Математический анализ. Лекции

Математический анализ - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

Определение 1. **Высказывание** - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

Пример. $2 + 3 = 5$ - истинно, $3 < 0$ - ложно

1.1 Логические символы

$\wedge$ - конъюнкция (логическое "И")
$\vee$ - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")
$\Rightarrow$ - импликация ("если A то B")
$\Leftrightarrow$ - эквивалетность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$ - существует
$\nexists$ - не существует
$!\exists$ - существует единствуенный элемент
$\forall$ - для каждого

2 Теория множеств

Определение 2. **Множество** - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

2.1 Символы теории множеств

- $\in$ - принадлежит
- $\notin$ - не принадлежит
- $\subset$ - включает

- $\subseteq$ - включает, возможно равенство
- $\equiv$ - тожденственное равенство (для любого значения переменной
- $\emptyset$ - пустое множество

2.2 Операции со множествами

- $\cup$ - объединение множеств
- $\cap$ - пересечение множеств

Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Определение 3. Подмножество - множество A называется подмножеством B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Определение 4. Универсальное множество - такое множество, подномножествами которого являются все рассматриваемые множества.

2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \ldots\}$ - множество иррациональных чисел
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ - множество действительных чисел

Замечание. Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.5 Промежутки

Определение 5. Промежуток - подножество X множества $\mathbb{Q}$, где $\forall x_1, x_2 \in X$ этому множеству принадлежат все x, где $x_1 < x < x_2$.

2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

2. Интервал $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

3. Полуинтервал $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, δ и ε - малые положительные величины

Определение 6. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержаший эту точку

Определение 7. δ - окрестностью ($S(x_0, \delta)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2δ.

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

Определение 8. ε - окрестностью ($S(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 и длиной 2ε.

$$S(x_0; \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$

Определение 9. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 10. Окрестностью $-\infty$ называется любой интеграл вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Определение 11. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

3 Числовая последовательность

Определение 12. **Числовая последовательность** - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой $\forall n \in \mathbb{N}$ можно записать соответствующий элемент последовательности.

Замечание. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число число элементов последовательности всегда бесконечно.

Пример.

$$1, -1, 1, -1, 1 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности два

Пример.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$
$$2, 2, 2, 2, 2 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значенией последовательности одно

Пример.

$$x_n = 2 * 1^n$$
$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

Число элементов бесконечно

- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5 \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Неубывающие, возрастающие, невозрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Немонотонная последовательность:

Пример. $1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1 \dots$

Постоянная последовательность

Пример. $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1 \dots$

4 Предел последовательности

Определение 13. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to \infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

'

Замечание. Т.е. начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a.

4.1 Геометрический смысл

$$|x_n - a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\forall n > N(\varepsilon)$$

Какой бы малый ε мы не взяли, бесконечное количество элементов последовательности $\{x_n\}$ попадают в ε-окрестность точки a, причем чем $\varepsilon \downarrow$, тем $N(\varepsilon) \uparrow$.

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, т.е. $(-0.3; 0.3)$
Получается два элемента $x_1, x_2 \notin (-0.3, 0.3)$

$$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$$
$$N(\varepsilon) + 1 = 3$$
$$x_3., x_4, x_5 \dots \in (-0.3, 0.3)$$

Определение 14. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Определение 15. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу (сверху)**, если $\exists m \in \mathbb{R}(M \in \mathbb{R})$, что для всех $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \geq m$ $(x_n \leq M)$

Определение 16. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$ или $|x_n| \leq M$.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1. *Критерий Коши существования предела последовательности*
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ - сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

4.2 Свойства сходящихся последовательность

Теорема 2. *О существовании единственности предела последовательности*
Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Аналитическое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - сходящаяся последовательность.
Рассуждаем методом от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ более одного предела.

$$\lim_{n\to\infty} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} = b$$
$$a \neq b$$

$$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists N_1(\varepsilon_1) \in N)(\forall n > N_1(\varepsilon_1) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1) \quad (1)$$
$$\lim_{n\to\infty} = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists N_2(\varepsilon_2) \in N)(\forall n > N_2(\varepsilon_2) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon_2) \quad (2)$$

Выберем $N = max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2)\}$.
Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$$

$$3\varepsilon = |b-a| = |b - a + x_n - x_n| =$$
$$= |(x_n - a) - (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$$
$$3\varepsilon < 2\varepsilon$$

Противоречие. Значит, предоположение не является верным $\Rightarrow$ последовательность x_n имеет единственный предел. □

Доказательство. Геометрическое доказательство
Нельзя уложить бесконечное число членов последовательности x_n в две непересекающиеся окрестности.

