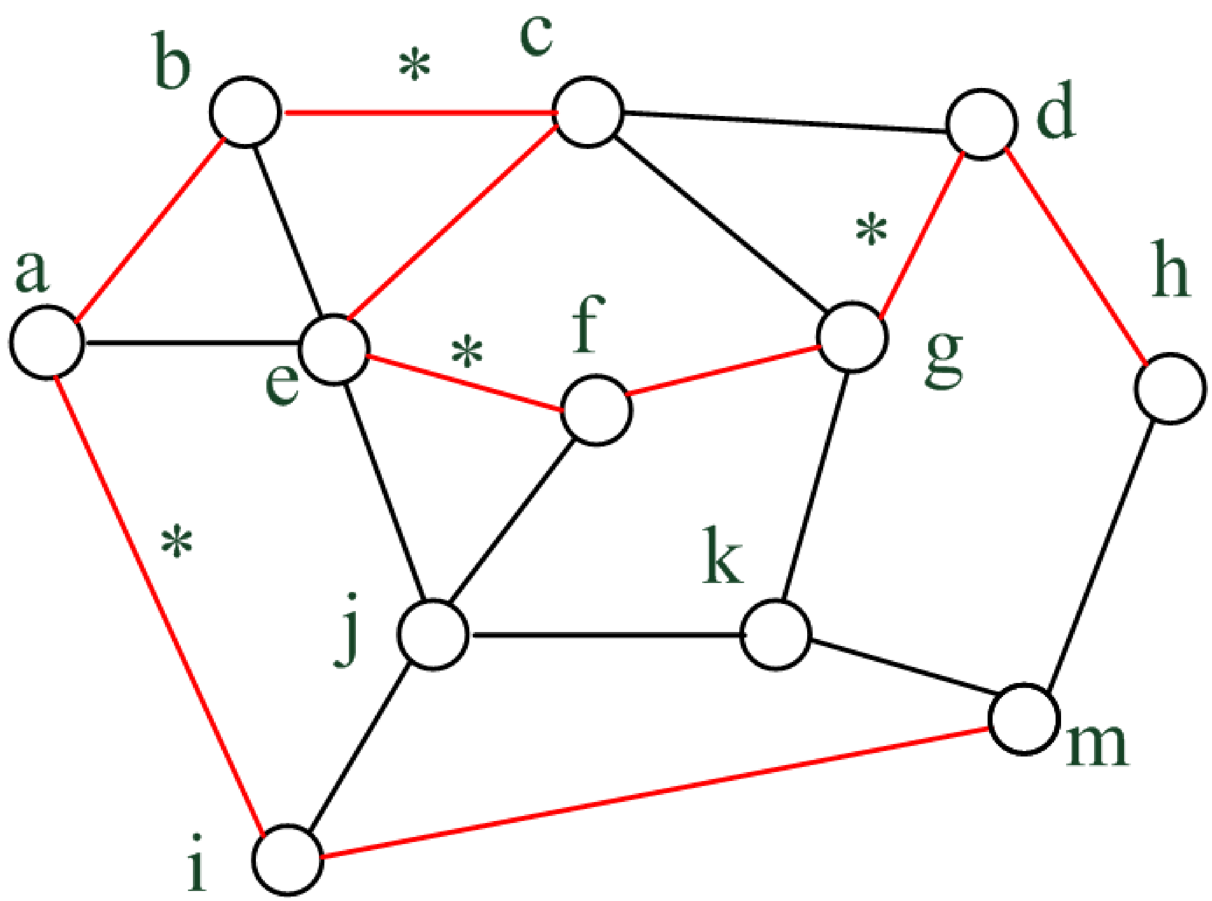
Пример



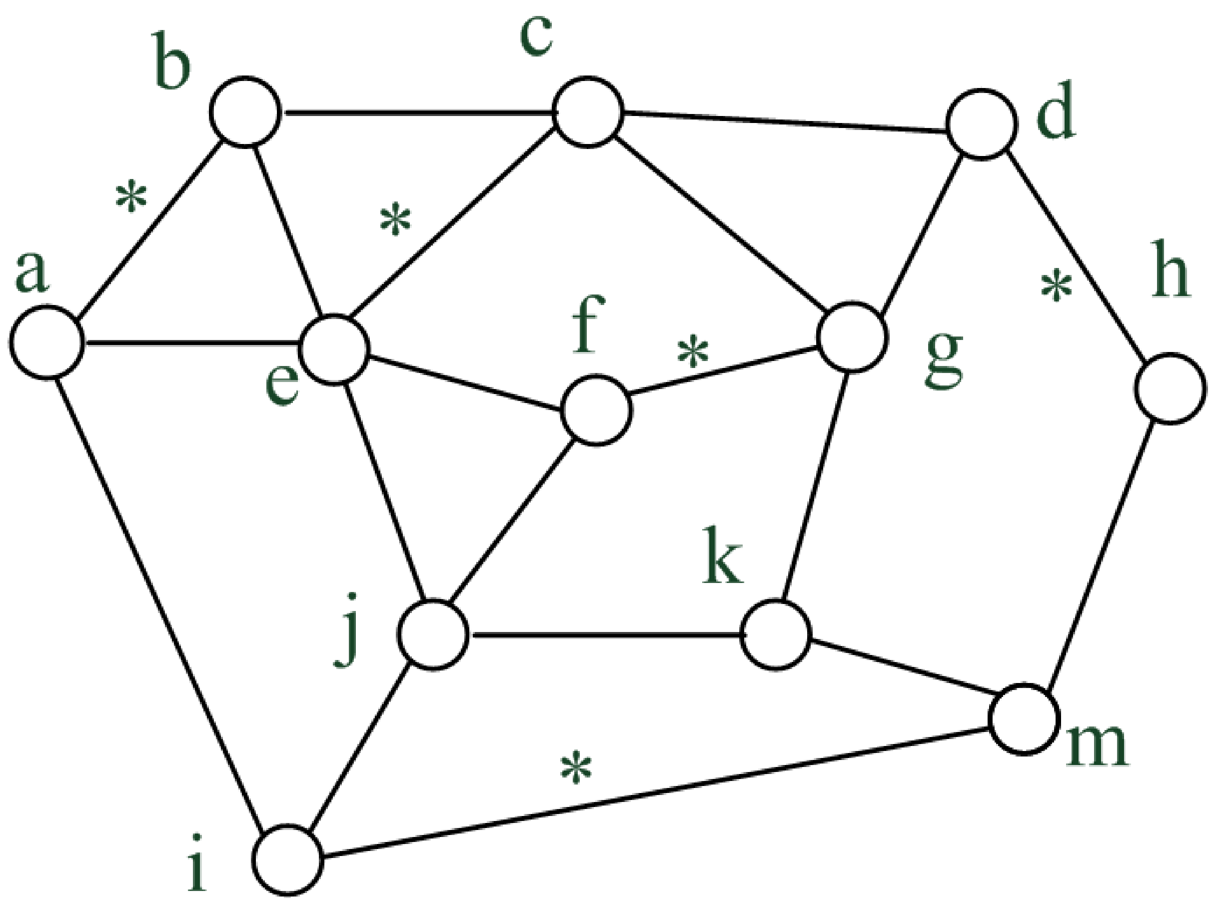
Пример



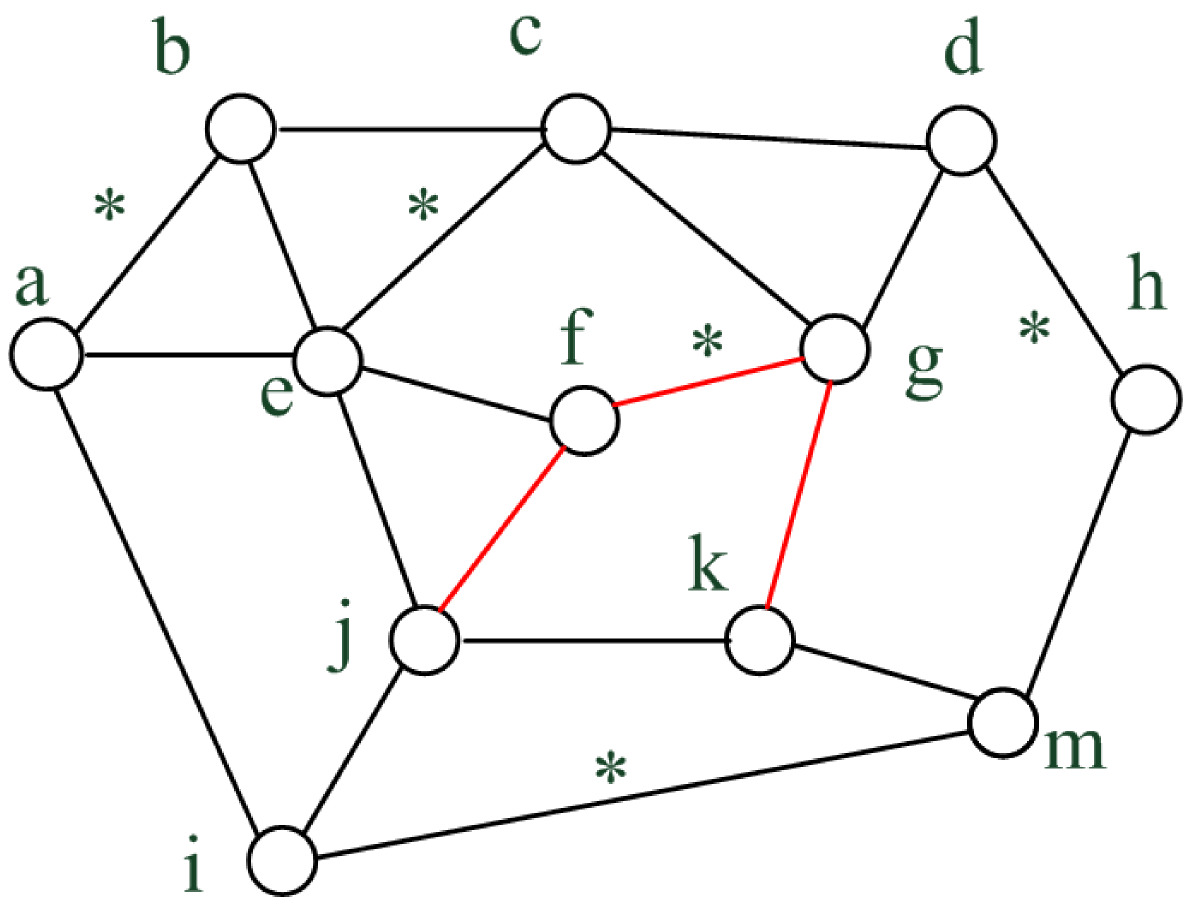
Пример



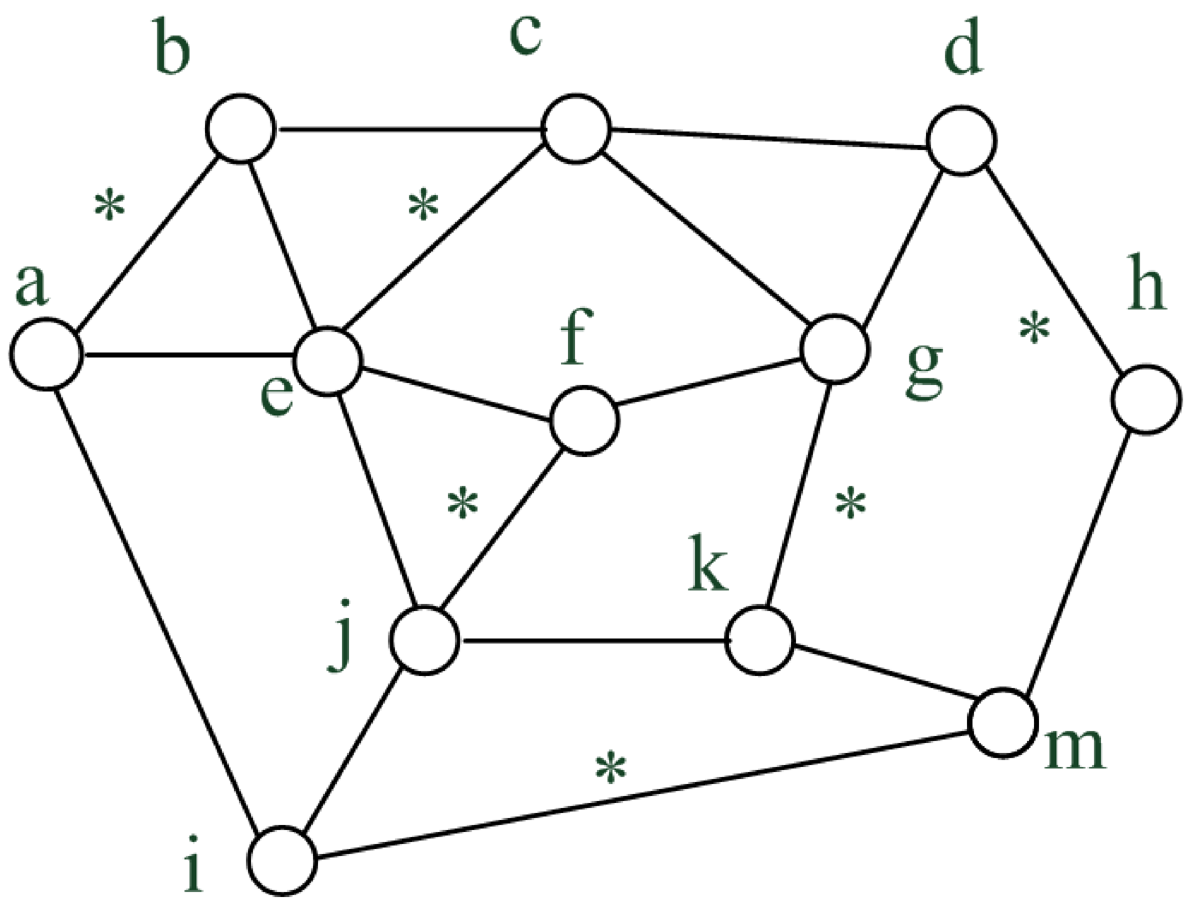
Пример



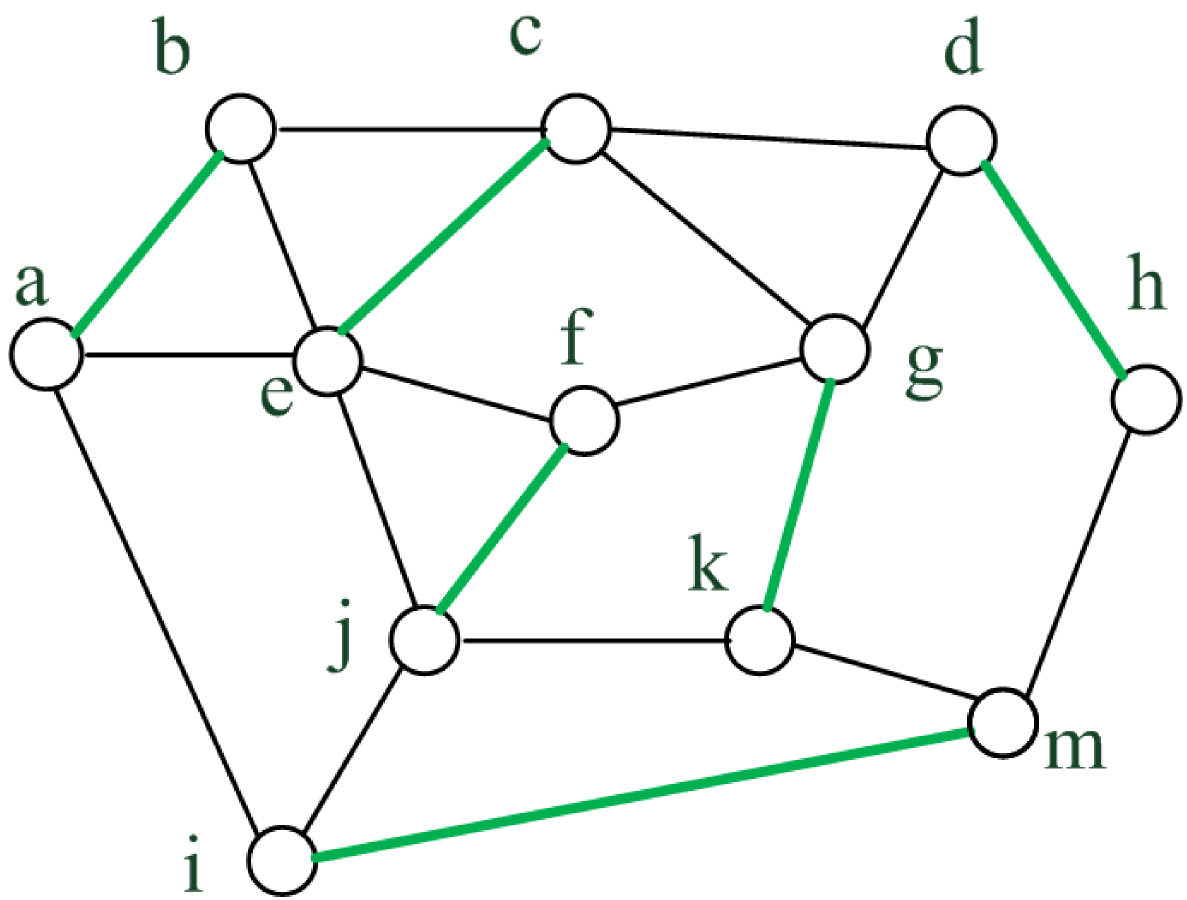
Пример



Пример



Пример. Совершенное паросочетание



Паросочетания

Мощность наибольшего паросочетания – ***число рёберной независимости*** $\boldsymbol{\beta_1}$.

Теорема: Для любого нетривиального связного $G_{p,g}$ графа

$$\boldsymbol{\beta_1 + \alpha_1 = \beta_0 + \alpha_0 = p}$$

Связь инвариантов

Для любого нетривиального связного $G_{p,g}$ графа

$$\boldsymbol{\beta_0 + \alpha_0 = p}$$

Число вершинной независимости + вершинное покрытие рёбер = число вершин графа.

Доказательство

$\alpha_0 \leq p - \beta_0$ (остальные образуют вершинное покрытие)

$\beta_0 \geq p - \alpha_0$ (остальные вершины не смежны)

Связь инвариантов

Для любого нетривиального связного $G_{p,g}$ графа

$$\beta_1 + \alpha_1 = p$$

