ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Экзаменационный теоретический курс (I семестр)

1. Матрицы. Основные понятия.

Виды квадратных матриц. Транспонирование. Линейные операции над матрицами

Определение матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n$$

Говорят, что матрица имеет размер $m \times n$.

Если $m = n$, матрица называется **квадратной порядка** n.

Виды квадратных матриц

1. **Нулевая матрица** — все элементы равны нулю.
2. **Единичная матрица** E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Диагональная** — все элементы вне главной диагонали равны нулю.
4. **Верхнетреугольная / нижнетреугольная** — нули ниже или выше диагонали.
5. **Симметричная**: $A^T = A$
6. **Кососимметричная**: $A^T = -A$

Транспонирование матрицы

Транспонированная матрица A^T получается заменой строк столбцами:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Свойства транспонирования:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Линейные операции над матрицами

1. **Сложение матриц** одинакового размера:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

2. **Умножение матрицы на число**:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства.

Экзаменационный краткий ответ

> Матрица — прямоугольная таблица чисел. Квадратные матрицы бывают диагональные, единичные, симметричные. Транспонирование — замена строк столбцами. Основные операции — сложение и умножение на число.

2. Матрицы.

Элементарные преобразования матриц. Произведение матриц

Элементарные преобразования строк

Элементарными называются преобразования, **не изменяющие ранг матрицы**:

1. Перестановка двух строк
2. Умножение строки на ненулевое число
3. Прибавление к строке другой строки, умноженной на число

Эти преобразования лежат в основе **метода Гаусса**.

Произведение матриц

Пусть:

$$A_{m \times n}, \quad B_{n \times k}$$

Тогда произведение $C = AB$ имеет размер $m \times k$, где

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

Свойства произведения:

- ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$
- дистрибутивность: $A(B + C) = AB + AC$
- в общем случае **некоммутативно**: $AB \neq BA$

Экзаменационный краткий ответ

> Элементарные преобразования строк сохраняют ранг. Произведение матриц определено при согласованных размерах и не является коммутативным.

3. Определители. Основные свойства определителей

Определение определителя

Определитель — это число, сопоставляемое квадратной матрице, характеризующее её обратимость.

Для матрицы второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Основные свойства определителей

1. $\det A^T = \det A$
2. При перестановке двух строк определитель меняет знак
3. Если две строки линейно зависимы, то $\det A = 0$
4. Если строку умножить на число λ, определитель умножится на λ
5. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Экзаменационный краткий ответ

> Определитель — число квадратной матрицы. Он равен нулю при линейной зависимости строк и обладает свойством мультипликативности.

4. Минор. Алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа

Минор

Минор M_{ij} — определитель матрицы, полученной вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Теорема Лапласа

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Экзаменационный краткий ответ

> Определитель можно разложить по любой строке или столбцу через алгебраические дополнения — это теорема Лапласа.

5. Невырожденная матрица.

Обратная матрица. Ортогональная матрица

Невырожденная матрица

Матрица называется **невырожденной**, если

$$\det A \neq 0$$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Ортогональная матрица

Матрица называется **ортогональной**, если

$$A^T A = E$$

Для ортогональной матрицы:

$$A^{-1} = A^T$$

Экзаменационный краткий ответ

> Матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю. Для ортогональной матрицы обратная равна транспонированной.

6. Ранг матрицы.

Базисный минор. Теорема о базисном миноре

Ранг матрицы

Ранг — максимальный порядок ненулевого минора матрицы.

Базисный минор

Любой минор порядка, равного рангу матрицы, называется **базисным**.

Теорема о базисном миноре

Все миноры, содержащие базисный минор, выражаются через него линейно.

Экзаменационный краткий ответ

> Ранг матрицы равен максимальному порядку её ненулевого минора.

7. Линейная независимость строк матрицы.

Теорема о ранге матрицы

Линейная независимость строк

Строки матрицы линейно независимы, если никакая из них не выражается через другие.

Теорема о ранге

> Ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам.

Экзаменационный краткий ответ

> Число линейно независимых строк равно числу линейно независимых столбцов.

8. Системы линейных уравнений.

Основные понятия. Метод обратной матрицы

1. Определение

Система линейных уравнений (СЛУ) — это набор уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные,
- a_{ij} — коэффициенты при неизвестных,
- b_i — свободные члены.

2. Основные понятия

1. **Совместность системы**
   - **Совместная система** — имеет хотя бы одно решение.
   - **Несовместная система** — решений нет.
2. **Количество решений**
   - **Единственное решение** — система определённая.
   - **Бесконечно много решений** — система имеет свободные параметры.
   - **Нет решений** — система несовместна.
3. **Матрицы системы**
   - **Матрица коэффициентов:** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
   - **Столбец неизвестных:** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
   - **Столбец свободных членов:** $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Система записывается в **матричной форме**:

$$AX = B$$

3. Метод обратной матрицы

Метод обратной матрицы применяется, если система **квадратная** ($n = m$) и **матрица коэффициентов невырождена** ($\det A \neq 0$).

3.1. Идея метода

Если существует обратная матрица A^{-1}, то решение системы:

$$X = A^{-1}B$$

3.2. Шаги метода

1. Записать систему в виде $AX = B$
2. Проверить, что $\det A \neq 0$
3. Найти обратную матрицу A^{-1}
4. Умножить $A^{-1}B$ для получения решения X

3.3. Пример

Система:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Определитель:

$$\det A = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

3. Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

4. Решение:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 7/5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = 9/5, y = 7/5$$

4. Преимущества и ограничения метода

Плюсы:

- Быстро для систем с малым числом неизвестных;
- Прямое решение через матричные операции.

Минусы:

- Не применим к прямоугольным системам ($m \neq n$) или вырожденным матрицам ($\det A = 0$);
- На больших системах вычисление A^{-1} трудоёмко.

5. Итог

- Система линейных уравнений: $AX = B$
- Метод обратной матрицы применим при $\det A \neq 0$
- Решение: $X = A^{-1}B$

Экзаменационный краткий ответ

> Метод обратной матрицы применяется только к квадратным невырожденным системам.

9. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Невырожденная система

Линейная система называется **невырожденной**, если:

- число уравнений равно числу неизвестных n;
- определитель матрицы коэффициентов $\Delta = \det A \neq 0$.

В этом случае система имеет **единственное решение**.

Формулы Крамера

Пусть дана система:

$$AX = B$$

где A — квадратная матрица порядка n, $\det A = \Delta \neq 0$.

Обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы A столбцом свободных членов B.

Тогда решение системы выражается формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Вывод формул Крамера (идейно)

Формулы следуют из:

- разложения определителя по столбцу,
- линейности определителя по каждому столбцу,
- единственности решения невырожденной системы.

