

Титульный лист

Зміст

1	Вступ	3
2	Метод зворотнього ходу для трикутних систем	5
2.1	Загальний вигляд трикутної системи для застосування методу зворотнього ходу	5
2.2	Стабілізація двовимірної системи за допомогою методу зворотнього ходу	7
3	Стабілізація системи с двома степеневими нелінійностями	10
3.1	Постановка задачі стабілізації системи с двома степеневими нелінійностями	10
3.2	Розв’язок задачі стабілізації системи с двома степеневими нелінійностями	11
4	Висновки	17

1 Вступ

Стабілізація нелінійних систем є однією з найбільш цікавих та важливих задач теорії керування. Не дивлячись на великі досягнення останніх десятиліть ця задача досі не розв'язана в загальному випадку. Особливий інтерес викликають системи нестабілізовані за першим наближенням.

Один з найбільш універсальних методів стабілізації нелінійних систем є метод зворотнього ходу (backstepping в англійській літературі). Метод зворотнього ходу - це рекурсивна процедура, в якій поєднані задачі пошуку функції Ляпунова та відповідного закону керування. Суть методу полягає у тому, що задача пошуку закону керування всієї системи розбивається на послідовність відповідних підзадач для підсистем меншого порядку, для яких уже відомий закон керування та функція Ляпунова. Зі зростанням розмірності кожна додаткова фазова змінна входить як керування у нову підсистему. При такому підході суттєвим є вимога трикутності системи.

Клас трикутних систем було введено В.І. Коробовим у роботі [1] при розгляді задачі керування супутником. Трикутною системою має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{array} \right. \quad (1)$$

У роботі [?] була доведена достатня умова повної керованості та стабілізованості системи (1). А саме було доведено, що для повної керованості та стабілізованості системи (1) необхідно виконувати умови:

ваності та стабілізованості системи (1) достатньо, щоб при деякому $a > 0$ виконувалась наступна умова

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \geq a > 0 \quad (2)$$

для всіх x_1, \dots, x_{i+1} , $i = 1 \dots n$ ($x_{n+1} = u$). При цьому припускалося, що виконані такі умови на гладкість правої частини: $f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) \in \mathbb{C}^{n-i}$, $i = 1 \dots n$ ($x_{n+1} = u$).

У данній дипломній роботі розглядається випадок трикутних систем спеціального вигляду при відсутності вищезначених вимог щодо гладкості правої частини системи (1). Також ці системи не задовільняють умові (2).

2 Метод зворотнього ходу для трикутних систем

2.1 Загальний вигляд трикутної системи для застосування методу зворотнього ходу

Для того, щоб застосовувати метод бекстепінгу система повинна мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{\xi}_{n-1} = f_{n-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) + g_{n-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})\xi_n \\ \dot{\xi}_n = f_n(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + g_n(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)u \end{cases} \quad (3)$$

Де $x \in \mathbb{R}$, $n \leq 1$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ - керування,

$f_i, g_i, i = 1 \dots n$ - відомі функції, $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $g_i(x, z_1, \dots, z_n) \neq 0$

Такі трикутні системи ще називають "strict-feedback"системами.

Розглянемо наступну підсистему в системі (3):

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)u_1 \quad (4)$$

Важливо, щоб система (4) була стабілізована будь-яким іншим способом. Припускаємо, що для системи (4) відомі функція Ляпунова та стабілізуюче керування. Далі за допомогою методу зворотнього ходу можемо "приєднувати" рівняння к початковій системі, збільшуючи на кожному

кроці розмірність системи на один.

Знаючи стабілізуюче керування для підсистеми (4) можемо стабілізувати систему (5) наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u_1(x, \xi_1) \end{cases} \quad (5)$$

Знаходимо керування $u_1(x, \xi_1)$ таке, щоб підсистема

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u_1(x, \xi_1) \quad (6)$$

була стабілізована. Знаходження стабілізуючого керування базується на побудові наступної функції Ляпунова:

$$V_1(x, \xi_1) = V_1(x) + \frac{1}{2}(\xi_1 - u_0(x))^2 \quad (7)$$

Вибераємо $u_1(x, \xi_1)$ так, щоб $\dot{V}_1 < 0$. Таким чином, система (5) стабілізована.

