

## Лекция 1: Математический анализ

**Математический анализ** - изучение через размышление

Объект математического анализа - *функция*

В математическом анализе используются символы из математической логики и теории множеств.

## 1 Математическая логика

Объект изучения математической логики - высказывание.

**Определение 1.** Высказывание - повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

**Пример.**  $2 + 3 = 5$  - истинно,  $3 < 0$  - ложно

### 1.1 Логические символы

$\wedge$  - конъюнкция (логическое "И")

$\vee$  - дизъюнкция (логическое "ИЛИ")

$\Rightarrow$  - импликация ("если А то В")

$\Leftrightarrow$  - эквивалентность или равносильность ("тогда и только тогда")

Кванторы - общее название для логических операций

$\exists$  - существует

$\nexists$  - не существует

$\exists!$  - существует единственный элемент

$\forall$  - для каждого

## 2 Теория множеств

**Определение 2.** Множество - совокупность объектов, связанных одним и тем же свойством. Обозначаются заглавными латинскими буквами. Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами.

### 2.1 Символы теории множеств

•  $\in$  - принадлежит

•  $\notin$  - не принадлежит

- $\subset$  - включает
- $\subseteq$  - включает, возможно равенство
- $\equiv$  - тождественное равенство (для любого значения переменной)
- $\emptyset$  - пустое множество

## 2.2 Операции со множествами

- $\cup$  - объединение множеств
- $\cap$  - пересечение множеств

### Замечание.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Определение 3.** Подмножество - множество  $A$  называется подмножеством  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ .

**Определение 4.** Универсальное множество - такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества.

## 2.3 Способы задания множества

1. Перечислить все элементы:

$$A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

2. Указание свойства, которым обладают все элементы множества:

$$B = \{x : Q(x)\}.$$

## 2.4 Числовые множества

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$  - множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  - множество целых чисел
- $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  - множество рациональных чисел
- $I = \{\pi, \sqrt{2} \dots\}$  - множество иррациональных чисел

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$  - множество действительных чисел

**Замечание.** Порядок вложенности:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

## 2.5 Промежутки

**Определение 5.** Промежуток - подмножество  $X$  множества  $\mathbb{Q}$ , где  $\forall x_1, x_2 \in X$  этому множеству принадлежат все  $x$ , где  $x_1 < x < x_2$ .

### 2.5.1 Виды промежутков

1. Отрезок  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. Интервал  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. Полуинтервал  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

## 2.6 Конечные и бесконечные окрестности

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  - малые положительные величины

**Определение 6.** Окрестностью точки  $x_0$  называется любой интервал, содержащий эту точку

**Определение 7.**  $\delta$  - окрестностью  $(S(x_0, \delta))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\delta$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 8.**  $\varepsilon$  - окрестностью  $(S(x_0, \varepsilon))$  точки  $x_0$  называется интервал с центром в точке  $x_0$  и длиной  $2\varepsilon$ .

$$S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

**Определение 9.** Окрестностью  $+\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(+\infty) = (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 10.** Окрестностью  $-\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(-\infty) = (-\infty; -a), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Определение 11.** Окрестностью  $\infty$  называется любой интервал вида

$$S(\infty) = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

## Лекция 2: Математический анализ

### 3 Числовая последовательность

**Определение 12.** Числовая последовательность - это бесконечное множество числовых значений, которое можно упорядочить (перенумеровать).

Задать последовательность - указать формулу или правило, по которой  $\forall n \in \mathbb{N}$  можно записать соответствующий элемент последовательности.

**Замечание.** Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным, но число элементов последовательности всегда бесконечно.

**Пример.**  $1, -1, 1, -1, 1 \dots$

- Число элементов бесконечно
- Значений последовательности два

$$x_n = (-1)^{n+1}.$$

$2, 2, 2, 2, 2 \dots$

- Число элементов бесконечно
- Значений последовательности одно

$$x_n = 2 * 1^n.$$

$1, 2, 3, 4, 5 \dots$

- Число элементов бесконечно
- Значений последовательности бесконечно

$$x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Определение 13.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется неубывающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $1, 2, 3, 4, 4, 5, 5 \dots$

**Определение 14.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется возрастающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$

**Определение 15.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется невозрастающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

**Определение 16.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется убывающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Пример.**  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

**Определение 17.** Возрастающая, убывающая последовательности называются строго монотонными.

**Определение 18.** Неубывающая, возрастающая, невозрастающая, убывающая последовательности называются монотонными.

Немонотонная последовательность:

$$1, 2, 3, 2, 1 \dots$$

Постоянная последовательность

$$1, 1, 1, 1, 1 \dots$$

## 4 Предел последовательности

**Определение 19.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется натуральное число  $N(\varepsilon)$ , зависящее от  $\varepsilon$  такое что если порядковый номер  $n$  члена последовательности станет больше  $N(\varepsilon)$ , то имеет место неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : (\forall n > N(\varepsilon)) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

**Замечание.** Т.е. начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$  все элементы последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

#### 4.1 Геометрический смысл

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \varepsilon \\ -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ \forall n > N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Какой бы малый  $\varepsilon$  мы не взяли, все элементы последовательности  $\{x_n\}$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , причем чем меньше  $\varepsilon \downarrow$ , тем  $N(\varepsilon) \uparrow$ .

**Пример.** Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{1}{n+1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \dots\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

**Пример.** Пусть  $\varepsilon = 0.3$ ,  $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , т.е.  $(-0.3; 0.3)$   
Получается два элемента  $x_1, x_2 \notin (-0.3; 0.3) \Rightarrow N(\varepsilon) = 2$   
 $N(\varepsilon) + 1 = 3$   
 $x_3, x_4, x_5 \dots \in (-0.3; 0.3)$

**Определение 20.** Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

**Определение 21.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной снизу (сверху), если  $\exists m \in \mathbb{R} (M \in \mathbb{R})$ , что для всех  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $x_n \geq m$  ( $x_n \leq M$ )

**Определение 22.** Последовательность  $x_n$  называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n \leq M$  или  $|x_n| \leq M$ .

**Определение 23.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0 \exists$  свой порядковый номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $m \geq N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon), \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 1.** Теорема (критерий Коши существования предела последовательности)  
Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и

достаточно она была фундаментальной.

$$\{x_n\} \text{ -сходится} \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ - фундаментальная.}$$

## 4.2 Свойства сходящихся последовательность

**Теорема 2.** О существовании единственности предела последовательности

Любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  - сходящаяся последовательность. Метод от противного. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет 2 различных предела.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = a \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = b \quad (2)$$

$$a \neq b$$

□