

Математический анализ. Лекции

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. Высказывание - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1 Логические символы

\wedge - конъюнкция (логическое "И")

\vee - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")

\Rightarrow - импликация ("если А то В")

\Leftrightarrow - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

\exists - существует

\nexists - не существует

$\exists!$ - существует единственный элемент

\forall - для каждого

2 Теория множеств

Определение 2. Множество - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

2.1 Символы теории множеств

• \in - принадлежит

• \notin - не принадлежит

• \subset - включает

- \subseteq - включает, возможно равенство
- \equiv - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- \emptyset - пустое множество

2.2 Операции со множествами

- \cup - объединение множеств
- \cap - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \dots\}$ - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.5 Промежутки

Определение 5. Промежуток - подмножество X множества \mathbb{Q} , где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x , где $x_1 < x < x_2$.

2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку

Определение 7. δ - окрестностью $(S(x_0, \delta))$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью $(S(x_0, \varepsilon))$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

3 Числовая последовательность

Определение 12. Числовая последовательность - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

$$2, 2, 2, 2, 2 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5...

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. 1, 2, 3, 2, 1...

Постоянная последовательность

Пример. 1, 1, 1, 1, 1...

4 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε -окрестность точки a .

4.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon &< x_n < a + \varepsilon \\ \forall n &> N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε -окрестность точки a , причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$

Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$

$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$

$$x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ ($x_n \leq M$)

Определение 16. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ \exists свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. Критерий Коши существования предела последовательности

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} - \text{сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{фундаментальная.}$$

4.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. *О существовании единственности предела последовательности*

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.

Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} &= b \\ a &\neq b\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N})(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N})(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b - a|}{3}$$

$$\begin{aligned}3\varepsilon &= |b - a| = |b - a + x_n - x_n| = \\ &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon \\ 3\varepsilon &= 2\varepsilon\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, предположение не является верным \Rightarrow последовательность x_n имеет единственный предел. \square

Доказательство. Геометрическое доказательство

Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности. \square

Теорема 3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*

Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$.

Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. \square

Теорема 4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*

Ограниченная монотонная последовательность сходится.

4.2.1 Предел последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})$

Теорема 5. Последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})$ имеет предел равный e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

4.2.2 Гиперболический функции

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус

$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс

$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс

Основное гиперболическое тождество

$$ch^2(x) + sh^2(x) = 1$$

$$sh2x = 2sh(x)ch(x)$$

$$ch2x = ch^2x - shs^2x$$

5 Предел функции

Определение 18. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0; \delta) = S(x_0; \delta) \setminus x_0$$

Определение 19. *Определение функции по Коши* или на языке ε и δ . Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0$ найдется δ , зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0; \delta)$ будет верно нера-

венство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Еще несколько вариантов записи:

$$\dots \forall x \in \dot{S}(x_0; \delta) \Rightarrow \dots$$

$$\dots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \dots$$

$$\dots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dots$$

Для последней части:

$$\dots \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\dots \Rightarrow f(x) \in S(a, \varepsilon)$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall S(a; \varepsilon$ найдется $S(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $S(a; \varepsilon$ (полоса 2ε).

$$\forall x_1 \in \dot{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение 20. Определение предела функции по Гейне или на языке последовательностей.

Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0 , если эта функция определена в окрестности точки a и \forall последовательности x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x , достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$)

Теорема 6. Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

5.1 Ограниченная функция

Определение 21. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x , если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*.

Определение 22. Функция называется **локально ограниченной** при $x \rightarrow x_0$, если существует проколота окрестность с центром в точке x_0 , в которой данная функция ограничена.

Пример.

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

В данном случае:

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1, M = 1$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\pi}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\pi}\right)$$

6 Основные теоремы о пределах

Теорема 7. *О локальной ограниченности функции, имеющей предел.*
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.