Рёберное покрытие вершин + мощность максимального паросочетания =
число вершин графа

Теорема

Для двудольного графа G число ребер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия,

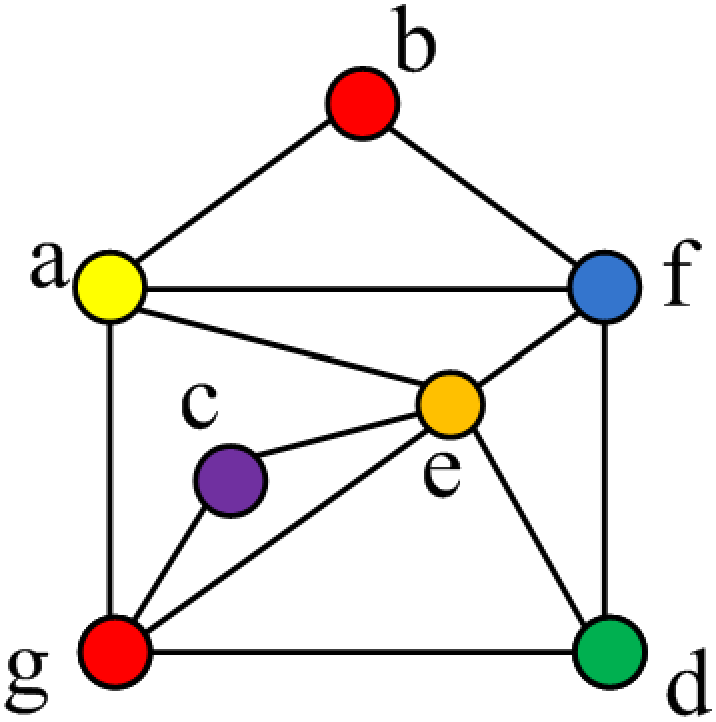
$$\beta_1 = \alpha_0$$

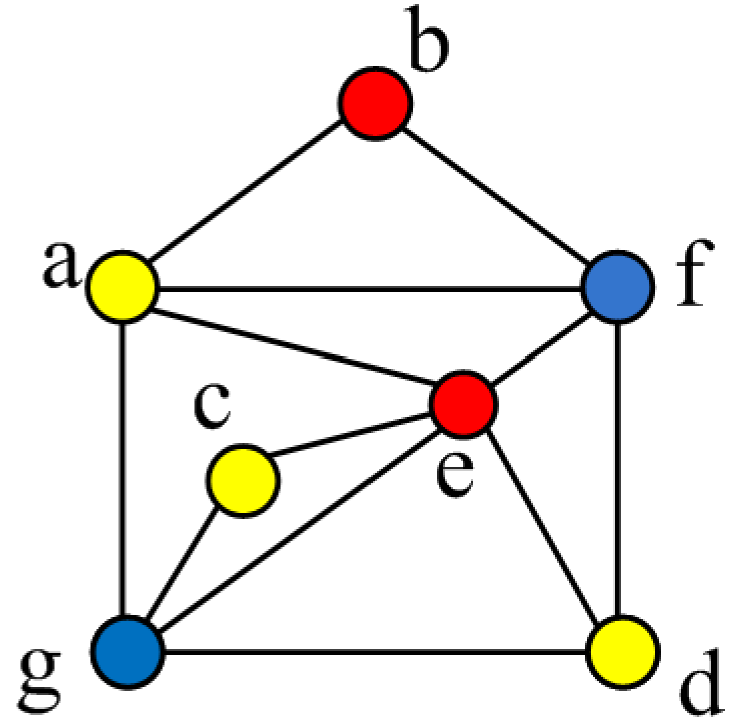
Хроматическое число графа

Граф раскрашен ***правильно***, если никакие две смежные вершины не раскрашены в один цвет.

χ(G) – хроматическое число графа G, наименьшее число цветов, в которое можно правильно раскрасить граф.

Правильно раскрашенные графы





Хроматическое число

Граф называется ***n***-раскрашиваемым, если его можно раскрасить правильно в n цветов.

Теорема. Граф двухцветен $\Leftrightarrow$ в графе нет циклов нечётной длины.

Двудольный граф

Граф двудольный $\Leftrightarrow$ все его простые циклы – чётны.

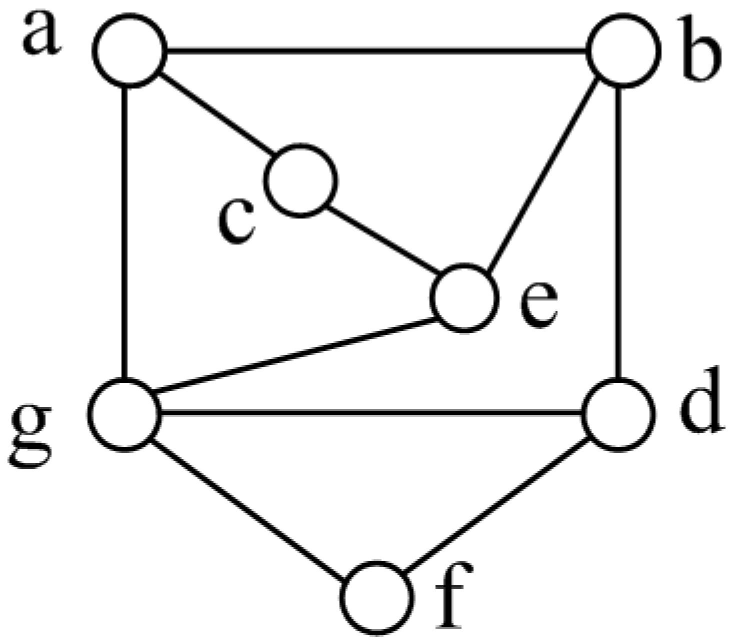
Точная раскраска графа

1. Строится множество пустых подграфов.
2. Строится матрица, в которой по строкам – пустые подграфы, по столбцам – вершины.

