1. Множества и операции над ними

1. Понятие множества

Множество — это совокупность объектов, называемых **элементами**.

Обозначения:

- $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A
- $a \notin A$ — элемент не принадлежит множеству A

2. Способы задания множества

1. **Перечислением элементов**:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

2. **С помощью свойства элементов**:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

3. **Графически** (диаграммы Эйлера–Венна)

3. Основные числовые множества

- $\mathbb{N}$ — натуральные числа
- $\mathbb{Z}$ — целые числа
- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа
- $\mathbb{R}$ — вещественные числа

Связь:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

4. Равенство множеств

Множества A и B равны, если:

$$A = B \iff (\forall x : \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

5. Подмножество

$$A \subset B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- $A \subset B$ – A содержится в B
- $A \subsetneq B$ – строгое подмножество

6. Операции над множествами

6.1. Объединение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

6.2. Пересечение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

6.3. Разность

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

6.4. Дополнение

Пусть U — универсальное множество:

$$\overline{A} = U \setminus A$$

7. Свойства операций над множествами

7.1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

7.2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

7.3. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

8. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

9. Пустое множество

- $\varnothing$ — пустое множество

- $\varnothing \subset A$ для любого множества A

10. Итог

- Множества задаются перечислением или свойством
- Основные операции: объединение, пересечение, разность, дополнение
- Законы де Моргана и свойства операций важны для преобразований
- Эта тема — база для пределов, функций и топологии

2. Числовые множества. Окрестности

1. Числовые множества

1.1. Основные числовые множества

- $\mathbb{N}$ — натуральные числа
- $\mathbb{Z}$ — целые числа
- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа
- $\mathbb{R}$ — вещественные числа

В математическом анализе основным является множество **вещественных чисел** $\mathbb{R}$.

2. Числовые промежутки

2.1. Основные виды промежутков

- **Открытый интервал**:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- **Закрытый отрезок**:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$$

- **Полуинтервалы**:

$$(a,b],\quad [a,b)$$

- **Бесконечные промежутки**:

$$(a,+\infty),\quad (-\infty,b],\quad \mathbb{R}$$

3. Окрестность точки

3.1. ε-окрестность точки

ε-окрестность точки $a\in\mathbb{R}$:

$$U_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-a|<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0$$

Геометрически:

$$U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$$

3.2. Проколотая окрестность

Проколотая ε-окрестность точки a:

$$\dot{U}_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<|x-a|<\varepsilon\}$$

Используется при определении **предела**.

4. Окрестности бесконечности

4.1. Окрестность $+\infty$

$$U_M(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>M\}$$

4.2. Окрестность $-\infty$

$$U_M(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < M\}$$

5. Внутренние, граничные и предельные точки

5.1. Внутренняя точка

Точка a — **внутренняя** для множества A, если:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(a) \subset A$$

5.2. Предельная точка

Точка a — **предельная точка** множества A, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \dot{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing$$

5.3. Граничная точка

Точка a — **граничная**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing \quad \text{и} \quad U_\varepsilon(a) \cap \overline{A} \neq \varnothing$$

6. Открытые и замкнутые множества

- **Открытое множество**: все точки внутренние
- **Замкнутое множество**: содержит все свои предельные точки

Примеры:

- (a, b) — открыто
- $[a, b]$ — замкнуто

7. Итог

- В матане работают в основном с $\mathbb{R}$
- Окрестность — базовое понятие для пределов и непрерывности
- Проколотая окрестность используется при определении предела
- Открытость и замкнутость определяются через окрестности

3. Логические операции и логические символы

Предикаты. Необходимые и достаточные условия

1. Логические высказывания

Высказывание — это утверждение, про которое можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Примеры:

- «2 — чётное число» (истинно)
- «x > 0» — не высказывание (зависит от x)

2. Логические операции

Пусть A и B — высказывания.

2.1. Отрицание

$$\neg A \quad (\text{не } A)$$

2.2. Конъюнкция (И)

$$A \wedge B$$

Истинно, если **оба** высказывания истинны.

2.3. Дизъюнкция (ИЛИ)

$$A \vee B$$

Истинно, если **хотя бы одно** из высказываний истинно.

2.4. Импликация

$$A \Rightarrow B$$

Читается: «если A, то B».

Ложно **только** в случае:

- A — истинно
- B — ложно

2.5. Эквиваленция

$$A \Leftrightarrow B$$

Истинно, если A и B имеют одинаковые значения истинности.

3. Логические символы

Символ	Значение
$\forall$	для всех

Символ	Значение
$\exists$	существует
$\Rightarrow$	следует
$\Leftrightarrow$	равносильно
$\neg$	не
$\wedge$	и
$\vee$	или

4. Предикат

Предикат — это логическая функция, зависящая от переменных.

Пример:

$$P(x):\ x > 0$$

- при $x = 3$: истинно
- при $x = -1$: ложно

4.1. Кванторы

- **Всеобщность**:

$$\forall x \in A:\ P(x)$$

- **Существование**:

$$\exists x \in A:\ P(x)$$

4.2. Отрицание кванторов

$$\neg(\forall x\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$$

5. Необходимое и достаточное условие

5.1. Необходимое условие

Условие A **необходимо** для B, если:

$$B \Rightarrow A$$

Без A выполнение B невозможно.

Пример:

> Делимость на 4 необходима для делимости на 8.

5.2. Достаточное условие

Условие A **достаточно** для B, если:

$$A \Rightarrow B$$

Если выполнено A, то гарантировано B.

Пример:

> Делимость на 8 достаточна для делимости на 4.

5.3. Необходимое и достаточное условие

Если:

$$A \Leftrightarrow B$$

то A является **необходимым и достаточным** для B.

Пример:

> Число чётное **тогда и только тогда**, когда делится на 2.

6. Типичные формулировки

Формулировка	Запись
тогда и только тогда	$\Leftrightarrow$
достаточно	$\Rightarrow$
необходимо	$\Leftarrow$

7. Итог

- Логические операции строят сложные высказывания
- Предикат — высказывание с переменной
- Кванторы уточняют область истинности
- Понимание необходимых и достаточных условий критично для доказательств

4. Определение функции. Числовые функции

1. Понятие функции

Функция (отображение) — это правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие **единственный** элемент множества Y.

Обозначение:

$$f : X \to Y$$

2. Область определения и область значений

- **Область определения**:

$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \text{ определена}\}$$

- **Множество значений**:

$$E(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in D(f) : y = f(x)\}$$

3. Числовая функция

Числовая функция — это функция, у которой:

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

То есть и аргумент, и значение — вещественные числа.