Ограничения метода

- применим **только** к квадратным системам;
- требует вычисления большого числа определителей;
- неудобен при больших n.

Экзаменационный краткий ответ

> Формулы Крамера дают единственное решение квадратной системы при ненулевом определителе: $x_i = \Delta_i/\Delta$.

10. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Теорема Кронекера–Капелли

Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на **элементарных преобразованиях строк** расширенной матрицы системы:

$$(A|B)$$

Цель метода:

- привести матрицу к ступенчатому (или приведённому ступенчатому) виду;
- выразить ведущие переменные через свободные.

Ступенчатый вид

Матрица называется ступенчатой, если:

- все ненулевые строки выше нулевых;

- в каждой следующей строке ведущий элемент стоит правее, чем в предыдущей.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$$

Если система совместна, то:

- при $\operatorname{rang} = n$ — решение единственное;
- при $\operatorname{rang} < n$ — решений бесконечно много.

Экзаменационный краткий ответ

> Метод Гаусса сводит систему к ступенчатому виду. По теореме Кронекера–Капелли система совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы равны.

11. Системы линейных однородных уравнений.

Необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений

Однородная система

Система называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$AX = 0$$

Свойства однородных систем

1. Всегда имеет **нулевое решение**.
2. Может иметь бесконечно много решений.
3. Множество решений образует линейное пространство.

Теорема

Однородная система имеет **ненулевые решения тогда и только тогда**, когда:

$$\operatorname{rang} A < n$$

где n — число неизвестных.

Экзаменационный краткий ответ

> Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных.

12. Фундаментальная система решений однородной системы.

Теорема о ФСР. Структура общего решения

1. Однородная система линейных уравнений

Однородная система — система вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
$$

или в матричной форме:

$$AX = 0$$

где:

- A — матрица коэффициентов $m \times n$,
- $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор неизвестных.

Важно: всегда **совместна**, так как тривиальное решение $X = 0$ существует.

2. Фундаментальная система решений (ФСР)

ФСР — это минимальный набор **линейно независимых решений**, из которых можно получить **любое решение однородной системы** как линейную комбинацию этих решений.

Обозначим решения ФСР как:

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

Тогда любое решение X системы записывается как:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

3. Теорема о фундаментальной системе решений

Теорема:

> Для однородной системы $AX = 0$ с n неизвестными и рангом $r = \operatorname{rank}(A)$, существует **ФСР**, состоящая из $n - r$ линейно независимых решений.
> Любое решение системы выражается через элементы ФСР как линейная комбинация.

Следствие:

- Число решений ФСР = число **свободных переменных** $n - r$
- Любое решение можно получить из ФСР
- ФСР образует **базис линейного пространства решений**

4. Структура общего решения

1. **Выделяем ведущие и свободные переменные** после приведения системы к ступенчатому виду:
   - Ведущие переменные выражаем через свободные
   - Свободные принимаем параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$
2. **Составляем решения ФСР**:
   - Каждому параметру $\alpha_i = 1$, остальные = 0 → получаем решение X_i
   - Повторяем для всех свободных переменных
3. **Общее решение** записываем как линейную комбинацию:

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$$

5. Пример

Система:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

1. Приведём к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 - 3y + 0 = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

2. Тогда $x + 0 + z = 0 \Rightarrow x = -z$
3. Свободная переменная: $z = t$
4. ФСР (один вектор):

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Общее решение:

$$X = tX_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

✅ Число свободных переменных $n - r = 3 - 2 = 1$, ФСР содержит 1 вектор.

6. Итог

- Однородная система всегда имеет **тривиальное решение**
- **ФСР** — минимальный набор линейно независимых решений, дающий любое решение
- Размер ФСР = число свободных переменных $n - \mathrm{rank}(A)$
- Общее решение = линейная комбинация решений ФСР

Экзаменационный краткий ответ

> Фундаментальная система решений — это базис пространства решений однородной системы, а общее решение есть их линейная комбинация.

13. Неоднородные системы линейных уравнений.

Структура общего решения

1. Определение

Неоднородная система линейных уравнений — система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$AX = B$$

где:

- A — матрица коэффициентов $m \times n$
- $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор неизвестных
- $B \neq 0$ — вектор свободных членов

2. Связь с однородной системой

Однородная система:

$$AX = 0$$

Теорема:
Если X_p — частное решение неоднородной системы $AX = B$, а X_h — любое решение соответствующей однородной системы $AX = 0$, то **любое решение неоднородной системы** имеет вид:

$$X = X_p + X_h$$

3. Структура общего решения

1. **Находим частное решение** X_p (любой конкретный вектор, который удовлетворяет системе $AX = B$)

2. **Находим фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы** $AX = 0$:

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

3. **Общее решение**:

$$X = X_p + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

4. Важные свойства

- Общее решение включает **частное решение + линейную комбинацию решений однородной системы**
- Если система имеет **единственное решение**, то ФСР пусто ($k = 0$)
- Если система несовместна ($B \notin \text{линейная оболочка столбцов A}$), решений нет

5. Пример

Система:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Шаг 1. Однородная система

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Приведём к ступенчатому виду:

$$y = 0, \quad x = -z$$

ФСР однородной системы:

$$X_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Шаг 2. Находим частное решение

Подставим $z = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4/3, y = 5/3, z = 0$$

$$X_p = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Общее решение

$$X = X_p + tX_h = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 - t \\ 5/3 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

✅ Любое решение можно получить из этого выражения.

6. Итог

- Любое решение неоднородной системы = **частное решение + линейная комбинация ФСР однородной системы**
- Размер ФСР = число **свободных переменных** однородной системы
- Если однородная система имеет только тривиальное решение, то неоднородная система, если совместна, имеет **единственное решение**

Экзаменационный краткий ответ

> Общее решение неоднородной системы — сумма частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

14. Векторы.

Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты в трёхмерном пространстве

1. Понятие вектора

Вектор — направленный отрезок, характеризующийся:

- длиной (модулем),
- направлением.

В аналитической геометрии вектор в трёхмерном пространстве задаётся координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

2. Линейная комбинация векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ образуют **линейную комбинацию**, если:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

3. Линейная зависимость и независимость

3.1. Линейная зависимость

Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ **линейно зависимы**, если существует набор чисел, **не все равные нулю**, такой что:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

3.2. Линейная независимость

Векторы **линейно независимы**, если равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

возможно **только при**:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

4. Геометрический смысл в $\mathbb{R}^3$

- **Один вектор** всегда линейно независим (если он ненулевой)
- **Два вектора**:
  - зависимы ↔ коллинеарны
  - независимы ↔ неколлинеарны
- **Три вектора**:
  - зависимы ↔ лежат в одной плоскости (компланарны)
  - независимы ↔ образуют базис пространства

5. Базис в трёхмерном пространстве

Базис — это тройка линейно независимых векторов:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

Любой вектор $\vec{v}$ в пространстве можно единственным образом представить:

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Числа x, y, z называются **координатами вектора** в данном базисе.

