

## Математический анализ. Лекции

### 1 Основы математического анализа

**Математический анализ** - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

#### 1.1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

**Определение 1. Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

**Пример.**  $2 + 3 = 5$  - истинно,  $3 < 0$  - ложно

##### 1.1.1 Логические символы

$\wedge$  - конъюнкция (логическое "И")

$\vee$  - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")

$\Rightarrow$  - импликация ("если A то B")

$\Leftrightarrow$  - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$  - существует

$\nexists$  - не существует

$\exists!$  - существует единственный элемент

$\forall$  - для каждого

#### 1.2 Теория множеств

**Определение 2. Множество** - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

##### 1.2.1 Символы теории множеств

•  $\in$  - принадлежит

•  $\notin$  - не принадлежит

- $\subset$  - включает
- $\subseteq$  - включает, возможно равенство
- $\equiv$  - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- $\emptyset$  - пустое множество

### 1.2.2 Операции со множествами

- $\cup$  - объединение множеств
- $\cap$  - пересечение множеств

#### Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Определение 3.** Подмножество - множество  $A$  называется подмножеством  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ .

**Определение 4.** Универсальное множество - такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

### 1.2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

### 1.2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$  - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \dots\}$  - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$  - множество действительных чисел

**Замечание.** Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## Промежутки

**Определение 5.** Промежуток - подмножество  $X$  множества  $\mathbb{Q}$ , где  $\forall x_1, x_2 \in X$  этому множеству принадлежат все  $x$ , где  $x_1 < x < x_2$ .

### 1.2.5 Виды промежутков

1. Отрезок  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

### 1.2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  - малые положительные величины

**Определение 6.** Окрестностью точки  $x_0$  называется любой интервал, содержащий эту точку

**Определение 7.**  $\delta$  - окрестностью  $(S(x_0, \delta))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\delta$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 8.**  $\varepsilon$  - окрестностью  $(S(x_0, \varepsilon))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\varepsilon$ .

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

**Определение 9.** Окрестностью  $+\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 10.** Окрестностью  $-\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 11.** Окрестностью  $\infty$  называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

## 2 Числовая последовательность

**Определение 12.** Числовая последовательность - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой  $\forall n \in \mathbb{N}$  можно записать соответствующий элемент последовательности.

**Замечание.** Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

**Пример.**

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности два

**Пример.**

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности одно

**Пример.**

$$x_n = 2 * 1^n$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **неубывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5...

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **возрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **невозрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **убывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

**Пример.** 1, 2, 3, 2, 1...

Постоянная последовательность

**Пример.** 1, 1, 1, 1, 1...

## 2.1 Предел последовательности

**Определение 13.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется натуральное число  $N(\varepsilon)$ , такое, что если порядковый номер  $n$  члена последовательности станет больше  $N(\varepsilon)$ , то имеет место неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

,

**Замечание.** Т.е. начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$  все элементы последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

### 2.1.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon &< x_n < a + \varepsilon \\ \forall n &> N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый  $\varepsilon$  мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , причем чем  $\varepsilon \downarrow$ , тем  $N(\varepsilon) \uparrow$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть  $\varepsilon = 0.3$ ,  $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , т.е.  $(-0.3; 0.3)$

Получается два элемента  $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$

$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$

$$x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

**Определение 14.** Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

**Определение 15.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной снизу (сверху)**, если  $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$ , что для всех  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $x_n \geq m$  ( $x_n \leq M$ )

**Определение 16.** Последовательность  $x_n$  называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$  или  $|x_n| \leq M$ .

**Определение 17.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$   $\exists$  свой порядковый номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $m \geq N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 1.** Критерий Коши существования предела последовательности

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} - \text{сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{фундаментальная.}$$

## 2.2 Свойства сходящихся последовательность

**Теорема 2.** *О существовании единственности предела последовательности*

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

**Доказательство.** Аналитическое доказательство. Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся последовательность.

Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  более одного предела.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} &= b \\ a &\neq b\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем  $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$ .

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned}3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным  $\Rightarrow$  последовательность  $x_n$  имеет единственный предел.  $\square$

**Доказательство.** Геометрическое доказательство

Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности  $x_n$  в две непересекающиеся окрестности.  $\square$

**Теорема 3.** *Об ограниченности сходящейся последовательности.*

Любая сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$ .