Пример:

$$f(x) = x^2, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

4. Способы задания функции

1. **Аналитически**:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

2. **Таблично**
3. **Графически**
4. **Словесно**

5. График функции

График функции — это множество точек плоскости:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

6. Основные виды числовых функций

6.1. Полиномиальные функции

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

6.2. Рациональные функции

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

6.3. Иррациональные функции

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

6.4. Тригонометрические функции

$$\sin x,\ \cos x,\ \tan x$$

6.5. Показательные и логарифмические функции

$$a^x,\ \ln x$$

7. Чётность и нечётность функции

- **Чётная функция**:

$$f(-x) = f(x)$$

- **Нечётная функция**:

$$f(-x) = -f(x)$$

8. Возрастающие и убывающие функции

- **Возрастает** на промежутке, если:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- **Убывает** на промежутке, если:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

9. Ограниченность функции

- **Ограничена сверху**, если:

$$\exists M : \ f(x) \leq M$$

- **Ограничена снизу**, если:

$$\exists m : \ f(x) \geq m$$

10. Итог

- Функция — это однозначное соответствие
- Числовая функция отображает $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$
- Важны область определения и множество значений

- Свойства функций используются при исследовании пределов и производных

5. Предел числовой последовательности

1. Числовая последовательность

Числовая последовательность — это функция

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad x_n = x(n)$$

2. Определение предела последовательности

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \, \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

3. Сходимость и расходимость

- Последовательность **сходится**, если её предел существует и конечен
- **Расходится**, если предела не существует или он бесконечен

4. Единственность предела

Теорема

Если последовательность имеет предел, то он **единственный**.

Идея доказательства

Пусть:

$$\lim x_n = a \quad \text{и} \quad \lim x_n = b$$

Тогда для достаточно больших n:

$$|a - b| \le |a - x_n| + |x_n - b|$$

Правая часть стремится к нулю, значит $a = b$.

5. Переход к пределу в неравенствах

Теорема

Если:

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N$$

и

$$\lim x_n = \lim z_n = a$$

то:

$$\lim y_n = a$$

Это **теорема о зажатой последовательности**.

Следствие

Если:

$$x_n \le y_n \quad \forall n \ge N$$

и пределы существуют, то:

$$\lim x_n \le \lim y_n$$

6. Свойства предела

Если:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b$$

то:

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$\lim(x_n y_n) = ab$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \ne 0$$

7. Типичные примеры

1. $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim x_n = 0$
2. $x_n = (-1)^n$ — предела не имеет
3. $x_n = \dfrac{2n+1}{n} \Rightarrow \lim x_n = 2$

8. Итог

- Предел определяется через ε–N
- Сходящаяся последовательность имеет единственный предел
- Неравенства можно «переносить» к пределу
- Теорема о зажатой последовательности — ключевая

6. Ограниченность сходящихся последовательностей

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Арифметические действия над последовательностями

1. Ограниченность последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если:

$$\exists M > 0 : \ |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Ограниченность сходящейся последовательности

Теорема

Всякая сходящаяся последовательность **ограничена**.

Идея доказательства

Если:

$$\lim x_n = a$$

то для $\varepsilon = 1$ существует N, такое что:

$$|x_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N$$

Следовательно:

$$|x_n| \leq |a| + 1$$

3. Бесконечно малая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

Примеры:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n^2}, \quad \sin\frac{1}{n}$$

4. Бесконечно большая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если:

$$\forall M > 0 \, \exists N : \; |x_n| > M \quad \forall n \geq N$$

Обозначение:

$$x_n \to \infty \quad \text{или} \quad x_n \to -\infty$$

Примеры:

$$n, \quad n^2, \quad \ln n$$

5. Связь между бесконечно малыми и большими

Если $x_n \to \infty$, то:

$$\frac{1}{x_n} \to 0$$

6. Арифметические действия над последовательностями

Пусть:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b$$

6.1. Сумма и разность

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

6.2. Произведение

$$\lim(x_n y_n) = ab$$

6.3. Частное

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

7. Произведение на бесконечно малую

Если:

- x_n — ограничена
- $y_n \to 0$

то:

$$x_n y_n \to 0$$

8. Типичные неопределённости

Вид	Результат
$0 \cdot \infty$	неопределённость
$\frac{0}{0}$	неопределённость
$\frac{\infty}{\infty}$	неопределённость

9. Итог

- Сходящиеся последовательности всегда ограничены
- Бесконечно малая ⇔ предел равен нулю

- Бесконечно большая ⇔ модуль неограниченно растёт
- Арифметические операции сохраняют предел при стандартных условиях

7. Монотонные последовательности.

Критерий существования предела. Подпоследовательности. Число е

1. Монотонные последовательности

Определение

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется:

- **возрастающей**, если

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- **строго возрастающей**, если

$$x_{n+1} > x_n$$

- **убывающей**, если

$$x_{n+1} \leq x_n$$

- **строго убывающей**, если

$$x_{n+1} < x_n$$

Монотонной называется последовательность, которая либо возрастает, либо убывает.

2. Критерий существования предела монотонной последовательности

Теорема (о монотонной последовательности)

Всякая **монотонная и ограниченная** последовательность **сходится**, то есть имеет конечный предел.

- возрастающая и ограниченная сверху — сходится;
- убывающая и ограниченная снизу — сходится.

Следствие

Если монотонная последовательность **не ограничена**, то:

- возрастающая $\to +\infty$;
- убывающая $\to -\infty$.

3. Подпоследовательности

Определение

Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$, если:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Свойства подпоследовательностей

1. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

то любая подпоследовательность также сходится к a.
2. Если существуют две подпоследовательности с разными пределами, то исходная последовательность **не имеет предела**.

4. Второй замечательный предел

Теорема

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

5. Определение числа e

Число e определяется как предел последовательности:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Численно:

$$e \approx 2{,}71828$$

6. Свойства последовательности, определяющей e

Последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

является:

- возрастающей;
- ограниченной сверху.

Следовательно, по теореме о монотонной последовательности, она сходится.

7. Эквивалентные формы второго замечательного предела

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

8. Итог

- Монотонность + ограниченность ⇒ существование предела
- Подпоследовательность наследует предел
- Число e вводится через второй замечательный предел
- Теорема используется при доказательствах пределов функций и рядов

8. Предел функции

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Односторонние пределы

1. Определение предела функции в точке

Определение (ε–δ)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Число A называется **пределом функции $f(x)$ при $x \to a$**, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

2. Геометрический смысл предела

Значения функции $f(x)$ можно сделать сколь угодно близкими к A, выбирая x достаточно близкими к a, но $x \neq a$.

