Титульный лист

1 Вступ

Стабілізація нелінійних систем є однією з найбільш цікавих та важливих задач теорії керування. Не дивлячись на великі досягнення останніх десятеліть ця задача досі не розв'язана в загальному випадку. Особливий інтерес викликають системи нестабілізовані за першим наближенням. Один з найбільш універсальних методів стабілізації нелінійних систем є метод зворотнього ходу (backstepping в англомовній літературі).

Метод зворотнього ходу - це рекурсивна процедура, в котрій поєднані задачі пошуку функції Ляпунова та відповідного закону керування. Суть методу полягає у тому, що задача пошуку закону керування всієї системи розбиваеться на послідовність відповідних підзадач для підсистем меншого порядку, для яких уже відомий закон керування та функція Ляпунова. Зі зростанням розмірності кожна додаткова фазова змінна входить як керування у нову підсистему. При такому підході суттєвим є вимога трикутності системи.

Клас трикутних систем було введено В.І. Коробовим у роботі [?] при розляді задачі керування супутником. Трикутною системоа має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{cases} \tag{1}$$

У роботі [?] була доведена достатня умова повної керованості та стабілізованості системи (1). А саме було доведено, що для повної керованості та стабілізованості системи (1) достатньо, щоб при деякому $a > 0$

виконувалась наступна умова

$$\frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \geq a > 0 \tag{2}$$

для всіх $x_1, \ldots, x_{i+1}$, $i = 1 \ldots n$ $(x_{n+1} = u)$. При цьому припускалося, що виконані такі умови на гладкість правої частини: $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1}) \in \mathbb{C}^{n-i}$, $i = 1 \ldots n$ $(x_{n+1} = u)$.

У данній дипломній роботі розглядається випадок трикутних систем спеціального вигляду при відсутності вищезначених вимог щодо гладкості правої частини системи (1). Також ці системи не задовільняють умові (2).

2 Алгоритм роботи методу зворотнього ходу для трикутних систем

2.1 Загальний вигляд трикутної системи для застосування методу зворотнього ходу

Для того, щоб застосовувати метод бекстеппінгу система повинна мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x,\xi_1) + g_1(x,x_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(x,\xi_1,\xi_2) + g_2(x,\xi_1,\xi_2)\xi_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{\xi}_{n-1} = f_{n-1}(x,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1}) + g_{n-1}(x,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1})\xi_n \\ \dot{\xi}_n = f_n(x,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n) + g_n(x,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)u \end{cases} \tag{3}$$

Де $x \in \mathbb{R}$, $n \leq 1$
$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ - керування,
$f_i, g_i, i = 1...n$ - відомі функції, $f_i(0,0,\ldots,0) = 0$, $g_i(x,z_1,\ldots,z_n) \neq 0$
Такі трикутні системи ще називають "strict-feedback"системи.
Розглянемо наступну підсистему в системі (3):

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)u_1 \tag{4}$$

Важливо, щоб система (4) була стабілізована будь-яким іншим способом. Припускаємо,що для системи (4) відомі функція Ляпунова та стабілізуюче керування. Далі за допомогою методу зворотнього ходу можемо "приєднувати"рівняння к початковій системі, збільшучи на кожному кроці розмірниість системи на один.

Знаючи стабілізуюче керування для підсистеми (4) можемо стабілізувати систему (5) наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u_1(x, \xi_1) \end{cases} \tag{5}$$

Знаходимо керування $u_1(x, \xi_1)$ таке, щоб підсистема

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u_1(x, \xi_1) \tag{6}$$

була стабілізована. Знаходження стабілізуючого керування базується на побудові наступної функції Ляпунова:

$$V_1(x, \xi_1) = V_1(x) + \frac{1}{2}(\xi_1 - u_0(x))^2 \tag{7}$$

Вибераємо $u_1(x, \xi_1)$ так, щоб $\dot{V}_1 < 0$. Таким чином, система (5) стабілізована.