□

Теорема 3. *Об ограниченности сходящейся последовательности.*
Любая сходящаяся последовательность *ограничена.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Выберем в качестве $M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$.
Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ будет верно $|x_n| \leq M$ - это и означает, что последовательность x_n - ограниченная. □

Теорема 4. *Признак сходимости Вейерштрасса.*
Ограниченная монотонная последовательность сходится.

4.2.1 Предел последовательности $\mathbf{x}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Теорема 5. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ имеет предел равный e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

5 Предел функции

Определение 18. Окрестностью, из которой исключена точка x_0 называется проколотой окрестностью.

$$\mathring{S}(x_0;\delta) = S(x_0;\delta) \setminus x_0$$

Определение 19. *Определение функции по Коши* или *на языке* ε *и* δ .
Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется δ, зависящее от ε такое что $\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta)$ будет верно неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Эквивалентные записи определения

$$\ldots \forall x \in \mathring{S}(x_0;\delta) \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$\ldots \Rightarrow f(x) \in \mathring{S}(a, \varepsilon)$$

Геометрический смысл предела функции

Если для $\forall \mathring{S}(a; \varepsilon)$ найдется $\mathring{S}(x_0; \delta)$, то соответствующее значение функции лежат в $\mathring{S}(a; \varepsilon)$ (полоса 2ε):

$$\forall x_1 \in \mathring{S}(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x_1) - a| < \varepsilon$$

Определение 20. *Определение предела функции по Гейне* или *на языке последовательностей.*
Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке x_0, если эта функция определена в окрестности точки a и $\forall$ последовательнсти x_n из области определения этой функции, сходящейся к x_0 соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Геометрический смысл

$$\forall x_n \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Для любых точек x, достаточно близких к точке x_0 (на языке математики $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$) соответствующие значения $f(x_n)$ достаточно близко расположены к a (на языке математики - $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$)

Теорема 6. Определение предела функции по Коши и по Гейне *эквивалентны.*

5.1 Ограниченная функция

Определение 21. Функция называется **ограниченной** в данной области изменения аргумента x, если $\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, |f(x)| \leq M$.

Если $\nexists M \in \mathbb{R}, M > 0$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной.*

Определение 22. Функция называется **локально ограниченной** при $x \to x_0$, если существует проколотая окрестность с центром в точке x_0, в которой данная функция ограничена.

5.2 Основные теоремы о пределах

Теорема 7. *О локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.*
Функция, имеющая конечный предел, локально ограничена.

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Распишем:

$$\begin{matrix} -\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \end{matrix} \qquad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Выберем $M = max\{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|\}$

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, a)$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 8. *О единственности предела функции.*
Если функция имеет конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что функция имеет более одного предела, например 2 - a и b. Тогда:

$$\lim_{x \to x_0} = a \tag{1}$$
$$\lim_{x \to x_0} = b \tag{2}$$
$$a \neq b, \text{ пусть } b > a$$

$$(1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon_1)$$
$$(2) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_2)$$

Распишем:

$$(1) \Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) < a + \varepsilon_1, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1)$$
$$(2) \Rightarrow b - \varepsilon_2 < f(x) < b + \varepsilon_2, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ будет верно (1) и (2) одновременно.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{b-a}{2}$:

$$(1) \Rightarrow f(x) < a + \varepsilon_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$(2) \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon_2 = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Мы получили противоречие. Это означает, что предположение не является верным. Функция имеет единственный предел. □

Теорема 9. *О сохранении функцией знака своего предела*
Если $\lim\limits_{x \to x_0} = a \neq 0$, то $\exists \mathring{S}(x_0, \delta)$ такая, что функция в ней сохраняет знак своего предела.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0 \to \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Выберем $\varepsilon = a > 0$.

$$\lim_{x \to x_0} = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{0 < f(x) < 2a}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Пусть $a < 0$. Выберем $\varepsilon = -a$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon = -a)(\exists \delta(x) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon = -a)$$

Распишем:

$$-a < f(x) - a < a$$
$$\boxed{-2a < f(x) < 0}$$

Знак у функции $f(x)$ и числа a - одинаковые.
Значит, $f(x)$ сохраняет знак своего предела $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ □

Следствие. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 и знакопостоянна в $\mathring{S}(x_0, \delta)$, тогда её предел не может иметь с ней противоположные знак.