Точная раскраска графа

3. Строится покрытие матрицы (столбцов строками). Каждое покрытие определяет раскраску, минимальное число строк в покрытии – хроматическое число.

Пример



Пустые подграфы:

{a,e,f},

{b,c,f},

{b,c,g},

{a,d,e}, {d,c}

Пример

	a	b	c	d	e	f	g
{a,e,f}	1				1	1	
{b,c,f}		1	1			1	
{b,c,g}		1	1				1
{a,d,e}	1			1	1		
{d,c}			1	1			

Пример

	a	b	c	d	e	f	g	
{a,e,f}	1				1	1		m
{b,c,f}		1	1			1		n
{b,c,g}		1	1				1	p
{a,d,e}	1			1	1			s
{d,c}			1	1				t

$(m \vee s)\ (n \vee p)\ (n \vee p \vee t)$

$(s \vee t)\ (m \vee n)\ p$

Пояснение к преобразованиям

$$(a \vee b)b = b; \ (a \vee b)(a \vee c) = a \vee bc$$

$(m \vee s)\ (n \vee p)\ (n \vee p \vee t)(s \vee t)\ (m \vee n)\ p =$

$(m \vee s)\ (n \vee \mathbf{p})\ (n \vee \mathbf{p} \vee t)(s \vee t)\ (m \vee n)\ \mathbf{p} =$

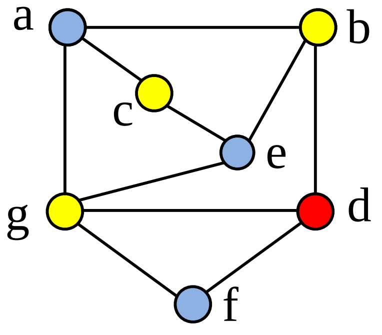
$(m \vee \mathbf{s})\ (\mathbf{s} \vee t)\ (m \vee n)\ p = (mt \vee s)\ (m \vee n)\ p =$

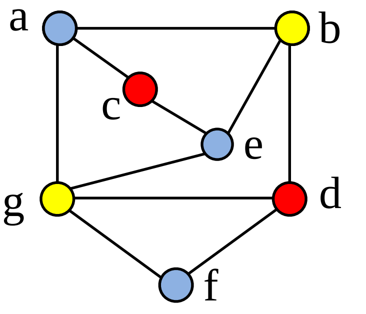
$(mt \vee \cancel{mnt} \vee ms \vee ns)p =$

$pmt \vee psn \vee pms$

Пример. Покрытия **pmt** ,psn ,pms

	a	b	c	d	e	f	g	
{a,e,f}	1				1	1		m
{b,c,f}		1	1			1		n
{b,c,g}		1	1				1	p
{a,d,e}	1			1	1			s
{d,c}			1	1				t





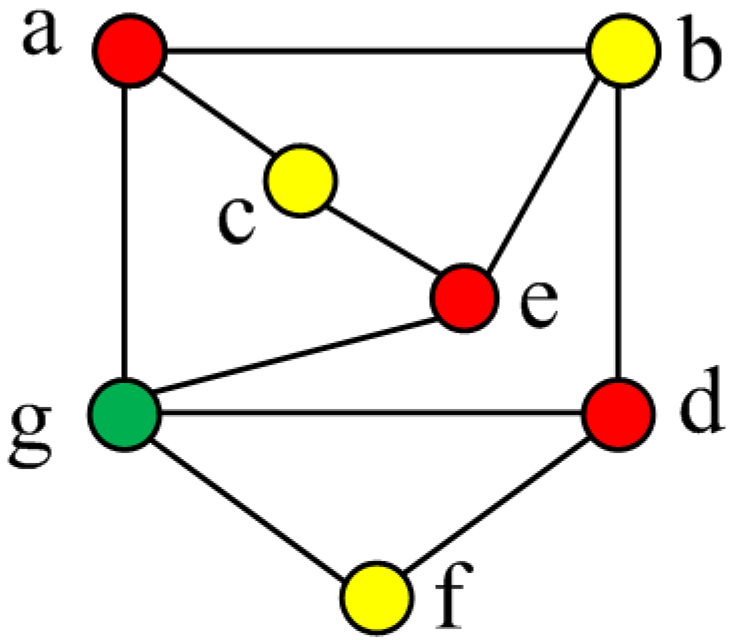
Пример. Покрытия pmt ,**psn** ,pms

	a	b	c	d	e	f	g	
{a,e,f}	1				1	1		m
{b,c,f}		1	1			1		n
{b,c,g}		1	1				1	p
{a,d,e}	1			1	1			s
{d,c}			1	1				t

Пример. Покрытия pmt ,psn ,**pms**

	a	b	c	d	e	f	g	
{a,e,f}	1				1	1		m
{b,c,f}		1	1			1		n
{b,c,g}		1	1				1	p
{a,d,e}	1			1	1			s
{d,c}			1	1				t

Пример. Покрытие psn



Пустые подграфы:

{a,e,f}(m),

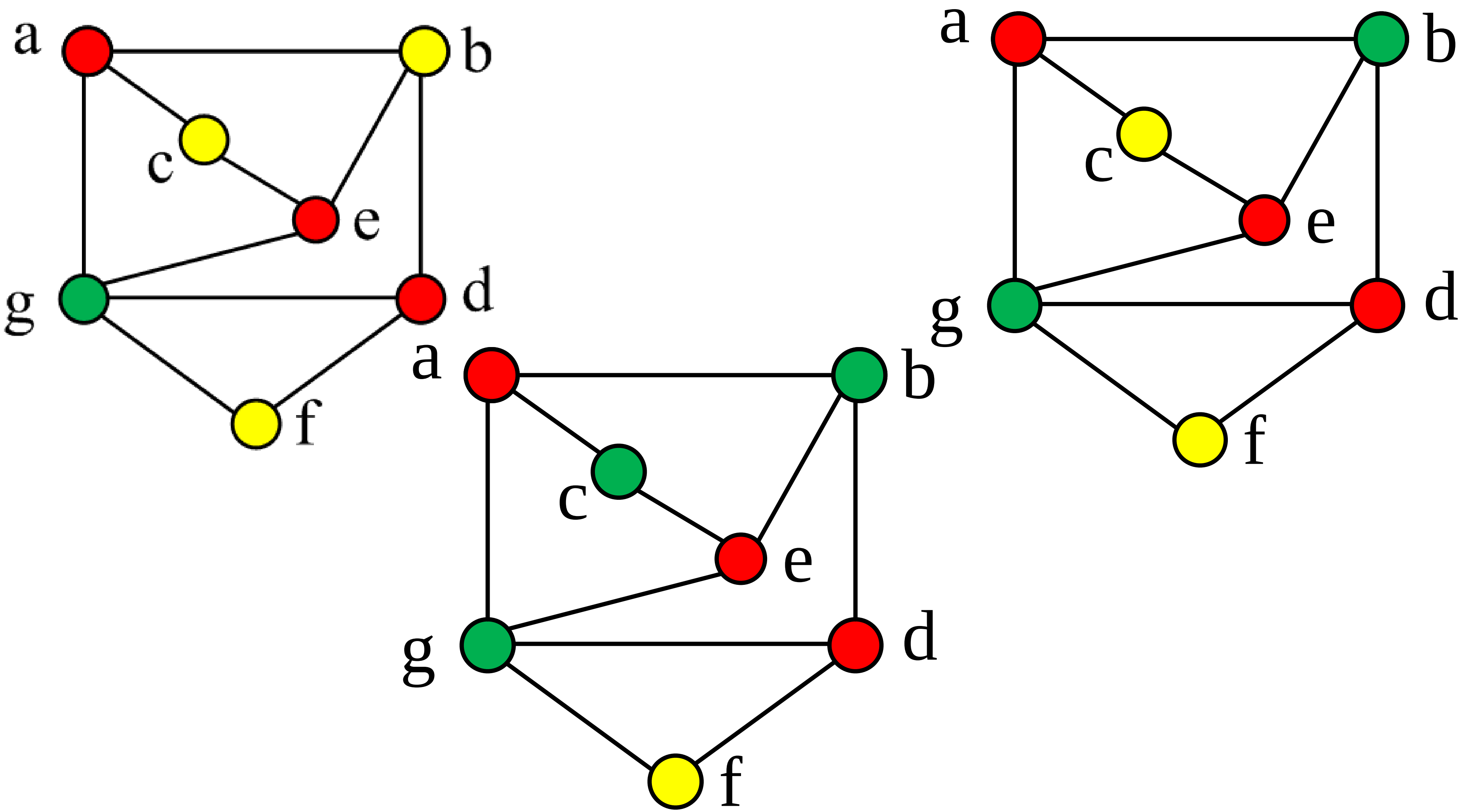
{b,c,f}(n),

{b,c,g}(p),

{a,d,e}(s),

{d,c}(t)

Пример. Возможные раскраски(pms) **{b,c,f}, {b,c,g}, {a,d,e}**



Оценки хроматического числа

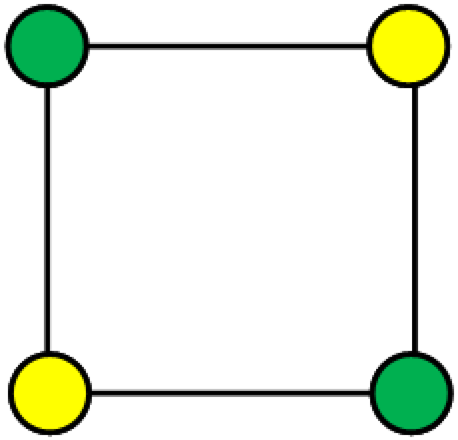
1. (Берж)

$$|\mathbf{V}| / \beta_0 \leq \chi(G) \leq |\mathbf{V}| - \beta_0 + 1$$

2. $\chi(G_1+G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$.

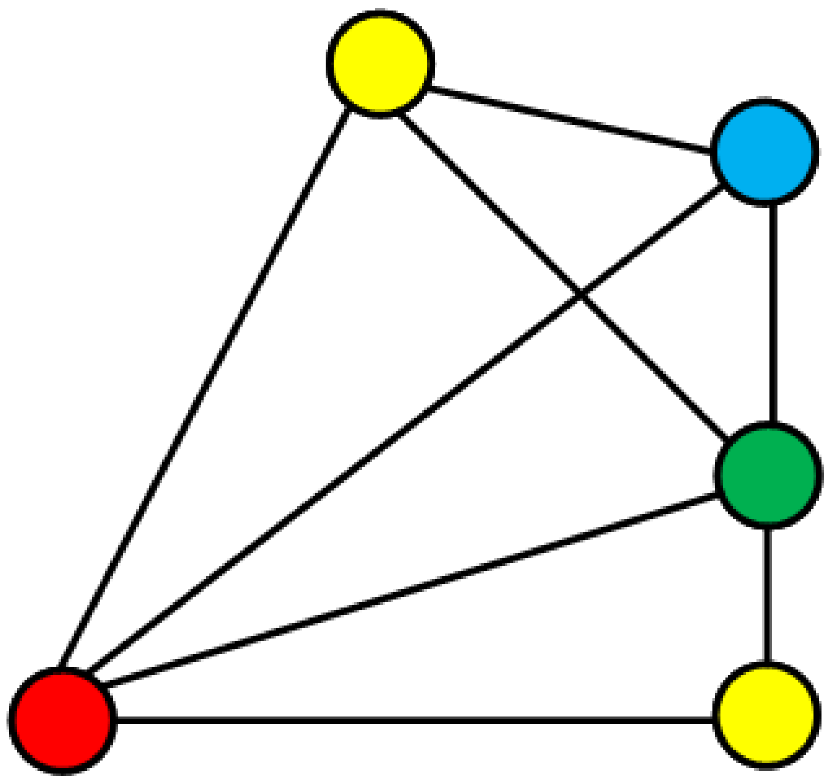
$$G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

