Аналитическая геометрия. Лекции

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Определение 8. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$
$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \tag{3}$$
$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \tag{4}$$
$$\lambda \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \tag{5}$$
$$\lambda (p \vec{a}) = (\lambda p) \, \vec{a} \tag{6}$$
$$(\lambda + q) \, \vec{a} = \lambda \vec{a} + q \vec{a} \tag{7}$$

Определение 10. Разностью векторов и называется вектор , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала вектооров и
2. Вектор, который идёт из конца вектора в начало вектора и есть искомый вектор .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L.

Определение 12. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на прямую** L.

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора** $\overrightarrow{AB}$ **на ось** $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называеют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора** $\vec{l}$.

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $cos\phi = \widehat{\vec{a}\vec{l}}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 16.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$
$$\text{где } \lambda_i - \text{произвольные числа}$$

называется линейной комбинацией системы векторов $\vec{a}$, а числа λ - коэффициентом линейной комбинации.

Если $\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *тривиальной*. Если $\neg\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *нетривиальной*.

Определение 17. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$$

Определение 18. Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Теорема 4. Система векторов линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство. 1). Пусть система векторов линейно-зависима. Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a_n}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.
Получаем:

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3} + \ldots + \beta_n\vec{a_n}$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство. 2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другиз векторов системы (возьмем $\vec{a_1}$. Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a_1} - \lambda_2\vec{a_2} - \lambda_3\vec{a_3} - \ldots - \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*. □

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 5. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть система векторв $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ линейно-зависима. Тогда по определению $\exists$ нетривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2}$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a_1} = \beta\vec{a_2}$. По определению произведение вектора на число $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ коллинеарны. 2) Достаточность.
Пусть $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$. Тогда $\vec{a_1} = \lambda\vec{a_2}$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a_1} - \lambda\vec{a_2} = \vec{0}$$

По определению $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ являются линейной зависимостью. □

Теорема 6. Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. (1) Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.
Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i. Проведём через A_1 прямую, параллельную $\vec{a_3}$.

$$\overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2}$$
$$\overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2'} = \overrightarrow{OA_3'}$, то $\vec{a_1} = \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$. □

Теорема 7. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

Определение 19. **Базис** - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов

Пространство $\mathbf{V}_1$

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda\vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$). Тогда $\vec{x} = \lambda\vec{e}$ называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e}$ в V_1, а λ - координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

Пространство $\mathbf{V}_2$

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2.
Пусть в V_2 $\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис $V_2, \vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2}$$

- разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. λ_1 и λ_2 называются координатами $\vec{x}$ в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство $\mathbf{V}_3$

Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3.

Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - упорядоченная тройка векторов в V_3, $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$$

Данное выражение называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в V_3, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются корординатами $\vec{x}$ в базисе.
Базис в V_3, если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 20. **Ортонормированный базис** - ортогональный базис из $\vec{e}$ векторов.

Теорема 8. *О разложении вектора по базису*
Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Доказательство. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ - не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e_1} + \rho \vec{e_2} + \rho \vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\,\vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\,\vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\,\vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 & & \lambda_1 = \delta_1 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 & \Rightarrow & \lambda_2 = \delta_2 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 & & \lambda_3 = \delta_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. □

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис $\vec{i}, \vec{j}$.

$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OA} \parallel \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x_a\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = y_a\vec{j}$$
$$\Rightarrow \vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Тогда:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$

Задание

Разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}, \vec{c}$.
Дано:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha - 1 \end{cases}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

4 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

Тогда:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\}$$
$$k\vec{a} = \{kx_a, ky_a, kz_a\}$$

Замечание. $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda = const$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_b \end{cases} \Rightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

Пример. В V_2:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$$
$$\cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$$

Пример. Для V_3:

$$\begin{matrix} \cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} & & x_a = |\vec{a}|\cos\alpha \\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|} & & y_a = |\vec{a}|\cos\beta \\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} & & z_a = |\vec{a}|\cos\gamma \end{matrix}$$

Возведём в квадрат:

$$|\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В результате получаем орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e_a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

4.1 Скалярное произведение векторов

Определение 21. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

4.1.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.
$$\vec{a}^2 \geq 0$$
$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3. Дистрибутивность
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

4.1.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

Тогда:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}\right)\left(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}\right) \\
= x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b(\vec{i}\cdot\vec{j}) + x_a z_b(\vec{i}\cdot\vec{k}) \\
+ y_a x_a(\vec{i}\cdot\vec{j}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b(\vec{j}\cdot\vec{k}) \\
+ z_a x_b(\vec{i}\cdot\vec{k}) + z_a y_b(\vec{j}\cdot\vec{k}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\
= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}
$$

4.1.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, то:

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\
= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\
= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}}
$$

4.2 Векторное произведение векторов

Определение 22. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 23. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 24. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

4.2.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикомунитативность
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Дистрибутивность
$$(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$

3. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

4.2.2 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a y_a, x_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1,2,-1), \quad B(-1,1,0), \quad C(0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-2,-1,1\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-1,-3,3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0,5,5\} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

4.3 Смешанное произведение

Определение 25. Смешанное поизведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

4.3.1 Свойства смешанных произведений

1. **Свойство перестановки (кососимметричности)**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

> **Замечание.** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
> $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. **Свойство ассоциативности**

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

> **Доказательство.**
> $$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$
> □

> **Замечание.** Примечание: это работает для любого положения λ.