На наступному етапі процедури зворотного ходу до Аналогічно, будуємо керування $u_2(x, \xi_1, \xi_2)$ для підсистеми

$$\dot{\xi}_2 = f_1(x, \xi_1, \xi_2) + g_1(x, \xi_1, \xi_2)u_2(x, \xi_1, \xi_2)$$

Функція Ляпунова:

$$V_2(x, \xi_1, \xi_2) = V_1(x, \xi_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 - u_1(x, \xi_1))^2$$

Вибераємо $u_2(x, \xi_1, \xi_2)$ так, щоб $\dot{V}_2 \leq 0$

Можемо повторити процедуру n разів поки не знайдемо керування u для всієї системи (3)

2.2 Стабілізація двовимірної системи за допомогою методу зворотнього ходу

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = u \end{cases} \tag{8}$$

Ця система може бути розглянута як дві підсистеми, а саме перша підсистема, де ξ_2 виступає як вхід, друга підсистема, як інтегратор. Основна ідея побудови полягае у тому, щоб розгядати ξ_2 як (віртуальне) керування для стабілізації ξ_1. Вважаемо, що існує керування $\phi(\xi_1)$, таке, що нульова точка покою системи $\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)$ асимптотично стійка. Вважаемо, що для вибраного $\phi(\xi_1)$ функція Ляпунова $V(\xi_1)$ відома та задовільняє умові:

$$\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) \leq -W(\xi_1), \forall \xi_1 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

До першого рівняння додамо та віднімемо $g(\xi_1)\phi(\xi_1)$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)\phi(\xi_1) + g(\xi)\xi_2 && (10) \\ &= f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)(\phi(\xi_1) - \xi_2) && (11) \end{aligned}$$

Позначимо $e_{\xi_1} = \xi_2 - \phi(\xi_1)$ Перепишемо систему в координатах (ξ_1, e_{ξ_1})

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = u - \dot{\phi}(xi_1) \end{cases} \tag{12}$$

Обчислити $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) \tag{13}$$

Позначимо: $u = v + \dot{\phi}$, $v \in \mathbb{R}$. Систему перепишемо:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = v \end{cases} \tag{14}$$

Відмітемо, що система має асимтотично стійку нульову точку спокою ξ_1 коли e_{ξ_1} Розглянемо функцію $V(\xi_1, \xi_2)$ - кандидат на функцію Ляпунова, що має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1}e_{\xi_1} + e_{\xi_1}v && (15) \\ &\leq -W(\xi_1) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1}e_{\xi_1} + e_{\xi_1}v && (16) \end{aligned}$$

У якості $\dot{e}_{\xi_1}$ беремо

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \xi_1}g(\xi_1) - ke_{\xi_1} \tag{17}$$

Параметр k вибераємо додатним. Отримаємо $V_2 \leq -W(\xi_1) - ke_{(\xi_1)^2}$ Таким чином $\phi(0) = 0$, $e_{\xi_1} - > 0$ нульова точка покою асимптотично стійка. Кінцевий вигляд закону керування:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) - \frac{\partial V}{\partial \xi_1}g(\xi_1) - k(\xi_2 - \phi(\xi_1)) \tag{18}$$

Аналогічним способом:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f_1(\xi_1) + g_1(\xi_1)(\xi_2 + \phi_1(\xi_1) - \phi_1(\xi_1)) \\ \dot{\xi}_2 = u = f_2(\xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \xi_2)\xi_3 \end{cases} \tag{19}$$

(19)

$$\xi_3 = \frac{u - f_2(\xi_1, \xi_2)}{g_2(\xi_1, \xi_2)} = \phi(\xi_1, \xi_2) \tag{20}$$