3. Бесконечно малая функция

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Примеры:

$$x - a, \quad \sin(x-a), \quad \frac{1}{n}\ (\text{как функция от } n)$$

4. Бесконечно большая функция

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Обозначения:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad -\infty$$

Пример:

$$\frac{1}{(x-a)^2} \to \infty \quad \text{при } x \to a$$

5. Связь бесконечно малых и больших функций

Если:

$$f(x) \to 0 \quad \text{и} \quad f(x) \neq 0,$$

то:

$$\frac{1}{f(x)} \to \infty$$

6. Односторонние пределы

6.1. Правосторонний предел

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

6.2. Левосторонний предел

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A$$

если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

7. Связь односторонних и двустороннего предела

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \to a-} f(x) = A \\ \lim_{x \to a+} f(x) = A \end{cases}$$

8. Итог

- Предел функции определяется через ε–δ
- Бесконечно малая функция стремится к нулю
- Бесконечно большая функция неограниченно возрастает по модулю
- Двусторонний предел существует тогда и только тогда, когда существуют и равны односторонние пределы

9. Локальные свойства функций, имеющих предел

Свойства пределов при арифметических операциях

Теорема о сжатой функции

1. Локальные свойства функции

Если функция $f(x)$ имеет предел A в точке a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

то:

1. **Ограниченность функции в окрестности точки a**
   Существует проколотая окрестность $U_\delta(a)$, в которой:
   $$|f(x)| \leq M$$
2. **Сохранение знака в окрестности точки a**
   Если $A > 0$, то существует $\delta > 0$ такая, что:
   $$f(x) > 0 \quad \forall x \in U_\delta(a)$$

2. Арифметические свойства пределов

Пусть:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

Тогда:

1. **Сумма и разность**:
   $$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$
2. **Произведение**:
   $$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$
3. **Частное** (при $B \neq 0$):
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$
4. **Постоянный множитель**:
   $$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$$

3. Теорема о сжатой функции (теорема о зажатой функции)

Условие

Если для всех x из проколотой окрестности точки a выполняется:

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

и

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A$$

Вывод

То:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Пример применения

$$|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

Так как $\lim_{x \to 0} -|x| = 0$ и $\lim_{x \to 0} |x| = 0$,
по теореме о сжатой функции:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

4. Итог

- Функция с пределом **ограничена** и сохраняет знак в окрестности точки
- Арифметические операции сохраняют предел
- Теорема о сжатой функции позволяет вычислять пределы «зажатых» функций

- Эти свойства — базовый инструмент для вычисления пределов и доказательства теорем

10. Непрерывные функции

Определения непрерывности, свойства, замечательные пределы

1. Определение непрерывности функции в точке

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a, если выполняются три условия:

1. Функция определена в точке:

$$f(a) \text{ существует}$$

2. Существует предел функции в точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ существует}$$

3. Предел равен значению функции:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Обозначение:

$$f \text{ непрерывна в } a$$

2. Эквивалентные определения непрерывности

1. **ε–δ определение**:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

2. **Через последовательности** (Коши):

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

3. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть f и g непрерывны в точке a:

1. **Сумма и разность**:

$$f \pm g \text{ непрерывны в } a$$

2. **Произведение**:

$$f \cdot g \text{ непрерывно в } a$$

3. **Частное**:

$$\frac{f}{g} \text{ непрерывно в } a, \quad g(a) \neq 0$$

4. **Композиция**:

$$f(g(x)) \text{ непрерывна в } a, \text{ если } g \text{ непрерывна в } a \text{ и } f \text{ непрерывна в } g(a)$$

4. Основные типы разрывов

1. **Съёмный разрыв** — предел существует, но $f(a)$ не совпадает с ним или не определена
2. **Разрыв первого рода (прыжок)** — левый и правый пределы существуют, но не равны
3. **Разрыв второго рода** — хотя бы один из односторонних пределов не существует

5. Замечательные пределы

1. **Первый замечательный предел**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2. **Второй замечательный предел**:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

3. **Следствия для производных и пределов**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

6. Итог

- Непрерывность: функция определена, предел существует, и равен значению
- Свойства непрерывных функций позволяют комбинировать их через арифметические операции и композиции
- Замечательные пределы — базовый инструмент для вычисления пределов и производных

11. Сравнение бесконечно малых функций

Порядок малости. Эквивалентные бесконечно малые функции

1. Бесконечно малая функция

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой при $x \to a$**, если:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

Примеры:

$$x - a, \quad \sin(x - a), \quad \frac{1}{n} \quad (\text{последовательность как функция от } n)$$

2. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$. Тогда вводят **отношение порядка малости**:

2.1. Малость по сравнению

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to a)$$

Если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Читается: «α бесконечно малая по сравнению с β».

2.2. Сравнимые функции

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad (x \to a)$$

Если

$$\exists M > 0, \delta > 0 : |\alpha(x)| \leq M|\beta(x)| \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta$$

3. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, если:

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (x \to a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Примеры:

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$$

4. Применение эквивалентных бесконечно малых

- Упрощение пределов вида $\frac{\sin x}{x} \to 1$
- Вычисление сложных выражений через подстановку эквивалентных функций
- Исследование порядка малости для разложений в ряд Тейлора

5. Порядок малости

- Если $\alpha(x) = o(\beta(x))$, то α «меньше» β при $x \to a$
- Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то они имеют **одинаковый порядок малости**
- Если $\alpha(x) = O(\beta(x))$, то α не превышает β с точностью до константы

6. Итог

- Бесконечно малые функции → предел 0
- Малость сравнивается через отношение o и O
- Эквивалентность ($\sim$) позволяет заменять функцию на более простую при вычислении пределов

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса. Теорема Коши о промежуточных значениях

1. Непрерывность на отрезке

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна **в каждой точке** этого отрезка:

$$f \text{ непрерывна в каждой } x \in [a, b]$$

2. Теорема Вейерштрасса

Формулировка

Если функция $f(x)$ непрерывна на **замкнутом и ограниченном** отрезке $[a, b]$, то:

1. Функция **ограничена** на отрезке:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

2. Функция **достигает своих точных граней**, т.е. существуют точки $x_{\min}$ и $x_{\max}$, такие что:

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Следствие

- Любая непрерывная на отрезке функция имеет **наибольшее** и **наименьшее** значения.

3. Теорема Коши о промежуточных значениях

Формулировка

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$.
Тогда для любого числа C между $f(a)$ и $f(b)$ существует хотя бы одно $c \in (a, b)$, такое что:

$$f(c) = C$$

Геометрический смысл

График непрерывной функции на отрезке **непрерывно соединяет** точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, поэтому принимает **все значения между ними**.

Применение

- Доказательство существования корня уравнения $f(x) = 0$
- Решение уравнений численными методами (метод половинного деления)
- Теорема лежит в основе **теоремы Больцано**

4. Итог

- Непрерывная функция на отрезке **ограничена и достигает своих границ** (Вейерштрасс)
- Непрерывная функция **принимает все промежуточные значения** (Коши)
- Эти свойства являются фундаментом для анализа функций, решения уравнений и вычисления пределов

13. Монотонность и непрерывность обратных функций

Классификация точек разрыва

1. Обратная функция

Пусть функция f определена на множестве X и **монотонна**.
Тогда существует **обратная функция** f^{-1}, такая что:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in X$$

2. Монотонность обратной функции

Если f строго **возрастающая**, то f^{-1} тоже строго возрастает.
Если f строго **убывающая**, то f^{-1} строго убывает.

$$f \text{ строго монотонна } \Rightarrow f^{-1} \text{ строго монотонна}$$

3. Непрерывность обратной функции

Если f **непрерывна** на интервале I и строго монотонна,
то её обратная функция f^{-1} непрерывна на $f(I)$.