Пример. $|\mathbf{V}| / \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{G})$

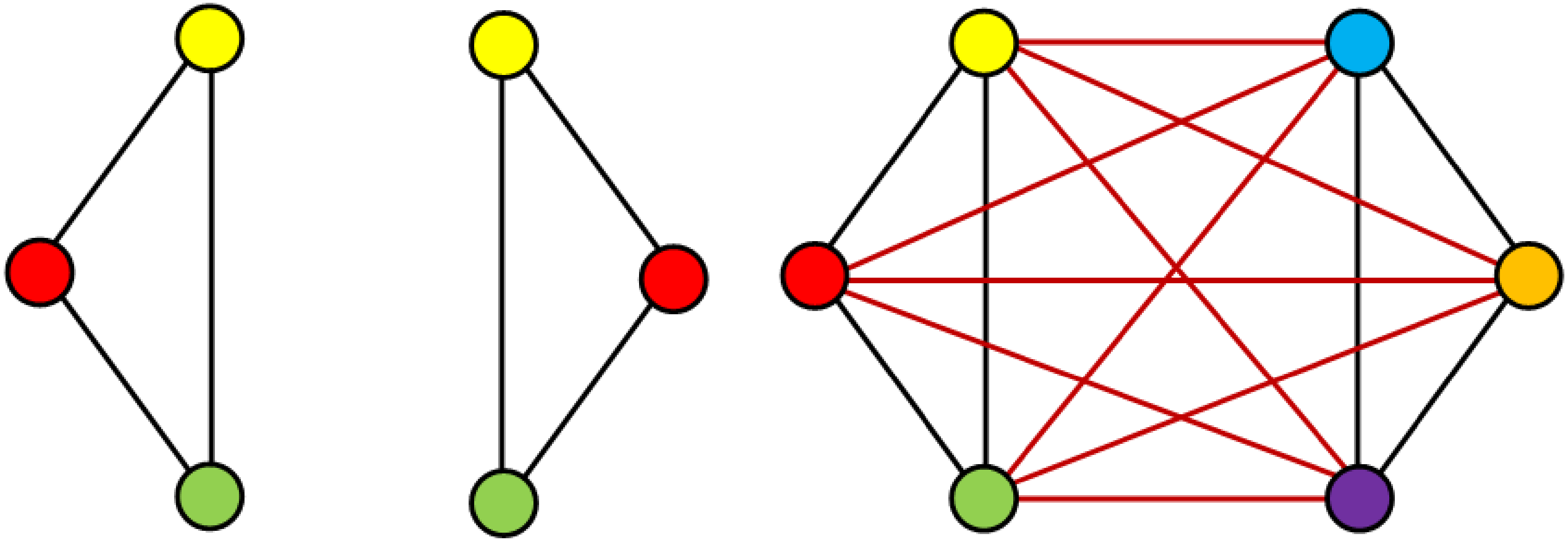


Пример. $\chi(G) = |V| - \beta_0 + 1$

$\beta_0 = 2$

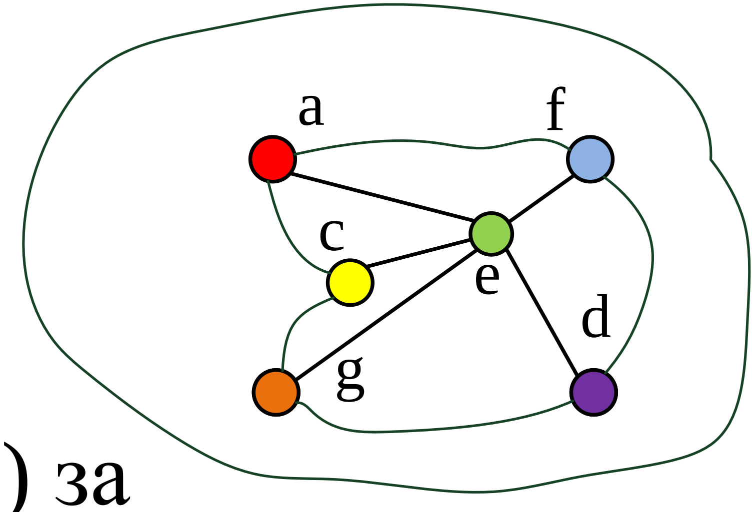


Пример. $\chi(G_1+G_2)= \chi(G_1)+ \chi(G_2)$



Оценки хроматического числа

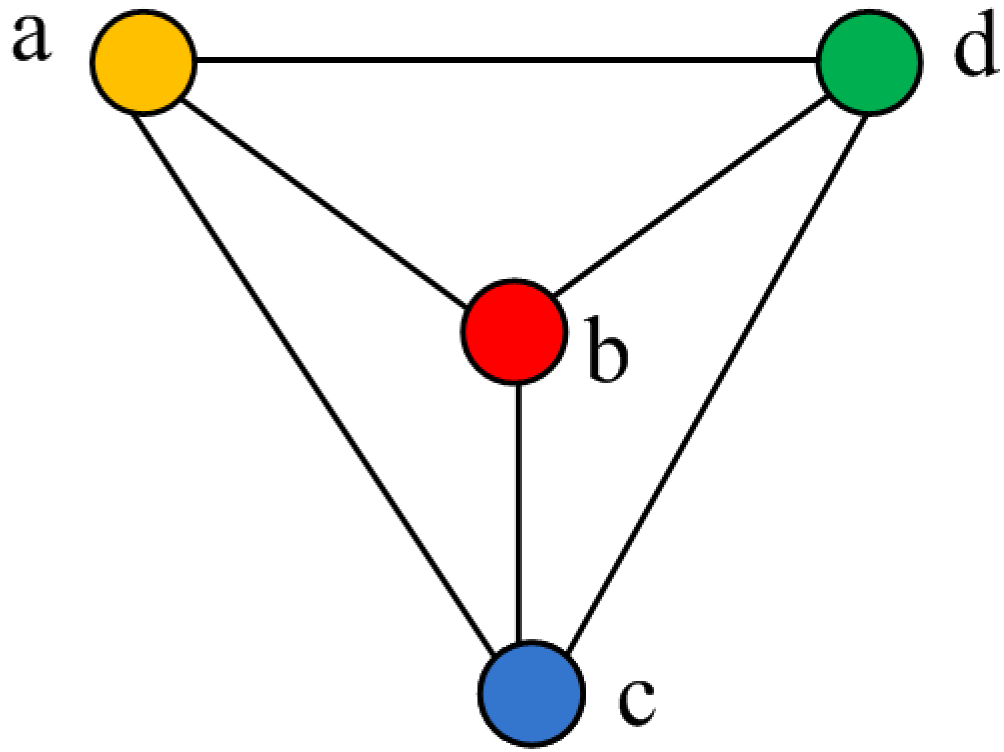
3. $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$



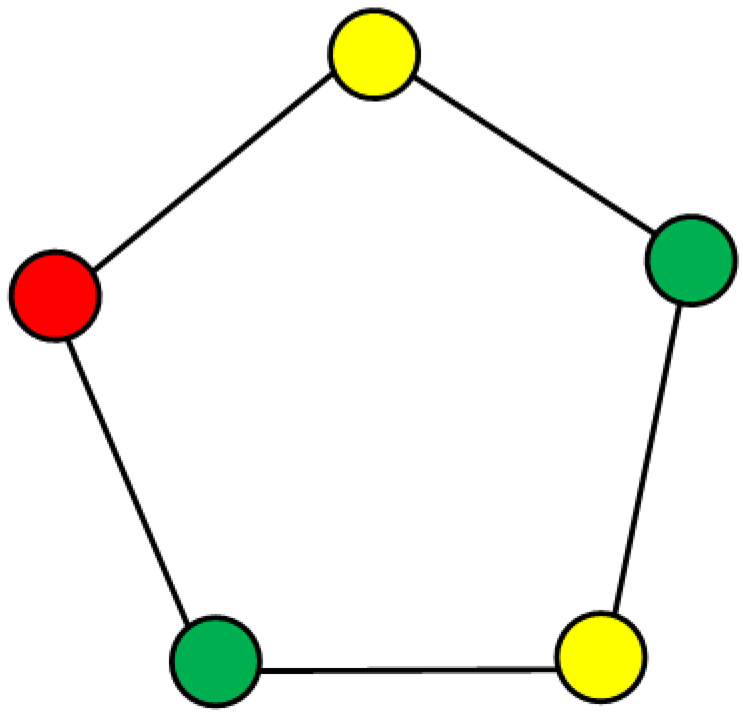
<u>Теорема</u> (Брукс): $\chi(G) \leq \Delta(G)$ за исключением двух случаев:

- При $\Delta(G) > 2$ граф G *содержит полный подграф на* $\Delta(G)+1$ вершинах;
- При $\Delta(G) = 2$ граф G *содержит цикл нечетной длины*.

$$\chi(G) = \Delta(G)+1$$



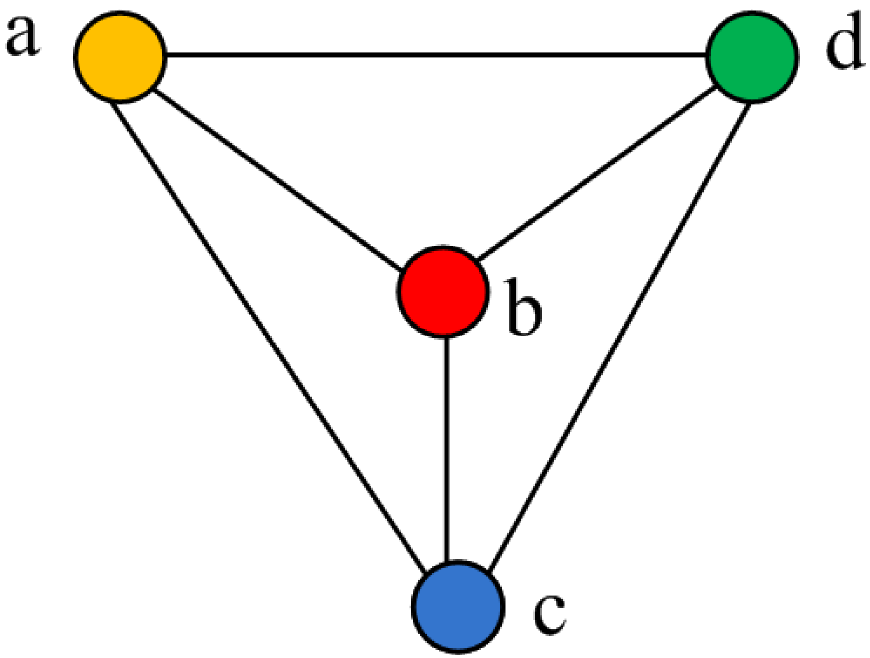
$$\chi(G) = \Delta(G)+1$$

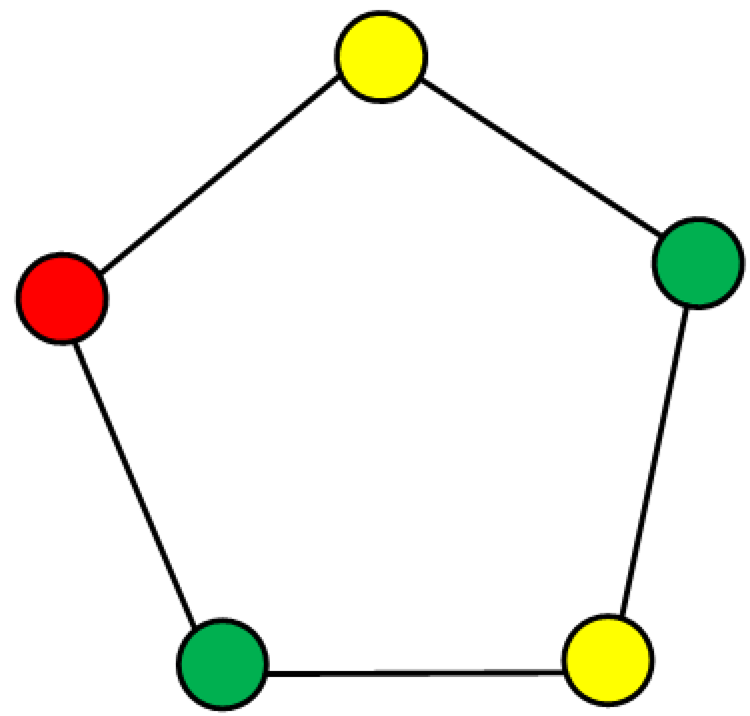


Оценки хроматического числа

4. $\mathbf{G_1 \cap G_2 = \varnothing \Rightarrow}$

$\boldsymbol{\chi(G_1 \cup G_2) = max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}}$