На наступному етапі процедури зворотного ходу до Аналогічно, будемо керування $u_2(x, \xi_1, \xi_2)$ для підсистеми

$$\dot{\xi}_2 = f_1(x, \xi_1, \xi_2) + g_1(x, \xi_1, \xi_2)u_2(x, \xi_1, \xi_2)$$

Функція Ляпунова:

$$V_2(x, \xi_1, \xi_2) = V_1(x, \xi_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 - u_1(x, \xi_1))^2$$

Вибераємо $u_2(x, \xi_1, \xi_2)$ так, щоб $\dot{V}_2 \leq 0$

Можемо повторити процедуру n разів поки не знайдемо керування u для всієї системи (3)

2.2 Стабілізація двовимірної системи за допомогою методу зворотнього ходу

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = u \end{cases} \quad (8)$$

Ця система може бути розглянута як дві підсистеми, а саме перша підсистема, де ξ_2 виступає як вхід, друга підсистема, як інтегратор. Основна ідея побудови полягає у тому, щоб розглядати ξ_2 як (віртуальне) керування для стабілізації ξ_1 . Вважаємо, що існує керування $\phi(\xi_1)$, таке, що нульова точка покою системи $\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)$ асимптотично стійка. Вважаємо, що для вибраного $\phi(\xi_1)$ функція Ляпунова $V(\xi_1)$ відома та задовільняє умові:

$$\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi_1}(f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) \leq -W(\xi_1), \forall \xi_1 \in \mathbb{R} \quad (9)$$

До першого рівняння додамо та віднімемо $g(\xi_1)\phi(\xi_1)$

$$\dot{\xi}_1 = f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)\phi(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2 \quad (10)$$

$$= f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1) - g(\xi_1)(\phi(\xi_1) - \xi_2) \quad (11)$$

Позначимо $e_{\xi_1} = \xi_2 - \phi(\xi_1)$ Перепишемо систему в координатах (ξ_1, e_{ξ_1})

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = u - \dot{\phi}(\xi_1) \end{cases} \quad (12)$$

Обчислити $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} (f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) \quad (13)$$

Позначимо: $u = v + \dot{\phi}$, $v \in \mathbb{R}$. Систему перепишемо:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + g(\xi_1)e_{\xi_1} \\ \dot{e}_{\xi_1} = v \end{cases} \quad (14)$$

Відмітемо, що система має асимптотично стійку нульову точку спокою ξ_1 коли e_{ξ_1} . Розглянемо функцію $V(\xi_1, \xi_2)$ - кандидат на функцію Ляпунова, що має вигляд:

$$\dot{V}_2 = \frac{\partial V}{\partial \xi_1} (f(\xi_1) + g(\xi_1)\phi(\xi_1)) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} e_{\xi_1} + e_{\xi_1} v \quad (15)$$

$$\leq -W(\xi_1) + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} e_{\xi_1} + e_{\xi_1} v \quad (16)$$

У якості \dot{e}_{ξ_1} беремо

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \xi_1} g(\xi_1) - k e_{\xi_1} \quad (17)$$

Параметр k вибираємо додатним. Отримаємо $V_2 \leq -W(\xi_1) - k e_{\xi_1}^2$. Таким чином $\phi(0) = 0$, $e_{\xi_1} - > 0$ нульова точка покою асимптотично стійка. Кінцевий вигляд закону керування:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} (f(\xi_1) + g(\xi_1)\xi_2) - \frac{\partial V}{\partial \xi_1} g(\xi_1) - k(\xi_2 - \phi(\xi_1)) \quad (18)$$

Аналогічним способом:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f_1(\xi_1) + g_1(\xi_1)(\xi_2 + \phi_1(\xi_1) - \phi_1(\xi_1)) \\ \dot{\xi}_2 = u = f_2(\xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \xi_2)\xi_3 \end{cases} \quad (19)$$

(19)

$$\xi_3 = \frac{u - f_2(\xi_1, \xi_2)}{g_2(\xi_1, \xi_2)} = \phi(\xi_1, \xi_2) \quad (20)$$

Якщо повторити процедуру n разів будемо мати наступну послідовність функцій ϕ_i : $\phi_1(\xi_1)$, $\phi_2(\xi_1, \xi_2)$, $\phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, \dots , $\phi_{n-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ та функцію Ляпунова:

$$V_n = V(x) + \frac{1}{2}(\xi_2 - \phi_1(\xi_1))^2 + \dots + \frac{1}{2}(\xi_2 - \phi_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}))^2 \quad (21)$$

3 Стабілізація системи с двома степеневими нелінійностями

3.1 Постановка задачі стабілізації системи с двома степеневими нелінійностями

У даній роботі розглядається наступна трикутна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 = f(x_1, x_2, \xi_1) + g(x_1, x_2, \xi_1)\xi_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{\xi}_n = f(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + g(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)u \end{cases} \quad (22)$$

Метою даної роботи є стабілізація системи (22), тобто пошук такого керування u , що нульова точка спокою системи буде асимптотично стійкою.