6. Стандартный (ортонормированный) базис

В $\mathbb{R}^3$ обычно используют базис:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

В этом базисе:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

7. Координаты вектора по двум точкам

Если заданы точки:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

то:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

8. Итог

- Вектор задаётся координатами в пространстве
- Линейная зависимость определяется существованием нетривиальной линейной комбинации
- Базис в $\mathbb{R}^3$ состоит из трёх линейно независимых векторов
- В любом базисе координаты вектора определены **единственным образом**

Экзаменационный краткий ответ

> Векторы линейно независимы, если ни один не выражается через другие. В $\mathbb{R}^3$ базис состоит из трёх линейно независимых векторов.

15. Проекция вектора на ось.

Разложение по ортам. Направляющие косинусы

1. Проекция вектора на ось

1.1. Определение

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l — это число, равное длине проекции вектора на эту ось, взятой со знаком:

$$\operatorname{pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

где:

- φ — угол между вектором и осью,
- знак проекции положительный, если направления совпадают, и отрицательный — если противоположны.

1.2. Проекция на координатные оси

Пусть:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Тогда:

$$\operatorname{pr}_x \vec{a} = a_x, \quad \operatorname{pr}_y \vec{a} = a_y, \quad \operatorname{pr}_z \vec{a} = a_z$$

2. Орты координатных осей

Орты — это единичные векторы координатных осей:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

3. Разложение вектора по ортам

Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

где a_x, a_y, a_z — координаты вектора или его проекции на оси.

4. Направляющие косинусы

4.1. Определение

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ — это косинусы углов между вектором и положительными направлениями координатных осей:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

4.2. Свойство направляющих косинусов

Для любого ненулевого вектора выполняется:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

5. Связь с единичным вектором направления

Единичный вектор направления $\vec{e}$ имеет координаты:

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Он указывает направление вектора $\vec{a}$.

6. Пример

Пусть:

$$\vec{a} = (3, -4, 12)$$

1. Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$$

2. Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{-4}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}$$

7. Итог

- Проекция вектора на ось равна соответствующей координате
- Любой вектор разлагается по ортам координатных осей
- Направляющие косинусы определяют направление вектора
- Сумма квадратов направляющих косинусов равна 1

Экзаменационный краткий ответ

> Направляющие косинусы — это косинусы углов между вектором и координатными осями.

16. Скалярное произведение.

Выражение через координаты. Приложения

1. Скалярное произведение векторов

1.1. Определение

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

где φ — угол между векторами.

1.2. Геометрический смысл

- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ — угол острый
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ — векторы перпендикулярны
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ — угол тупой

2. Скалярное произведение через координаты

Пусть:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

3. Свойства скалярного произведения

1. **Коммутативность**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. **Дистрибутивность**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

3. **Однородность**

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4. **Связь с длиной**

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

4. Приложения скалярного произведения

4.1. Нахождение угла между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \, |\vec{b}|}$$

4.2. Проверка перпендикулярности

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

4.3. Вычисление длины вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

4.4. Проекция вектора на направление

Скалярная проекция:

$$\operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Векторная проекция:

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

4.5. Уравнения геометрических объектов

- **Угол между прямыми**
- **Угол между плоскостями**
- **Угол между прямой и плоскостью**

Все они выражаются через скалярное произведение направляющих векторов или нормалей.

5. Пример

Пусть:

$$\vec{a} = (1, 2, -2), \quad \vec{b} = (2, -1, 1)$$

1. Скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = -2$$

2. Длины:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{6}$$

3. Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{-2}{3\sqrt{6}}$$

6. Итог

- Скалярное произведение связывает длины и угол между векторами
- В координатах — это сумма попарных произведений координат
- Используется для вычисления углов, длин, проекций и ортогональности

Экзаменационный краткий ответ

> Скалярное произведение выражается через координаты и используется для нахождения углов, длин и проверки перпендикулярности.

17. Векторное произведение.

Выражение векторного произведения через координаты. Приложения векторного произведения

Определение векторного произведения

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который:

1. перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. имеет длину:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi,$$

   где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. направление определяется правилом правого винта.

Векторное произведение через координаты

Пусть:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

или:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
3. линейность по каждому аргументу
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

Приложения

- нахождение площади параллелограмма:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- нахождение нормали к плоскости
- проверка параллельности векторов

Экзаменационный краткий ответ

> Векторное произведение двух векторов — вектор, перпендикулярный им, длина которого равна произведению длин векторов на синус угла между ними.

18. Смешанное произведение.

Геометрический смысл. Выражение через координаты. Приложения

Определение смешанного произведения

Смешанное произведение трёх векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

Геометрический смысл

Модуль смешанного произведения равен **объёму параллелепипеда**, построенного на этих векторах:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Смешанное произведение через координаты

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойства

1. инвариантно при циклической перестановке
2. меняет знак при перестановке двух векторов
3. равно нулю ⇔ векторы компланарны

Приложения

- вычисление объёма
- проверка компланарности
- ориентация тройки векторов

Экзаменационный краткий ответ

> Смешанное произведение равно определителю из координат векторов и по модулю даёт объём параллелепипеда.

19. n-мерный вектор.

Линейные операции. Скалярное произведение. Длина

1. n-мерный вектор

n-мерный вектор — это упорядоченный набор из n чисел:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Множество всех таких векторов образует пространство $\mathbb{R}^n$.

2. Линейные операции над векторами

2.1. Сложение векторов

Для векторов:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

сумма определяется покоординатно:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

2.2. Умножение вектора на число

Для $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

2.3. Свойства линейных операций

Для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

3. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$

3.1. Определение

Скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

3.2. Свойства скалярного произведения

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

- $(\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, и $= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

4. Длина (норма) n-мерного вектора

Длина (норма) вектора $\vec{x}$ определяется формулой:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

5. Свойства длины

- $|\vec{x}| \geq 0$
- $|\vec{x}| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
- $|\lambda\vec{x}| = |\lambda|\,|\vec{x}|$
- **Неравенство Коши–Буняковского**:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|$$

6. Геометрические следствия

6.1. Угол между векторами

Если $\vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0$, то:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}$$

6.2. Ортогональность

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \iff \quad \vec{x} \perp \vec{y}$$

7. Итог

- n-мерный вектор — элемент пространства $\mathbb{R}^n$
- Линейные операции выполняются покоординатно
- Скалярное произведение — сумма попарных произведений координат
- Длина вектора выражается через скалярное произведение
- Все основные геометрические понятия обобщаются на $\mathbb{R}^n$

Экзаменационный краткий ответ

> В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задаётся суммой произведений координат, а длина — корнем из скалярного произведения вектора с самим собой.