Тогда для  $\forall n \in \mathbb{N}$  будет верно  $|x_n| \leq M$  - это и означает, что последовательность  $x_n$  - ограниченная.  $\square$

**Теорема 4.** *Признак сходимости Вейерштрасса.*

Ограниченная монотонная последовательность сходится.

### 2.2.1 Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$

**Теорема 5.** Последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})$  имеет предел равный  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

## 3 Предел функции

**Определение 18.** Окрестностью, из которой исключена точка  $x_0$  называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

**Определение 19.** *Определение функции по Коши или на языке  $\varepsilon$  и  $\delta$ .*

Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  такое что  $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$  будет верно неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\begin{aligned} \dots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow \dots \\ \dots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \dots \\ \dots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dots &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \\ \dots &\Rightarrow f(x) \in \mathring{S}(a, \varepsilon)\end{aligned}$$

### Геометрический смысл предела функции

Если для  $\forall \mathring{S}(a; \varepsilon)$  найдется  $\mathring{S}(x_0; \delta)$ , то соответствующие значения функции лежат в  $\mathring{S}(a; \varepsilon)$  (полоса  $2\varepsilon$ ):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x_1) - a| < \varepsilon$$

**Определение 20.** Определение предела функции по Гейне или на языке последовательностей.

Число  $a$  называется пределом  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если эта функция определена в окрестности точки  $a$  и  $\forall$  последовательности  $x_n$  из области определения этой функции, сходящейся к  $x_0$  соответствующая последовательность функций  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f) (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a)$$

### Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$  (на языке математики  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ) соответствующие значения  $f(x_n)$  достаточно близко расположены к  $a$  (на языке математики -  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ )

**Теорема 6.** Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

## 3.1 Ограниченная функция

**Определение 21.** Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента  $x$ , если  $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$ .

Если  $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$ , то функция  $f(x)$  называется **неограниченной**.

**Определение 22.** Функция называется **локально ограниченной** при  $x \rightarrow x_0$ , если существует проколота окрестность с центром в точке  $x_0$ , в которой данная функция ограничена.

### 3.2 Основные теоремы о пределах

**Теорема 7.** *О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.*

Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \\ \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Распишем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{aligned} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем  $M = \max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 8.** *О единственности предела функции.*

Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

**Доказательство.** Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 -  $a$  и  $b$ . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = a \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = b \tag{2}$$

$$a \neq b, \text{ пусть } b > a$$

$$(1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$

$$(2) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1)$$

$$(2) \Rightarrow b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , тогда  $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$  будет верно (1) и (2) одновременно.

Пусть  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$ :

$$(1) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным. Функция имеет единственный предел.  $\square$

**Теорема 9.** О сохранении функцией знака своего предела

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ , то  $\exists \dot{S}(x_0, \delta)$  такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$$

**Доказательство.** Пусть  $a > 0$ . Выберем  $\varepsilon = a > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции  $f(x)$  и числа  $a$  - одинаковые.

Пусть  $a < 0$ . Выберем  $\varepsilon = -a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$

$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции  $f(x)$  и числа  $a$  - одинаковые.

Значит,  $f(x)$  сохраняет знак своего предела  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$   $\square$

**Следствие.** Если функция  $y = f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$  и знакопостоянна в  $\dot{S}(x_0, \delta)$ , тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

**Теорема 10.** О предельном переходе в неравенстве.

Пусть существуют конечные пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  и  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  верно  $f(x) < g(x)$ . Тогда  $\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  имеет место неравенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**Доказательство.** По условию  $f(x) < g(x), \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ . Введём функцию  $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$ . Т.к.  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0$ , соответственно и функция  $F(x)$  имеет конечный предел в точке  $x_0$  (как разность  $f(x)$  и  $g(x)$ ).

По следствию из предыдущей теоремы  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$

Подставим  $F(x) = f(x) - g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

□

**Пример.** Пусть  $f(x) = 0, g(x) = x^2$  и  $x_0 = 0$ .

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \quad 0 < x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

**Теорема 11.** О пределе промежуточной функции.

Пусть существуют конечные пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \forall x \in \dot{S}(x_0, \delta)$  верно неравенство  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

**Доказательство.** По условию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon) \quad (2)$$

Выберем  $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ , тогда (1), (2) и  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  верны

одновременно  $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$ .