Геометрический смысл

- График f^{-1} получается отражением графика f относительно прямой $y = x$
- Непрерывность сохраняется при отражении

4. Классификация точек разрыва

Пусть функция f определена в окрестности точки a, кроме, возможно, самой точки a.

4.1. Съёмный разрыв

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ существует, но } f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x) \text{ или } f(a) \text{ не определена}$$

Пример:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0; \quad f(0) \text{ не определена}$$

4.2. Разрыв первого рода (прыжок)

- Левый и правый пределы существуют, но не равны:

$$\lim_{x\to a-} f(x) \neq \lim_{x\to a+} f(x)$$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

4.3. Разрыв второго рода

- Хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен

Пример:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

5. Итог

- Обратная функция существует только для **строго монотонной** функции

- Монотонность и непрерывность **сохраняются** для обратной функции
- Точки разрыва классифицируются на: **съёмные, первого рода (прыжок), второго рода**
- Эти классификации важны при исследовании функций и вычислении пределов

14. Производная функции

Вывод табличных производных. Правила дифференцирования. Сложные, обратные, неявные и параметрические функции. Логарифмическое дифференцирование

1. Определение производной

Производная функции $f(x)$ в точке $x = a$ определяется как предел:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Геометрический смысл: **касательная к графику функции в точке a.**

2. Табличные производные

Используя определение производной, получают:

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$

3. Основные правила дифференцирования

Пусть функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы:

1. **Сумма/разность**:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. **Произведение**:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

3. **Частное**:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

4. **Производная постоянного множителя**:

$$(cu)' = cu'$$

4. Дифференцирование сложных функций

Правило цепочки

Если $y = f(u)$, $u = g(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Пример:

$$y = \sin(x^2) \implies y' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

5. Дифференцирование обратных функций

Если $y = f(x)$ строго монотонна и дифференцируема, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad x = f^{-1}(y)$$

Пример:

$$y = \ln x \implies (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Дифференцирование неявных функций

Если функция задана неявно $F(x, y) = 0$, то:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}, \quad \text{при } \partial F/\partial y \neq 0$$

Пример:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies 2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}$$

7. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если $x = x(t), y = y(t)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad dx/dt \neq 0$$

Пример:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \implies \frac{dy}{dx} = -\tan t$$

8. Метод логарифмического дифференцирования

Используется для функций вида $y = u(x)^{v(x)}$:

1. Берём натуральный логарифм:

$$\ln y = \ln(u(x)^{v(x)}) = v(x) \ln u(x)$$

2. Дифференцируем обе части:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u} \implies y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

Пример:

$$y = x^x \implies \ln y = x \ln x \implies \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \implies y' = x^x(\ln x + 1)$$

9. Итог

- Производная через предел → касательная к графику
- Табличные производные выводятся через определение
- Правила: сумма, разность, произведение, частное, цепочка
- Сложные случаи: обратные, неявные, параметрические функции
- Логарифмическое дифференцирование удобно для степенных функций с переменными в основании и показателе

15. Вывод уравнения касательной и нормали к графику функции

1. Касательная к графику функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$.

1.1. Угловой коэффициент касательной

Угловой коэффициент касательной равен производной функции в этой точке:

$$k = f'(x_0)$$

1.2. Уравнение касательной

Используем точку $P(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, и форму $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Пример:
Для $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = 2x \implies f'(1) = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 1$$

2. Нормаль к графику функции

Нормаль — прямая, **перпендикулярная касательной** в точке $P(x_0, f(x_0))$.

2.1. Угловой коэффициент нормали

Если $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$, то угловой коэффициент нормали:

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0$$

2.2. Уравнение нормали

Используем точку $P(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Пример:
Для $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$:

$$f'(1) = 2 \implies k_{\text{норм}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

3. Особые случаи

1. Если $f'(x_0) = 0$, касательная горизонтальна:

$$y = f(x_0)$$

   Нормаль вертикальна:

$$x = x_0$$

2. Если $f'(x_0)$ бесконечна (вертикальная касательная):

- Касательная вертикальна: $x = x_0$
- Нормаль горизонтальна: $y = f(x_0)$

4. Итог

- Касательная: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- Нормаль: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
- Особые случаи: горизонтальная/вертикальная касательная
- Используется **производная функции в точке** как угловой коэффициент

16. Дифференциал и дифференцируемость функции

Приближённые вычисления с помощью дифференциала

1. Дифференцируемость функции

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если её приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можно представить в виде:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0$$

где A — число, не зависящее от Δx.

Связь с производной

Если функция дифференцируема в точке x_0, то она **имеет производную** в этой точке и:

$$A = f'(x_0)$$

👉 Дифференцируемость **сильнее**, чем существование производной, но в курсе матанализа:

$$\text{дифференцируемость} \iff \text{существование производной}$$

2. Дифференциал функции

Определение

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции:

$$dy = f'(x)\,dx$$

где:

- $dx = \Delta x$ — дифференциал аргумента,
- dy — дифференциал функции.

Геометрический смысл

Дифференциал — это приращение ординаты **касательной**, а не самой функции.

3. Свойства дифференциала

1. Линейность:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

2. Постоянный множитель:

$$d(cu) = c\,du$$

3. Произведение:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

4. Частное:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

4. Приближённые вычисления с помощью дифференциала

При малых Δx:

$$\Delta y \approx dy$$

то есть:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Пример

Найти приближённо:

$$\sqrt{4{,}04}$$

Берём:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4, \quad \Delta x = 0{,}04$$

Производная:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

Дифференциал:

$$dy = \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 = 0{,}01$$

Приближённое значение:

$$\sqrt{4{,}04} \approx 2 + 0{,}01 = 2{,}01$$

5. Итог

- Дифференцируемость означает линейную аппроксимацию приращения
- Дифференциал — главная линейная часть приращения функции
- Формула: $dy = f'(x)dx$
- Дифференциал используется для **приближённых вычислений**
- Основан на замене кривой касательной

17. Французские теоремы

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

Введение

Французские теоремы — это фундаментальные теоремы дифференциального исчисления, связывающие значения функции и её производной на отрезке.

К ним относятся:

1. Теорема Ролля
2. Теорема Лагранжа (о среднем значении)
3. Теорема Коши (обобщённая теорема Лагранжа)

1. Теорема Ролля

Формулировка

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. дифференцируема на интервале (a, b);
3. удовлетворяет условию $f(a) = f(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f'(c) = 0$$

Геометрический смысл

Если график функции начинается и заканчивается на одном уровне,
то внутри отрезка обязательно существует точка с **горизонтальной касательной**.

Пример

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{на } [-1, 1]$$

$$f(-1) = f(1) = 0$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 0$$

2. Теорема Лагранжа (теорема о среднем значении)

Формулировка

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на $[a, b]$;
2. дифференцируема на (a, b).

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Геометрический смысл

Существует точка, в которой касательная к графику функции **параллельна секущей**, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Частный случай

Если $f(a) = f(b)$, то теорема Лагранжа переходит в теорему Ролля.

