

## Аналитическая геометрия. Лекции

### 1 Векторная алгебра

**Определение 1.** Вектором называется отрезок, с выбранным на нём направлением.

**Определение 2.** Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

**Определение 3.** Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

**Определение 4.** Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**. Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением*.

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два вектора называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

**Определение 5.** Вектор, длина которого равна 1 называется **единичным вектором** или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

**Определение 6.** Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

**Определение 7.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется  $\vec{c}$ , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора  $\vec{a}$  совмещают с началом вектора  $\vec{b}$

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора  $\vec{a}$  к концу вектора  $\vec{b}$  и будет вектором  $\vec{c}$ .

**Определение 8.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором  $\vec{c}$ .

**Замечание.** Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только по правилу треугольника.

**Определение 9.** Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\delta$  называется вектор  $\vec{c}$ , который будет коллинеарен вектору  $\vec{a}$ , длина которого будет или меньше в  $|\lambda|$  раз и будет сонаправлен, если  $\delta > 0$ , и противоположен, если  $\lambda < 0$ .

### 1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad (3)$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \quad (4)$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (5)$$

$$\lambda (p\vec{a}) = (\lambda p) \vec{a} \quad (6)$$

$$(\lambda + q) \vec{a} = \lambda \vec{a} + q\vec{a} \quad (7)$$

**Определение 10.** Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
2. Вектор, который идёт из конца вектора  $\vec{b}$  в начало вектора  $\vec{a}$  и есть искомый вектор  $\vec{c}$ .

### 1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

**Определение 11.** Основание точки  $O_a$  перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $L$  называется **ортогональной проекцией точ-**

ки  $A$  на прямую  $L$ .

**Определение 12.** Пусть имеем вектор  $\vec{AB}$ . Пусть  $O_a$  - ортогональная проекция начала вектора  $\vec{AB}$  на прямую  $L$ , а  $O_b$  - это ортогональная проекция конца вектора  $\vec{AB}$  на прямую  $L$ . Тогда вектор  $\vec{O_aO_b}$ , соединяющий проекции и лежащий на прямой  $L$ , называется **ортогональной проекцией вектора  $\vec{AB}$  на прямую  $L$** .

**Определение 13.** **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой  $L$  выбрано направление, то длину  $\vec{O_aO_b}$  берут со знаком  $+$ , если направление вектора совпадает с выбранным направлением  $L$ , и со знаком  $-$ , если нет.

**Определение 14.** Длину вектора  $\vec{O_aO_b}$  со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора  $\vec{AB}$  на ось  $\vec{l}$** .

$$pr_{\vec{l}}\vec{AB}.$$

**Определение 15.** Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор  $\vec{l}$  называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора  $\vec{l}$** .

**Замечание.** Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

**Теорема 1.** Ортогональная проекция вектора  $\vec{a}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна произведению длины вектора  $\vec{l}$  на  $\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{l}}{|\vec{a}||\vec{l}|}$

**Теорема 2.** Ортогональная проекция суммы векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна сумме ортогональных проекций вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$ .

$$pr_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{l}}\vec{a} + pr_{\vec{l}}\vec{b}.$$

**Теорема 3.** Ортогональная проекция вектора произведения  $\vec{a}$  и числа  $\lambda$  на направление ненулевого вектора  $\vec{l}$  равна произведению числа  $\lambda$  на ортогональную проекцию вектора  $\vec{a}$ .

$$pr_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda pr_{\vec{l}}\vec{a}.$$

## 2 Линейная зависимость и независимость векторов

### Определение 16.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

где  $\lambda_i$  — произвольные числа

называется линейной комбинацией системы векторов  $\vec{a}$ , а числа  $\lambda$  — коэффициентами линейной комбинации.

Если  $\forall \lambda = 0$ , то линейную комбинацию называют *правильной*.  
Если  $\neg \forall \lambda = 0$ , то линейную комбинацию называют *неправильной*.