$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq h(x) \leq g(x) \\ \Rightarrow a - \varepsilon_1 &< f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \quad a - \varepsilon &< h(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon) \\ \Rightarrow \text{по определению предела} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \end{aligned}$$

□

**Теорема 12.** *О пределе сложной функции.*

Если функция  $y = f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$  равный  $a$ , то функция  $\varphi(y)$  имеет предел в точке  $a$ , равный  $C$ , тогда сложная функция  $\varphi(f(x))$  имеет предел в точке  $x_0$ , равный  $C$ .

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a \\ \lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) &= C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = C$$

**Доказательство.**

$$\lim_{y \rightarrow a} \varphi(y) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \Rightarrow |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \quad (1)$$

Выберем в качестве  $\varepsilon$  в пределе найденное  $\delta_1$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1) \quad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = c$$

□

## 4 Бесконечно малые функции

**Определение 23.** Функция называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ , если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

**Замечание.** Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.

Бесконечно малые функции обозначаются  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \dots$

**Пример.**

$$y = x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$  при  $x \rightarrow 2$  является бесконечно малой.

**Пример.**

$$y = \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$  при  $x \rightarrow 0$  является бесконечно малой.

**Пример.**

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  при  $x \rightarrow \infty$  является бесконечно малой.

### 4.1 Свойства бесконечно малых функций

**Теорема 13.** О сумме конечного числа бесконечно малых функций. Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

**Доказательство.** Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например две:  $\alpha(x), \beta(x)$ . Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad (2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon) \end{aligned}$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

□

**Теорема 14.** *О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную.*

Произведение бесконечно малой функции на локально ограниченную есть величина бесконечно малая.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \quad (1)$$

$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$

$$\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x)| < M \quad (2)$$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon)$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

**Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к.  $\sin(x)$ , при  $x \rightarrow \infty$  является локально ограниченной  $\sin(x) \leq 1$ .

**Теорема 15.** О связи функции, её предела и бесконечно малой.

Функция  $y = f(x)$  имеет конечный предел в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

**Доказательство. Необходимость.**

Дано:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$



Обозначим  $f(x) - a = \alpha(x)$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

*Достаточность.*

Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

□

**Следствие.** Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

**Следствие.** Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

## 5 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0$ .

**Теорема 16.** Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**Теорема 17.** О пределе отношения функций.

Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен

частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

**Теорема 18.** *О пределе произведения функций.*

Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**Доказательство.** Пусть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1) \Rightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м.ф.}$$

$$(2) \Rightarrow g(x) = b + \beta(x), \text{ где } \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (a + \alpha(x))(b + \beta(x)) \\ &= ab + \underbrace{a \cdot \beta(x) + b\alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\gamma(x)} \\ &= ab + \gamma(x) \end{aligned}$$

По следствию из теоремы 15:

$$a \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$b \cdot \alpha(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x) = \text{б.м.ф. при } x \rightarrow 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} ab + \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \\ &= ab + 0 \\ &= ab\end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

## 6 Односторонние пределы

**Определение 24.** Число  $A_1$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  **слева**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon)$$

**Определение 25.** Число  $A_2$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  **справа**, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon)$$

Пределы справа и слева называют *односторонними пределами*.

**Теорема 19.** О существовании предела функции в точке.

Функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

### 6.1 Пределы на бесконечности

**Определение 26.** Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

где  $N$  - большое число,  $N > 0, N \in \mathbb{R}$ .

**Определение 27.** Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где  $N$  - большое число,  $N > 0, N \in \mathbb{R}$ .

**Замечание.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x \in |x| > N) &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \end{aligned}$$

## 6.2 Бесконечные пределы

**Определение 28.** Функция  $y = f(x)$  имеет бесконечный предел при  $x \rightarrow x_0$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$$

где  $M$  - большое число,  $M > 0, M \in \mathbb{R}$ , а  $\delta$  - малое число.

**Замечание.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arctg}(x), \quad x \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Пример.**

$$y = \ln(x), \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = -\infty$$

**Пример.**

$$y = \sqrt{-x}, \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} = 0$$

**Пример.**

$$y = \frac{1}{|x-2|}, \quad x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

**Определение 29.** Функция  $y = f(x)$  называется **бесконечно большой функцией** (далее - **б.б.ф.** если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

**Бесконечный предел на бесконечности**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N(M) > 0)(\forall x \in |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M)$$

### 6.3 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

**Теорема 20.** О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.

Если  $\alpha(x)$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** По условию  $\alpha(x)$  - б.б.ф при  $x \rightarrow x_0$ . По определе-

нию:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)| > M, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Обозначим  $\varepsilon = \frac{1}{M}$ .