4. **Свойство коммутативности**

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

> **Доказательство.**
> $$\begin{aligned}(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{d} \\ &= \vec{a_1}\vec{d} + \vec{a_2}\vec{d} \\ &= \vec{a_1}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a_2}(\vec{b}\vec{c}) \\ &= \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}\end{aligned}$$
> □

> **Замечание.** Работает не только для $\vec{a}$, но и векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

4.3.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, .z_b\}$$
$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \{\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\} \cdot \vec{c} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c =$$
$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

4.3.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелипипеда. Тогда $V_{paral} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Замечание.

$$V_{pyramid} = \frac{1}{6}V_{paral} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

5 Прямая на плоскости

5.1 Способы задания прямой

5.1.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор паралеллен прямой). Выберем на прямой l произвольную точку M. Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

5.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t. Тогда:

$$\begin{matrix} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

5.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0, M_1}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

5.1.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b. Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

5.1.5 С угловым коэффициентом

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда из прямоугольного треугольника $\triangle M_0AM$:

$$\triangle M_0AM : \operatorname{tg}\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$\text{Пусть } \operatorname{tg}\varphi = k$$
$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - yo = kx - x_0$$
$$y = kx - kx_0 + y_0$$
$$-kx_0 + y_0 = const = b$$
$$\boxed{y = kx + b}$$

5.1.6 Общего вида

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, а также дан перпендикулярный ей вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Выберем произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$\vec{n} = \{A, B\} \qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Обозначим: $-Ax_0 - By_0 = const = C$. Получаем:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

5.2 Угол между прямыми

5.2.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

$$l_1 : \frac{x - 0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1}$$
$$l_2 : \frac{x - \widetilde{x}_0}{m_2} = \frac{y - \widetilde{y}_0}{n_2}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между направляющими векторами $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ для соответствующий прямых.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = (\widehat{\vec{S_1}, \vec{S_2}}) = \varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}|}{|\vec{S_1}| \cdot |\vec{S_2}|}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}$$

5.2.2 Прямые, заданные общими уравнениями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$
$$\vec{n_1} = \{A_1, B_1\}$$
$$\vec{n_2} = \{A_2, B_2\}$$

Угол между прямыми l_1, l_2 соответствует углу между нормалями $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ к соответствующим прямым.

$$\widehat{(l_1, l_2)} = (\widehat{\vec{n_1}, \vec{n_2}}) = \varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

5.2.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

$$\begin{cases} l_1 : y = k_1 x + b_1, & k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \\ l_2 : y = k_2 x + b_2, & k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi 2} =$$

$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = arctg \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

5.3 Условие параллельности прямых

5.3.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

5.3.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$$

5.3.3 Прямые, заданные угловыми коэффициентами

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{k_2 = k_1}$$

5.4 Условие перпендикулярности прямых

5.4.1 Прямые, заданные каноническими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{S_1} \perp \vec{S_2} \Rightarrow \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

5.4.2 Прямые, заданные общими уравнениями

Если $l_1 \perp l_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} = 0}$$

5.4.3 Прямые, заданные угловыми коэффициаентами

Если $l_1 \perp l_2$, то:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \nexists \operatorname{tg}\varphi \quad \Rightarrow \quad 1 + k_1 k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 k_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

5.5 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана общим уравнением:

$$l : Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{n} = \{A, B\}$$

Требуется найти расстояние от точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямой l.

Возьмём на прямой l произвольную точку M. Тогда расстояние от точки M_0 будет равно проекции вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на направление вектора нормали прямой l.

$$\rho(M_0, l) = np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0}$$
$$\overrightarrow{MM_0} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = |\vec{n}| \cdot |MM_0| \cdot \cos\varphi = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0}$$
$$\Rightarrow np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{\vec{n}} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Из общего уравнения прямой l:

$$-Ax - By = C$$
$$\boxed{\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(1, -2)$ до прямой $l : y = 3x - 1$.

$$3x - y - 1 = 0 \text{ - общее уравнение прямой}$$
$$Ax + By + C = 0$$

$$\rho(M_0, l) = \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

6 Уравнение плоскости

6.1 Способы задания плоскости

6.1.1 Через три точки

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, которые принадлежат плоскости α.