Якщо повторити процедуру n разів будемо мати наступну послідовність функцій ϕ_i: $\phi_1(\xi_1)$, $\phi_2(\xi_1, \xi_2)$, $\phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\ldots$, $\phi_{n-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ та функцію Ляпунова:

$$V_n = V(x) + \frac{1}{2}(\xi_2 - \phi_1(\xi_1))^2 + \cdots + \frac{1}{2}(\xi_2 - \phi_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}))^2 \tag{21}$$

3 Гладка стабілізація системи с двома степеневими нелінійностями

Розглянемо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \tag{22}$$

Для стабілізації системи (22) потрібно спочатку знайти функцію Ляпунова та керування для підсистеми, що на розмірність менше ніж система тобто розглянемо наступну підсистему другого порядку.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 \end{cases} \tag{23}$$

До першого рівняння додамо та віднімемо вираз $(ax_1 + bx_2)^3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 - (ax_1 + bx_2)^3 + (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \tag{24}$$

В якості допоміжного керування v візмемо $v = ax_1 + bx_2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді для стабілізації підсистеми (24) потрібно занйти такі a, b щоб нульова точка спокою наступної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \tag{25}$$

була асимтотичног стійкою.

До правої частини першого рівняння додамо та віднімемо функцію

$\gamma^3(x_1)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1) \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3, \end{cases} \tag{26}$$

де $\gamma(x_1) = \alpha x_1$.

Функцію Ляпунова візьмемо у вигляді

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \gamma(x_1))^2 \tag{27}$$

Знайдемо похідну функціїї Ляпунова в силу системи (26)

$$\dot{V} = x_1(x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1)) + (x_2 - \gamma(x_1))((ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial\gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3) \tag{28}$$

Після перетворень маємо

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_1\gamma^3(x_1) + (x_2 - \gamma(x_1))\Big(x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) + \\ &\quad (ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial\gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3\Big) \end{aligned} \tag{29}$$

Для того, щоб похідна функції Ляпунова $\dot{V}$ була від'ємною, представимо $\dot{V}$ як квадратичну форму, що має вигляд $\dot{V} = (Gy, y)$ та вибрати матрицю G таку, щоб $\dot{V} = (Gy, y) < 0$.

Знайдемо a, b щоб при деяких p, β виконувалась наступна рівність:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) - \frac{\partial\gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3 + (ax_1 + bx_2)^3 = \\ -p(x_2 - \gamma(x_1))^3 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))x_1^2 \end{aligned} \tag{30}$$

Оскільки $\gamma(x_1) = \alpha x_1$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + \alpha x_1^2x_2 &+ \alpha^2x_1^3 - \alpha x_2^3 + a^3x_1^3 + b^3x_2^3 + 3ba^2x_1^2x_2 + 3ab^2x_1x_2^2 = \\ -p(x_2^3 - \alpha^3x_1^3 &- 3\alpha x_2^2x_1 + 3\alpha^2x_2x_1^2) + 2\beta x_2x_1^2 - 2\alpha\beta x_1^3 \end{aligned} \tag{31}$$

Для знаходження параметрів отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha + a^3 + p = 0 \\ \alpha^2 + b^3 - p\alpha^3 + 2\alpha\beta \\ \alpha + 3ab^2 - 3p\alpha^2 + 2\beta \\ 1 + 3ba^2 - 3\alpha p \end{cases} \tag{32}$$

Розв'язуючи систему отримали такі значення параметрів

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha^3 x_1^4 - p(x_2 - \gamma(x_1))^4 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))^2 x_1^2 \\ &= \alpha^3 x_1^4 + 2\beta(x_2 - \alpha x_1)^2 x_1^2 - p(x_2 - \alpha x_1)^4 \end{aligned} \tag{33}$$

Відмітемо що рівність (33) можно представити у вигляді $\dot{V} = (Gy, y)$, де мариця має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \beta \\ \beta & -p \end{pmatrix} \tag{34}$$

Матриця G є від'ємно визначена при виконнані наступних умова

Таким чином підсистема з керуванням $u^3 = (ax_1 + bx_2)^3$ є стабілізованою.