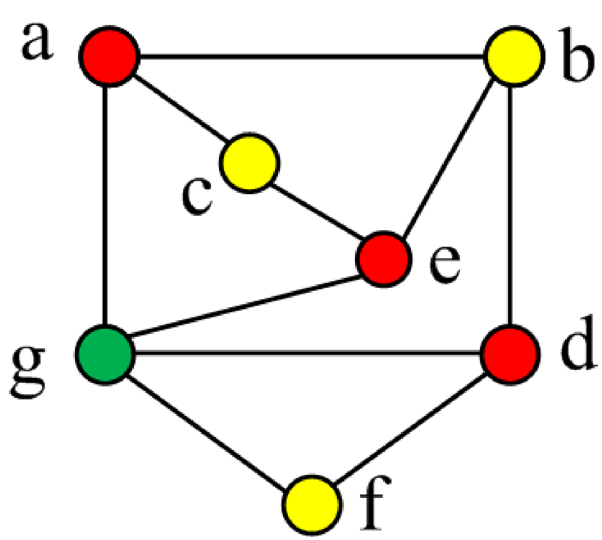


Оценки хроматического числа

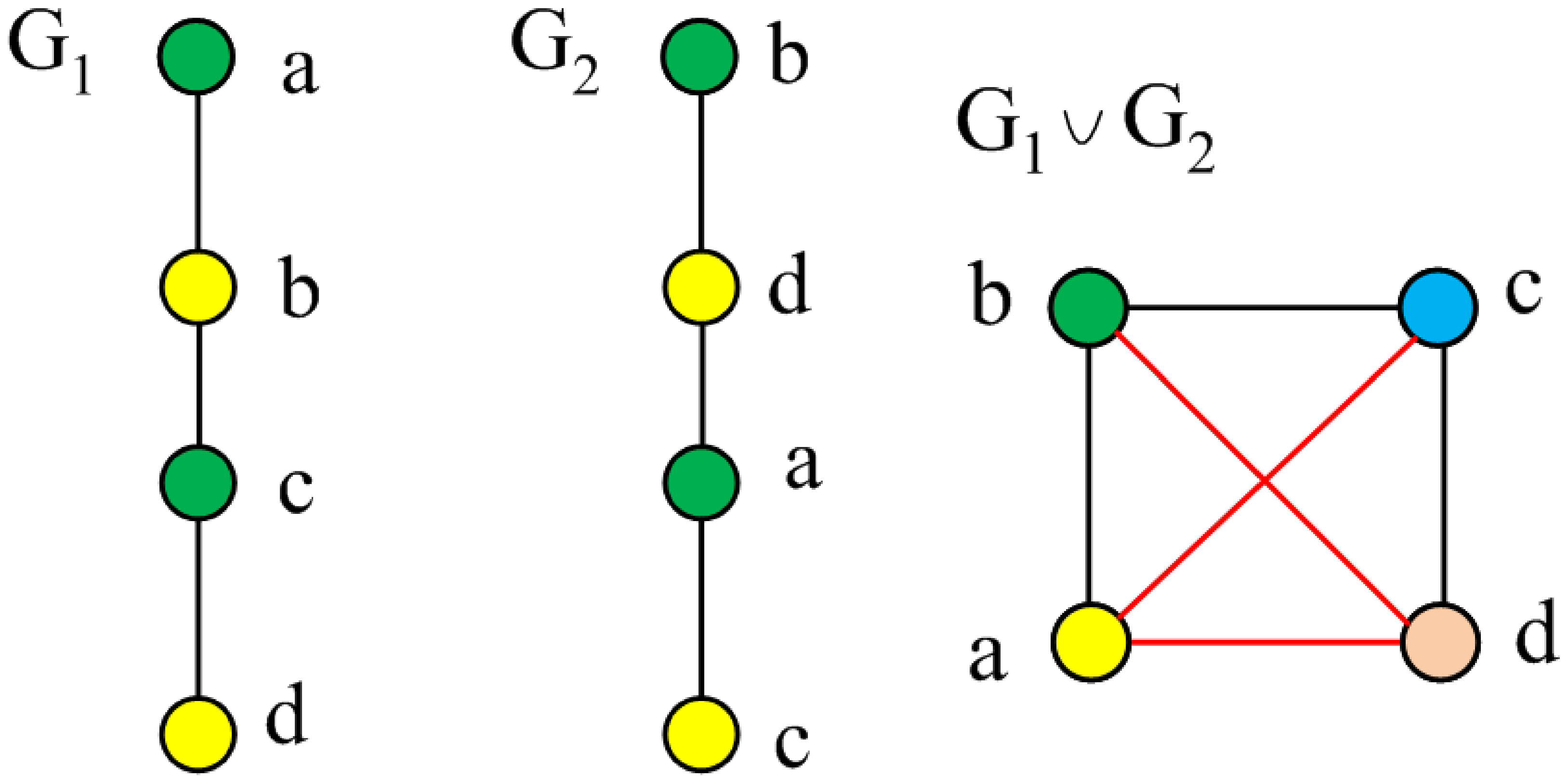
5. $\mathbf{G_1 \cap G_2 \neq \varnothing \Rightarrow}$

$\boldsymbol{\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\ \chi(G_2)}$

6. $\boldsymbol{K_n \subseteq G,\ \chi(G) \geq n.}$



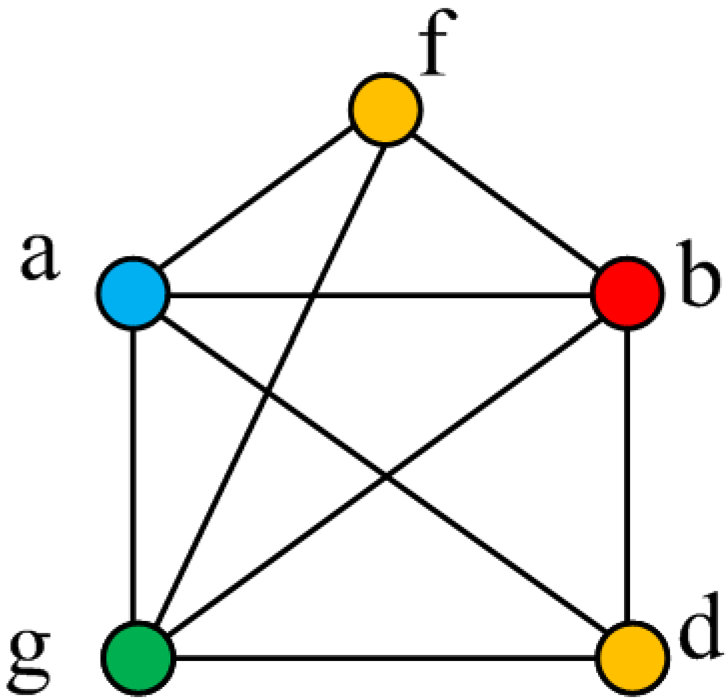
Пример. $\chi(G_1 \cup G_2) = \chi(G_1)\,\chi(G_2)$

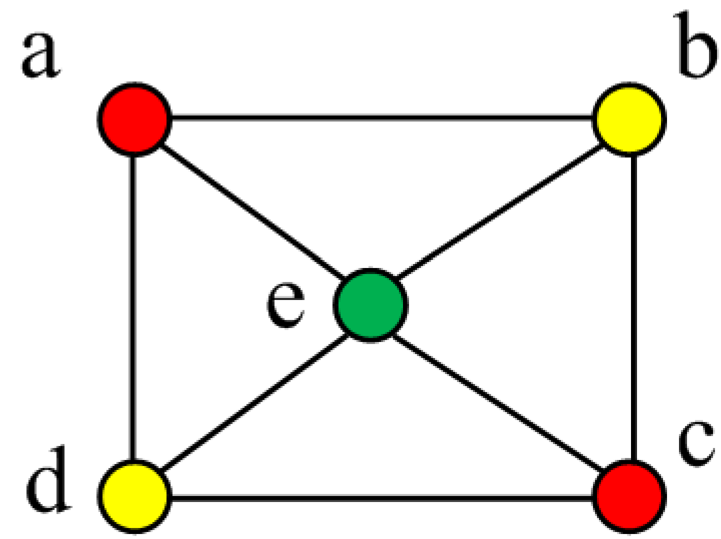


Однозначно раскрашиваемый граф

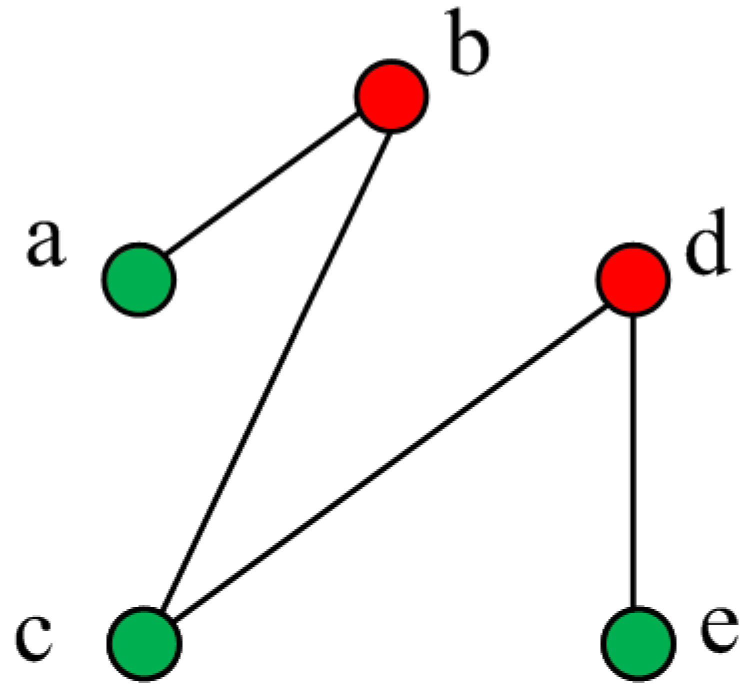
Пусть G – помеченный граф с $\chi(G)=n$. Каждая его раскраска порождает разбиение V на n множеств. Если каждая n-раскраска порождает одно и то же разбиение, то G – однозначно n-раскрашиваемый или просто однозначно раскрашиваемый.

