Аналитическая геометрия. Лекции

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением.*

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Определение 8. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{2}$$
$$\forall\vec{a}\exists\vec{0} \qquad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \tag{3}$$
$$\forall\vec{a}\exists\vec{b} \qquad \vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow -\vec{b}=\vec{a} \tag{4}$$
$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \tag{5}$$
$$\lambda(p\vec{a})=(\lambda p)\,\vec{a} \tag{6}$$
$$(\lambda+q)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+q\vec{a} \tag{7}$$

Определение 10. Разностью векторов и называется вектор , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала вектооров и
2. Вектор, который идёт из конца вектора в начало вектора и есть искомый вектор .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L.

Определение 12. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L.**

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$.**

$$np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называеют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора $\vec{l}$.**

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $cos\phi = \widehat{\vec{a}\vec{l}}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$

2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 16.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$
$$\text{где } \lambda_i - \text{произвольные числа}$$

называется линейной комбинацией системы векторов $\vec{a}$, а числа λ - коэффициентом линейнгой комбинации.

Если $\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *правильной*.
Если $\neg\forall\lambda = 0$, то линейную комбинацию называют *неправильной*.

Определение 17. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевомувектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$$

Определение 18. Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Теорема 4. Система векторов линейно-независима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

Доказательство. 1). Пусть система векторов линейно-зависима.
Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a_n}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, где $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$.
Получаем:

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3} + \ldots + \beta_n\vec{a_n}$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство. 2) Пусть один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другиз векторов системы (возьмем $\vec{a_1}$. Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a_1} - \lambda_2\vec{a_2} - \lambda_3\vec{a_3} - \ldots - \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*. □

2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

Теорема 5. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарный*.

Доказательство. 1) Необходимость.
Пусть система векторв $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ линейно-зависима. Тогда по определению $\exists$ тривиальная линейная зависимость $= \vec{0}$ этих векторов. Пусть $\lambda_1 \neq 1$, тогда $\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2}$. Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, тогда $\vec{a_1} = \beta\vec{a_2}$. По определению произведение вектора на число $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ коллинеарны. 2) Достаточность.
Пусть $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$. Тогда $\vec{a_1} = \lambda\vec{a_2}$ (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a_1} - \lambda\vec{a_2} = \vec{0}$$

По определению $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ являются линейной зависимостью. □

Теорема 6. Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. (1) Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$.
Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим A_i. Проведём через A_1 прямую, параллельную $\vec{a_3}$.

$$\overrightarrow{OA_2'} \parallel \overrightarrow{OA_2}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_2'} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2}$$
$$\overrightarrow{OA_3'} \parallel \overrightarrow{OA_3}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_3'} = \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2'} = \overrightarrow{OA_3'}$, то $\vec{a_1} = \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3}$. □

Теорема 7. Любые 4 вектора линейно зависимы.

3 Базис

Определение 19. **Базис** - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- V_1 - пространство всех коллинеарных векторов
- V_2 - пространство всех компланарных векторов
- V_3 - пространство всех свободных векторов

Пространство $\mathbf{V}_1$

Пусть $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$, тогда $\forall \vec{x} \in V_1$ ($\vec{x} = \lambda\vec{e}$, т.к. $\vec{x} \parallel \vec{e}$). Тогда $\vec{x} = \lambda\vec{e}$ называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e}$ в V_1, а λ - координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

Пространство $\mathbf{V}_2$

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в V_2 является базисом V_2.
Пусть в V_2 $\vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, тогда эти вектора можно рассматривать как базис $V_2, \vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{x}$ - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2}$$

- разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}$. λ_1 и λ_2 называются координатами $\vec{x}$ в этом базисе. Базис в V_2 называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

Пространство $\mathbf{V}_3$

Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов в V_3 называется базисом в V_3.

Пусть $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - упорядоченная тройка векторов в V_3, $\vec{x} \in V_3$. Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$$

Данное выражение называется разложением $\vec{x}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в V_3, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются корординатами $\vec{x}$ в базисе.
Базис в V_3, если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Определение 20. **Ортонормированный базис** - ортогональный базис из $\vec{e}$ векторов.

Теорема 8. *О разложении вектора по базису*
Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Доказательство. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ - не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e_1} + \rho \vec{e_2} + \rho \vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уранвение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\,\vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\,\vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\,\vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 & & \lambda_1 = \delta_1 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 & \Rightarrow & \lambda_2 = \delta_2 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 & & \lambda_3 = \delta_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать. □

Пример. Пусть в пространстве V_2 зафиксирован базис $\vec{i}, \vec{j}$.

$$|\vec{i}| = 1, \quad |\vec{j}| = 1$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OA} \parallel \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = x_a\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = y_a\vec{j}$$
$$\Rightarrow \vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$$

Пример. Пусть в пространстве V_3 зафиксирован ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Тогда:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$

Задание

Разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
Дано:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$
$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{c} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$$
$$3\vec{i} - 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha - 1 \end{cases}$$

Замечание. Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

3.1 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$$

Тогда:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\}$$
$$k\vec{a} = \{kx_a, ky_a, kz_a\}$$

Замечание. $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$ - так записывать нельзя!

