

## Лекция 1: Математический анализ

**Математический анализ** - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

## 1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

**Определение 1. Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

**Пример.**  $2 + 3 = 5$  - истинно,  $3 < 0$  - ложно

### 1.1 Логические символы

$\wedge$  - конъюнкция (логическое "И")

$\vee$  - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")

$\Rightarrow$  - импликация ("если A то B")

$\Leftrightarrow$  - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$  - существует

$\nexists$  - не существует

$\exists!$  - существует единственный элемент

$\forall$  - для каждого

## 2 Теория множеств

**Определение 2. Множество** - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

### 2.1 Символы теории множеств

•  $\in$  - принадлежит

•  $\notin$  - не принадлежит

- $\subset$  - включает
- $\subseteq$  - включает, возможно равенство
- $\equiv$  - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- $\emptyset$  - пустое множество

## 2.2 Операции со множествами

- $\cup$  - объединение множеств
- $\cap$  - пересечение множеств

### Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Определение 3.** Подмножество - множество  $A$  называется подмножеством  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ .

**Определение 4.** Универсальное множество - такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

## 2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

## 2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$  - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \dots\}$  - множество иррациональных чисел

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$  - множество действительных чисел

**Замечание.** Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## 2.5 Промежутки

**Определение 5.** Промежуток - подмножество  $X$  множества  $\mathbb{Q}$ , где  $\forall x_1, x_2 \in X$  этому множеству принадлежат все  $x$ , где  $x_1 < x < x_2$ .

### 2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

## 2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  - малые положительные величины

**Определение 6.** Окрестностью точки  $x_0$  называется любой интервал, содержащий эту точку

**Определение 7.**  $\delta$  - окрестностью  $(S(x_0, \delta))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\delta$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 8.**  $\varepsilon$  - окрестностью  $(S(x_0, \varepsilon))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\varepsilon$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 9.** Окрестностью  $+\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 10.** Окрестностью  $-\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 11.** Окрестностью  $\infty$  называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

## Лекция 2: Математический анализ

### 3 Числовая последовательность

**Определение 12.** Числовая последовательность - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой  $\forall n \in \mathbb{N}$  можно записать соответствующий элемент последовательности.

**Замечание.** Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

**Пример.**

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности два

**Пример.**

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности одно

**Пример.**

$$x_n = 2 * 1^n$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **неубывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.** 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5...

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **возрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **невозрастающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется **убывающей**, если каждый последующий член  $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

**Пример.** 1, 2, 3, 2, 1...

Постоянная последовательность

**Пример.** 1, 1, 1, 1, 1...

## 4 Предел последовательности

**Определение 13.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется натуральное число  $N(\varepsilon)$ , такое, что если порядковый номер  $n$  члена последовательности станет больше  $N(\varepsilon)$ , то имеет место неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

**Замечание.** Т.е. начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$  все элементы последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

## 4.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon &< x_n < a + \varepsilon \\ \forall n &> N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый  $\varepsilon$  мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , причем чем  $\varepsilon \downarrow$ , тем  $N(\varepsilon) \uparrow$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть  $\varepsilon = 0.3$ ,  $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , т.е.  $(-0.3; 0.3)$

Получается два элемента  $x_1, x_2 \notin (-0.3; 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$

$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$

$$x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3; 0.3)$$

**Определение 14.** Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

**Определение 15.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **ограниченной снизу (сверху)**, если  $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$ , что для всех  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $x_n \geq m$  ( $x_n \leq M$ )

**Определение 16.** Последовательность  $x_n$  называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$  или  $|x_n| \leq M$ .

**Определение 17.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **фундаментальной**, если для любого  $\varepsilon > 0$   $\exists$  свой порядковый номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $m \geq N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 1.** Критерий Коши существования предела последовательности

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} - \text{сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{фундаментальная.}$$

## Лекция 3: Математический анализ

### 4.2 Свойства сходящихся последовательность

**Теорема 2.** *О существовании единственности предела последовательности*

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

**Доказательство.** Аналитическое доказательство. Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся последовательность.

Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  более одного предела.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} &= b \\ a &\neq b\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем  $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$ .

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned}3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &= 2\varepsilon\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным  $\Rightarrow$  последовательность  $x_n$  имеет единственный предел.  $\square$

**Доказательство.** Геометрическое доказательство

Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности  $x_n$  в две непересекающиеся окрестности.  $\square$

**Теорема 3.** *Об ограниченности сходящейся последовательности.*

Любая сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$ .

Тогда для  $\forall n \in \mathbb{N}$  будет верно  $|x_n| \leq M$  - это и означает, что последовательность  $x_n$  - ограниченная.  $\square$

**Теорема 4.** *Признак сходимости Вейерштрасса.*

Ограниченная монотонная последовательность сходится.

#### 4.2.1 Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$

**Теорема 5.** Последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})$  имеет предел равный  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

#### 4.2.2 Гиперболический функции

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  - гиперболический синус

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  - гиперболический косинус

$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  - гиперболический тангенс

$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  - гиперболический котангенс

Основное гиперболическое тождество

$$ch^2(x) + sh^2(x) = 1$$

$$sh 2x = 2sh(x)ch(x)$$

$$ch 2x = ch^2 x - sh^2 x$$

## 5 Предел функции

**Определение 18.** Окрестностью, из которой исключена точка  $x_0$  называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

**Определение 19.** *Определение функции по Коши или на языке  $\varepsilon$  и  $\delta$ .* Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$  такое что  $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$  будет верно нера-



венство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Еще несколько вариантов записи:

$$\dots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow \dots$$

$$\dots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \dots$$

$$\dots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dots$$

Для последней части:

$$\dots \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\dots \Rightarrow f(x) \in S(a, \varepsilon)$$

### Геометрический смысл предела функции

Если для  $\forall S(a; \varepsilon$  найдется  $S(x_0; \delta)$ , то соответствующее значение функции лежат в  $S(a; \varepsilon$  (полоса  $2\varepsilon$ ).

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

**Определение 20.** Определение предела функции по Гейне или на языке последовательностей.

Число  $a$  называется пределом  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если эта функция определена в окрестности точки  $a$  и  $\forall$  последовательности  $x_n$  из области определения этой функции, сходящейся к  $x_0$  соответствующая последовательность функций  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a)$$

### Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$  (на языке математики  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ) соответствующие значения  $f(x_n)$  достаточно близко расположены к  $a$  (на языке математики -  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ )

**Теорема 6.** Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

## 5.1 Ограниченная функция

**Определение 21.** Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента  $x$ , если  $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$ .

Если  $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$ , то функция  $f(x)$  называется *неограниченной*.

**Определение 22.** Функция называется **локально ограниченной** при  $x \rightarrow x_0$ , если существует проколота окрестность с центром в точке  $x_0$ , в которой данная функция ограничена.

**Пример.**

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

В данном случае:

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1, M = 1$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\pi}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\pi}\right)$$

## 6 Основные теоремы о пределах

**Теорема 7.** *О локальной ограниченности функции, имеющей предел.*  
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.