Математический анализ. Лекции

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. **Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1 Логические символы

$\wedge$ - конъюнкция (логическое "И")
$\vee$ - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
$\Rightarrow$ - импликация ("если A то B")
$\Leftrightarrow$ - эквивалетность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$ - существует
$\nexists$ - не существует
$!\exists$ - существует единствуенный элемент
$\forall$ - для каждого

2 Теория множеств

Определение 2. **Множество** - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

2.1 Символы теории множеств

- $\in$ - принадлежит
- $\notin$ - не принадлежит
- $\subset$ - включает

- $\subseteq$ - включает, возможно равенство

- $\equiv$ - тождественное равенство (для любого значения переменной

- $\emptyset$ - пустое множество

2.2 Операции со множествами

- $\cup$ - объединение множеств
- $\cap$ - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подномножествами которого являются все рассматриваемые множества.

2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел

- $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - множество целых чисел

- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел

- $I = \{\pi, \sqrt{2} \ldots\}$ - множество иррациональных чисел

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.5 Промежутки

Определение 5. Промежуток - подножество X множества $\mathbb{Q}$, где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x, где $x_1 < x < x_2$.

2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержаший эту точку

Определение 7. δ - окрестностью $(S(x_0, \delta)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью $(S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

3 Числовая последовательность

Определение 12. **Числовая последовательность** - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$
$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$
$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5\dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. 1, 2, 3, 2, 1...

Постоянная последовательность

Пример. 1, 1, 1, 1, 1...

4 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

‘

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a.

4.1 Геометрический смысл

$$|x_n - a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\forall n > N(\varepsilon)$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a, причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$
Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$
$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$
$$x_3., x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$

Определение 16. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. *Критерий Коши существования предела последовательности*
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ - сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

4.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. *О существовании единственности предела последовательности*
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} = b$$
$$a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$
$$\lim_{n\to\infty} = b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.
Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\varepsilon = |b-a| = |b-a+x_n-x_n| =$$
$$= |(x_n-a)-(x_n-b)| \leq |x_n-a| + |x_n-b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\Rightarrow$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Доказательство. Геометрическое доказательство
Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности.
□

Теорема 3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. □

Теорема 4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*
Ограниченная монотонная последовательность сходится.

4.2.1 Предел последовательности $\mathbf{x}_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Теорема 5. Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$ имеет предел равный e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

4.2.2 Гиперболический функции

$sh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус
$ch\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус
$th\,(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс
$cth\,(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс

Основное гиперболическое тождество

$$ch^2(x) + sh^2(x) = 1$$

$$sh2x = 2sh(x)ch(x)$$
$$ch2x = ch^2x - shs^2x$$

5 Предел функции

Определение 18. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0;\delta) = S(x_0;\delta) \setminus x_0$$

Определение 19. *Определение функции по Коши* или *на языке ε и δ* .
Число a называется пределом функции $y = f\,(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ будет верно нера-

венство $|f\,(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Еще несколько вариантов записи:

$$\ldots \forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ldots$$

Для последней части:

$$\ldots \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\ldots \Rightarrow f(x) \in S(a, \varepsilon)$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall S(a; \varepsilon$ найдется $S(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $S(a; \varepsilon$ (полоса 2ε).

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение 20. *Определение предела функции по Гейне* или *на языке последовательнсотей.*
Число a называется пределом $y = f\,(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x, достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики - $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$)

Теорема 6. Определение предела функции по Коши и по Гейне *эквивалентны.*

5.1 Ограниченная функция

Определение 21. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x, если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Определение 22. Функция называется **локально ограниченной** при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

Пример.

$$y = \sin(\frac{1}{x})$$

В данном случае:

$$|\sin(\frac{1}{x}) \leq 1, M = 1$$

$$x \in (-\frac{1}{\pi}; 0) \cup (0; \frac{1}{\pi})$$

6 Основные теоремы о пределах

Теорема 7. *О локальной ограниченности функции, имеющей предел.* Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.