Примеры

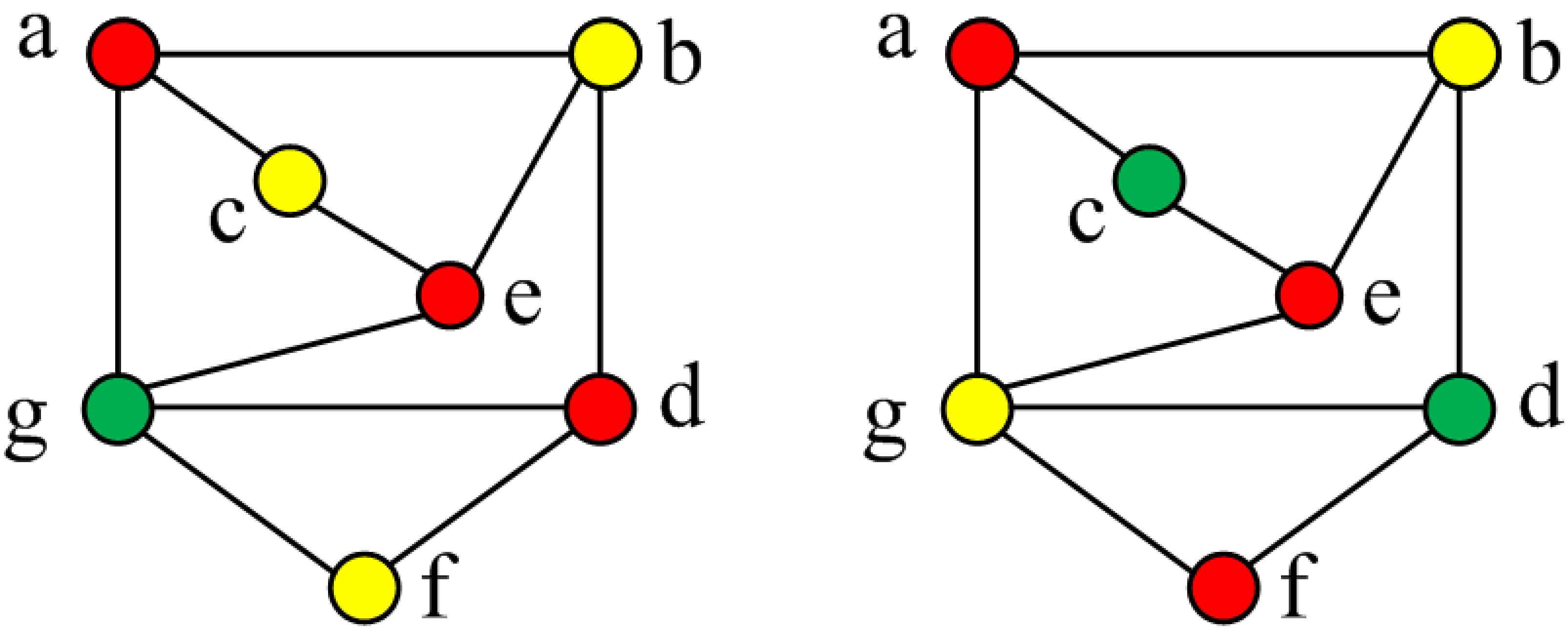




Примеры



Неоднозначно раскрашиваемый граф (n=3)



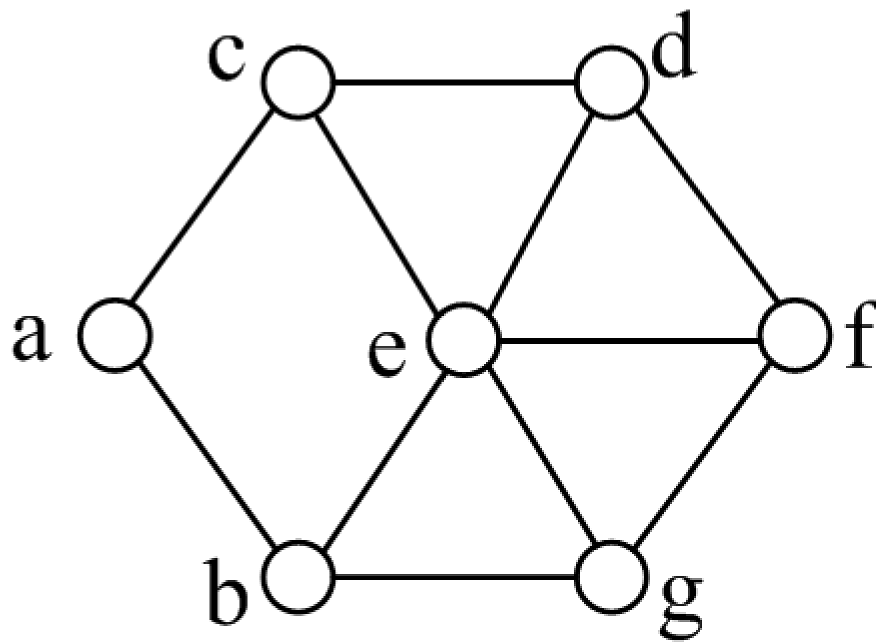
Приближённая раскраска графа

Алгоритм Ершова

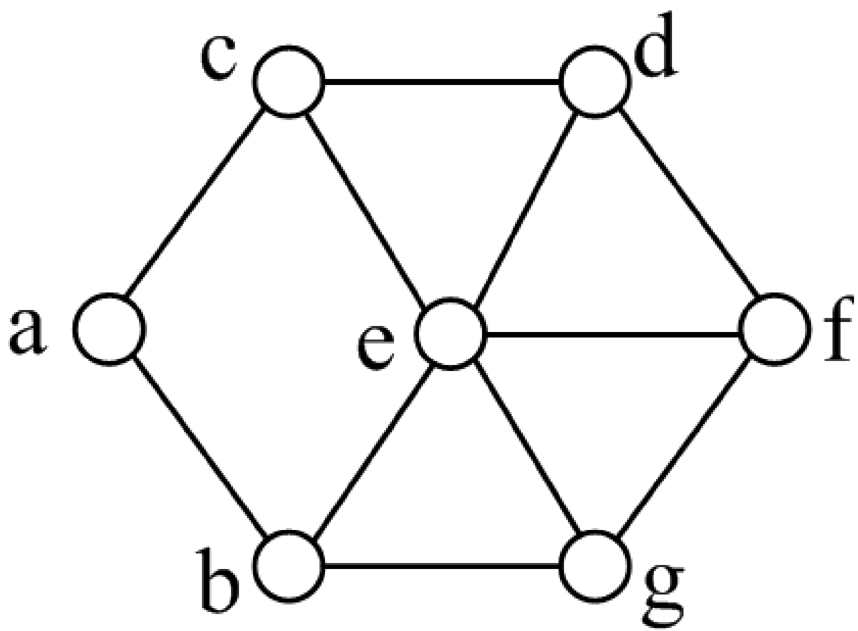
Выбираются 2 несмежные вершины, сливаются в одну с сохранением связей (лучше, если на чётном расстоянии).
Процедура повторяется до получения полного графа.
Затем восстанавливается раскраска на исходном графе.