**Определение 17.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 &= 0 \end{aligned}$$

**Определение 18.** Система векторов называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

**Теорема 4.** Система векторов линейно-независима тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

**Доказательство.** 1). Пусть система векторов линейно-зависима. Тогда по определению существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n \end{aligned}$$

Обозначим  $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ , где  $i \in N \wedge 2 \leq i \leq n$ .  
Получаем:

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

**Доказательство.** 2) Пусть один из векторов можно представить в виде

линейной комбинации других векторов системы (возьмем  $\vec{a}_1$ . Перенесём слагаемые из правой части в левую:

$$\vec{a}_1 - \lambda_2 \vec{a}_2 - \lambda_3 \vec{a}_3 - \dots - \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Получили нетривиальную равную нулевому вектору линейную комбинацию векторов. По определению, данная система векторов является *линейно-зависимой*.  $\square$

## 2.1 Критерии линейной зависимости 2 и 3 векторов

**Теорема 5.** Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

**Доказательство.** 1) Необходимость.

Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  линейно-зависима. Тогда по определению  $\exists$  тривиальная линейная зависимость  $= \vec{0}$  этих векторов. Пусть  $\lambda_1 \neq 1$ , тогда  $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2$ . Обозначим  $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , тогда  $\vec{a}_1 = \beta \vec{a}_2$ . По определению произведение вектора на число  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны. 2) Достаточность.

Пусть  $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ . Тогда  $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$  (по определению произведения вектора на число). Перенесем все налево:

$$\vec{a}_1 - \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$$

По определению  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  являются линейной зависимостью.  $\square$

**Теорема 6.** Три вектора линейной зависимости тогда и только тогда, когда они компланарны.

**Доказательство.** (1) Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  - линейная зависимость, тогда по определению существуют:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Обозначим  $\beta = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ , где  $i = 2, 3$ .

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$$

Совместим начала  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  и построим  $\beta_2 \vec{a}_2$  и  $\beta_3 \vec{a}_3$ , где  $\beta_2, \beta_3 > 0$ .

Т.к.  $\vec{a}_3$  лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

(2) Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости (компланарны). Совместим начала векторов, концы векторов обозначим  $A_i$ . Проведём через  $A_1$  прямую, параллельную  $\vec{a}_3$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'_2} &\parallel \overrightarrow{OA_2} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_2} &= \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} \\ \overrightarrow{OA'_3} &\parallel \overrightarrow{OA_3} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA'_3} &= \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}\end{aligned}$$

Тогда согласно правилу параллелограмма сложения векторов  $\overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{OA'_2} + \overrightarrow{OA'_3} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}$ , то  $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$ .  $\square$

**Теорема 7.** Любые 4 вектора линейно зависимы.

### 3 Базис

**Определение 19.** Базис - упорядоченный набор векторов.

Введём обозначения:

- $V_1$  - пространство всех коллинеарных векторов
- $V_2$  - пространство всех компланарных векторов
- $V_3$  - пространство всех свободных векторов

#### Пространство $V_1$

Пусть  $\vec{e} \neq \vec{0} \in V_1$ , тогда  $\forall \vec{x} \in V_1$  ( $\vec{x} = \lambda \vec{e}$ , т.к.  $\vec{x} \parallel \vec{e}$ ). Тогда  $\vec{x} = \lambda \vec{e}$  называется разложением  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}$  в  $V_1$ , а  $\lambda$  - координаты  $\vec{x}$  в этом базисе.

#### Пространство $V_2$

Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов в  $V_2$  является базисом  $V_2$ .

Пусть в  $V_2$   $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$ , тогда эти вектора можно рассматривать как базис  $V_2$ ,  $\vec{x} \in V_2 \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}$  - линейная зависимость.

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

- разложение вектора  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  называются координатами  $\vec{x}$  в этом базисе. Базис в  $V_2$  называется ортогональным, если базисные вектора лежат на перпендикулярных прямых.

#### Пространство $V_3$

Любая упорядоченная тройка некопланарных векторов в  $V_3$  называется базисом в  $V_3$ .

Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - упорядоченная тройка векторов в  $V_3$ ,  $\vec{x} \in V_3$ . Тогда система векторов линейно зависима (по теореме 7). По теореме 4:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

Данное выражение называется разложением  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  в  $V_3$ , а  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  называются координатами  $\vec{x}$  в базисе.

