

Лекция 1: Аналитическая геометрия

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранным на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два вектора называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется \vec{c} , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора \vec{a} совмещают с началом вектора \vec{b}

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора \vec{a} к концу вектора \vec{b} и будет вектором \vec{c} .

Определение 8. Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором \vec{c} .

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только по правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора \vec{a} на число δ называется вектор \vec{c} , который будет коллинеарен вектору \vec{a} , длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\delta > 0$, и противоположен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (3)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \quad (4)$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (5)$$

$$\lambda (p\vec{a}) = (\lambda p) \vec{a} \quad (6)$$

$$(\lambda + q) \vec{a} = \lambda \vec{a} + q\vec{a} \quad (7)$$

Определение 10. Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов \vec{a} и \vec{b}
2. Вектор, который идёт из конца вектора \vec{b} в начало вектора \vec{a} и есть искомый вектор \vec{c} .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L .

Определение 12. Пусть имеем вектор \vec{AB} . Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора \vec{AB} на прямую L , а O_b - это ортогональная проекция конца вектора \vec{AB} на прямую L . Тогда вектор $\vec{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L , называется **ортогональной проекцией вектора \vec{AB} на прямую L** .

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\vec{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L , и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\vec{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора \vec{AB} на ось \vec{l}** .

$$pr_{\vec{l}}\vec{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор \vec{l} называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора \vec{l}** .

Замечание. Важно! Ортогональная проекция вектора на направление - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора \vec{a} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению длины вектора \vec{l} на $\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{l}}{|\vec{a}||\vec{l}|}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} равна сумме ортогональных проекций вектора \vec{a} и \vec{b} на направление ненулевого вектора \vec{l} .

$$pr_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{l}}\vec{a} + pr_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения \vec{a} и числа λ на направление ненулевого вектора \vec{l} равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора \vec{a} .

$$pr_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda pr_{\vec{l}}\vec{a}.$$