Аналитическая геометрия. Лекции

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением.*

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Определение 8. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора $\vec{a}$ на число δ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\delta > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \tag{3}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \tag{5}$$

$$\lambda (p \vec{a}) = (\lambda p)\, \vec{a} \tag{6}$$

$$(\lambda + q)\, \vec{a} = \lambda \vec{a} + q \vec{a} \tag{7}$$

Определение 10. Разностью векторов и называется вектор , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала вектооров и
2. Вектор, который идёт из конца вектора в начало вектора и есть искомый вектор .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L.

Определение 12. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на прямую** L.

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на ось** $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называеют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора** $\vec{l}$.

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $cos\phi = \widehat{\vec{a}\vec{l}}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 16.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$
$$\text{где } \lambda_i - \text{произвольные числа}$$

называется линейной комбинацией системы векторов $\vec{a}$, а числа λ - коэффициентом линейнгой комбинации.

Если $\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *правильной*.
Если $\neg\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *неправильной*.

Определение 17. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевомувектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$$

Определение 18. Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Теорема 4. Система векторов линейно-независима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство. 1). Пусть система векторов линейно-зависима.
Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a_n}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.
Получаем:

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3} + \ldots + \beta_n\vec{a_n}$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство. 2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другиз векторов системы (возьмем $\vec{a_1}$. Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a_1} - \lambda_2\vec{a_2} - \lambda_3\vec{a_3} - \ldots - \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой.* □

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 5. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарный.*

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть система векторв $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ линейно-зависима. Тогда по определению $\exists$ тривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 1$, тогда $\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2}$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a_1} = \beta\vec{a_2}$. По определению произведение вектора на число $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ коллинеарны. 2) Достаточность.
Пусть $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$. Тогда $\vec{a_1} = \lambda\vec{a_2}$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a_1} - \lambda\vec{a_2} = \vec{0}$$

По определению $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ являются линейной зависимостью. □

Теорема 6. Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. (1) Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.
Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i. Проведём через A_1 прямую, параллельную $\vec{a_3}$.

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}\end{gathered}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$, то $\vec{a_1} = \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$. □

Теорема 7. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов
- $\vec{\emptyset} \in V_1$ является базисом в этом пространстве.

Пространство $\mathbf{V}_1$

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda \vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$), тогда $\vec{x} = \lambda \vec{e}$ называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e}$ в V_1, а λ - координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

Пространство $\mathbf{V}_2$

Любые упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2.
Пусть в V_2 $\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис $V_2, \vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2}$$

- разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. λ_1 и λ_2 называются координатами $\vec{x}$ в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство $\mathbf{V}_3$

Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3.

Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - упорядоченная тройка векторов в V_3, $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$$

Данное выражение называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в V_3, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются корординатами $\vec{x}$ в базисе.
Базис в V_3, если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 19. **Ортонормированный базис** - ортогональный базис из $\vec{e}$ векторов.