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Выберем точку на плоскости α точку $M(x, y, z)$.
Составим вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_1 - x_3, y - y_3, z - z_3\}$$

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ - компанарны, а значит:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

Следовательно:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.2 Через две точки с направляющим вектором

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$\vec{S} = \{m, n, p\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \overrightarrow{M_1, M_2}, \vec{S}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.3 Проходящей через точку с двумя направляющими векторами

Пусть даны:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$\vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\} \in \beta$$
$$\vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\} \in \beta$$
$$\alpha \parallel \beta$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{M_1, M}, \vec{S_1}, \vec{S_2}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

6.1.4 Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость α отсекает от координатного угла отрезки a, b, c на осях x, y, z соответственно. Обозначим точки пересечения A, B, C. Тогда:

$$A(a, 0, 0) \quad B(0, b, 0) \quad C(0, 0, c)$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектора:

$$\overrightarrow{AM} = \{x - a, y, z\}$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-a, b, 0\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-a, 0, c\}$$

Тогда вектора $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ - компланарны, а следовательно:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{Ac} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-a) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + y \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix} + z \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-a)bc - y(-ac) + zab = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

6.1.5 Общее уравнение

Пусть даны:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\} \text{ - вектор нормали}$$

Выберем на плоскости α произвольную точку M

$$M(x, y, z) \in \alpha$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Тогда:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D$$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

6.2 Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + Cz_1 + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + Cz_2 + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Угол между плоскостями α_1, α_2 равен углу между нормалями n_1, n_2 к этим плоскостям.

Тогда можно найти:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} =$$

$$= \boxed{\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

6.2.1 Условие перпендикулярности

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

6.2.2 Условие параллельности

Если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, то $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

> **Замечание.** Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **совпадают**.

> **Замечание.** Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости **не совпадают**.

6.3 Расстояние от точки до прямой

Пусть плоскость α задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cx + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Возьмём некоторую точку $M(x, y, z) \in \alpha$. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Тогда модуль проекции $\overrightarrow{MM_0}$ на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдем:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos\varphi}_{np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\
&= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\
&= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D
\end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = |np_{\vec{n}\overrightarrow{M_0M}}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

7 Прямая в пространстве

7.1 Способы задания прямой в пространстве

7.1.1 Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая l проходит через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y, z)$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

7.1.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \\ \frac{z-z_0}{p} = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}}$$

7.1.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Возьмём на прямой l точку $M(x, y, z)$. Составим два вектора:

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Отсюда:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{M_0M_1} \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

7.1.4 Общее уравнение

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Если $\alpha_1 \not\parallel \alpha_2$, то они пересекаются по прямой l. Тогда $\forall M(x, y, z) \in l$ будет выполнятся система:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$

Пример. Составить уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей:

$$\alpha_1 : 2x + y - z + 4 = 0$$
$$\alpha_2 : 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Для того, чтобы содать уравнение прямой l, нужно знать $M_0(x_0, y_0, z_0)$ направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$.

$$\text{Из } (1) \ \Rightarrow \vec{n_1} = \{2, 1, -1\}$$
$$\text{Из } (2) \ \Rightarrow \vec{n_2} = \{3, 2, 1\}$$
$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

Найдем точку M_0. Пусть $z_0 = 0$ (прямая обязательно пересечёт плоскость oXY):

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 + 2y_0 + 8 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 + -6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -14 \\ y_0 = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0(-14, 24, 0)$$

Найдем направляющий вектор $\vec{S}$

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{n_2} \cdot \vec{n_1} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \{-3, 5, 1\}$$

Составим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x + 14}{-3} = \frac{y - 24}{5} = \frac{z}{-1}$$

7.2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки M_1 и есть искомое расстояние от точки M_1 до прямой l.

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$
$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$
$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M_1 \times S} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1 \times S}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \Rightarrow$$

$$\rho(M_1, l) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

7.2.1 Расстояние между параллельными прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,z_0), \vec{S_1} = \{m_1,n_1,p_1\}$$
$$l_2: \frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2} \Rightarrow M_0(x_0,y_0,z_0), \vec{S_2} = \{m_2,n_2,p_2\}$$
$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет высота данного параллелограмма.

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & p_1 \end{vmatrix}^2, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}}$$

7.2.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \Rightarrow M_1(x_1,y_1,z_1), \quad \vec{S_1} = \{m_1,n_1,p_1\}$$
$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \Rightarrow M_2(x_2,y_2,z_2), \quad \vec{S_2} = \{m_2,n_2,p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$

Вектора $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить параллелепипед. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$V = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|$$
$$V = h \cdot S$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\vec{s_1} \times \vec{s_2}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(l_2, l_1) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}}}$$

7.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

7.3.1 Совпадают

Если прямые l_1 и l_2 **совпадают**, то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_1} = \frac{p_1}{p_1}$$
$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.2 Параллельны

Если прямые l_1 и l_2 **параллельны** то:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

И **не** выполняется условие:

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}$$

7.3.3 Пересекаются

Если прямые l_1 и l_2 **пересекаются**, они лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ - компланарны:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} = 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

7.3.4 Скрещиваются

Если прямые l_1 и l_2 **скрещиваются**, то они не лежат в одной плоскости. В таком случае вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ - некомпланарны:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \neq 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$