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| > M &\Rightarrow \frac{1}{|\alpha(x)|} < \frac{1}{M} \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \frac{1}{M} < \varepsilon \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| < \varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией.  $\square$

## 1-ый замечательный предел

### Теорема 21.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Потом  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

Пусть  $\alpha$  - угол в радианах,  $x \rightarrow 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Тут должен быть рисунок, но его пока нет :(.

Окружность  $R = 1$ .

Отложим луч  $OK$  под углом к оси  $oX$  равным  $x$ , где  $O(0,0), K \in$  окружности.

$KH \perp OA$ .

Рассмотрим  $\triangle OKH$ .  $OA = 1$  как радиус.  $\sin(x) = \frac{KH}{OA} = KH$ .

Рассмотрим  $\triangle OLA$ .  $OA = 1$  как радиус.  $\operatorname{tg}(x) = \frac{LA}{OA} = LA$ .

Из геометрических построений (да будут они когда-нибудь...):

$$S_{\triangle OKA} < S_{\text{сек}OKA} < S_{\triangle OLA}$$

$$S_{\triangle OKA} = \frac{1}{2} OA \cdot KH = \frac{1}{2} \sin(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$

$$S_{\text{сек}OKA} = \frac{1}{2} OA \cdot OK \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OLa} = \frac{1}{2} OA \cdot LA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{2} &< \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad | \cdot 2 \\ \sin(x) &< x < \operatorname{tg}(x) \\ x \rightarrow 0+ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(x) > 0 \\ \operatorname{tg}(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad | : \sin(x) \\ 1 &< \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \\ \cos(x) &< \frac{\sin(x)}{x} < 1 \end{aligned}$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

По теореме о промежуточной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Аналогично для  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . Т.к. односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &= \left| \begin{array}{l} t = \arcsin(x) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg}(t) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\operatorname{tg}(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}(t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$



**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos(x)}{2} \\ 1 - \cos(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{array} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

**Второй замечательный предел****Теорема 22.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{array} \right| \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \\
&= e
\end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \ln e = 1
\end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{x} \log_a(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a} \end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ x = \ln(t+1) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ x = \log_a(1+t) \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a\end{aligned}$$

□

## 7 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть даны функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , которые являются б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Рассмотрим варианты:

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

$\alpha(x)$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\beta(x)$ .

$$\boxed{\alpha(x) = o(\beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0)}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

$\beta(x)$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\alpha(x)$ .

$$\boxed{\beta(x) = o(\alpha(x), \text{ при } x \rightarrow x_0)}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - эквивалентны.

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const}$$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - одного порядка малости.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= O(\beta(x)) \\ \beta(x) &= O(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

•

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - несравнимы.

**Определение 30.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

**Определение 31.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *несравнимыми*, если:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

**Определение 32.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *эквивалентными*, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

**Определение 33.** Если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , то говорят, что функция  $\alpha(x)$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\beta(x)$ .

**Определение 34.** Б.м.ф.  $\alpha(x)$  имеет порядок малости  $k$  относительно функции б.м.ф.  $\beta(x)$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \text{const} \neq 0$$

где  $k$  – порядок малости.

## 7.1 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

**Теорема 23.** Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , а  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \beta(x)}{\gamma(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 24.** Необходимое и достаточное условие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\begin{aligned} &\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) \sim \beta(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{cases} \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

**Доказательство.** Необходимость.

Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

Достаточность.

Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

□

**Теорема 25.** О суммы бесконечно малых разного порядка.

Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(x), \beta(x) - \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \rightarrow x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \rightarrow x_0$$

**Доказательство.** Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

**Теорема 26.** О замене функции на эквивалентную под знаком предела.

Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф.) не изменится, если заменить

эти функции на эквивалентные.

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x), \beta(x) &- \text{б.м.ф. при } x \rightarrow x_0 \\ \alpha(x) &\sim \alpha_0(x) \\ \beta(x) &\sim \beta_0(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}$$

**Доказательство.** Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned}$$

□

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф

1-ый замечательный предел      2-ой замечательный предел

$$\begin{array}{ll} \sin(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & \ln(1+x) \sim x \\ \operatorname{tg}(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \\ \arcsin(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & e^x - 1 \sim x \\ \operatorname{arctg}(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 & a^x - 1 \sim x \ln a \\ 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 & \\ 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 & \end{array}$$

Сумма б.м.ф. и б.б.ф.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n &\sim a_nx^n \text{ при } x \rightarrow \infty \\ a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n &\sim a_1x \text{ при } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$