

Стабілізація нелінійних систем є однією з найбільш цікавих та важливих задач теорії керування. Не дивлячись на великі досягнення останніх десятиліть ця задача досі не розв'язана в загальному випадку. Особливий інтерес викликають системи нестабілізовані за першим наближенням. Один з найбільш універсальних методів стабілізації нелінійних систем є метод зворотнього ходу (backstepping в англійській літературі).

Метод зворотнього ходу - це рекурсивна процедура, в якій поєднані задачі пошуку функції Ляпунова та відповідного закону керування. Суть методу полягає у тому, що задача пошуку закону керування всієї системи розбивається на послідовність відповідних підзадач для підсистем меншого порядку, для яких уже відомий закон керування та функція Ляпунова. Зі зростанням розмірності кожна додаткова фазова змінна входить як керування у нову підсистему. При такому підході суттєвим є вимога трикутності системи.

Клас трикутних систем було введено В.І. Коробовим у роботі [?] при розгляді задачі керування супутником. Трикутною системою має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{cases} \quad (1)$$

У роботі [?] була доведена достатня умова повної керованості та стабілізованості системи (1). А саме було доведено, що для повної керованості та стабілізованості системи (1) достатньо, щоб при деякому $a > 0$

виконувалась наступна умова

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \geq a > 0 \quad (2)$$

для всіх x_1, \dots, x_{i+1} , $i = 1 \dots n$ ($x_{n+1} = u$). При цьому припускалося, що виконані такі умови на гладкість правої частини: $f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) \in \mathbb{C}^{n-i}$, $i = 1 \dots n$ ($x_{n+1} = u$).

У данній дипломній роботі розглядається випадок трикутних систем спеціального вигляду при відсутності вищезначених вимог щодо гладкості правої частини системи (1). Також ці системи не задовільняють умові (2).

Для того, щоб застосовувати метод бекстепінгу система повинна мати наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{\xi}_{n-1} = f_{n-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) + g_{n-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})\xi_n \\ \dot{\xi}_n = f_n(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + g_n(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)u \end{array} \right. \quad (3)$$

такі трикутні системи ще називають "strict-feedback"системи.

Де $x \in \mathbb{R}$, $n \leq 1$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ - керування,

$f_i, g_i, i = 1 \dots n$ - відомі функції, $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$,

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = u \end{cases} \quad (4)$$

Цю система може бути розглянута як дві підсистеми, а саме перша підсистема, де ξ_2 виступає як вхід, друга підсистема, як інтегратор. Основна ідея побудови полягає у тому, щоб розглядати ξ_2 як (віртуальне) керування для стабілізації xi_1 . Вважаємо, що існує керування $\phi(\xi_1)$, таке, що нульова точка покою системи $\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)$ асимптотично стійка. Вважаємо, що для вибраного $\phi(\xi_1)$ функція Ляпунова $V(\xi_1)$ відома та задовільняє умові:

$$\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) \leq -W(\xi_1), \forall \xi_1 \in \mathbb{R} \quad (5)$$

До першого рівняння додамо та віднімемо $g(\xi_1)\phi(\xi_1)$

$$\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)\phi(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)(\phi(\xi_1) - \xi_2) \quad (6)$$

Позначимо $e_{\xi_1} = \xi_2 - \phi(\xi_1)$ Перепишемо систему в координатах (ξ_1, e_{ξ_1})

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = u - \dot{\phi}(\xi_1) \end{cases} \quad (7)$$

Обчислити $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) \quad (8)$$

Позначимо: $u = v + \dot{\phi}$, $v \in \mathbb{R}$. Систему перепишемо:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = v \end{cases} \quad (9)$$

Відмітемо, що система має асимптотично стійку нульову точку спокою ξ_1 коли $e_{\xi_1} = 0$. Розглянемо функцію $V(\xi_1, \xi_2)$ - кандидат на функцію Ляпунова, що має вигляд:

