Математический анализ. Лекции

1 Основы математического анализа

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1.1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. **Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2+3=5$ - истинно, $3<0$ - ложно

1.1.1 Логические символы

$\wedge$ - конъюнкция (логическое "И")
$\vee$ - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
$\Rightarrow$ - импликация ("если A то B")
$\Leftrightarrow$ - эквивалетность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$ - существует
$\nexists$ - не существует
$!\exists$ - существует единствуенный элемент
$\forall$ - для каждого

1.2 Теория множеств

Определение 2. **Множество** - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

1.2.1 Символы теории множеств

- $\in$ - принадлежит

- $\notin$ - не принадлежит

- $\subset$ - включает

- $\subseteq$ - включает, возможно равенство

- $\equiv$ - тожденственное равенство (для любого значения переменной

- $\emptyset$ - пустое множество

1.2.2 Операции со множествами

- $\cup$ - объединение множеств
- $\cap$ - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \land x \in B\} A \cap B = \{x : x \in A \lor x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подномножествами которого являются все рассматриваемые множества.

1.2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:
$$A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$
2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:
$$B = \{x : Q(x)\}.$$

1.2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел

- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - множество целых чисел

- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел

- $I = \{\pi, \sqrt{2} \dots\}$ - множество иррациональных чисел

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Промежутки

Определение 5. Промежуток - подножество X множества $\mathbb{Q}$, где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x, где $x_1 < x < x_2$.

1.2.5 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

1.2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержаший эту точку

Определение 7. δ - окрестностью $(S(x_0, \delta)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью $(S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

2 Числовая последовательность

Определение 12. **Числовая последовательность** - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$
$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$
$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5 \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. $1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1 \ldots$

Постоянная последовательность

Пример. $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \ldots$

2.1 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

‘

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a.

2.1.1 Геометрический смысл

$$|x_n - a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\forall n > N(\varepsilon)$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a, причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$
Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$
$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$
$$x_3., x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$

Определение 16. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. *Критерий Коши существования предела последовательности*
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ - сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

2.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. *О существовании единственности предела последовательности*
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} = b$$
$$a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$
$$\lim_{n\to\infty} = b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.
Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\varepsilon = |b-a| = |b - a + x_n - x_n| =$$
$$= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\Rightarrow$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Доказательство. Геометрическое доказательство
Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности.

□

Теорема 3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. □

Теорема 4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*
Ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2.1 Предел последовательности $\mathbf{x}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Теорема 5. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ имеет предел равный e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

3 Предел функции

Определение 18. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0;\delta) = S(x_0;\delta) \setminus x_0$$

Определение 19. *Определение функции по Коши* или *на языке* ε *и* δ .
Число a называется пределом функции $y = f\,(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ будет верно неравенство $|f\,(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\dots\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \Rightarrow \dots$$
$$\dots\forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \dots$$
$$\dots\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dots$$

$$\ldots \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$\ldots \Rightarrow f(x) \in \mathring{S}(a, \varepsilon)$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall \mathring{S}(a; \varepsilon)$ найдется $\mathring{S}(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $\mathring{S}(a; \varepsilon)$ (полоса 2ε):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x_1) - a| < \varepsilon$$

Определение 20. *Определение предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей.*
Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x, достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики - $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$)

Теорема 6. Определение предела функции по Коши и по Гейне *эквивалентны.*

3.1 Ограниченная функция

Определение 21. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x, если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной.*

Определение 22. Функция называется **локально ограниченной** при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

3.2 Основные теоремы о пределах

Теорема 7. *О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.*
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{matrix} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{matrix} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 8. *О единственности предела функции.*
Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 - a и b. Тогда:

$$\lim_{x\to x_0} = a \tag{1}$$
$$\lim_{x\to x_0} = b \tag{2}$$
$$a \neq b, \text{ пусть } b > a$$

$$(1) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_1 > 0)(\exists\delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$
$$(2) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_2 > 0)(\exists\delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1)$$
$$(2) \Rightarrow b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ будет верно (1) и (2) одновременно.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$:

$$(1) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$(2) \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным. Функция имеет единственный предел. □

Теорема 9. *О сохранении функцией знака своего предела*
Если $\lim\limits_{x \to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ □

Следствие. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 и знакопостоянна в $\mathring{S}(x_0, \delta)$, тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

Теорема 10. *О предельном переходе в неравенстве.*

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in S(x_0,\delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

□

Пример. Пусть $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ и $x_0 = 0$.

$$\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \qquad 0 < x^2$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} g(x)$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

Теорема 11. *О пределе промежуточной функции.*
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta)$ верно неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0,\delta) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \le h(x) \le g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$\begin{aligned} &(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \\ &(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0 \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon)$$
$$\Rightarrow \text{по определению предела}$$
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = a$$

□

Теорема 12. *О пределе сложной функции.*
Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{aligned} &y = f(x) \\ &\lim_{x \to x_0} f(x) = a \\ &\lim_{y \to a} \varphi(y) = C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \to a} \varphi(y) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \Rightarrow |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \qquad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1 \qquad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = c$$

□

4 Бесконечно малые функции

Определение 23. Функция называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в**.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Замечание. Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.