20. Линейное векторное пространство.

Аксиомы линейного пространства. Примеры. Линейная независимость

1. Линейное векторное пространство

Линейное (векторное) пространство — это множество элементов (векторов), над которым определены:

- операция сложения векторов;
- операция умножения вектора на число,

удовлетворяющие определённым аксиомам.

Обычно рассматриваются пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

2. Аксиомы линейного пространства

Пусть V — множество векторов, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$,
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.1. Аксиомы сложения

1. **Замкнутость:**

$$\vec{u} + \vec{v} \in V$$

2. **Коммутативность:**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

3. **Ассоциативность:**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

4. **Нулевой вектор:**
   Существует $\vec{0} \in V$, что

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

5. **Противоположный вектор:**
   Для каждого $\vec{u}$ существует $-\vec{u}$, что

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

2.2. Аксиомы умножения на число

6. **Замкнутость:**

$$\alpha\vec{u} \in V$$

7. **Дистрибутивность по вектору:**

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

8. **Дистрибутивность по числу:**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

9. **Ассоциативность:**

$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$$

10. **Единица:**

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

3. Примеры линейных пространств

1. $\mathbb{R}^n$ — пространство n-мерных векторов
2. Множество всех векторов на плоскости или в пространстве
3. Пространство многочленов степени $\leq n$
4. Пространство матриц размера $m \times n$
5. Пространство непрерывных функций на отрезке

4. Линейная комбинация векторов

Векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ образуют линейную комбинацию:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k$$

5. Линейная независимость векторов

5.1. Определение

Векторы $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ **линейно независимы**, если:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

возможно **только при**

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Если существует нетривиальная комбинация, дающая ноль, то векторы **линейно зависимы**.

6. Геометрический смысл

- В $\mathbb{R}^2$:
  - два вектора независимы $\leftrightarrow$ неколлинеарны
- В $\mathbb{R}^3$:
  - три вектора независимы $\leftrightarrow$ некомпланарны
- В пространстве размерности n:
  - не более n линейно независимых векторов

7. Итог

- Линейное пространство задаётся аксиомами
- Основные примеры: $\mathbb{R}^n$, функции, матрицы, многочлены
- Линейная независимость — ключевое понятие для базиса и размерности
- Независимые векторы не выражаются через другие

Экзаменационный краткий ответ

> Линейное пространство — множество с операциями сложения и умножения на число, удовлетворяющими аксиомам. Линейная независимость означает отсутствие нетривиальных линейных комбинаций.

21. Базис линейного пространства.

Координаты вектора. Разложение по системе векторов. Размерность

1. Базис линейного пространства

Базис линейного пространства V — это система векторов

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

которая удовлетворяет двум условиям:

1. **Линейная независимость**
2. **Порождающее свойство** — любой вектор пространства V представим в виде линейной комбинации векторов базиса

2. Координаты вектора

Если $\vec{v} \in V$ и базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ задан, то существует **единственное разложение**:

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются **координатами вектора** $\vec{v}$ в данном базисе.

3. Разложение вектора по системе векторов

Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$.

3.1. Условие разложения

Вектор $\vec{v}$ разлагается по системе $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$, если существуют числа α_i, такие что:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_k\vec{a}_k$$

3.2. Единственность разложения

- Если система **линейно независима** → разложение **единственно**
- Если система **линейно зависима** → разложение либо не существует, либо не единственно

4. Размерность линейного пространства

Размерность линейного пространства V — это число векторов в любом его базисе.

Обозначение:

$$\dim V = n$$

5. Основные теоремы о размерности

5.1. Теорема о числе векторов базиса

Любые два базиса одного и того же пространства содержат **одинаковое число векторов**.

5.2. Теорема о дополнении до базиса

Любую линейно независимую систему векторов можно **дополнить до базиса**.

5.3. Теорема о порождающей системе

Любая порождающая система содержит **базис** пространства.

6. Примеры

1. $\mathbb{R}^2$:

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2, \quad \text{базис } \{(1,0),(0,1)\}$$

2. $\mathbb{R}^3$:

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3, \quad \text{базис } \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

3. Пространство многочленов степени ≤ 2:

$$\dim = 3, \quad \{1, x, x^2\}$$

7. Итог

- Базис — минимальная порождающая линейно независимая система
- Каждый вектор имеет **единственные координаты** в заданном базисе
- Размерность равна числу векторов базиса
- Линейная независимость ↔ единственность разложения

Экзаменационный краткий ответ

> Базис — это минимальная порождающая и линейно независимая система. Размерность равна числу векторов в базисе.

22. Подпространство линейного

пространства

1. Определение

Подпространство линейного пространства V — это непустое подмножество $W \subset V$, которое само является линейным пространством
относительно тех же операций сложения и умножения на число.

2. Критерий подпространства

Подмножество $W \subset V$ является подпространством тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1. **Содержит нулевой вектор:**

$$\vec{0} \in W$$

2. **Замкнутость относительно сложения:**

$$\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$$

3. **Замкнутость относительно умножения на число:**

$$\alpha \in \mathbb{R}, \ \vec{u} \in W \Rightarrow \alpha\vec{u} \in W$$

> ⚠️ Достаточно проверить **только эти три условия** — остальные аксиомы наследуются от V.

3. Эквивалентная формулировка

Подмножество W является подпространством V тогда и только тогда, когда:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in W, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$$

4. Примеры подпространств

4.1. В пространстве $\mathbb{R}^n$

- $\{\vec{0}\}$ — нулевое подпространство
- Всё пространство $\mathbb{R}^n$
- Любая прямая, проходящая через начало координат
- Любая плоскость, проходящая через начало координат

4.2. В функциональных пространствах

- Множество всех многочленов степени $\leq n$
- Множество всех непрерывных функций на отрезке
- Множество всех решений однородной СЛУ

4.3. В пространстве матриц

- Множество симметричных матриц
- Множество диагональных матриц
- Множество матриц с нулевой суммой элементов

5. Примеры НЕ подпространств

- Прямая, **не проходящая через начало координат**
- Множество векторов фиксированной длины
- Множество матриц с $\det = 1$

(нарушается замкнутость или отсутствие нулевого вектора)

6. Порожденное подпространство

Подпространство, порождённое системой векторов $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$:

$$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Это **наименьшее подпространство**, содержащее все $\vec{v}_i$.