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda = const$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_b \end{cases} \Rightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

Пример. В V_2:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$$
$$\cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$$

Пример. Для V_3:

$$\begin{matrix} \cos\alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|} & x_a = |\vec{a}|\cos\alpha \\ \cos\beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|} & y_a = |\vec{a}|\cos\beta \\ \cos\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} & z_a = |\vec{a}|\cos\gamma \end{matrix}$$

Возведём в квадрат:

$$|\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В результате получаем орт вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e_a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

3.2 Скалярное произведение векторов

Определение 21. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$$

3.2.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммунитативность
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.

$$\vec{a}^2 \geq 0$$
$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3. Дистрибутивность
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

3.2.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Пусть в пространстве V_3 с заданным ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы вектора $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

Тогда:

$$\begin{array}{cc} \vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = &\left(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}\right)\left(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}\right) \\ &= x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ &+ y_a x_a (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &+ z_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) + z_a y_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

3.2.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$, то:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$
$$= \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} + \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z)b^2}}$$
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} + \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z)b^2}}}$$

3.3 Векторное произведение векторов

Определение 22. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 23. Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Определение 24. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:
$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

3.3.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикомунитативность
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
2. Дистрибутивность
$$(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$
3. Ассоциативность
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

3.3.2 Формула для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе

Пусть V_3 определен правый ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Рассмотрим векторное произведение:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$
$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$
$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

Рассмотрим два вектора $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Тогда можно записать разложение этих векторов по базису:

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \times (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) = \\
= x_a x_b(\vec{i} \times \vec{i}) + x_a y_b(\vec{i} \times \vec{j}) + x_a z_b(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
+ y_a x_a(\vec{j} \times \vec{i}) + y_a y_b(\vec{j} \times \vec{j}) + y_a z_b(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
+ z_a x_b(\vec{k} \times \vec{i}) + z_a y_b(\vec{k} \times \vec{j}) + z_a z_b(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
= x_a y_b\vec{k} - x_a z_b\vec{j} - y_a x_b\vec{k} + y_a z_b\vec{i} + z_a x_b\vec{j} - z_a y_b\vec{j} = \\
= (y_a z_b - z_a y_b)\vec{i} - (x_a z_b - z_a x_b)\vec{j} + (x_a y_b - y_a x_b)\vec{k} = (*)
\end{aligned}$$

Можно заметить, что это равняется определителю:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

Тем самым мы получаем:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\}}$$

Теорема 9. Для того, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

3.3.3 Геометрическое приложение векторов.

Пусть $\vec{a} = \{x_a y_a, x_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

Пример.

$$A(1,2,-1), \quad B(-1,1,0), \quad C(0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AB} = \{-2,-1,1\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-1,-3,3\}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0,5,5\} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

3.4 Смешанное произведение

Определение 25. Смешанное поизведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

3.4.1 Свойства смешанных произведений

1. **Свойство перестановки (кососимметричности)**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

Замечание. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка векторов.

3. **Свойство ассоциативности**

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Доказательство.

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

□

Замечание. Примечание: это работает для любого положения λ.

4. **Свойство коммутативности**

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{d} \\ &= \vec{a_1}\vec{d} + \vec{a_2}\vec{d} \\ &= \vec{a_1}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a_2}(\vec{b}\vec{c}) \\ &= \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}\end{aligned}$$

□

Замечание. Работает не только для $\vec{a}$, но и векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3.4.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, x_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, .z_b\} \\ \vec{c} &= \{x_c, y_c, z_c\}\end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \{\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\} \cdot \vec{c} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c =$$
$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

3.4.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Совместим начала этих векторов и достроим до параллелипипеда. Тогда $V_{paral} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Замечание.
$$V_{pyramid} = \frac{1}{6}V_{paral} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

4 Прямая на плоскости

4.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и задана направляющим вектором $\vec{S} = \{m, n\}$ (т.е. вектор паралеллен прямой). Выберем на прямой l произвольную точку M. Составим $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

4.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая l задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t. Тогда:

$$\begin{matrix} \frac{x-x_0}{m} = t \\ \frac{y-y_0}{n} = t \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

4.3 Через две точки

Пусть прямая l проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Выберем на прямой l произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. Составим два вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0, M_1}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

4.4 В отрезках

Пусть прямая l отсекает от координатного угла отрезки a и b. Тогда прямая l проходит через точки $A(0, a)$ и $B(b, 0)$.

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$