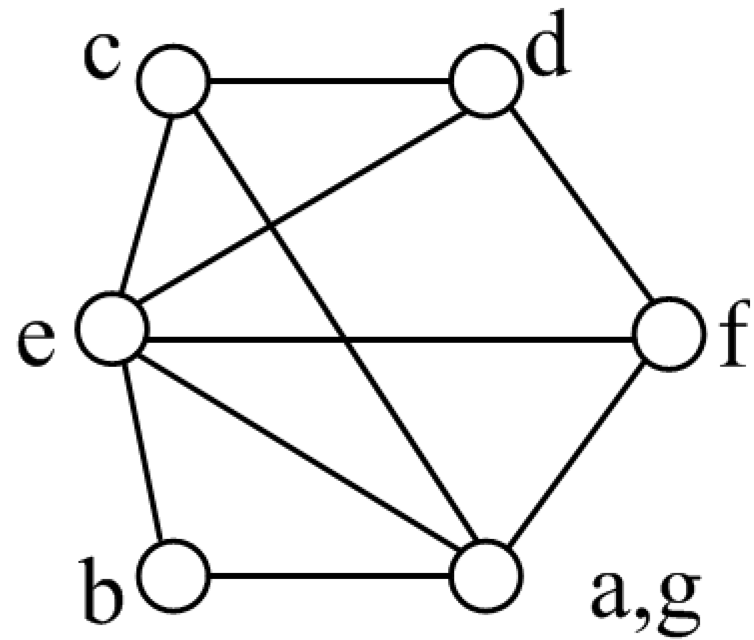
Распределение ресурсов

Приближённая раскраска графа

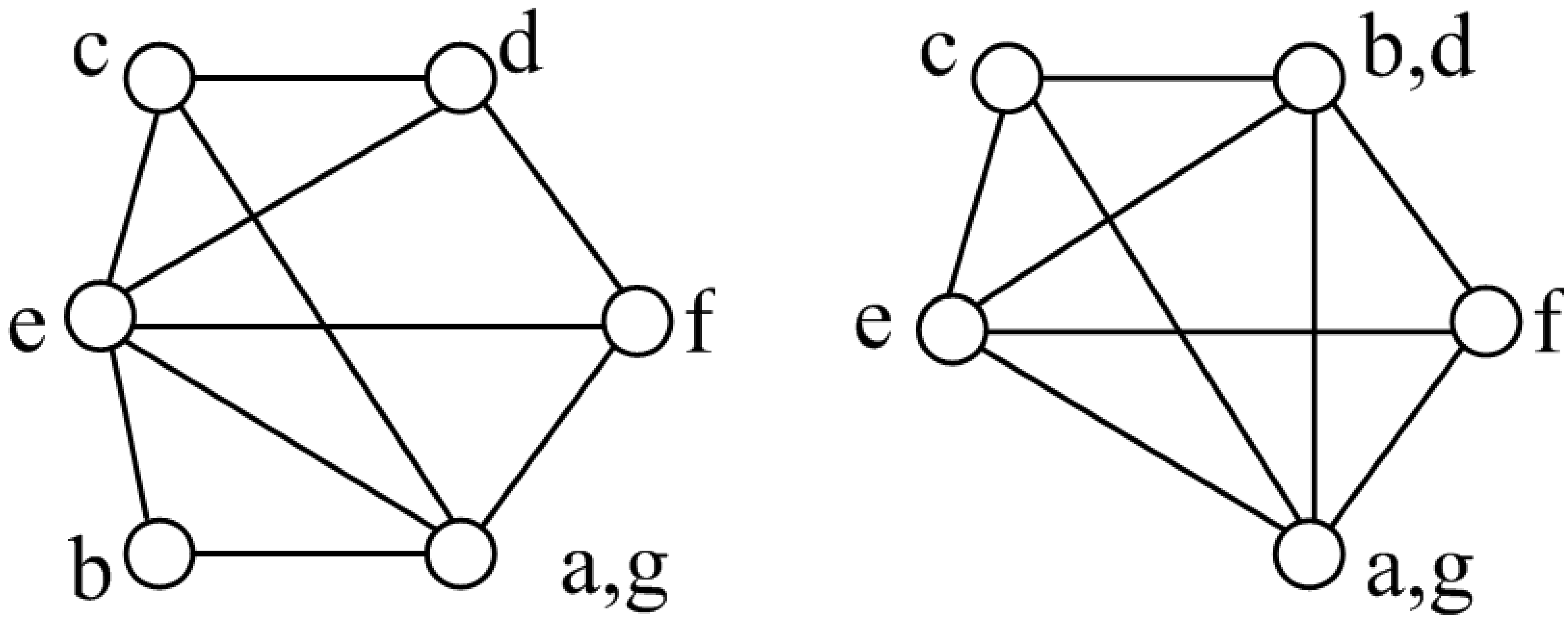


Приближённая раскраска графа

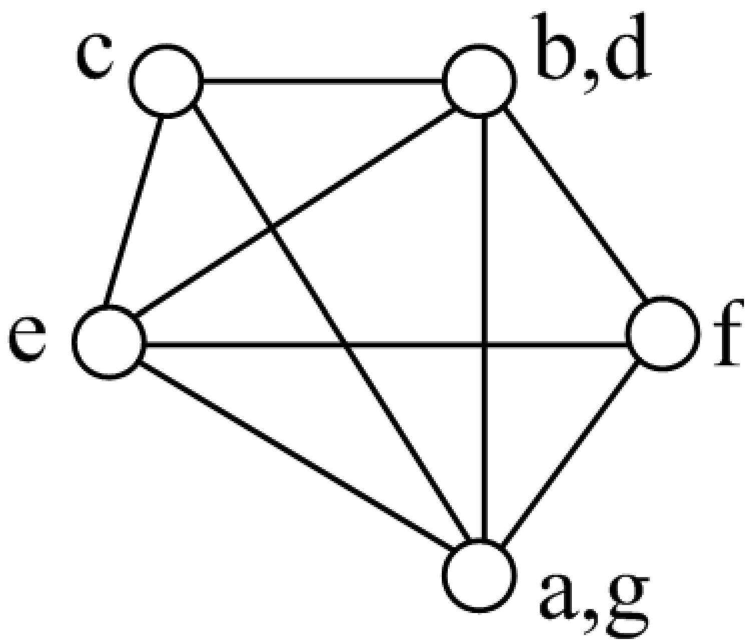


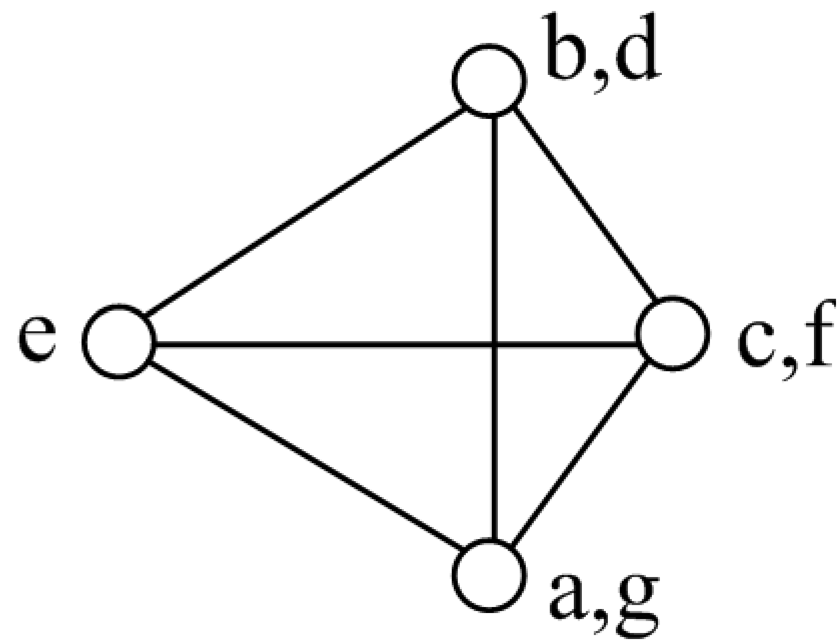


Приближённая раскраска графа

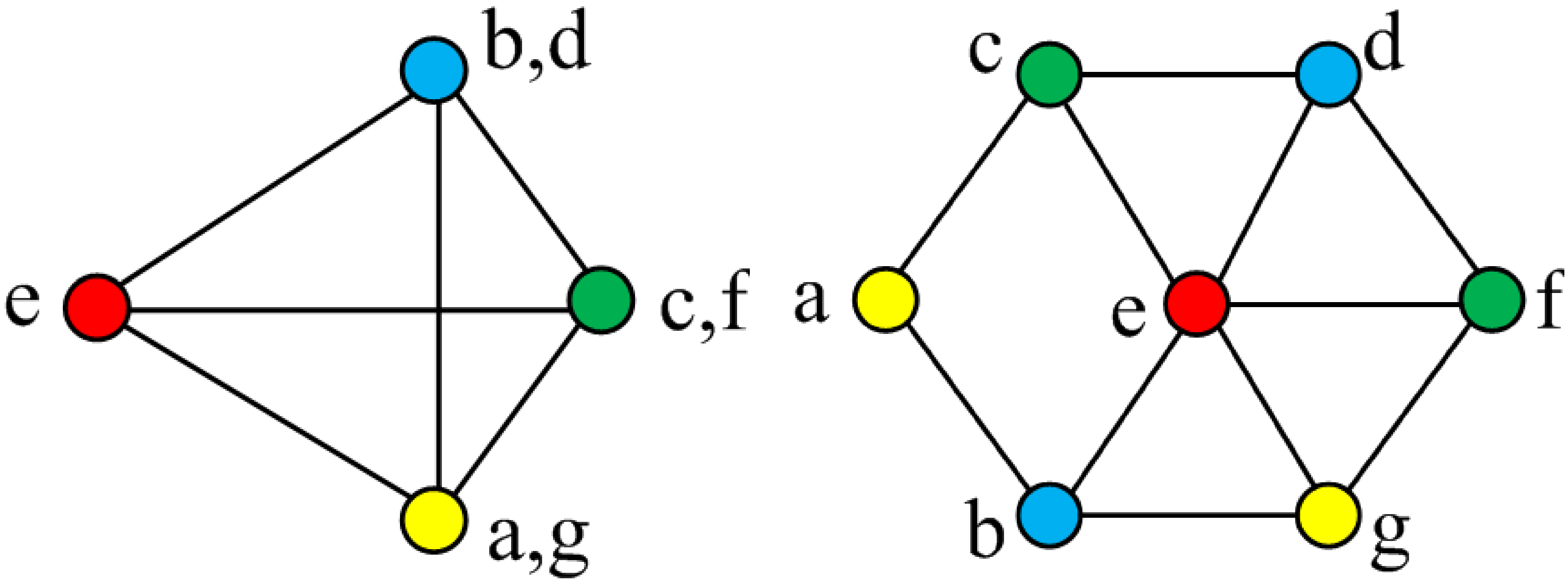


Приближённая раскраска графа

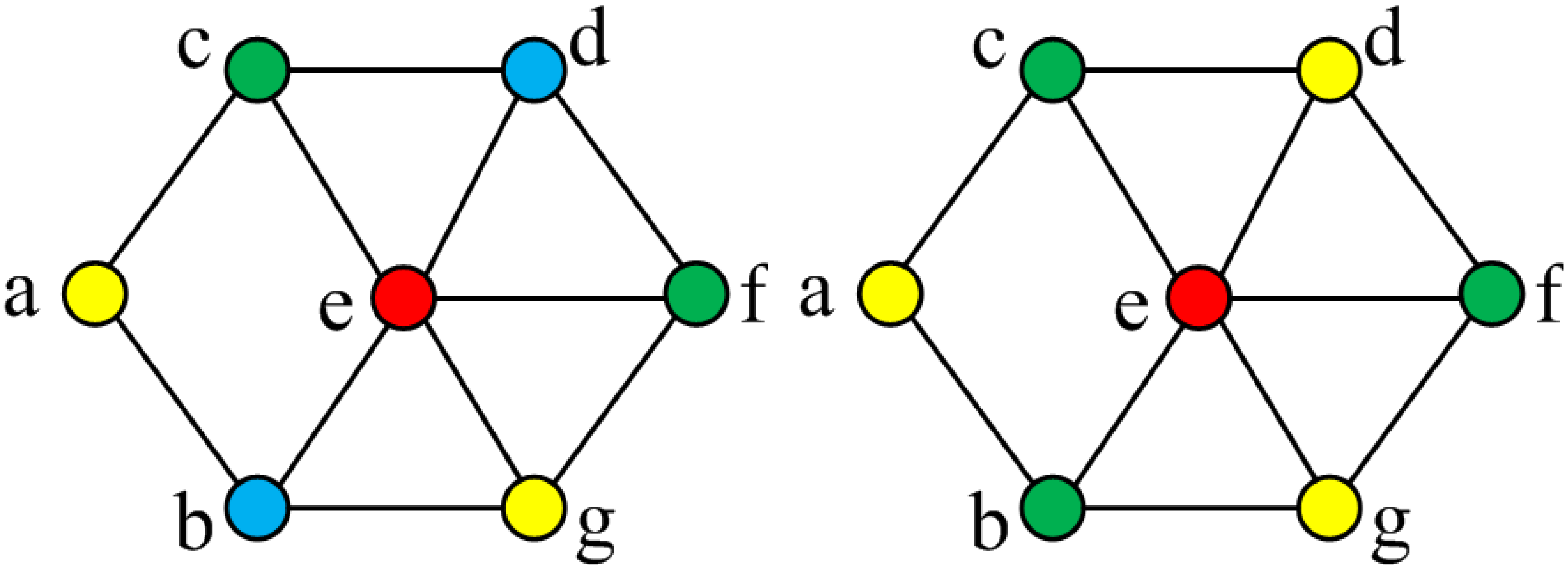




Приближённая раскраска графа

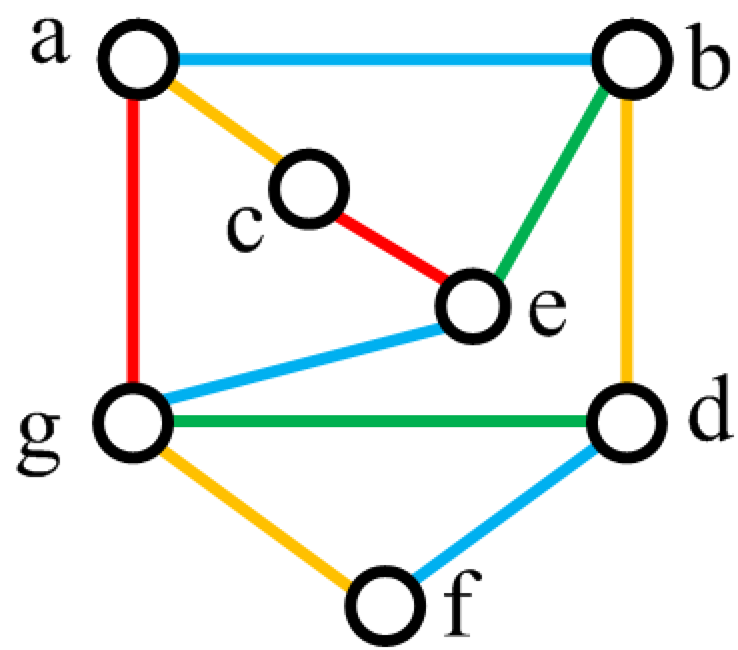


Приближённая и точная раскраска графа



Рёберная раскраска графа

Раскрашиваются рёбра графа так, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены в один цвет.



Хроматический класс

Хроматический класс графа G (обозначается $\chi'(G)$) – наименьшее n, что для графа G существует рёберная n-раскраска.

Для любого графа , не являющегося вполне несвязным, $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Вполне несвязный граф - $\overline{K_n}$

Хроматический класс

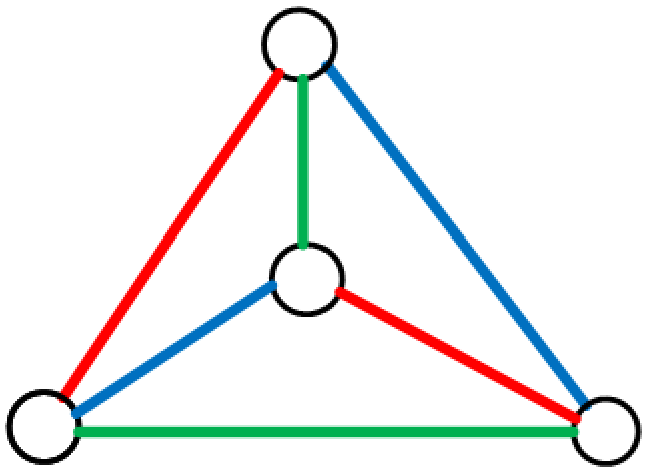
Теорема [Визинг]

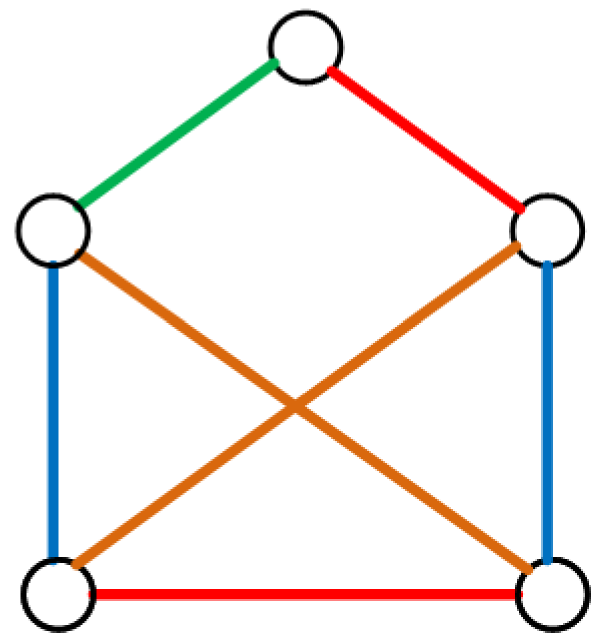
Для каждого графа G хроматический класс удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1}$$