7. Размерность подпространства

Размерность подпространства равна числу векторов в его базисе:

$$\dim W \leq \dim V$$

8. Итог

- Подпространство — это подмножество, являющееся линейным пространством
- Проверяется тремя условиями: $0 \in W$, замкнутость по сложению и умножению
- Подпространства часто возникают как множества решений однородных систем
- Размерность подпространства не превосходит размерность всего пространства

Экзаменационный краткий ответ

> Подпространство — непустое подмножество линейного пространства, замкнутое относительно линейных операций.

23. Переход к новому базису

Матрица перехода

Пусть старый базис $\{\vec{e}_i\}$, новый — $\{\vec{e}'_i\}$.

Матрица перехода C состоит из координат новых базисных векторов в старом базисе.

Связь координат

$$X = CX' \quad \text{или} \quad X' = C^{-1}X$$

Экзаменационный краткий ответ

> Переход к новому базису осуществляется с помощью матрицы перехода, связывающей координаты векторов в разных базисах.

24. Евклидово пространство.

Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника

1. Определение

Евклидово пространство — это линейное пространство V с **скалярным произведением**, обладающее следующими свойствами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$$

Скалярное произведение удовлетворяет:

1. **Коммутативность:**
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. **Линейность по первому аргументу:**
   $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3. **Однородность:**
   $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. **Положительная определённость:**
   $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = 0$

2. Длина вектора (норма)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

3. Направляющий угол и косинус

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Неравенство Коши–Буняковского

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V$:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

- Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Геометрический смысл:

$|\cos\varphi| \leq 1$

5. Неравенство треугольника

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V$:

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

- Равенство выполняется, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково (коллинеарны и одно направление).

Доказательство через Коши–Буняковского:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

6. Пример

Пусть $\vec{a} = (1, 2, 2), \vec{b} = (2, -1, 1)$

1. Скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 2$$

2. Длины:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = 3$$

3. Проверка Коши–Буняковского:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 2 \le 3\cdot 3 = 9 \quad ✔$$

4. Проверка неравенства треугольника:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |(3,1,3)| = \sqrt{3^2+1^2+3^2} = \sqrt{19} \approx 4.36$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = 3 + 3 = 6$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad ✔$$

7. Итог

- Евклидово пространство — это линейное пространство со скалярным произведением
- Неравенство Коши–Буняковского: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$
- Неравенство треугольника: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- Основные следствия: угол между векторами, длина суммы, проверка коллинеарности

Экзаменационный краткий ответ

> Евклидово пространство — линейное пространство со скалярным произведением. В нём выполняются неравенства Коши–Буняковского и треугольника.

25. Норма евклидова пространства.

Угол между векторами

1. Евклидово пространство

Евклидово пространство — это линейное пространство V с определённым **скалярным произведением** $\vec{a} \cdot \vec{b}$, которое удовлетворяет аксиомам:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность)
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивность)
3. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (однородность)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причём $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = 0$ (положительная определённость)

2. Норма (длина) вектора

Норма вектора $\vec{a}$ в евклидовом пространстве — это его длина:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Свойства нормы:

1. $|\vec{a}| \geq 0$, $|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = 0$
2. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
3. **Неравенство треугольника:** $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

3. Угол между векторами

Косинус угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

- $\varphi \in [0, \pi]$
- Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ (векторы перпендикулярны)

Свойства:

1. $|\cos\varphi| \leq 1$ (**неравенство Коши–Буняковского**)
2. Векторы коллинеарны, если $|\cos\varphi| = 1$

4. Пример

Пусть:

$$\vec{a} = (1, 2, 2), \quad \vec{b} = (2, -1, 1)$$

1. Скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2$$

2. Длины:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3$$

3. Косинус угла:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

4. Угол:

$$\varphi = \arccos\frac{2}{9} \approx 77.1^\circ$$

5. Итог

- **Норма** = длина вектора
- **Косинус угла** = отношение скалярного произведения к произведению длин векторов
- Основные следствия: перпендикулярность, коллинеарность, неравенство треугольника

Экзаменационный краткий ответ

> Норма в евклидовом пространстве определяется через скалярное произведение, а угол между векторами — через отношение скалярного произведения к произведению норм.

26. Ортонормированный базис.

Ортогонализация

Ортонормированный базис. Ортогонализация

1. Ортогональные и ортонормированные векторы

1.1. Ортогональные векторы

В евклидовом пространстве векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

1.2. Ортонормированные векторы

Система векторов называется **ортонормированной**, если:

1. Векторы попарно ортогональны
2. Каждый вектор имеет единичную длину

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2. Ортонормированный базис

Ортонормированный базис — это базис линейного пространства, состоящий из ортонормированных векторов.

Свойства:

1. Координаты вектора находятся по формулам:

$$x_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

2. Длина вектора:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

3. Скалярное произведение:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

3. Ортогонализация (процесс Грама–Шмидта)

3.1. Постановка задачи

Дана линейно независимая система векторов:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$$

Требуется построить ортонормированный базис.

3.2. Алгоритм Грама–Шмидта

Шаг 1. Первый вектор

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$$

Шаг 2. Второй вектор

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1$$

Шаг 3. k-й вектор

$$\vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \vec{b}_i$$

Получаем систему **ортогональных** векторов $\vec{b}_i$.

3.3. Нормировка

Для получения ортонормированного базиса:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$$

4. Пример ортогонализации

Пусть:

$$\vec{a}_1 = (1,1,0), \quad \vec{a}_2 = (1,0,1)$$

1. $\vec{b}_1 = (1,1,0)$
2. $$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}(1,1,0) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$
3. Нормировка:

$$|\vec{b}_1| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \quad \vec{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

5. Геометрический смысл

- Ортогонализация устраняет линейную зависимость
- Полученный базис удобен для вычислений
- В ортонормированном базисе формулы максимально просты

6. Итог

- Ортонормированный базис — базис из взаимно перпендикулярных единичных векторов
- В таком базисе координаты и скалярное произведение считаются просто
- Метод Грама–Шмидта позволяет получить ортонормированный базис из любой ЛНЗ системы

Экзаменационный краткий ответ

> Ортонормированный базис состоит из взаимно перпендикулярных единичных векторов и может быть получен методом Грама–Шмидта.

27. Системы координат на плоскости.