Для вирішення даної задачі використовуємо метод зворотнього ходу, що був описаний у розділі 2. Звернемо увагу, на відміну від системи (3) фазова змінна ξ_1 входить у наступне рівняння нелінійно, а саме як третя ступінь ξ_1^3

3.2 Розв'язок задачі стабілізації системи с двома степневими нелінійностями

Розглянемо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \quad (23)$$

Для стабілізації системи (??) потрібно спочатку знайти функцію Ляпунова та керування для підсистеми, що на розмірність менше ніж система тобто розглянемо наступну підсистему другого порядку.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 \end{cases} \quad (24)$$

До першого рівняння додамо та віднімемо вираз $(ax_1 + bx_2)^3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = v^3 - (ax_1 + bx_2)^3 + (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \quad (25)$$

В якості допоміжного керування v візьмемо $v = ax_1 + bx_2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді для стабілізації підсистеми (25) потрібно зайти такі a, b щоб нульова точка спокою наступної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3 \end{cases} \quad (26)$$

була асимптотичног стійкою.

До правої частини першого рівняння додамо та віднімемо функцію

$$\gamma^3(x_1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1) \\ \dot{x}_2 = (ax_1 + bx_2)^3, \end{cases} \quad (27)$$

де $\gamma(x_1) = \alpha x_1$.

Функцію Ляпунова візьмемо у вигляді

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \gamma(x_1))^2 \quad (28)$$

Знайдемо похідну функції Ляпунова в силу системи (27)

$$\dot{V} = x_1(x_2^3 - \gamma^3(x_1) + \gamma^3(x_1)) + (x_2 - \gamma(x_1))((ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3) \quad (29)$$

Після перетворень маємо

$$\begin{aligned} \dot{V} = & x_1\gamma^3(x_1) + (x_2 - \gamma(x_1))\left(x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) + \right. \\ & \left. (ax_1 + bx_2)^3 - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Для того, щоб похідна функції Ляпунова \dot{V} була від'ємною, представимо \dot{V} як квадратичну форму, що має вигляд $\dot{V} = (Gy, y)$ та вибрати матрицю G таку, щоб $\dot{V} = (Gy, y) < 0$.

Знайдемо a, b щоб при деяких p, β виконувалась наступна рівність:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + x_1x_2\gamma(x_1) + x_1\gamma^2(x_1) - \frac{\partial \gamma(x_1)}{\partial x_1}x_2^3 + (ax_1 + bx_2)^3 = \\ -p(x_2 - \gamma(x_1))^3 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))x_1^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Оскільки $\gamma(x_1) = \alpha x_1$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} x_1x_2^2 + \alpha x_1^2x_2 + \alpha^2x_1^3 - \alpha x_2^3 + \alpha^3x_1^3 + b^3x_2^3 + 3ba^2x_1^2x_2 + 3ab^2x_1x_2^2 = \\ -p(x_2^3 - \alpha^3x_1^3 - 3\alpha x_2^2x_1 + 3\alpha^2x_2x_1^2) + 2\beta x_2x_1^2 - 2\alpha\beta x_1^3 \end{aligned} \quad (32)$$

Для знаходження параметрів отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha + b^3 + p = 0 \\ \alpha^2 + a^3 - p\alpha^3 + 2\alpha\beta = 0 \\ \alpha + 3ba^2 + 3p\alpha^2 - 2\beta = 0 \\ 1 + 3ab^2 - 3\alpha p = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Розв'язуючи систему отримали такі значення параметрів:

$$\begin{cases} p = \alpha - b^3 \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha^3 x_1^4 - p(x_2 - \gamma(x_1))^4 + 2\beta(x_2 - \gamma(x_1))^2 x_1^2 \\ &= \alpha^3 x_1^4 + 2\beta(x_2 - \alpha x_1)^2 x_1^2 - p(x_2 - \alpha x_1)^4 \end{aligned} \quad (35)$$

Відмітемо що рівність (35) можна представити у вигляді $\dot{V} = (Gy, y)$, де матриця G та вектор y мають вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \beta \\ \beta & -p \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$y = (x_1^2, (x_2 - \alpha x_1)^2) \quad (37)$$

Матриця G є від'ємно визначена при виконнанні наступних умов:

$$1) \alpha^3 < 0, \quad p > 0$$

$$2) \text{Детермінант матриці } \det G \text{ додатній, тобто } \beta^2 < \alpha^3 p$$

Таким чином підсистема (24) з керуванням $u^3 = (ax_1 + bx_2)^3$ є стабілізованою.

