

Подробное решение варианта (1–12)

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число

$$z = -1 + \sqrt{3}i$$

Шаг 1. Алгебраическая форма

$$z = x + iy, \quad x = -1, \quad y = \sqrt{3}$$

Шаг 2. Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Шаг 3. Аргумент

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Точка лежит во II четверти, поэтому

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

2. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^5}{2x^5 + 3x^2}$$

Шаг 1. Делим числитель и знаменатель на x^5

$$\frac{\frac{x^4}{x^5} - 3}{2 + \frac{3}{x^3}} = \frac{\frac{1}{x} - 3}{2 + \frac{3}{x^3}}$$

Шаг 2. Переход к пределу

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{3}{x^3} \rightarrow 0$$

Ответ

$$\boxed{-\frac{3}{2}}$$

3. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{5x^2}$$

Шаг 1. Эквивалентность

$$\ln(1 + u) \sim u, \quad u \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1 + 5x) \sim 5x$$

Шаг 2. Подстановка

$$\frac{5x}{5x^2} = \frac{1}{x}$$

Ответ

$$\boxed{+\infty}$$

4. Установить характер точки разрыва

$$y = \begin{cases} 1 - \cos x, & x > 0 \\ \cos^2 x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1 - \cos x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \cos^2 x = 1$$

Вывод

Односторонние пределы конечны, но не равны.

Ответ

разрыв первого рода (скачок)

5. Найти производную сложной функции

$$y = 5^{\operatorname{arctg}(x^3 - 2x)}$$

Шаг 1. Производная показательной функции

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

Шаг 2. Производная аргумента

$$u = \operatorname{arctg}(x^3 - 2x) \Rightarrow u' = \frac{3x^2 - 2}{1 + (x^3 - 2x)^2}$$

Ответ

$$y' = 5^{\operatorname{arctg}(x^3-2x)} \ln 5 \cdot \frac{3x^2 - 2}{1 + (x^3 - 2x)^2}$$

6. Найти производную неявной функции

$$\sin x + \sin y = x^2 - y^2$$

Шаг 1. Дифференцируем

$$\cos x + \cos y \cdot y' = 2x - 2y \cdot y'$$

Шаг 2. Собираем y'

$$y'(\cos y + 2y) = 2x - \cos x$$

Ответ

$$y' = \frac{2x - \cos x}{\cos y + 2y}$$

7. Найти второй дифференциал

$$y = \ln^2 x$$

Шаг 1. Первая производная

$$y' = \frac{2 \ln x}{x}$$

Шаг 2. Вторая производная

$$y'' = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

Ответ

$$d^2y = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} dx^2$$

8. Разложить по формуле Тейлора при $x_0 = 1$

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$$

Производные

$$P'(x) = 6x^2 - 8x + 1$$

$$P''(x) = 12x - 8$$

$$P'''(x) = 12$$

Значения в точке

$$P(1) = -1, \quad P'(1) = -1, \quad P''(1) = 4, \quad P'''(1) = 12$$

Разложение

$$P(x) = -1 - (x - 1) + 2(x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$$

9. Найти точку локального максимума

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$$

Первая производная

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Критические точки

$$x = -1, x = 3$$

Вторая производная

$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

Ответ

$$x = -1$$

10. Найти абсциссу точки перегиба

$$f(x) = 3x - 2x^3$$

$$f''(x) = -12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ответ

$$x = 0$$

11. Найти вертикальную асимптоту

$$y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 2}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Числитель при $x = 2 \neq 0$

Ответ

$$x = 2$$

12. Найти градиент

$$z = \sqrt{x - y^2}$$

Частные производные

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$$

В точке $(3, 1)$

$$\sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$$

Ответ

$$\nabla z(3, 1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$