Системы координат на плоскости

1. Прямоугольная система координат

- На плоскости Oxy выбираются:
  - Начало координат O
  - Оси x и y (обычно взаимно перпендикулярные)
  - Положительное направление осей
- Любая точка P задаётся **координатами** (x, y):

$$P = (x, y)$$

- Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. Преобразования системы координат

2.1. Параллельный перенос

- Сдвиг начала координат на (h, k):

$$x' = x - h, \quad y' = y - k$$

2.2. Поворот осей

- Поворот на угол α против часовой стрелки:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

2.3. Прямоугольные и полярные координаты

- Полярные координаты (r, θ):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и точка P делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$ (со стороны A):

$$P = \frac{\mu A + \lambda B}{\lambda + \mu} \quad \text{координатно:}$$

$$x_P = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \quad y_P = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}$$

- Частный случай: середина отрезка ($\lambda = \mu = 1$):

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

4. Уравнения линий на плоскости

4.1. Прямая

Общее уравнение:

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0)$$

Уравнение с угловым коэффициентом k:

$$y = kx + b$$

где $k = \tan\varphi$, φ — угол наклона прямой к оси x.

Уравнение через две точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

4.2. Окружность

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- Центр: (a, b), радиус: R

4.3. Парабола (фокус-директриса)

В каноническом виде (ось параллельна оси x):

$$y^2 = 2px \quad \text{или} \quad x^2 = 2py$$

4.4. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4.5. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

5. Итог

- На плоскости можно выбрать разные системы координат (прямоугольные, полярные)
- Преобразования осей включают сдвиг и поворот
- Точку на отрезке легко найти через деление отрезка в данном отношении
- Уравнения линий и кривых позволяют аналитически описывать геометрию на плоскости

Экзаменационный краткий ответ

> Преобразования координат включают перенос и поворот осей. Координаты точки деления отрезка находятся по формуле взвешенного среднего.

28. Уравнение прямой на плоскости.

Все виды уравнений. Основные задачи

Прямая на плоскости. Виды уравнений и переходы

1. Прямая на плоскости

Прямая — это геометрическое место точек, удовлетворяющее определённому условию линейной зависимости координат.

На плоскости прямая задаётся разными видами уравнений.

2. Основные виды уравнений прямой

2.1. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0)$$

- Определяет прямую через любые два вектора (или точку и направление)
- Все остальные виды уравнений можно получить из общего

2.2. Уравнение с угловым коэффициентом (наклонное)

$$y = kx + b$$

- k — угловой коэффициент (наклон прямой к оси x): $k = \tan\varphi$
- b — ордината точки пересечения с осью y

Переход из общего уравнения:

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \quad B \neq 0$$

2.3. Уравнение через точку и направление

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

- Прямая проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k
- Частный случай: вертикальная прямая $x = x_0$

2.4. Уравнение через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

- Прямая проходит через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$
- Если $x_1 = x_2$ → вертикальная прямая $x = x_1$

2.5. Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

- (l, m) — направляющий вектор прямой
- Переход: коэффициенты общего уравнения $\leftrightarrow$ направляющий вектор

3. Переходы между видами уравнений

Из	В	Формула / Примечание
Общее	Наклонное	$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, B \neq 0$
Наклонное	Общее	$kx - y + b = 0$
Две точки	Наклонное	$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, b = y_1 - kx_1$
Точка + направл. вектор	Каноническое	$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$
Каноническое	Общее	$m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$

4. Основные задачи на прямую

1. **Найти уравнение прямой, проходящей через:**
   - две точки
   - точку с заданным направлением
2. **Найти точку пересечения двух прямых**

   Решение системы уравнений прямых
3. **Угол между прямыми:**

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

4. **Расстояние от точки до прямой:**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

5. **Проверка параллельности и перпендикулярности:**
   - Параллельны: $k_1 = k_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
   - Перпендикулярны: $k_1 k_2 = -1$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

5. Итог

- Прямую можно задать разными уравнениями: общее, наклонное, через точку, две точки, каноническое
- Переходы между видами выполняются через простые формулы
- Основные задачи включают: нахождение уравнения, угла, точки пересечения, расстояния, проверки параллельности и перпендикулярности

Экзаменационный краткий ответ

> Прямая на плоскости задаётся различными уравнениями, которые легко переходят друг в друга и используются для решения геометрических задач.

29. Эллипс.

Вывод канонического уравнения и свойства

1. Определение

Эллипс — это геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна:

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

где:

- F_1 и F_2 — фокусы,
- $2a$ — большая ось (максимальное расстояние между точками эллипса).

2. Вывод канонического уравнения

1. Выберем координаты фокусов на оси x:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0)$$

2. Определим точку $M(x, y)$ на эллипсе:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

3. Возведём в квадрат, выразим y^2, а затем снова в квадрат, чтобы убрать корни.
   В итоге получаем **каноническое уравнение**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2$$

3. Свойства эллипса

3.1. Оси

- **Большая ось:** $2a$ вдоль оси x
- **Малая ось:** $2b$ вдоль оси y

3.2. Фокусы

- $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3.3. Экцентричность

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 < e < 1$$

3.4. Симметрия

- Симметричен относительно осей Ox, Oy и начала координат.

3.5. Сечения и график

- Сечения с прямыми параллельными осям — хорды эллипса.
- Эллипс замкнутый, гладкий, без углов.

3.6. Специальные точки

- Вершины на большой оси: $(\pm a, 0)$
- Вершины на малой оси: $(0, \pm b)$

4. Каноническая форма для произвольного расположения

Если большая ось вдоль оси y:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b$$

Если центр в точке (x_0, y_0):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

5. Итог

- Эллипс — замкнутая кривая второго порядка
- Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Основные параметры: a, b, c, e

- Фокусы и оси задают форму и ориентацию эллипса

Экзаменационный краткий ответ

> Эллипс — кривая второго порядка с каноническим уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

30. Гипербола.

Вывод канонического уравнения и свойства

1. Определение

Гипербола — это геометрическое место точек на плоскости, для которых **модуль разности расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) постоянен**:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

где:

- F_1 и F_2 — фокусы;
- $2a$ — расстояние между вершинами на оси, соединяющей фокусы (главная ось).

2. Вывод канонического уравнения

1. Выберем фокусы на оси x:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0)$$

2. Определим точку $M(x, y)$ на гиперболе:

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

3. Возведем в квадрат, затем упрощаем — получаем **каноническое уравнение**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2$$

3. Свойства гиперболы

3.1. Оси

- **Главная ось (transverse axis):** длина $2a$, соединяет вершины гиперболы.
- **Малая ось (conjugate axis):** длина $2b$, проходит через центр перпендикулярно главной оси (не пересекает кривую).

3.2. Центр

- Центр гиперболы находится в середине отрезка между вершинами (обычно начало координат).