Використовуюючи метод зворотнього ходу від підсистеми (24) перейдемо до системи (23), де в якості u візьмемо:

$$f_1(x_1, x_2, \xi_1) + g_2(x_1, x_2, \xi_1)\xi_2.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(x_1, x_2, \xi_1) + g_2(x_1, x_2, \xi_1)\xi_2 = v_1 \end{cases} \quad (38)$$

Із системи (38) отримаємо керування ξ_2

$$\xi_2 = \frac{u - f_1(x_1, x_2, \xi_1)}{g_2(x_1, x_2, \xi_1)}, \quad g \neq 0 \quad (39)$$

Запишемо функцію Ляпунова:

$$V_1 = V + \frac{1}{2}(\xi_1 - v)^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \gamma(x_1))^2 + \frac{1}{2}(\xi_1 - v)^2 \quad (40)$$

Де $v = ax_1 + bx_2$ та $\gamma(x_1) = \alpha x_1$

Обчислимо похідну функції Ляпунова V_1 :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \dot{V} + (x_2 - \alpha x_1) & \left(\xi_1 - (ax_1 + bx_2) \right) \left(\xi_1^2 + \xi_1 + (ax_1 + bx_2) \right. \\ & \left. + (ax_1 + bx_2)^2 \right) + (\xi_1 + (ax_1 + bx_2)) \left(u - \frac{\partial v}{\partial x_1} x_2^3 - \frac{\partial v}{\partial x_2} \xi_1^3 \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Використовуючи вже доведене раніше твердження, що похідна функції Ляпунова \dot{V} для системи (26) менше ніж нуль, потрібно вибрати таке v_1 , що для похідної функції Ляпунова \dot{V}_1 буде також виконуватися умова $\dot{V}_1 < 0$.

v_1 виберемо наступним чином:

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1} x_2^3 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \xi_1^3 - (x_2 - \alpha x_1) & \left(\xi_1^2 + \xi_1(ax_1 + bx_2) \right. \\ & \left. + (ax_1 + bx_2)^2 \right) - (\xi_1 - ax_1 - bx_2) \end{aligned} \quad (42)$$

Тоді отримаємо

$$\dot{V}_1 = \dot{V} - (\xi_1 - v)^2 < 0 \quad (43)$$

Таким чином похідна функції Ляпунова $\dot{V}_1 < 0$, тобто нульова точка спокою системи асимптотично стійка. Можемо зробити висновок, що система з керуванням стабілізована. Застосовуючи метод зворотнього ходу до системи (38) можемо послідовно під'єднувати рівняння, збільшуючи на кожному кроці розмірність системи на один.

$$\left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \xi_1^3 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_i &= f_i(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) + g_i(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)\xi_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-2} &= f_{k-2}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-2}) + g_{k-2}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-2})\xi_{k-1} \\ \dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-2}, \xi_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k) + g_k(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k)u \end{aligned} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \quad (44)$$

Де починаючи $i = 2$ керування u в загальному випадку має вид:

$$u_i(x_i) = \frac{1}{g_i(x_i)}(v_{i-1} - f_i(x_{i-1})) \quad (45)$$

де v_i :

$$v_{i-1} = -\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} g_{i-1}(x_{i-1}) - k_i (\xi_i - u_{i-1}(x_{i-1})) + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i-1}} (f_{i-1}(x_{i-1}) + g_{i-1}(x_{i-1})) \xi_i \quad (46)$$

4 Висновки

Література

- [1] В. И. Коробов, Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем, - Дифференц. уравнения, 1973, том 9, номер 4, с. 614-619.

- [2] М. О. Бебия, V. I. Korobov, On stabilization problem for nonlinear system power principal part. - Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 2016, Vol. 12, No. 2, pp. 113-133.

- [3] I.A. Raptis, K.P. Valavanis, Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters, Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering 45, DOI 10.1007/978-94-007-0023-9, © Springer Science+Business Media B.V. 2011

- [4] М. О. Бебия, "Стабилизация систем со степенной нелинейностью". Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка" №1120, 2014. сс.75-84.