Бесконечно малые функции обозначаются $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \ldots$

Пример.

$$y = x - 2$$

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$ при $x \to 0$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(\frac{1}{x})$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

$y = \sin(\frac{1}{x})$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой.

4.1 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 13. *О сумме конечного числа бесконечно малых функций.* Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например две: $\alpha(x), \beta(x)$. Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{1}$$
$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{2}$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$
$$\Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)$$

Тогда по определнию бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

□

Теорема 14. *О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную.*
Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists\delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \quad (1)$$
$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x)| < M \quad (2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Пример.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к. $\sin(x)$, при $x \to \infty$ является локально ограниченной $\sin(x) \le 1$.

Теорема 15. *О связи функции, её предела и бесконечно малой.* Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказательство. *Необходимость.*
Дано:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Достаточность.

Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

□

Следствие. Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие. Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

5 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0.

Теорема 16. Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 17. *О пределе отношения функций.*

Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

Теорема 18. *О пределе произведения функций.*
Предел произведения функций равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \qquad (1)$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \qquad (2)$$

По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции:

$$(1)\Rightarrow f(x)=a+\alpha(x),\text{ где }\alpha(x)\text{ - б.м.ф.}$$
$$(2)\Rightarrow f(x)=b+\beta(x),\text{ где }\beta(x)\text{ - б.м.ф.}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x)&=(a+\alpha(x))(b+\beta(x))\\ &=ab+\underbrace{a\cdot\beta(x)+b\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)}_{\gamma(x)}\\ &=ab+\gamma(x)\end{aligned}$$

По следствию из теоремы 15:

$$a\cdot\beta(x)=\text{б.м.ф. при }x\to 0$$
$$b\cdot\alpha(x)=\text{б.м.ф. при }x\to 0$$
$$\alpha(x)\cdot\beta(x)=\text{б.м.ф. при }x\to 0$$

По теореме о сумме конечного числа с б.м.ф.:

$$\gamma(x)=\text{б.м.ф. при }x\to 0$$

Далее расписываем предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))\\ &= \lim_{x\to x_0} ab + \lim_{x\to x_0}\gamma(x)\\ &= ab + 0\\ &= ab\end{aligned}$$

$\square$

Следствие.

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$$

6 Односторонние пределы

Определение 24. Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **слева**, если:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = A_1 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon)$$

Определение 25. Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 **справа**, если:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = A_2 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon)$$

Пределы справа и слева называют *односторонними пределами.*

Теорема 19. *О существовании предела функции в точке.*
Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел тогда и только тогда, когда существуют пределы справа и слева и они равны между собой.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

6.1 Пределы на бесконечности

Определение 26. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x > N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Определение 27. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

где N - большое число, $N > 0, N \in \mathbb{R}$.

Замечание.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x < -N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall x \in |x| > N) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$

6.2 Бесконечные пределы

Определение 28. Функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$$

где M - большое число, $M > 0, M \in \mathbb{R}$, а δ - малое число.

Замечание.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta(M) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$

Пример.

$$y = \operatorname{arctg}(x), \qquad x \to \infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Пример.

$$y = \ln(x), \qquad x \to 0$$
$$\lim_{x \to 0-} = \nexists$$
$$\lim_{x \to 0+} = -\infty$$

Пример.

$$y = \sqrt{-x}, \qquad x \to 0$$
$$\lim_{x \to 0+} = \nexists$$
$$\lim_{x \to 0-} = 0$$

Пример.

$$y = \frac{1}{|x-2|}, \qquad x \to 2$$
$$\lim_{x \to 2+} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2-} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

Определение 29. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой функцией** (далее - **б.б.ф.** если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Бесконечный предел на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N(M) > 0)(\forall x \in |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M)$$

6.3 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функциях

Теорема 20. *О связи бесконечно малой и бесконечно большой функции.*
Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Доказательство. По условию $\alpha(x)$ - б.б.ф при $x \to x_0$. По определению:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists\delta(M)>0)(\forall x\in \mathring{S}(x_0,\delta)\Rightarrow |f(x)|>M)$$

Рассмотрим неравенство:

$$|\alpha(x)|>M, \forall x\in \mathring{S}(x_0,\delta)$$

Обозначим $\varepsilon=\frac{1}{M}$.

$$|\alpha(x)>M|\Rightarrow \frac{1}{|\alpha(x)|}<\frac{1}{M}$$
$$\Rightarrow |\frac{1}{\alpha(x)}|<\frac{1}{M}<\varepsilon$$

В итоге получаем:

$$\forall x\in \mathring{s}(x_0,\delta)\Rightarrow |\frac{1}{\alpha(x)}|<\varepsilon$$

Что по определению является бесконечно малой функцией. □

1-ый замечательный предел

Теорема 21.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$

Доказательство. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x}=1$. Потом $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

Пусть α - угол в радианах, $x\to 0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Тут должен быть рисунок, но его пока нет :(.