3.3. Фокусы

- Расположены на главной оси: $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$
- Связь с вершинами: $c^2 = a^2 + b^2$

3.4. Асимптоты

- Уравнения асимптот:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

3.5. Симметрия

- Симметрична относительно главной и побочной осей, а также относительно центра.

3.6. Вершины

- На главной оси: $(\pm a, 0)$

4. Каноническая форма для разных ориентаций

- Если гипербола ориентирована вдоль оси y:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- Если центр в точке (x_0, y_0):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

5. Итог

- Гипербола — разомкнутая кривая второго порядка.
- Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Основные параметры: a, b, c
- Фокусы, асимптоты и вершины полностью определяют форму гиперболы.

Экзаменационный краткий ответ

> Гипербола — кривая второго порядка с разностью расстояний до фокусов, каноническое уравнение содержит разность квадратов.

31. Парабола.

Вывод канонического уравнения и свойства

1. Определение

Парабола — это геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до **фокуса** равно расстоянию до **директрисы**:

$$MF = d(M, \text{директриса})$$

где:

- F — фокус, точка в плоскости,
- директриса — прямая, перпендикулярная оси параболы.

2. Вывод канонического уравнения $y^2 = 2px$

1. Разместим параболу так, чтобы:
    - ось параболы направлена вдоль Ox,
    - вершина была в начале координат $O(0, 0)$,
    - фокус в точке $F(p/2, 0)$,
    - директриса — прямая $x = -p/2$.
2. Для точки $M(x, y)$ на параболе выполняется определение:

$$\text{Расстояние до фокуса} = \text{Расстояние до директрисы}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

3. Возводим обе части в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

4. Раскрываем скобки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

5. Приводим подобные члены:

$$y^2 - 2px = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2px$$

Это и есть **каноническое уравнение параболы** с осью Ox и вершиной в начале координат.

3. Свойства параболы $y^2 = 2px$

3.1. Вершина

- В начале координат: $V(0, 0)$

3.2. Фокус

- В точке $F(p/2, 0)$

3.3. Директриса

- Прямая $x = -p/2$

3.4. Фокальное расстояние

- Расстояние от вершины до фокуса: $p/2$

3.5. Симметрия

- Симметрична относительно **оси** Ox

3.6. Ось параболы

- Прямая, проходящая через вершину и фокус (ось параболы) — Ox

3.7. Направление ветвей

- $p > 0 \to$ ветви направлены вправо
- $p < 0 \to$ ветви направлены влево

4. Каноническая форма для произвольного положения

Если вершина в точке (x_0, y_0):

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Если парабола направлена вдоль Oy:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

5. Итог

- Парабола $y^2 = 2px$ — кривая второго порядка, разомкнутая.
- Каноническое уравнение получено из **определения через фокус и директрису**.
- Основные параметры: p (фокальное расстояние), вершина, фокус, директриса.
- Свойства: симметрия, ось, направление ветвей, фокальное расстояние.

Экзаменационный краткий ответ

> Парабола — кривая второго порядка, определяемая равенством расстояний до фокуса и директрисы.

32. Общее уравнение кривой второго порядка.

Приведение к каноническому виду

Общее уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Приведение к каноническому виду

1. устранение члена Bxy поворотом осей
2. перенос начала координат
3. классификация по знакам коэффициентов

Дискриминант конических сечений

1. Уравнение конического сечения

Общее уравнение кривой второго порядка в плоскости:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2. Дискриминант

Для определения типа кривой используют **дискриминант**

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

3. Смысл знака дискриминанта

Знак Δ	Тип конической кривой	Примечание
$\Delta < 0$	Эллипс	Может быть точка, если сечение вырождено
$\Delta = 0$	Парабола	Может быть прямая в вырожденном случае
$\Delta > 0$	Гипербола	Может быть пара пересекающихся прямых

4. Использование

1. Зная коэффициенты A, B, C, быстро определяем тип сечения.
2. Не требует вычисления канонической формы.
3. Применяется для:
   - анализа сечений квадрик плоскостью;
   - классификации кривых второго порядка в плоскости;
   - упрощения построений и графиков.

5. Пример

Уравнение:

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 + ... = 0$$

Вычисляем дискриминант:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$$

Вывод: сечение — **эллипс**.

> 🔷 Главное правило:
>
> - $\Delta < 0 \rightarrow$ эллипс

> - $\Delta = 0 \rightarrow$ парабола
> - $\Delta > 0 \rightarrow$ гипербола

Экзаменационный краткий ответ

> Кривая второго порядка приводится к каноническому виду с помощью поворота и переноса координат.

33. Плоскость в пространстве.

Все виды уравнений и переходы

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Геометрический смысл:

- $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости
- D определяет положение плоскости относительно начала координат

Частные случаи:

- $A = B = C = 0$ — не задаёт плоскость
- $D = 0$ — плоскость проходит через начало координат

2. Векторное уравнение плоскости

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Где:

- $\vec{r} = (x, y, z)$ — произвольная точка плоскости
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — известная точка плоскости
- $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормаль

Переход к общему:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Уравнение плоскости через точку и нормаль

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Используется, если известны:

- одна точка плоскости
- нормальный вектор

Раскрытием скобок получается **общее уравнение**.

4. Уравнение плоскости через три точки

Пусть заданы точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

После раскрытия определителя получается **общее уравнение плоскости**.

5. Параметрическое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$$

Где:

- $\vec{r}_0$ — точка плоскости
- $\vec{a}, \vec{b}$ — направляющие векторы ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$)
- s, t — параметры

Координатная форма:

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases}$$

Переход к общему:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

6. Нормальное уравнение плоскости

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

Где:

- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали
- p — расстояние от начала координат до плоскости

Получается из общего уравнения делением на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

7. Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Переход к общему:

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

8. Расстояние от точки до плоскости

Для плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

9. Угол между двумя плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

10. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$$

Экзаменационный краткий ответ

> Плоскость в пространстве задаётся общим, параметрическим или векторным уравнением.

34. Плоскость в пространстве.

Основные задачи

- расстояние от точки до плоскости
- угол между плоскостями

- условие параллельности и перпендикулярности

Экзаменационный краткий ответ

> Основные задачи решаются через нормальный вектор плоскости.

35. Прямая в пространстве.

Все виды уравнений. Основные задачи

1. Что такое прямая в пространстве

Прямая в пространстве определяется:

- одной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- направляющим вектором $\vec{v} = (l, m, n)$.

2. Виды уравнений прямой

2.1. Векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Где:

- $\vec{r} = (x, y, z)$ — произвольная точка прямой;
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка;
- $\vec{v} = (l, m, n)$ — направляющий вектор;
- $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Получается из векторного уравнения покоординатно.