3. Теорема Коши

Формулировка

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. непрерывны на $[a, b]$;
2. дифференцируемы на (a, b);
3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b).

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Замечание

Теорема Лагранжа является **частным случаем** теоремы Коши при:

$$g(x) = x$$

4. Значение французских теорем

Французские теоремы используются для:

- доказательства свойств функций;
- исследования монотонности;
- оценки приращений функций;
- вывода формулы Тейлора;
- доказательства неравенств.

5. Итог

- Теорема Ролля гарантирует существование точки с нулевой производной
- Теорема Лагранжа связывает среднюю и мгновенную скорость изменения
- Теорема Коши — обобщение теоремы Лагранжа
- Все три теоремы требуют **непрерывности на отрезке** и **дифференцируемости внутри**

18. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, и эта производная также дифференцируема.
Тогда можно определить **производные высших порядков**.

Определения

- **Вторая производная**:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

- **Третья производная**:

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

- **Производная n-го порядка**:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

2. Обозначения производных

Используются различные обозначения:

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

3. Геометрический и физический смысл

- Первая производная — скорость изменения функции
- Вторая производная — характеризует **выпуклость графика**
- В физике:
  - $x'(t)$ — скорость
  - $x''(t)$ — ускорение

4. Дифференциалы высших порядков

Первый дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx$$

Второй дифференциал

Дифференцируя dy, получаем:

$$d^2y = d(dy) = f''(x)\,dx^2$$

Дифференциал n-го порядка

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

⚠️ Это справедливо **только для функции одной переменной.**

5. Связь с формулой Тейлора

Производные высших порядков используются в формуле Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n)$$

6. Пример

Пусть:

$$f(x) = x^4$$

Тогда:

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

Соответствующие дифференциалы:

$$dy = 4x^3 dx$$

$$d^2y = 12x^2dx^2$$

7. Итог

- Производные высших порядков — это последовательное дифференцирование
- Дифференциалы высших порядков выражаются через производные
- Вторая производная отвечает за выпуклость и ускорение
- Эти понятия лежат в основе формулы Тейлора и исследования функций

19. Правило Лопиталя для вычисления пределов (с выводом)

1. Неопределённые формы

При вычислении пределов часто возникают **неопределённые формы**:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Правило Лопиталя применяется **только** для этих форм
(остальные формы сначала приводят к ним).

2. Правило Лопиталя (формулировка)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. дифференцируемы в проколотой окрестности точки a;
2. $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;
3. при $x \to a$ имеет место неопределённость:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

Если существует предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\text{конечный или } \pm\infty),$$

то существует и предел:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

3. Геометрический смысл

Отношение приращений функций вблизи точки a
равно отношению их **мгновенных скоростей изменения**,
то есть производных.

4. Вывод правила Лопиталя

Правило Лопиталя выводится из **теоремы Коши**.

Теорема Коши (напоминание)

Пусть функции f и g:

- непрерывны на $[a, x]$;
- дифференцируемы на (a, x);
- $g'(t) \neq 0$ на (a, x).

Тогда существует точка c между a и x, такая что:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Вывод (случай $0/0$)

Пусть:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Тогда можно считать:

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0$$

По теореме Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, x)$$

При $x \to a$ имеем $c \to a$, поэтому:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Если правый предел существует, то:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Случай ∞/∞

Доказывается аналогично, применяя теорему Коши
к функциям $1/f(x)$ и $1/g(x)$.

5. Применение правила Лопиталя

Пример

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Неопределённость $0/0$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

6. Важные замечания

- Правило Лопиталя **не является необходимым условием**, а только достаточным
- Его можно применять **несколько раз подряд**
- Нельзя применять без проверки неопределённости
- Не применяется напрямую к произведениям и суммам

7. Итог

- Правило Лопиталя используется для пределов вида $0/0$ и ∞/∞
- Основано на теореме Коши
- Сводит вычисление предела отношения функций к пределу отношения производных
- Требует строгого выполнения условий

20. Разложение функции по формуле Тейлора

Остаточный член в форме Лагранжа

1. Идея формулы Тейлора

Формула Тейлора позволяет представить функцию в окрестности точки
$x = a$ в виде **многочлена**, построенного по значениям производных функции в точке a.

2. Формула Тейлора с остаточным членом

Пусть функция $f(x)$ имеет производные до порядка $n+1$ включительно
в некоторой окрестности точки a.

Тогда для любого x из этой окрестности справедливо:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

где $R_n(x)$ — **остаточный член**.

3. Остаточный член в форме Лагранжа

Остаточный член имеет вид:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

где:

$$\xi \text{ — некоторая точка между } a \text{ и } x$$

4. Частные случаи

4.1. Формула Маклорена

Если $a = 0$, то формула Тейлора принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

4.2. Полином Тейлора

Часть без остаточного члена:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

5. Пример

Разложим $f(x) = e^x$ в точке $a = 0$ до второго порядка.

Производные:

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$$

Разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

Остаточный член:

$$R_2(x) = \frac{e^\xi}{3!}x^3, \quad \xi \in (0, x)$$

6. Геометрический и практический смысл

- Полином Тейлора — **наилучшее локальное приближение** функции
- Остаточный член оценивает **погрешность приближения**
- Используется в:
  - приближённых вычислениях;
  - доказательстве пределов;
  - исследовании функций.

7. Итог

- Формула Тейлора выражает функцию через её производные в точке
- Остаточный член в форме Лагранжа даёт точную оценку ошибки
- Формула Маклорена — частный случай при $a = 0$
- Основной инструмент анализа функций в окрестности точки

21. Экстремумы функции. Промежутки возрастания и убывания

Точки перегиба. Промежутки выпуклости и вогнутости

1. Возрастание и убывание функции

Определения

Функция $f(x)$ называется:

- **возрастающей** на промежутке, если при $x_1 < x_2$ выполняется

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **убывающей** на промежутке, если при $x_1 < x_2$ выполняется

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Признак монотонности

Если:

- $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция возрастает;
- $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция убывает;
- $f'(x) = 0$, то функция постоянна (на этом промежутке).

2. Экстремумы функции

Определение

Точка x_0 называется **точкой локального экстремума**, если существует окрестность точки x_0, в которой:

- $f(x_0) \geq f(x)$ — точка **максимума**;
- $f(x_0) \leq f(x)$ — точка **минимума**.

Необходимое условие экстремума

Если $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то:

$$f'(x_0) = 0$$

Достаточное условие экстремума (по первой производной)

Пусть $f'(x_0) = 0$.

- Если $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 — максимум;
- Если $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 — минимум;
- Если знак не меняется — экстремума нет.

Достаточное условие экстремума (по второй производной)

Если:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0$$

то:

- $f''(x_0) > 0$ — минимум;
- $f''(x_0) < 0$ — максимум.

3. Выпуклость и вогнутость функции

Определения

- Функция **выпукла вверх**, если её график лежит выше касательных;
- Функция **вогнута вниз**, если её график лежит ниже касательных.