Окружность $R=1$.

Отложим луч OK под углом к оси oX равным x, где $O(0,0), K\in$ окружности.

$KH\perp OA$.

Рассмотрим $\triangle OKH$. $OA=1$ как радиус. $\sin(x)=\frac{KH}{OA}=KH$.

Рассмотрим $\triangle OLA$. $OA=1$ как радиус. $\operatorname{tg}(x)=\frac{LA}{OA}=LA$.

Из геометрических построений (да будут они когда-нибудь…):

$$S_{\triangle OKA}<S_{secOKA}<S_{\triangle OLA}$$

$$S_{\triangle OKA}=\frac{1}{2}OA\cdot KH=\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{\sin(x)}{2}$$
$$S_{secOKA}=\frac{1}{2}OA\cdot OK\cdot KA=\frac{1}{2}\cdot x=\frac{x}{2}$$
$$S_{\triangle OLa}=\frac{1}{2}OA\cdot LA=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg}(x)=\frac{tg(x)}{2}$$

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(x) < x < tg(x) \\ x \to 0+ \Rightarrow \begin{cases} \sin(x) > 0 \\ \operatorname{tg}(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) \quad | : \sin(x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве:

$$\lim_{x \to 0+} \cos(x) \leq \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

По теореме о промежуточной функции:

$$\lim_{x \to 0+} \cos(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Аналогично для $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Т.к. односторонние пределы равны:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=\begin{vmatrix}t=\arcsin(x)\\ x\to 0, t\to 0\end{vmatrix}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}=\begin{vmatrix}x=\operatorname{tg}(t)\\ x\to 0, t\to \infty\end{vmatrix}$$
$$=\lim_{t\to \infty}\frac{t}{\operatorname{tg}(t)}$$
$$=\lim_{t\to \infty}\frac{1}{\frac{tg(t)}{t}}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \left|\begin{matrix}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos(x)}{2}\\ 1-\cos(x)=2\sin^2\frac{x}{2}\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-2}{x^2} \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{(\frac{x}{2})^2}{x^2} \\ &= 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Второй замечательный предел

Теорема 22.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)=e}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \left|\begin{matrix}x=\frac{1}{t}\\ x\to 0, t\to\infty\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \\ &= e\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x}{x} &= \frac{1}{x}\log_a(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_a e = \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} &= \begin{vmatrix} e^x - 1 = t \\ x = \ln(t+1) \\ x \to 0, t \to 0 \end{vmatrix} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \left|\begin{matrix} a^x-1=t \\ x=\log_a(1+t) \\ x\to 0, t\to 0\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a\end{aligned}$$

□

7 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, которые являются б.м.ф. при $x\to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Рассмотрим варианты:

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$$

  $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

  $$\boxed{\alpha(x)=o(\beta(x),\ \text{при } x\to x_0}$$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$$

  $\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$.

  $$\boxed{\beta(x)=o(\alpha(x),\ \text{при } x\to x_0}$$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентны.

$$\boxed{\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0}$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const$$

  $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - одного порядка малости.

  $$\boxed{\begin{matrix} \alpha(x) = O(\beta(x)) \\ \beta(x) = O(\alpha(x)) \end{matrix}, \text{ при } x \to x_0}$$

- $$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

  $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - несравнимы.

Определение 30. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const \neq 0$$

Определение 31. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми* , если:

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Определение 32. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* , если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Определение 33. Если:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$.

Определение 34. Б.м.ф. $\alpha(x)$ имеет порядок малости k относительно функции б.м.ф. $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = const \neq 0$$

где k – порядок малости.

7.1 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Теорема 23. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, при $x \to x_0$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ при $x \to x_0$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\gamma(x)\cdot\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1\cdot 1 = 1$$
$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x),\text{ при } x \to x_0$$

□

Теорема 24. *Необходимое и достаточное условие экваивалентных бесконечно малых функкий.*
Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$
$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) \\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)) \end{matrix} \quad \text{при } x \to x_0$$

Доказательство. Необходимость.
Дано:

$$\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)),\text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) \\ &= 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{1} = 0 \end{aligned}$$

Достаточность.

Дано:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$
$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

□

Теорема 25. *О суммы бесконечно малых разного порядка.*
Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф при } x \to x_0\\ &\alpha(x) = o(\beta(x)), \text{ при } x \to x_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1\\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

□

Следствие. Сумма б.б.ф. разного порядка роста эквивалентна слагаемому высшего порядка роста.

