

Аналитическая геометрия. Лекции

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранным на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**. Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два вектора называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется **единичным вектором** или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется \vec{c} , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора \vec{a} совмещают с началом вектора \vec{b}

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора \vec{a} к концу вектора \vec{b} и будет вектором \vec{c} .

Определение 8. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором \vec{c} .

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только по правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора \vec{a} на число δ называется вектор \vec{c} , который будет коллинеарен вектору \vec{a} , длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\delta > 0$, и противоположен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (3)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \quad (4)$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (5)$$

$$\lambda (p\vec{a}) = (\lambda p) \vec{a} \quad (6)$$

$$(\lambda + q) \vec{a} = \lambda \vec{a} + q\vec{a} \quad (7)$$

Определение 10. Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Вектор, который идёт из конца вектора \vec{b} в начало вектора \vec{a} и есть искомый вектор \vec{c} .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L .

Определение 12. Пусть имеем вектор \vec{AB} . Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора \vec{AB} на прямую L , а O_b - это ортогональная проекция конца вектора \vec{AB} на прямую L . Тогда вектор $\vec{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L , называется **ортогональной проекцией вектора \vec{AB} на прямую L** .

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\vec{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L , и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\vec{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора \vec{AB} на ось \vec{l}** .

$$pr_{\vec{l}}\vec{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор \vec{l} называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора \vec{l}** .

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора \vec{a} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению длины вектора \vec{l} на $\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{l}}{|\vec{a}||\vec{l}|}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна сумме ортогональных проекций вектора \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} .

$$pr_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{l}}\vec{a} + pr_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения \vec{a} и числа λ на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора \vec{a} .

$$pr_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda pr_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 16.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

где λ_i — произвольные числа

называется линейной комбинацией системы векторов \vec{a} , а числа λ — коэффициентами линейной комбинации.

Если $\forall \lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *правильной*.
Если $\exists \lambda \neq 0$, то линейную комбинацию называют *неправильной*.

Определение 17. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 &= 0 \end{aligned}$$

Определение 18. Система векторов называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Теорема 4. Система векторов линейно-независима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

1). Пусть система векторов линейно-зависима.

Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n \end{aligned}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.

Получаем:

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$$

Что и требовалось доказать. 2). Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов системы (возьмем \vec{a}_1). Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a}_1 - \beta_2 \vec{a}_2 - \beta_3 \vec{a}_3 - \dots - \beta_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*.

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 5. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

1) Необходимость.

Пусть система векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 линейно-зависима. Тогда по определению \exists тривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 1$, тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a}_1 = \beta \vec{a}_2$. По определению произведения вектора на число \vec{a}_1 и \vec{a}_2 коллинеарны. 2) Достаточность.

Пусть $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Тогда $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все влево:

$$\vec{a}_1 - \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$$

По определению \vec{a}_1 и \vec{a}_2 являются линейной зависимостью.

Теорема 6. Три вектора линейной зависимости тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

(1) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$$

Совместим начала \vec{a}_2 и \vec{a}_3 и построим $\beta_2 \vec{a}_2$ и $\beta_3 \vec{a}_3$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.

Т.к. \vec{a}_1 лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i . Проведём через A_1 прямую, параллельную \vec{a}_3 .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA'_2} &\parallel \overrightarrow{OA_2} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_2} &= \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \overrightarrow{OA'_3} &\parallel \overrightarrow{OA_3} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_3} &= \lambda_3 \overrightarrow{OA_3} \end{aligned}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{OA'_2} + \overrightarrow{OA'_3}$, то $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$.

Теорема 7. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

Определение 19. Базис - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов

Пространство V_1

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda \vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$). Тогда $\vec{x} = \lambda \vec{e}$ называется разложением \vec{x} по базису \vec{e} в V_1 , а λ - координаты \vec{x} в этом базисе.

Пространство V_2

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2 .

Пусть в V_2 $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис V_2 , $\vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

- разложение вектора \vec{x} по базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 . λ_1 и λ_2 называются координатами \vec{x} в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство V_3

Любая упорядоченная тройка некопланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3 .

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - упорядоченная тройка векторов в V_3 , $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

Данное выражение называется разложением \vec{x} по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в V_3 , а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами \vec{x} в базисе.

Базис в V_3 , если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 20. Ортонормированный базис - ортогональный базис из \vec{e} векторов.