Признак выпуклости

Если:

- $f''(x) > 0$ на промежутке, функция выпукла вверх;
- $f''(x) < 0$ на промежутке, функция вогнута вниз.

4. Точка перегиба

Определение

Точка x_0 называется **точкой перегиба**, если в ней функция меняет характер выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба

Если $f''(x_0)$ существует и функция имеет перегиб в точке x_0, то:

$$f''(x_0) = 0$$

Достаточное условие точки перегиба

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0,
то x_0 — точка перегиба.

5. Алгоритм исследования функции

1. Найти область определения
2. Найти первую производную $f'(x)$
3. Найти критические точки: $f'(x) = 0$
4. Определить промежутки возрастания и убывания
5. Найти экстремумы
6. Найти вторую производную $f''(x)$
7. Определить выпуклость и точки перегиба

6. Итог

- Экстремумы определяются через знак первой производной
- Возрастание и убывание — через знак $f'(x)$
- Выпуклость и вогнутость — через знак второй производной
- Точка перегиба — место смены выпуклости

22. Наименьшее и наибольшее значения функции. Асимптоты

Полное исследование функции и построение графика

1. Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение

Число M называется **наибольшим значением** функции $f(x)$ на множестве D, если:

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in D$$

и существует точка $x_M \in D$, такая что:

$$f(x_M) = M$$

Число m называется **наименьшим значением** функции $f(x)$ на множестве D, если:

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in D$$

и существует точка $x_m \in D$, такая что:

$$f(x_m) = m$$

Теорема Вейерштрасса

Если функция $f(x)$ **непрерывна** на замкнутом и ограниченном промежутке $[a, b]$,
то она **обязательно достигает** наибольшего и наименьшего значений на этом промежутке.

2. Асимптоты графика функции

2.1. Вертикальные асимптоты

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой, если:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

2.2. Горизонтальные асимптоты

Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой, если:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

2.3. Наклонные асимптоты

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой, если:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (kx + b)\big) = 0$$

где:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

3. Полное исследование функции

Алгоритм исследования функции

1. Найти **область определения** функции
2. Найти **точки разрыва**, исследовать непрерывность
3. Проверить **чётность/нечётность**, периодичность
4. Найти **пределы** на границах области определения
5. Найти **асимптоты**
6. Найти первую производную $f'(x)$
7. Определить промежутки **возрастания и убывания**
8. Найти **экстремумы**
9. Найти вторую производную $f''(x)$
10. Определить **выпуклость** и **точки перегиба**
11. Найти **наибольшее и наименьшее значения** (если применимо)
12. Построить **график функции**

4. Построение графика

При построении графика учитывают:

- характер монотонности;
- наличие экстремумов;
- выпуклость и перегибы;
- асимптоты;
- ключевые точки графика.

5. Итог

- Наибольшее и наименьшее значения достигаются на замкнутом отрезке
- Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные
- Полное исследование функции основано на производных и пределах
- График строится на основе всех полученных свойств

23. Область. Замкнутая область. Функция двух переменных

Геометрический смысл. Предел функции двух переменных

1. Область на плоскости

Определение

Областью $D \subset \mathbb{R}^2$ называется множество точек плоскости,
каждая точка которого имеет **окрестность, полностью лежащую в** D.

Примеры

- Круг без границы
- Полуплоскость
- Область, заданная неравенством $x^2 + y^2 < 1$

2. Замкнутая область

Определение

Область D называется **замкнутой**, если она содержит **все свои граничные точки**.

Пример

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

— замкнутая область (круг с границей).

3. Функция двух переменных

Определение

Функция двух переменных — это отображение:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Каждой точке $(x, y) \in D$ ставится в соответствие число:

$$z = f(x, y)$$

4. Геометрический смысл функции двух переменных

4.1. График функции

Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z = f(x, y)$$

Геометрически это **поверхность в пространстве**.

4.2. Линии уровня

Линии:

$$f(x, y) = C$$

называются **линиями уровня** функции.

Геометрически — это проекции сечений поверхности плоскостями $z = C$ на плоскость Oxy.

5. Предел функции двух переменных

Определение

Число A называется **пределом функции** $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), если:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

6. Особенности предела функции двух переменных

- Предел должен быть **одинаковым по всем направлениям**
- Если хотя бы по двум путям пределы различны — предела не существует
- Существование частных пределов **не гарантирует** существование общего предела

7. Пример отсутствия предела

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- При $y = 0$: предел равен 0
- При $y = x^2$: предел равен $1/2$

⇒ общего предела не существует.

8. Итог

- Область — множество точек с окрестностями внутри
- Замкнутая область содержит все граничные точки
- Функция двух переменных задаёт поверхность
- Предел определяется по расстоянию в $\mathbb{R}^2$
- Проверка по направлениям — важный инструмент

24. Частные производные первого и второго порядка и их свойства

1. Частные производные первого порядка

Определение

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0).

Частной производной по x называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Аналогично, **частная производная по y**:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Обозначения

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x$$

$$f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y$$

2. Геометрический смысл

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ — угловой коэффициент касательной к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ — угловой коэффициент касательной к сечению поверхности плоскостью $x = x_0$

3. Частные производные второго порядка

Определение

Если частные производные первого порядка существуют и дифференцируемы,
то определяются **частные производные второго порядка**:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

4. Теорема о равенстве смешанных производных

Формулировка (теорема Клеро–Шварца)

Если частные производные второго порядка f_{xy} и f_{yx}
непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то:

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}$$

5. Свойства частных производных

1. **Линейность**:

$$\frac{\partial}{\partial x}(af + bg) = af_x + bg_x$$

2. **Производная константы равна нулю**
3. **Производная суммы равна сумме производных**
4. **Аналогичны правилам дифференцирования функций одной переменной**

6. Важные замечания

- Существование частных производных **не гарантирует** непрерывность функции
- Существование частных производных **не гарантирует** дифференцируемость
- Непрерывность частных производных первого порядка ⇒ дифференцируемость

7. Пример

Пусть:

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$

Тогда:

$$f_x = 2xy$$

$$f_y = x^2 + 3y^2$$

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_{xy} = 2x, \quad f_{yx} = 2x$$

8. Итог

- Частные производные — скорость изменения по одному аргументу
- Производные второго порядка описывают кривизну поверхности
- Смешанные производные равны при условии непрерывности
- Важны для исследования экстремумов и формы поверхности

25. Нахождение экстремума функции двух переменных

1. Критические точки

Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка.

Критические точки — это точки (x_0, y_0), где:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

или хотя бы одна из производных не существует.