Базис в  $V_3$ , если базисные вектора лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

**Определение 20. Ортонормированный базис** - ортогональный базис из  $\vec{e}$  векторов.

**Теорема 8. О разложении вектора по базису**

Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

**Доказательство.** Пусть в пространстве  $V_3$  зафиксирован базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Возьмём вектор  $\vec{x}$ . Тогда система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - линейно зависима, если вектор  $\vec{x}$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

Предположим, что разложение вектора  $\vec{x}$  - не единственное.

$$\vec{x} = \rho_1 \vec{e}_1 + \rho_2 \vec{e}_2 + \rho_3 \vec{e}_3 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \rho_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \rho_3) \vec{e}_3 \quad (3)$$

Поскольку базисные вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \rho_1 &= 0 & \lambda_1 &= \rho_1 \\ \lambda_2 - \rho_2 &= 0 & \Rightarrow \lambda_2 &= \rho_2 \\ \lambda_3 - \rho_3 &= 0 & \lambda_3 &= \rho_3 \end{aligned}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать.  $\square$

**Пример.** Пусть в пространстве  $V_2$  зафиксирован базис  $\vec{i}, \vec{j}$ .

$$\begin{aligned} |\vec{i}| &= 1, \quad |\vec{j}| = 1 \\ \vec{a} &= \vec{OA} + \vec{OB} \\ \vec{OA} \parallel \vec{i} &\Rightarrow \vec{OA} = x_a \vec{i} \\ \vec{OB} \parallel \vec{j} &\Rightarrow \vec{OB} = y_a \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} \end{aligned}$$

**Пример.** Пусть в пространстве  $V_3$  зафиксирован ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \end{aligned}$$

### Задание

Разложить  $\vec{a}$  по векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

Дано:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{b} &= 2\vec{i} - \vec{j} \\ \vec{c} &= -\vec{i} - 5\vec{j} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= \alpha(2\vec{i} + \vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j}) \\ 3\vec{i} - 4\vec{j} &= (2\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + 5\beta)\vec{j} \Rightarrow \\ \begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ -4 = \alpha + 5\beta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Замечание.** Два вектора равны, если равны соответствующие координаты.

### 3.1 Координаты вектора. Действия с векторами

Пусть:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= \{x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b\} \\ k\vec{a} &= \{kx_a, ky_a, kz_a\} \end{aligned}$$



**Замечание.**  $k\vec{a} = k \cdot \{\dots\}$  - так записывать нельзя!

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda = \text{const}$

$$\begin{cases} x_b = \lambda x_a \\ y_b = \lambda y_a \\ z_b = \lambda z_a \end{cases} \Rightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$$

Расчёт косинуса угла по разложению в базисе

**Пример.** В  $V_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \\ \cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|} \end{aligned}$$

**Пример.** Для  $V_3$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_a}{|\vec{a}|} & x_a &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ \cos \beta &= \frac{y_a}{|\vec{a}|} & y_a &= |\vec{a}| \cos \beta \\ \cos \gamma &= \frac{z_a}{|\vec{a}|} & z_a &= |\vec{a}| \cos \gamma \end{aligned}$$

Возведём в квадрат:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma &= x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = |\vec{a}|^2 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \end{aligned}$$

В результате получаем орт вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{e}_a = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

## 3.2 Скалярное произведение векторов

**Определение 21.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

### 3.2.1 Свойства скалярного произведения

1. Коммутативность

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{a}^2 &\geq 0 \\ \vec{a}^2 = 0 &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2\end{aligned}$$

3. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4. Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

### 3.2.2 Формула для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных ортонормированным базисом

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &> 0, \text{ если } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &< 0, \text{ если } \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0, \text{ если } \varphi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Пусть в пространстве  $V_3$  с заданным ортонормированным базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  заданы вектора  $\vec{a}, \vec{b}$ :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{i}^2 &= \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{j} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j}^2 &= \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 & \vec{i} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k}^2 &= \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1 & \vec{j} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \cdot (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) \\ &= x_a x_b \vec{i}^2 + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + y_a x_b (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_a y_b \vec{j}^2 + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + z_a x_b (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_a z_b \vec{k}^2 \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

### 3.2.3 Формула косинуса между векторами, заданными ортонормированным базисом

Т.к.  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ , то:

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{x_ax_b + y_ay_b + z_az_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{x_ax_b + y_ay_b + z_az_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \\ \cos\phi &= \frac{x_ax_b + y_ay_b + z_az_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}\end{aligned}$$

## 3.3 Векторное произведение векторов

**Определение 22.** Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

**Определение 23.** Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

**Определение 24.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет следующему условию:

1.  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ );
2.  $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$
3. Вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