Теорема 8. *О разложении вектора по базису*

Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Возьмём вектор \vec{x} . Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - линейно зависима, если вектор \vec{x} можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

Предположим, что разложение вектора \vec{x} - не единственное.

$$\vec{x} = \rho_1 \vec{e}_1 + \rho_2 \vec{e}_2 + \rho_3 \vec{e}_3 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \rho_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \rho_3) \vec{e}_3 \quad (3)$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \delta_1 &= 0 & \lambda_1 &= \delta_1 \\ \lambda_2 - \delta_2 &= 0 & \Rightarrow \lambda_2 &= \delta_2 \\ \lambda_3 - \delta_3 &= 0 & \lambda_3 &= \delta_3 \end{aligned}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис \vec{i}, \vec{j} .

$$\begin{aligned} |\vec{i}| &= 1, \quad |\vec{j}| = 1 \\ \vec{a} &= \vec{OA} + \vec{OB} \\ \vec{OA} \parallel \vec{i} &\Rightarrow \vec{OA} = x_a \vec{i} \\ \vec{OB} \parallel \vec{j} &\Rightarrow \vec{OB} = y_a \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} \end{aligned}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \end{aligned}$$

Задание

Разложить \vec{a} по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Дано:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{b} &= 2\vec{i} - \vec{j} \\ \vec{c} &= -\vec{i} - 5\vec{j} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j}) \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

3.1 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\}\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\} \\ k\vec{a} &= \{kx_a, ky_a, kz_a\}\end{aligned}$$

Замечание. $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda = \text{const}$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_a \end{cases} \Rightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

Пример. В V_2 :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \\ \cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Пример. Для V_3 :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} & x_a &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|} & y_a &= |\vec{a}| \cos \beta \\ \cos \gamma &= \frac{z_a}{|\vec{a}|} & z_a &= |\vec{a}| \cos \gamma\end{aligned}$$

Возведём в квадрат:

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma &= x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1\end{aligned}$$

В результате получаем орт вектора \vec{a} :

$$\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

3.2 Скалярное произведение векторов

Определение 21. Скалярным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

3.2.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{a}^2 &\geq 0 \\ \vec{a}^2 = 0 &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2\end{aligned}$$

3. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3.2.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &< 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированным базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора \vec{a}, \vec{b} :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{i}^2 &= \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{j} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 &= \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 &= \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) \\ &= x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + y_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + z_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) + z_a y_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

3.2.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi$, то:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}\end{aligned}$$

3.3 Векторное произведение векторов

Определение 22. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора \vec{a} к \vec{b} осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора \vec{c}).

Определение 23. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора \vec{a} к \vec{b} осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора \vec{c}).

Определение 24. Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который удовлетворяет следующему условию:

1. \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \vec{a} и \vec{b});
2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

3.3.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикоммутативность

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Дистрибутивность

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

3. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

3.3.2 Формула для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе

Пусть V_3 определен правый ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Рассмотрим векторное произведение:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\
 \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\
 \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\
 \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\
 \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\
 \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два вектора $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Тогда можно записать разложение этих векторов по базису:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\
 \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}
 \end{aligned}$$

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \times (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) = \\
 &= x_a x_b (\vec{i} \times \vec{i}) + x_a y_b (\vec{i} \times \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \times \vec{k}) + \\
 &+ y_a x_b (\vec{j} \times \vec{i}) + y_a y_b (\vec{j} \times \vec{j}) + y_a z_b (\vec{j} \times \vec{k}) + \\
 &+ z_a x_b (\vec{k} \times \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \times \vec{j}) + z_a z_b (\vec{k} \times \vec{k}) = \\
 &= x_a y_b \vec{k} - x_a z_b \vec{j} - y_a x_b \vec{k} + y_a z_b \vec{i} + z_a x_b \vec{j} - z_a y_b \vec{j} = \\
 &= (y_a z_b - z_a y_b) \vec{i} - (x_a z_b - z_a x_b) \vec{j} + (x_a y_b - y_a x_b) \vec{k} = (*)
 \end{aligned}$$

Можно заметить, что это равняется определителю:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

Тем самым мы получаем:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\}$$

Теорема 9. Для того, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

3.3.3 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и построим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1, 2, -1), \quad B(-1, 1, 0), \quad C(0, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-1, -3, 3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0, 5, 5\} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

3.4 Смешанное произведение

Определение 25. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение первых двух векторов \vec{a} и \vec{b} на третий вектор \vec{c} .

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

3.4.1 Свойства смешанных произведений

1. Свойство перестановки (кососимметричности)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

Замечание. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. Свойство ассоциативности

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Доказательство.

Доказательство.

$$(\lambda \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = (\lambda \vec{a}) \vec{d} = \lambda(\vec{a} \vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b} \vec{c})) = \lambda(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$$

□

Замечание. Примечание: это работает для любого положения λ .

4. Свойство коммутативности

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{d} \\ &= \vec{a}_1 \vec{d} + \vec{a}_2 \vec{d} \\ &= \vec{a}_1 (\vec{b} \vec{c}) + \vec{a}_2 (\vec{b} \vec{c}) \\ &= \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c} \end{aligned}$$

□

Замечание. Работает не только для \vec{a} , но и векторов \vec{b} и \vec{c} .

3.4.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$

$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\ &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Т.е.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

3.4.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и построим до параллелипипеда. Тогда $V_{\text{paral}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Замечание.

$$V_{\text{pyramid}} = \frac{1}{6} V_{\text{paral}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

4 Прямая на плоскости

4.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор параллелен прямой). Выберем на прямой l произвольную точку M . Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

4.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t . Тогда:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

4.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\} \end{aligned}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

4.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b . Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$