Теорема 10. *О предельном переходе в неравенстве.*

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\forall x \in S(x_0, \delta)$ верно $f(x) < g(x)$. Тогда $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Доказательство. По условию $f(x) < g(x), \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$.
Введём функцию $F(x) = f(x) - g(x) < 0, \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$. Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, соответственно и функция $F(X)$ имеет конечный предел в точке x_0 (как разность $f(x)$ и $g(x)$).

По следствию из предыдущей теоремы $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} F(x)$

Подставим $F(x) = f(x) - g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

□

Пример. Пусть $f(x) = 0$, $g(x) = x^2$ и $x_0 = 0$.

$$\begin{gathered}
\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \qquad 0 < x^2 \\
\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \\
\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \\
\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) \\
\lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} g(x)
\end{gathered}$$

В теореме знак **строгий** переходит в **нестрогий**!

Теорема 11. *О пределе промежуточной функции.*
Пусть существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$ верно неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$.

Доказательство. По условию:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon) \tag{2}$$

Выберем $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, тогда (1), (2) и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ верны одновременно $\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0)$.

$$(1) \quad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$
$$(2) \quad a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon_1 < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0) \qquad a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_0(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_0 \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon)$$
$$\Rightarrow \text{по определению предела}$$
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = a$$

□

Теорема 12. *О пределе сложной функции.*
Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 равный a, то функция $\varphi(y)$ имеет предел в точке a, равный C, тода сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел в точке x_0, равный C.

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \\ \lim\limits_{y \to a} \varphi(y) = C \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = C$$

Доказательство.

$$\lim_{y \to a} \varphi(y) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in \mathring{S}(a, \delta_1) \Rightarrow |\varphi(y) - a| < \varepsilon) \qquad (1)$$

Выберем в качестве ε в пределе найденное δ_1:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \delta_1 > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1 \qquad (2)$$

В итоге:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(f(x)) - c| < \varepsilon)$$

Что равносильно:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = c$$

□

6 Бесконечно малые функции

Определение 23. Функция называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если предел функции в этой точке равен 0. Кратко - **б.м.ф.** или **б.м.в.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon))(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Замечание. Стремление аргумента может быть *любое*, главное, чтобы предел был равен нулю.

Бесконечно малые функции обозначаются $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \dots$

Пример.

$$y = x - 2$$

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

$y = x - 2$ при $x \to 2$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

$y = \sin(x)$ при $x \to 0$ является бесконечно малой.

Пример.

$$y = \sin(\frac{1}{x})$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

$y = \sin(\frac{1}{x})$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой.

6.1 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 13. *О сумме конечного числа бесконечно малых функций.* Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

Доказательство. Пусть дано конечное число бесконечно малых функций, например две: $\alpha(x), \beta(x)$. Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$$

Нужно доказать, что:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}) \tag{2}$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (1) и (2) верны одновременно. Получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta)$$
$$\Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)$$

Тогда по определнию бесконечно малой функции:

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$$

□

Теорема 14. *О произведении бесконечно малой функций на локально ограниченную.*
Произведение бесконечно малой функции на локальной ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является локально ограниченной. Доказываем, что:

$$\alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_1) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}) \quad (1)$$
$$M \in \mathbb{R}, M > 0$$
$$\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta_2) \Rightarrow |f(x)| < M \quad (2)$$

Выберем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда (1) и (2) верны одновременно. В итоге получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon$$

Тогда по определению бесконечно малой функции:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) \cdot f(x) = 0$$

□

Пример.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Т.к. $\sin(x)$, при $x \to \infty$ является локально ограниченной $\sin(x) \le 1$.

Теорема 15. *О связи функции, её предела и бесконечно малой.*
Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) - \text{б.м.ф при } x \to x_0$$

Доказательство. *Необходимость.*
Дано:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Доказать:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Распишем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$

Обозначим $f(x) - a = \alpha(x)$, тогда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$$

По определению бесконечно малой функции $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция. Из обозначения следует, что:

$$f(x) = a + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Достаточность.

Дано:

$$f(x) = a + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \text{ - б.м.ф. при } x \to x_0$$

Доказать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

По определению б.м.ф.:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

С учётом введённого обозначения:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\mathring{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

□

Следствие. Т.к. любая бесконечно малая функция локально ограничена, то произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие. Произведение бесконечно малой функции на константу есть величина бесконечно малая.

7 Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0.

Теорема 16. Предел суммы (разности) двух функций, имеющих конечные пределы равен сумме (разности) пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 17. Предел отношения двух функций, имеющих конечный предел, равен частному их пределов при условии, что предел в знаменателе отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$