Теорема 26. *О замене функции на эквивалентную под знаком предела.*
Предел **отношения** двух б.м.ф. (б.б.ф) не изменится, если заменить

эти функции на эквивалентные.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(x), \beta(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0\\&\alpha(x) \sim \alpha_0(x)\\&\beta(x) \sim \beta_0(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha_0(x)}{\beta(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}{\beta(x) \cdot \alpha_0(x) \cdot \beta_0(x)}\\&= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_0(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}\\&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\end{aligned}$$

□

Таблица 1: Таблица эквивалентных б.м.ф

1-ый замечательный предел	2-ой замечательный предел
$\sin(x) \sim x$ при $x \to 0$	
$\operatorname{tg}(x) \sim x$ при $x \to 0$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin(x) \sim x$ при $x \to 0$	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$\operatorname{arctg}(x) \sim x$ при $x \to 0$	e^x x
$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$	a^x - 1 $\sim x \ln a$
$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$	

Сумма б.м.ф. и б.б.ф.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \sim a_n x^n \text{ при } x \to \infty$$
$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \sim a_1 x \text{ при } x \to 0$$

8 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определение 35. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x)$$

Множество непрерывных функций в точке x_0 обозначается $C(x_0)$

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow \text{ - функция непрерывна в точке } x_0$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \in C(0)$$

Определение 36. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется непрерывной в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки x_0 значение функции близки к $f(x_0)$.

$$y = f(x) \in C(x_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Определение 37. Функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 называется непрерывной в этой точке, если выполняются условия:

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$
2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x)$

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой точке в окрестности x_0. Выберем произвольный x в этой окрестности. Тогда:

$\boxed{\Delta x = x - x_0}$ - приращение функции

$\boxed{\Delta y = f(x) - f(x_0)}$ - соответствующее приращение функции

Определение 38. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

8.1 Односторонняя непрерывность

Определение 39. Функция $y = f(x)$ определённая в правосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $[x_0, x_0 + \delta)$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x\to x_0+} = f(x_0)$$

Определение 40. Функция $y = f(x)$ определённая в левосторонней окрестности точки x_0 (математическим языком - $(x_0 - \delta, x_0]$) называется непрерывной справа в этой точке, если:

$$\exists \lim_{x \to x_0-} = f(x_0)$$

Теорема 27. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.

Определение 41. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 42. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если:

1. Непрерывна на интервале (a, b)
2. Непрерывна в точке a справа
3. Непрерывна в точке b слева

- $C(a, b)$ - множество функций, непрерывных на интервале.
- $C[a, b]$ - множество функций, непрерывных на отрезке.
- $C(X)$ - множество функций, непрерывных на промежутке X.

8.2 Классификация точек разрыва

Определение 43. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке проколотой окрестности точки x_0 непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки x_0). Тогда точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Пусть точка x_0 - точка разрыва. Её можно классифицировать как:

- I-ого рода
  - Основное условие
    $$\exists \lim_{x \to x_0+-}$$
  - Точка конечного разрыва
    $$\lim_{x \to x_0+} \neq \lim_{x \to x_0-}$$
  - Точка устранимого разрыва
    $$\lim_{x \to x_0+} = \lim_{x \to x_0-} \neq f(x_0) \text{ или } \nexists f(x_0)$$

- II рода

$$\nexists \lim_{x \to x_0+-}$$

Определение 44. Если точка x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то x_0 называют точкой I-го рода.

Определение 45. Если точка x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$ и **не** существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называется точкой разрыва II-го рода.

Определение 46. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim\limits_{x \to x0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то x_0 называется точкой конечного разрыва или точкой *скачка*.

Определение 47. Если точка x_0 – точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$, и предел $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, но $\nexists f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Примеры

Пример.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x = 1 \text{ - точка разрыва}$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ - т.р. I рода, точка скачка}$$

$$\Delta f = |\lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 1-} f(x)| = |1 - (-1)| = 2$$

Пример.

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)$$
$$\Rightarrow x = 0 - \text{ т.р. I рода, устранимая точка разрыва}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$
$$f(x) \notin C(0)$$
$$g(x) \in C(0)$$

Пример.

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ - т.р. II рода}$$

8.3 Свойства непрерывных функций в точке

Теорема 28. Пусть функции:

$$y = f(x) y = g(x) \in C(x_0)$$

Тогда:

$$f(x) + g(x) \in C(x_0)$$
$$(f \cdot g)(x) \in C(x_0)$$

Доказательство. По определению непрерывной функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Рассмотрим:

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$\Rightarrow (f\cdot g)(x) \in C(x_0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x_0}$$

□