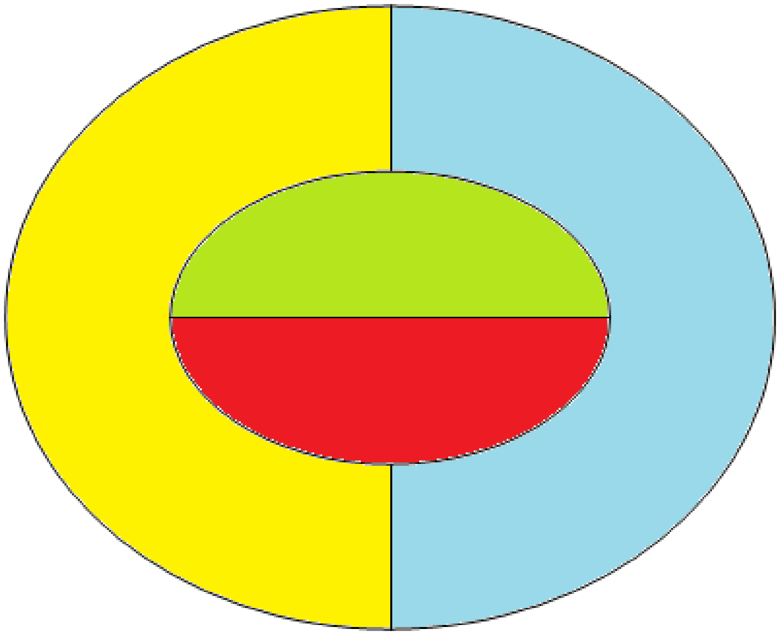
Хроматический класс

$\chi'(G) = \Delta(\mathrm{G})$ $\qquad$ $\chi'(G) = \Delta(\mathrm{G})+1$

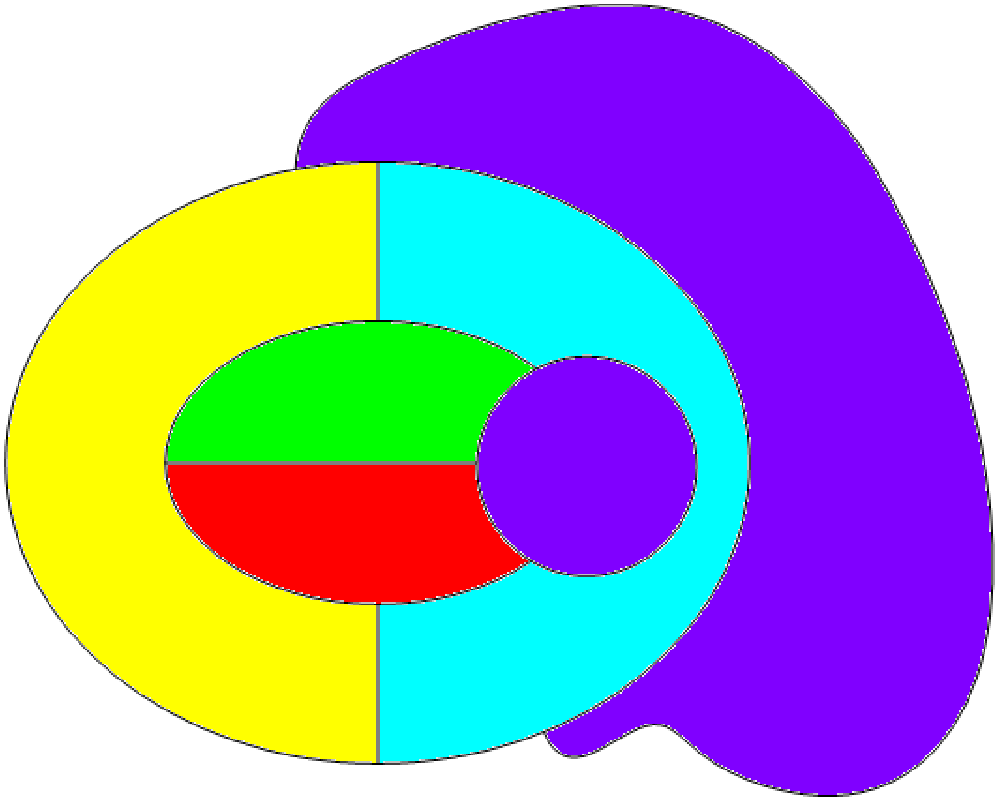




Раскраска карт



Раскраска карт (анклав)



Гипотеза 4-х красок

Теорема. Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.

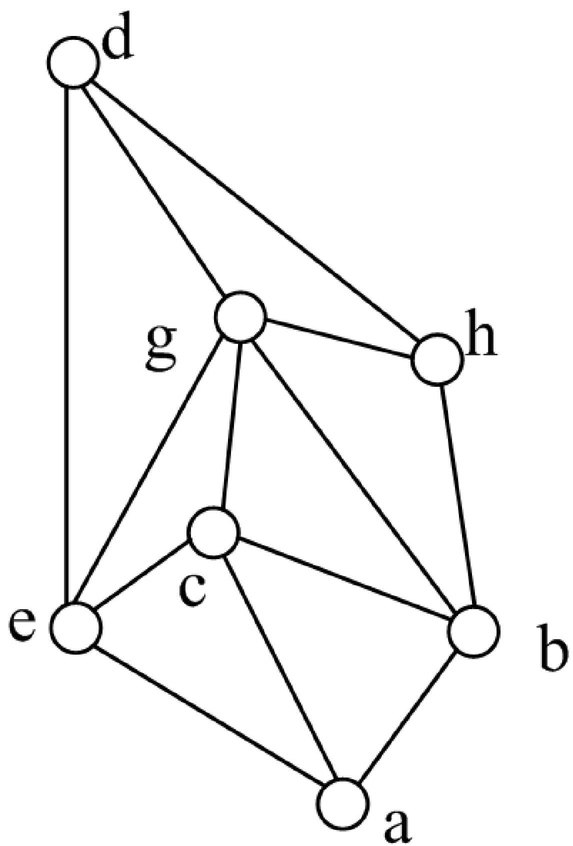
Гипотеза 4-х красок. Каждый планарный граф 4-раскрашиваем.

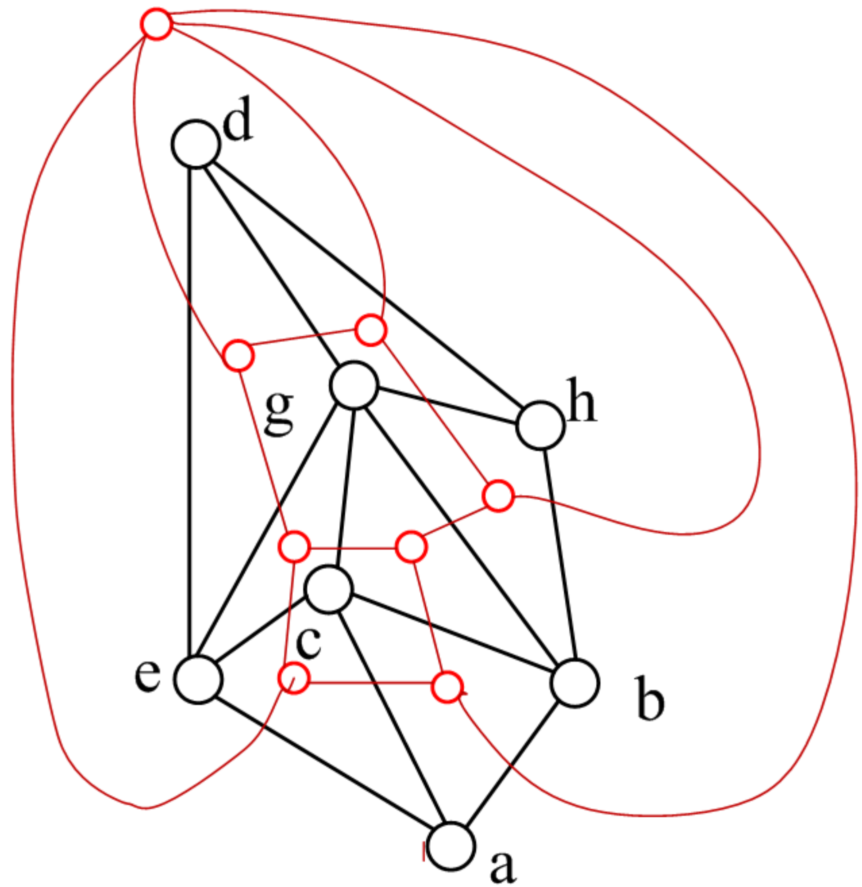
Доказано до 41 области.

Двойственный граф

Граф G’, двойственный графу G - каждой грани G сопоставляем вершину графа G’, каждому ребру G – ребро графа G’; может получиться мультиграф, если есть вершины степени 2.

Двойственный граф. Пример

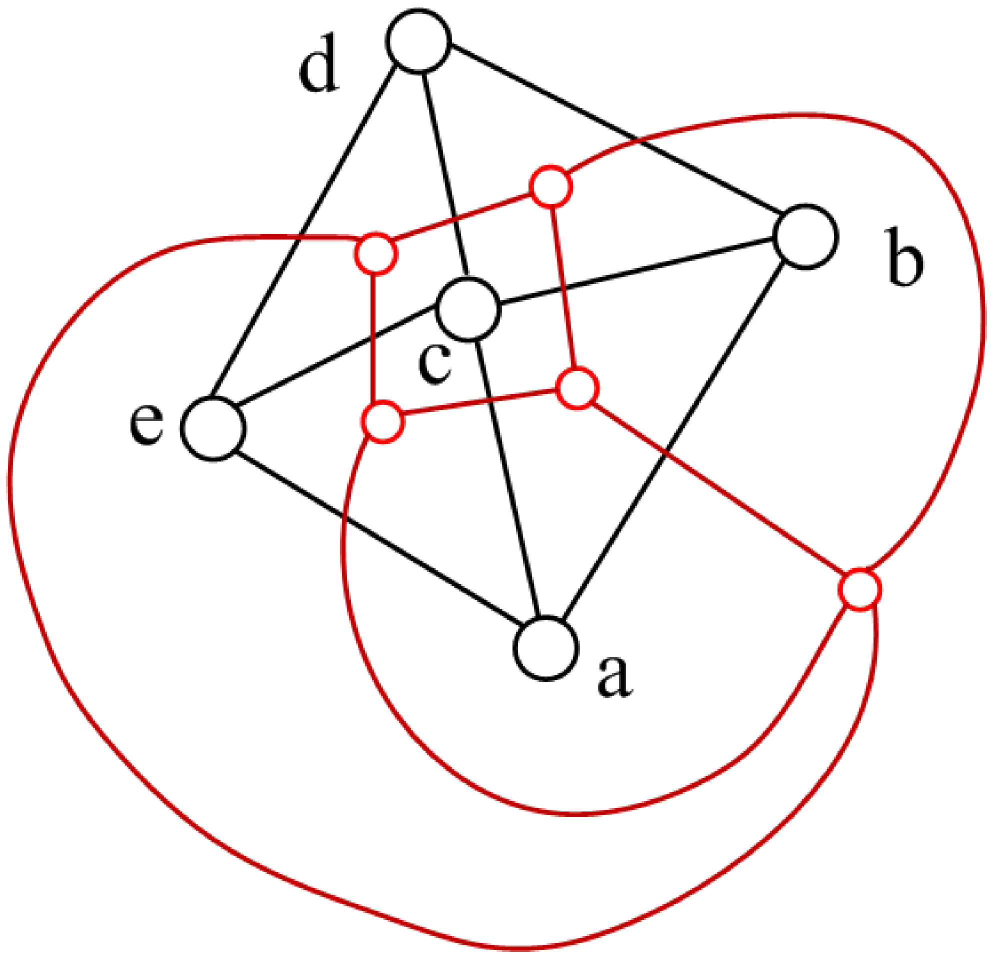




Самодвойственный граф

Граф, изоморфный своему двойственному, называется ***самодвойственным***.

Самодвойственный граф. Пример



Двойственный граф

Граф, двойственный двойственному, изоморфен исходному.

Раскраска карт = раскраска двойственного графа.