### 3.3.1 Свойства векторного произведения векторов

1. Антикоммутативность

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. Дистрибутивность

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

3. Ассоциативность

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

### 3.3.2 Формула для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе

Пусть  $V_3$  определен правый ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Рассмотрим векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0} \\ \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0} \\ \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}\end{aligned}$$

Рассмотрим два вектора  $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$  и  $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ . Тогда можно записать разложение этих векторов по базису:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}\end{aligned}$$

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \times (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) = \\ &= x_a x_b (\vec{i} \times \vec{i}) + x_a y_b (\vec{i} \times \vec{j}) + x_a z_b (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ y_a x_b (\vec{j} \times \vec{i}) + y_a y_b (\vec{j} \times \vec{j}) + y_a z_b (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ z_a x_b (\vec{k} \times \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \times \vec{j}) + z_a z_b (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= x_a y_b \vec{k} - x_a z_b \vec{j} - y_a x_b \vec{k} + y_a z_b \vec{i} + z_a x_b \vec{j} - z_a y_b \vec{j} = \\ &= (y_a z_b - z_a y_b) \vec{i} - (x_a z_b - z_a x_b) \vec{j} + (x_a y_b - y_a x_b) \vec{k} = (*)\end{aligned}$$

Можно заметить, что это равняется определителю:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

Тем самым мы получаем:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\}}$$

**Теорема 9.** Для того, чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

### 3.3.3 Геометрическое приложение векторов.

Пусть  $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$  и  $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ . Совместим начала этих векторов и построим до параллелограмма. Тогда площадь этого параллелограмма будет равна модулю векторного произведения этих векторов.

**Пример.**

$$A(1, 2, -1), \quad B(-1, 1, 0), \quad C(0, -1, 2)$$

$$\vec{AB} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\vec{AC} = \{-1, -3, 3\}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$0\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = \{0, 5, 5\} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

## 3.4 Смешанное произведение

**Определение 25.** Смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется скалярное произведение первых двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на третий вектор  $\vec{c}$ .

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

### 3.4.1 Свойства смешанных произведений

#### 1. Свойство перестановки (кососимметричности)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

#### 2. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

**Замечание.**  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - правая тройка векторов.  
 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ , если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - левая тройка векторов.

### 3. Свойство ассоциативности

$$(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

**Доказательство.**

$$(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = (\lambda \vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}(\vec{b}\vec{c})) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

□

**Замечание.** Примечание: это работает для любого положения  $\lambda$ .

### 4. Свойство коммутативности

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{d} \\ &= \vec{a}_1\vec{d} + \vec{a}_2\vec{d} \\ &= \vec{a}_1(\vec{b}\vec{c}) + \vec{a}_2(\vec{b}\vec{c}) \\ &= \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c} \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Работает не только для  $\vec{a}$ , но и векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

#### 3.4.2 Формула смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  заданы координатами:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\} \\ \vec{c} &= \{x_c, y_c, z_c\} \end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\ &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

### 3.4.3 Геометрическое приложение смешанного произведения

Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Совместим начала этих векторов и построим до параллелипипеда. Тогда  $V_{\text{para}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ .

**Замечание.**

$$V_{\text{pyramid}} = \frac{1}{6} V_{\text{para}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

## 4 Прямая на плоскости

### 4.1 Каноническое уравнение

Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и задана направляющим вектором  $\vec{S} = \{m, n\}$  (т.е. вектор параллелен прямой). Выберем на прямой  $l$  произвольную точку  $M$ . Составим  $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ .

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

### 4.2 Параметрическое уравнение

Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}}$$

### 4.3 Через две точки

Пусть прямая  $l$  проходит через точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M(x, y)$ . Выберем на прямой  $l$  произвольную точку  $M_1(x_1, y_1)$ . Составим два вектора  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\overrightarrow{M_0M_1}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M} &= \{x - x_0, y - y_0\} \\ \overrightarrow{M_0M_1} &= \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}\end{aligned}$$

Т.к. вектора коллинеарны, то и соответствующие координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

### 4.4 В отрезках

Пусть прямая  $l$  отсекает от координатного угла отрезки  $a$  и  $b$ . Тогда прямая  $l$  проходит через точки  $A(0, a)$  и  $B(b, 0)$ .

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$