Лекция 1: Математический анализ

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. Высказывание - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1 Логические символы

$\wedge$ - конъюнкция (логическое "И")
$\vee$ - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
$\Rightarrow$ - импликация ("если A то B")
$\Leftrightarrow$ - эквивалетность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$ - существует
$\nexists$ - не существует
$!\exists$ - существует единствуенный элемент
$\forall$ - для каждого

2 Теория множеств

Определение 2. Множество - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

2.1 Символы теории множеств

- $\in$ - принадлежит

- $\notin$ - не принадлежит

- $\subset$ - включает
- $\subseteq$ - включает, возможно равенство
- $\equiv$ - тождественное равенство (для любого значения переменной
- $\emptyset$ - пустое множество

2.2 Операции со множествами

- $\cup$ - объединение множеств
- $\cap$ - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подномножествами которого являются все рассматриваемые множества.

2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:
$$A = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$
2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:
$$B = \{x : Q(x)\}.$$

2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \ldots\}$ - множество иррациональных чисел

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.5 Промежутки

Определение 5. Промежуток - подножество X множества $\mathbb{Q}$, где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x, где $x_1 < x < x_2$.

2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержаший эту точку

Определение 7. δ - окрестностью ($S(x_0, \delta)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью ($S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Лекция 2: Математический анализ

3 Числовая последовательность

Определение 12. **Числовая последовательность** - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример. $1, -1, 1, -1, 1\dots$

- Число элементов бесконечно
- Значенией последовательности два

$$x_n = (-1)^{n+1}$$
$$2, 2, 2, 2, 2\dots$$

- Число элементов бесконечно
- Значенией последовательности одно

$$x_n = 2 * 1^n$$
$$1, 2, 3, 4, 5\dots$$

- Число элементов бесконечно
- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5\dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \le x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

$$1, 2, 3, 2, 1 \dots.$$

Постоянная последовательность

$$1, 1, 1, 1, 1 \dots.$$

4 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a.

4.1 Геометрический смысл

$$\begin{gathered} |x_n - a| < \varepsilon \\ -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ \forall n > N(\varepsilon) \end{gathered}$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a, причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$
Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$
$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$
$$x_3., x_4, x_5 \ldots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$

Определение 16. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. *Критерий Коши существования предела последовательности*
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ - сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

4.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. *О существовании единственности предела последовательности*
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$

имеет 2 различных предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} = b$$
$$a \neq b$$

$\square$