2.3. Каноническое (симметрическое) уравнение

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Используется, если $l, m, n \neq 0$.

Получается из параметрического исключением параметра t.

2.4. Уравнение прямой через две точки

Даны точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

Направляющий вектор:

$$\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

Уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

2.5. Прямая как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Направляющий вектор:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

3. Переходы между уравнениями

Две точки
↓
Направляющий вектор
↓
Векторное уравнение
↓
Параметрическое
↓
Каноническое

Обратные переходы:

- каноническое → параметрическое (ввести параметр);
- параметрическое → векторное;
- из системы плоскостей → найти направляющий вектор.

4. Основные задачи

4.1. Проверка принадлежности точки прямой

Подставить координаты точки в параметрическое уравнение.
Если существует одно и то же значение t, точка лежит на прямой.

4.2. Нахождение направляющего вектора

- из параметрического уравнения — коэффициенты при t;
- по двум точкам — разность координат;

- как $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, если прямая — пересечение плоскостей.

4.3. Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

4.4. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$$

4.5. Расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{|A\vec{M} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

4.6. Параллельность прямых

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \iff \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$$

4.7. Перпендикулярность прямых

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

4.8. Пересечение прямой и плоскости

1. Записать параметрическое уравнение прямой;
2. Подставить в уравнение плоскости;
3. Найти параметр t;

4. Найти координаты точки пересечения.

4.9. Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$d = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

5. Кратко

- Прямая = **точка + направляющий вектор**
- Каноническое удобно для анализа
- Параметрическое — для вычислений
- Пересечение плоскостей — способ задать прямую

Экзаменационный краткий ответ

> Прямая в пространстве задаётся через точку и направляющий вектор.

36. Прямая и плоскость в пространстве.

Основные задачи

Прямая и плоскость в пространстве

Основные задачи и формулы

1. Прямая в пространстве

1.1. Задание прямой

Прямая задаётся:

- точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- направляющим вектором $\vec{v} = (l, m, n)$.

Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

1.2. Основные задачи для прямой

Проверка принадлежности точки прямой

Подставить координаты точки в параметрическое уравнение.
Если существует одно значение параметра t, точка принадлежит прямой.

Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

Параллельность прямых

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \iff \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$$

Перпендикулярность прямых

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{|\vec{AM} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

2. Плоскость в пространстве

2.1. Задание плоскости

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Вектор нормали:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

2.2. Основные задачи для плоскости

Проверка принадлежности точки плоскости

Подставить координаты точки в уравнение плоскости.
Если равенство выполняется, точка принадлежит плоскости.

Угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние между параллельными плоскостями

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Взаимное расположение прямой и плоскости

3.1. Прямая и плоскость параллельны

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

3.2. Прямая перпендикулярна плоскости

$$\vec{v} \parallel \vec{n}$$

3.3. Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$$

3.4. Точка пересечения прямой и плоскости

Алгоритм:

1. Записать параметрическое уравнение прямой;
2. Подставить в уравнение плоскости;

3. Найти параметр t;
4. Найти координаты точки пересечения.

4. Краткая схема решений

Прямая → направляющий вектор

Плоскость → вектор нормали

Скалярное произведение → углы и перпендикулярность

Векторное произведение → расстояния

5. Итог

- Прямая: ключевое — направляющий вектор
- Плоскость: ключевое — вектор нормали
- Взаимное положение определяется через их произведения

Экзаменационный краткий ответ

> Взаимное расположение прямой и плоскости определяется через их направляющий и нормальный векторы.

37. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Метод сечений

Основные поверхности

1. Поверхности второго порядка (квадрики)

Поверхность второго порядка в пространстве задаётся общим уравнением:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

После переноса и поворота системы координат это уравнение приводится к **каноническому виду**.

2. Канонические уравнения основных поверхностей

2.1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Свойства:

- замкнутая поверхность;
- все сечения — эллипсы;
- при $a = b = c$ — сфера.

2.2. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Центр: $O(0, 0, 0)$
Радиус: R

2.3. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Свойства:

- неограниченная поверхность;
- сечения при $z = \text{const}$ — эллипсы;
- при $x = \text{const}, y = \text{const}$ — гиперболы.

2.4. Двухполостный гиперболоид

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Свойства:

- состоит из двух несвязанных частей;
- сечения при $z = \text{const}$ — эллипсы;
- не пересекает плоскость $z = 0$.

2.5. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Свойства:

- поверхность «чашеобразной» формы;
- сечения при $z = \text{const}$ — эллипсы;
- сечения при $x = \text{const}, y = \text{const}$ — параболы.

2.6. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Свойства:

- седловидная поверхность;
- сечения при $z = \mathrm{const}$ — гиперболы;
- при $x = \pm y$ — прямые.

2.7. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Свойства:

- не зависит от z;
- образующие параллельны оси Oz.

2.8. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2.9. Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

2.10. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Свойства:

- вершина в начале координат;
- сечения при $z = \mathrm{const}$ — эллипсы;
- при $z = 0$ — вырожденное сечение.

3. Метод сечений

Метод сечений — основной способ исследования и построения поверхностей второго порядка.

Суть метода:

Рассматривают сечения поверхности плоскостями:

- $x = \text{const}$
- $y = \text{const}$
- $z = \text{const}$

И анализируют получающиеся кривые.

4. Алгоритм метода сечений

1. Зафиксировать одну переменную (например, $z = c$);
2. Подставить в уравнение поверхности;
3. Получить уравнение линии второго порядка;
4. Определить тип линии (эллипс, гипербола, парабола);
5. Повторить для других координатных плоскостей;
6. Сделать вывод о форме поверхности.

5. Примеры сечений

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- $z = 0$: эллипс
- $z = \pm c$: точка
- $z > |c|$: сечений нет

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- $z = \text{const}$: эллипсы
- $x = \text{const}$: гиперболы

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

- $z = \text{const} > 0$: эллипсы
- $x = \text{const}$: параболы

6. Таблица распознавания поверхностей

Уравнение	Поверхность
сумма квадратов = 1	эллипсоид
2 «+» и 1 «−» = 1	однополостный гиперболоид
1 «+» и 2 «−» = 1	двухполостный гиперболоид
квадраты = линейная переменная	параболоид
= 0	конус
нет одной переменной	цилиндр

7. Итог

- Канонические уравнения позволяют классифицировать поверхности;

- Метод сечений — главный инструмент анализа и построения;
- Тип поверхности определяется знаками и правой частью уравнения.

Экзаменационный краткий ответ

> Поверхности второго порядка изучаются по каноническим уравнениям и методу сечений.