2. Необходимое условие экстремума

Если $f(x, y)$ имеет локальный максимум или минимум в точке (x_0, y_0) и частные производные существуют, то:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

3. Достаточное условие экстремума (через вторые производные)

Пусть функция имеет непрерывные вторые частные производные в критической точке (x_0, y_0)
.
Введём **гессиан**:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Критерий

1. $D > 0$ и $f_{xx} > 0 \to$ локальный минимум
2. $D > 0$ и $f_{xx} < 0 \to$ локальный максимум
3. $D < 0 \to$ точка седла (экстремума нет)
4. $D = 0 \to$ тест неинформативен

4. Алгоритм нахождения экстремума функции двух переменных

1. Найти область определения функции
2. Вычислить частные производные первого порядка f_x, f_y
3. Решить систему $f_x = 0, f_y = 0 \to$ критические точки
4. Вычислить вторые производные f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}
5. Найти гессиан $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ в каждой критической точке
6. Использовать критерий достаточного условия
7. Проверить границу области, если функция рассматривается на замкнутой области

5. Пример

Пусть:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

1. Частные производные:

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = x + 2y$$

2. Критическая точка:

$$2x + y = 0, \quad x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0$$

3. Вторые производные:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1$$

4. Гессиан:

$$D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

5. Так как $f_{xx} = 2 > 0$, то $(0, 0)$ — локальный **минимум**

6. Особенности

- Всегда проверять границы области, если она ограничена
- Гессиан показывает **характер критической точки**
- Если $D < 0$, точка называется **седловой**
- Если $D = 0$, критерий не даёт информации — нужно исследовать функцию дополнительно

7. Итог

- Критические точки — где частные производные равны нулю или не существуют
- Гессиан определяет локальный максимум, минимум или седло
- Алгоритм включает поиск критических точек и проверку границы области

26. Условный экстремум функции нескольких переменных

1. Определение условного экстремума

Пусть функция $f(x, y, \dots)$ задана на множестве точек, удовлетворяющих **условию(ям)**:

$$\varphi_1(x, y, \dots) = 0, \quad \varphi_2(x, y, \dots) = 0, \dots$$

Точка $(x_0, y_0, \dots)$ называется **точкой условного экстремума**,
если при малых изменениях переменных, **сохраняющих условия**, функция достигает локального максимума или минимума.

2. Метод множителей Лагранжа

Идея

Для поиска условного экстремума функции $f(x, y, \ldots)$ при ограничениях $\varphi_i(x, y, \ldots) = 0$ используют **множители Лагранжа** λ_i.

Основная система

Для функции двух переменных $f(x, y)$ с условием $\varphi(x, y) = 0$ строится система:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda\varphi_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda\varphi_y(x, y) \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

где:
λ — множитель Лагранжа.

Общее правило для n переменных и m условий

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1\nabla\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\nabla\varphi_m$$

и

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$$

3. Алгоритм поиска условного экстремума

1. Записать функцию $f(x, y, \ldots)$ и ограничения $\varphi_i(x, y, \ldots) = 0$
2. Составить систему Лагранжа:

$$\nabla f = \sum \lambda_i \nabla\varphi_i$$

3. Решить систему относительно $(x, y, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

4. Проверить характер точки (максимум, минимум) через **вторые производные** или **анализ функции на окрестности**

4. Пример

Найти экстремум функции:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

при ограничении:

$$x + y - 1 = 0$$

1. Составляем систему Лагранжа:

$$f_x = 2x = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = \lambda$$

$$f_y = 2y = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 2y = \lambda$$

$$x + y - 1 = 0$$

2. Решаем:

$$2x = 2y \Rightarrow x = y$$

$$x + x = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

3. Подставляем в $f(x, y)$:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

⇒ Точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — **минимум функции** на линии $x + y = 1$.

5. Замечания

- Условный экстремум ограничен заданной поверхностью или линией
- Метод Лагранжа сводит задачу к **решению системы уравнений**
- Для проверки типа экстремума (максимум/минимум) используют **вторые производные** на ограничении или анализ соседних точек

6. Итог

- Условный экстремум — экстремум функции с ограничением
- Метод Лагранжа — основной инструмент
- Алгоритм: градиент функции = линейная комбинация градиентов условий + решение системы

27. Полный дифференциал функции двух переменных

Применение к приближённым вычислениям

1. Определение полного дифференциала

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в окрестности точки (x_0, y_0).

Полным дифференциалом функции называют выражение:

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

где:

- dx и dy — малые приращения переменных x и y
- dz — линейная часть приращения функции

Геометрический смысл

- dz — приближение изменения функции на **касательной плоскости** в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- На графике функции $z = f(x, y)$ точка смещается на вектор (dx, dy, dz) вдоль касательной

2. Свойства полного дифференциала

1. **Линейность**:

$$d(af + bg) = a\,df + b\,dg$$

2. **Производная произведения**:

$$d(fg) = f\,dg + g\,df$$

3. **Производная частного**:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}, \quad g \neq 0$$

3. Приближённые вычисления с помощью полного дифференциала

Если приращения dx, dy малы, то:

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

- Это позволяет **приближённо вычислять значения функции** без прямого подстановления
- Используется для ошибок измерений и оценок погрешностей

4. Пример

Пусть:

$$f(x, y) = x^2 y$$

Точка: $(x_0, y_0) = (1, 2)$, малые приращения: $dx = 0.01, dy = -0.02$

1. Полные производные:

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

2. В точке $(1, 2)$:

$$f_x(1, 2) = 4, \quad f_y(1, 2) = 1$$

3. Полный дифференциал:

$$dz = 4 \cdot 0.01 + 1 \cdot (-0.02) = 0.04 - 0.02 = 0.02$$

⇒ Приближённое изменение функции: $\Delta f \approx 0.02$

5. Итог

- Полный дифференциал — линейная аппроксимация изменения функции
- Используется для приближённых вычислений и оценки погрешностей
- Важно помнить **формулу**:

$$dz = f_x \, dx + f_y \, dy$$

28. Дифференциалы высших порядков и формула Тейлора для функции двух переменных

1. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n.

Дифференциал первого порядка

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

Дифференциал второго порядка

$$d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}(dy)^2$$

Дифференциал третьего порядка

$$d^3z = f_{xxx}(dx)^3 + 3f_{xxy}(dx)^2dy + 3f_{xyy}dx(dy)^2 + f_{yyy}(dy)^3$$

- **Симметрия смешанных производных**: $f_{xy} = f_{yx}$ при непрерывности
- Дифференциал n-го порядка — это **многочлен из приращений** dx, dy с коэффициентами частных производных n-го порядка

2. Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $n + 1$ в окрестности точки (x_0, y_0).

Тогда для точки $(x_0 + dx, y_0 + dy)$:

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + dz + \frac{1}{2!}d^2z + \cdots + \frac{1}{n!}d^nz + R_n$$

где:

- $dz = f_xdx + f_ydy$ — полный дифференциал первого порядка
- $d^2z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}(dy)^2$ — второго порядка
- R_n — остаточный член (обычно в форме Лагранжа):

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i+j=n+1}\binom{n+1}{i}f^{(i,j)}(\xi, \eta)(dx)^i(dy)^j$$

для некоторой точки (ξ, η) на отрезке от (x_0, y_0) до $(x_0 + dx, y_0 + dy)$

3. Пример (второго порядка)

Пусть:

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$

В точке $(0, 0)$ малые приращения: dx, dy

1. Дифференциал первого порядка:

$$dz = f_x dx + f_y dy = (2xy)dx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$$

2. Дифференциал второго порядка:

$$d^2 z = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}(dy)^2 = 2y(dx)^2 + 2 \cdot 2xdxdy + 6y(dy)^2 = 0$$

3. Формула Тейлора до второго порядка:

$$f(dx, dy) \approx f(0, 0) + dz + \frac{1}{2}d^2 z = 0$$

В данном случае все дифференциалы нулевые — функция мала на малых приращениях, что совпадает с прямой проверкой: $f(dx, dy) = (dx)^2(dy) + (dy)^3$ малые величины третьего порядка.