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial V}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1}e_{\xi_1} + e_{\xi_1}v \leq -W(\xi_1) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1}e_{\xi_1} + e_{\xi_1}v \quad (10)$$

У якості \dot{e}_{ξ_1} беремо

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \xi_1}g(\xi_1) - ke_{\xi_1} \quad (11)$$

Параметр k вибираємо додатним. Отримаємо $V_2 \leq -W(\xi_1) - ke_{(\xi_1)}^2$. Таким чином $\phi(0) = 0$, $e_{\xi_1} = 0$ нульова точка спокою асимптотично стійка. Кінцевий вигляд закону керування:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) - \frac{\partial V}{\partial \xi_1}g(\xi_1) - k(\xi_2 - \phi(\xi_1)) \quad (12)$$

1 Гладка стабілізація системи с двома степневими нелінійностями

Розглянемо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \quad (13)$$

Для стабілізації системи (13) потрібно спочатку знайти функцію Ляпунова та керування для підсистеми, що на розмірність менше ніж система тобто розглянемо наступну підсистему другого порядку.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 \end{cases} \quad (14)$$

До першого рівняння додамо та віднімемо вираз $(ax_1 + bx_2)^3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 - (ax_1 + bx_2)^3 + (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \quad (15)$$

В якості допоміжного керування v візьмемо $v = ax_1 + bx_2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді для стабілізації підсистеми (15) потрібно зайняти такі a, b щоб нульова точка спокою наступної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \quad (16)$$

була асимптотичног стійкою.

До правої частини першого рівняння додамо та віднімемо функцію

$$\gamma^3(x_1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1) \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3, \end{cases} \quad (17)$$

де $\gamma(x_1) = \alpha x_1$.

Функцію Ляпунова візьмемо у вигляді

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \gamma(x_1))^2 \quad (18)$$

Знайдемо похідну функції Ляпунова в силу системи (17)

$$\dot{V} = x_1(x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1)) + (x_2 - \gamma(x_1))((ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3) \quad (19)$$

Після перетворень маємо

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x_1\gamma^3(x_1) + (x_2 - \gamma(x_1))\left(x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) + \right. \\ & \left. (ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Для того, щоб похідна функції Ляпунова \dot{V} була від'ємною, представимо \dot{V} як квадратичну форму, що має вигляд $\dot{V} = (Gy, y)$ та вибрати матрицю G таку, щоб $\dot{V} = (Gy, y) < 0$.

Знайдемо a, b щоб при деяких p, β виконувалась наступна рівність:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3 + (ax_1 + bx_2)^3 = \\ -p(x_2 - \gamma(x_1))^3 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))x_1^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Оскільки $\gamma(x_1) = \alpha x_1$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + \alpha x_1^2x_2 + \alpha^2x_1^3 - \alpha x_2^3 + \alpha^3x_1^3 + b^3x_2^3 + 3ba^2x_1^2x_2 + 3ab^2x_1x_2^2 = \\ -p(x_2^3 - \alpha^3x_1^3 - 3\alpha x_2^2x_1 + 3\alpha^2x_2x_1^2) + 2\beta x_2x_1^2 - 2\alpha\beta x_1^3 \end{aligned} \quad (22)$$

Для знаходження параметрів отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ \right. \quad (23)$$

Розв'язуючи систему отримали такі значення параметрів

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha^3 x_1^4 - p(x_2 - \gamma(x_1))^4 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))^2 x_1^2 \\ &= \alpha^3 x_1^4 + 2\beta(x_2 - \alpha x_1)^2 x_1^2 - p(x_2 - \alpha x_1)^4 \end{aligned} \quad (24)$$

Відмітемо що рівність ? можна представити у вигляді $\dot{V} = (Gy, y)$, де матриця має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (25)$$

Матриця G є від'ємно визначена при виконнанні наступних умов

Таким чином підсистема з керуванням $u^3 = (ax_1 + bx_2)^3$ є стабілізованою.