Лекция 1: Аналитическая геометрия

1 Векторная алгебра

Определение 1. Вектором называется отрезок, с выбранном на нём направлением.

Определение 2. Два вектора называется **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 3. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Определение 4. Вектор определяется точкой начала и точкой конца.

$$\overrightarrow{AB}.$$

Вектор, у которого точка начала фиксирована, называется **связанным**.

Вектор, у которого точка начала не фиксированная, называется **свободным**.

Вектор характеризуется *длиной* и *направлением.*

Два вектора называются **сонаправленными**, если они *коллинеарны* и имеют одно и то же направление.

Два вектора называются **противоположно направленными** если они *коллинеарны* и имеют противоположные направления.

Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Определение 5. Вектор, длина которого равна 1 называется единичным вектором или **ортом**.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1.$$

Определение 6. Вектор, длина которого равна нулю (начало и конец совпадают) называется **нулевым вектором**. Направление нулевого вектора произвольное. Нулевой вектор коллинеарен всем векторам.

$$|\vec{0}| = 0.$$

Определение 7. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$

2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Определение 8. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который получается по правилу параллелограмма следующим образом:

1. Совмещают начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. Достраивают фигуры до параллелограмма
3. Тогда вектор, идущий из начала вектором по диагонали параллелограмма и будет исходным вектором $\vec{c}$.

Замечание. Если два вектора коллинеарны, то их можно сложить только правилу треугольника.

Определение 9. Произведение вектора $\vec{a}$ на число δ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\delta > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

1.1 Свойства векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \tag{3}$$

$$\forall \vec{a} \exists \vec{b} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{b} = \vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \tag{5}$$

$$\lambda (p \vec{a}) = (\lambda p) \, \vec{a} \tag{6}$$

$$(\lambda + q) \, \vec{a} = \lambda \vec{a} + q \vec{a} \tag{7}$$

Определение 10. Разностью векторов и называется вектор , который получается следующим образом:

1. Совмещаем начала вектооров и
2. Вектор, который идёт из конца вектора в начало вектора и есть искомый вектор .

1.2 Ортогональная проекция вектора на направление

Определение 11. Основание точки O_a перпендикуляра, опущенного их точки A на прямую L называется **ортогональной проекцией точ-**

ки A на прямую L.

Определение 12. Пусть имеем вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть O_a - ортогональная проекция начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L, а O_b - это ортогональная проекция конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L. Тогда вектор $\overrightarrow{O_aO_b}$, соединяющий проекции и лежащий на прямой L, называется **ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L.**

Определение 13. **Осью** называется прямая с выбранным на ней направлением.

Если на прямой L выбрано направление, то длину $\overrightarrow{O_aO_b}$ берут со знаком $+$, если направление вектора совпадает с выбранным направлением L, и со знаком $-$, если нет.

Определение 14. Длину вектора $\overrightarrow{O_aO_b}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, **называют ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$.**

$$np_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}.$$

Определение 15. Ортогональную проекцию вектора на ненулевой вектор $\vec{l}$ называеют **ортогональной проекцией этого вектора на направление вектора $\vec{l}$.**

Замечание. Важно! *Ортогональная проекция вектора на направление* - это **число**!

Теорема 1. Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению длины вектора $\vec{l}$ на $cos\phi = \widehat{\vec{a}\vec{l}}$

Теорема 2. Ортогональная проекция суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна сумме ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$.

$$np_{\vec{l}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_{\vec{l}}\vec{a} + np_{\vec{l}}\vec{b}.$$

Теорема 3. Ортогональная проекция вектора произведения $\vec{a}$ и числа λ на направление ненулевого вектора $\vec{l}$ равна произведению числа λ на ортогональную проекцию вектора $\vec{a}$.

$$np_{\vec{l}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{l}}\vec{a}.$$