4. Применение

- Приближённые вычисления значения функции
- Анализ поведения функции в окрестности точки
- Исследование экстремумов и кривизны поверхности

5. Итог

- Дифференциалы высших порядков описывают кривизну поверхности
- Формула Тейлора для функции двух переменных строит **полином с остаточным членом**, аналогично функции одной переменной
- Основа для **приближённых вычислений и анализа функции в точке**

29. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Односторонние и двухсторонние поверхности

1. Поверхность в пространстве

Поверхность — это множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению:

$$F(x, y, z) = 0$$

или заданных параметрически:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

- **Односторонняя поверхность** — поверхность, у которой нельзя непрерывно задать нормаль во всех точках (например, лента Мёбиуса)
- **Двухсторонняя поверхность** — поверхность с непрерывно определённой нормалью (например, сфера, плоскость)

2. Касательная плоскость к поверхности

2.1. Поверхность в явном виде $z = f(x, y)$

Касательная плоскость в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- f_x, f_y — частные производные в точке

2.2. Поверхность в неявном виде $F(x, y, z) = 0$

Касательная плоскость в точке (x_0, y_0, z_0):

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

где:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

3. Нормаль к поверхности

3.1. Поверхность $z = f(x, y)$

Вектор нормали к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\mathbf{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{-f_x} = \frac{y - y_0}{-f_y} = \frac{z - z_0}{1}$$

3.2. Поверхность $F(x, y, z) = 0$

Вектор нормали:

$$\mathbf{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = (F_x, F_y, F_z)$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}$$

4. Односторонние и двухсторонние поверхности

- **Двухсторонние поверхности**: нормаль можно выбрать непрерывной на всей поверхности (например, сфера, цилиндр)
- **Односторонние поверхности**: нормаль нельзя непрерывно выбрать (например, лента Мёбиуса)

5. Итог

- Касательная плоскость: линейная аппроксимация поверхности в точке
- Нормаль: вектор перпендикулярный поверхности
- Различие односторонней и двухсторонней поверхности важно при определении направления нормали

Скалярное поле, градиент, производная по направлению

1. Скалярное поле

Скалярное поле — это функция, которая каждой точке пространства (x, y, z) ставит в соответствие **число**:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \text{scalar}$$

- В двумерном случае: $f(x, y)$ — скалярное поле на плоскости
- Примеры: температура в комнате, давление, высота поверхности

2. Градиент скалярного поля

Определение

Градиент функции $f(x, y, z)$ — вектор, составленный из частных производных функции:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- Градиент указывает направление **наибольшего возрастания функции**
- Модуль градиента $|\nabla f|$ — **скорость наибольшего роста** функции

Геометрический смысл

- Вектор градиента перпендикулярен **линии уровня** в 2D или **поверхности уровня** в 3D
- Направление градиента показывает, куда функция растет быстрее всего

3. Производная функции по направлению

Определение

Производная функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению единичного вектора $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$:

$$D_{\mathbf{l}}f(M_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hl_x, y_0 + hl_y, z_0 + hl_z) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Формула через градиент

$$D_{\mathbf{l}}f = \nabla f \cdot \mathbf{l} = f_x l_x + f_y l_y + f_z l_z$$

- Максимальное значение производной по направлению: $|\nabla f|$
- Достигается, когда $\mathbf{l}$ совпадает с направлением градиента
- Минимальное значение: $-|\nabla f|$ (противоположное направление)

4. Пример

Пусть:

$$f(x, y) = x^2 y + y^3$$

1. Градиент:

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$$

2. Производная по направлению единичного вектора $\mathbf{l} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ в точке $(1, 1)$:

$$D_{\mathbf{l}}f = \nabla f \cdot \mathbf{l} = (2 \cdot 1 \cdot 1, 1 + 3 \cdot 1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2, 4) \cdot (0.707, 0.707)$$

$$D_{\mathbf{l}}f \approx 2 \cdot 0.707 + 4 \cdot 0.707 \approx 4.242$$

5. Итог

- **Скалярное поле** — функция, присваивающая каждой точке число
- **Градиент** — вектор наибольшего возрастания
- **Производная по направлению** — скорость изменения функции в данном направлении
- Связь: $D_{\mathbf{l}}f = \nabla f \cdot \mathbf{l}$

31. Комплексные числа: алгебраическая и тригонометрическая формы. Геометрия. Области на комплексной плоскости

1. Определение комплексного числа

Комплексное число z — это число вида:

$$z = x + iy$$

где:

- $x, y \in \mathbb{R}$
- $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица
- x — действительная часть ($\Re z$)
- y — мнимая часть ($\Im z$)

2. Алгебраическая форма

$$z = x + iy$$

Основные арифметические действия

1. **Сложение / вычитание**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

2. **Умножение**

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3. **Деление**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0$$

4. **Сопряжение**

$$\bar{z} = x - iy$$

5. **Модуль**

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. Тригонометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль числа
- $\varphi = \arg(z)$ — аргумент числа ($\tan\varphi = y/x$)

Основные операции

1. **Умножение**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

2. **Деление**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

3. **Возведение в степень (формула Муавра)**

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

4. **Извлечение корней**

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

4. Геометрическая трактовка

- Комплексные числа изображаются на **комплексной плоскости** (Аргандова плоскость):
  - Ось абсцисс — действительная часть ($x = \Re z$)
  - Ось ординат — мнимая часть ($y = \Im z$)
- Модуль $r = |z|$ — расстояние от начала координат до точки z
- Аргумент φ — угол с положительной осью x
- **Сложение**: геометрически — **векторная сумма**
- **Умножение**: масштабирование по модулю и поворот на аргумент

5. Задание областей на комплексной плоскости

1. **Модуль**

$$|z| \leq R \quad \Rightarrow \text{круг радиуса } R$$

2. **Действительная часть**

$$\Re z \geq 0 \quad \Rightarrow \text{правая полуплоскость}$$

3. **Мнимая часть**

$$\Im z \leq 1 \quad \Rightarrow \text{нижняя полуплоскость с границей } y = 1$$

4. **Комбинации**

$$|z - z_0| \leq R, \quad \Re z > 0, \quad \Im z < 0$$

— сдвинутый круг в первой или четвертой четверти

6. Итог

- **Алгебраическая форма** — удобна для сложения и вычитания
- **Тригонометрическая форма** — удобна для умножения, деления, возведения в степень

- **Геометрическая интерпретация** позволяет наглядно понимать операции и строить области на комплексной плоскости