№1 В-29. Московка А. А.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{n+2}}\right) \to \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{n+2}}\right)$$

Выполним элемент. преобразование:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3}{n}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{5}{\sqrt{n+2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\overset{0}{\frac{1}{\infty}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(0) = 1$$

Получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}$$

Исследуем ряд с помощью интегр. признака Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{n}\,dn = (3 \cdot \ln(n))\Big|_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \ln(n) - 0 = \infty - 0 = \infty$$

Т.к. несобств. интеграл расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Ответ: ряд расходится.

№2 В-29 Москвина А.А.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n\cdot\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\left(\frac{4}{5n+1}\right)$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(x-3)^n}(x-3)\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\left(\frac{4}{5n+1}\right)}{\cancel{(x-3)^n}\cdot\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)tg\left(\frac{4}{5n+6}\right)}\right| =$$

$$= |x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\cdot\frac{4}{5n+1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\cdot\frac{4}{5n+6}} = |x-3|$$

$|x-3|<1$

$x\in(2;4)$ - область сходимости

При $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\left(\frac{4}{5n+1}\right)$

Признак Лейбница:

1. Знакочер.;
2. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\left(\frac{4}{5n+1}\right)=0$

$\Rightarrow$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\,\frac{4}{5n+1}$$

Исследуем сходимость с пом. пр-ков сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot tg\left(\frac{4}{5n+1}\right) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}$$

Сравним $\frac{1}{n^3}$ - сходящимся рядом.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq0$ - сходится вместе с $\frac{1}{n^3}$.

Ответ: $[2;4]$.

№4 В-29 Московка А. А.

$y = 5x^3 \operatorname{arctg} 4x, \quad x_0 = 0$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n+1} + \ldots$

$a_0 = 4x$

$\operatorname{arctg} 4x = 4x - \frac{(4x)^3}{3} + \frac{(4x)^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{(4x)^{2n-1}}{2n+1}$

$y = 5x^3 4x - \frac{5x^3 \cdot (4x)^3}{3} + \frac{(4x^3)x}{1} + \ldots + (-1)^n \frac{5x^3 \cdot (4x)^{2n-1}}{2n+1}$

Область сходимости:

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \Rightarrow x \in (-1; 1)$

При $x = -1$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n+1}$. Сравним с $\sum \frac{1}{n}$ - расходящимся.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 1 \Rightarrow$ расходится вместе с $\sum \frac{1}{n}$

Аналогично для $x = 1$.

Ответ: $(-1; 1)$.

№6 . В-29 Москвина А. А.

$$sh^2 z - ch^2 z = 3$$

$$\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = 3$$

$$\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = 3$$

$$\frac{-2e^{-z}}{2} \cdot \left(\frac{2e^z}{2}\right) = 3$$

$$e^{-z} \cdot e^z = 3 \Rightarrow e^{-x-iy} \cdot e^{x+iy} = 3 \Rightarrow e^0 = 3 \ldots$$

№7.

$$f(z) = \frac{z}{|z|} i \quad ; \quad z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(z) = \frac{xi - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{u(x;y)} + i \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{v(x;y)}$$

$$\frac{du}{dx} = -y \cdot \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad ; \quad \frac{dv}{dy} = -x \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Условие Коши-Римана не выполнены $\Rightarrow$

Ответ: функция не аналитична.

№8. В-29 Московка А.А.

$$f(z) = \frac{1-e^{z-2}}{(z-2)(z+3)^3}$$

$$(z-2)(z+3)^3 = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 2 \\ z_2 = -3 \end{array}\right.$$

$$z = 2 : \frac{н(1)}{н(1)} = \text{У.О.Т.}$$

$$\operatorname{res} f(z_0) = 0$$

Разложение по Лорану:

$$\frac{1}{(z-2)(z+3)^3} = \left(1 + \frac{z-2}{1} + \frac{(z-2)^2}{2} + \frac{(z-2)^3}{3} + \ldots + \frac{(z-2)^n}{n!}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(z-2)(z+3)^3} - \frac{1}{(z+3)^3} - \frac{z-2}{(z+3)^3} - \frac{(z-2)^2}{2(z+3)^2} + \ldots$$

Содержится ∞ много членов главной посл-сти $\Rightarrow$ С.О.Т.

№9.

$$\int\limits_{|z-\pi|=5} \frac{3z}{\sin z}$$

$$z \in (-5+\pi; 5+\pi)$$

$z = 0$ - особая точка (У.О.Т.)

$$\int\limits_{|z-\pi|=5} \frac{3z}{\sin z} = 0$$

№10. В-29 Московка А.А.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{6}{(x^2+9)(x^2+1)}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{(x^2+9)\cdot(x^2+1)} =$$

$z = 3i$; i - в верхней плоскости

$$\operatorname*{res}_{z=3i} \frac{6}{(z^2+9)(z^2+1)} = \lim_{z \to 3i} \frac{6}{(z+3i)(z^2+1)} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}i\cdot(-8)} = -\frac{1}{8i}$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{6}{(z^2+9)(z^2+1)} = \lim_{z \to i} \frac{6}{(z^2+9)(z^2+i)} = \frac{\cancel{6}^{3}}{8\cdot\cancel{2}i} = \frac{3}{8i}$$

$$I = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi i \cdot \left(\frac{1}{-8i} + \frac{3}{8i}\right) = \pi \cancel{i}\left(\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8i}_{4}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.