

Analysis III

Arthur Henninger

24. Oktober 2024

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1	EINFÜHRUNG	SEITE 2
1.1	Formeln	2
1.2	Fourierreihen und euklidische Vektorräume	3
1.3	Der Satz von Banach-Tarski	9
KAPITEL 2	DAS LEBESGUEMASS	SEITE 11
2.1	Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß	11
2.2	Messbare Mengen	14
2.3	Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes	20
KAPITEL 3	DAS HAUSDORFFMASS UND DER SATZ VON CARETHÉODORY	SEITE 22
3.1	Äußere Maße und das Hausdorffmaß	22
3.2	Der Satz von Carethéodory	24
3.3	\mathcal{H}^d auf \mathbb{R}^d	28

Kapitel 1

Einführung

1. Vorlesung - 08.10.2024

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} \\ |B_r^{\mathbb{R}^2}(0)| &= \pi r^2 \\ |B_r^{\mathbb{R}^3}(0)| &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ |B_r^{\mathbb{R}^d}(0)| &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.\end{aligned}$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\}$

Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$

Kegel $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$

Es ist

$$\begin{aligned}|Z| &= \pi & (\text{Höhe mal Grundfläche}) \\ |C| &= \frac{1}{3} \pi. & \left(\frac{1}{3} \text{ Höhe mal Grundfläche} \right)\end{aligned}$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3 in der Halbkugel. Es ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \implies \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1 - x_3^2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\left| B_{\sqrt{1-x_3^2}}^{\mathbb{R}^2}(0) \times \{x_3\} \right| &= \pi(1 - x_3^2) \\ &= \pi - \pi x_3^2 \\ &= \left| \left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{\mathbb{R}^2}(0) \right) \times \{x_3\} \right|.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$|B^+| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

□

Frage 1

- (1) Definition des Volumens?
- (2) Berechnung des Volumens?
- (3) Mehrdimensionale Integrale?
- (4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$

$H \times H \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

- i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$
- ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 1.1 Bessel'sche Gleichung

$$\sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2.$$

Korollar 1.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Beweis: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &\quad + \left\langle x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, \dots \right\rangle = \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle \langle e_j, \dots \rangle.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle &= \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^N \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Bessel'sche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. \square

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall $[0, 1]$ nach \mathbb{C} abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$H = \{u \in C[0, 1], u(0) = u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u \cdot \bar{v} dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^1 |u|^2 dx.$$

Wir definieren

$$e_j = e^{2\pi i j x}.$$

Behauptung: $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sind ONS

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i j x} \overline{e^{2\pi i k x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (j-k)x} dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ \frac{1}{2\pi i (j-k)} [e^{2\pi i (j-k)x}]_0^1 = 0 & \end{cases} \end{aligned}$$

□

Damit können wir die Bessel'sche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=-N}^M |\langle u, e^{2\pi i j x} \rangle|^2 + \left\| u - \sum_{j=-N}^M \langle u, e^{2\pi i j x} \rangle e^{2\pi i j x} \right\|^2.$$

Lemma 1.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N |\langle f, e^{2\pi i j x} \rangle|^2 = \|f\|_H^2.$$

Satz 1.2

Sei $f \in H$ also stetig auf $[0, 1]$ mit $f(1) = f(0)$. Dann ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} = f.$$

Wir definieren $a_j = \langle u, e^{2\pi i j x} \rangle$.

Beweis: Nach der Bessel'schen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\| u - \sum_{j=-N}^N a_j e^{2\pi i j x} \right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^N |a_j|^2 \\ &\rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Bemerkung 1.1

H ist nicht vollständig (da beispielsweise eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

Frage 2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine quadratsummierbare Folge, sei also

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^2 < \infty.$$

Ist dann

$$\Rightarrow f_N := \sum_{j=-N}^N a_j e^{2\pi i j x}.$$

Zwar ist sie in H eine Cauchyfolge, aber H ist nicht vollständig, wie wir sehen werden.

Wir definieren für $f \in H$ den Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \langle f, e_n \rangle$$

und die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

Beweis des Lemmas: Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ($\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$) um:

$$\begin{aligned} D_k(x) &:= \sum_{n=-k}^k e^{2\pi i n x} \\ &= e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi i x})^n \\ &= e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i (2k+1)x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\ &= \frac{e^{2\pi i (k+1)x} - e^{-2\pi i k x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{\pi i x (2k+2) - \pi i x} - e^{-2\pi i k x - \pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=-k}^k \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^k \int_0^1 e^{2\pi i n (x-y)} f(y) dy \\ &= \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned} F_N(x) &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left(e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - e^{-\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{-2\pi i x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1) \cdot i \sin(\theta) \\ &= 2i \sin(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix} &= (e^{N\pi ix})^2 - 2 \cdot e^{N\pi ix} e^{-N\pi ix} + (e^{-N\pi ix})^2 \\ &= (e^{N\pi ix} - e^{-N\pi ix})^2. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit $\theta = N\pi x$ und $\theta = \pi x$ durch Kürzen mit $2i$ der letzte Term. Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x) dx = \int_0^1 D_N(x) dx = 1$, denn

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_N(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x} dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 2 \cos(2\pi n x) dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \quad (\text{erster Term fällt wegen ganzer Periode weg}) \\ &= \int_0^1 1 dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_N(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$, denn $(\sin(\theta))^2 = (\pm \sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$, denn $\sin(N\pi x)^2 \leq 1$

Für $f \in H$ ist aufgrund der Definition

$$\begin{aligned}
 f_N(x) &:= \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x-y)f(y)dy \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-k}^k \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Identität von vorher)} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N (N-|n|) \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Abzählen)} \\
 &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x}.
 \end{aligned}$$

Das Abzählen sorgt dafür, dass wie die Summe mit $n = 0$ genau N mal zählen, die für $n = 1, -1$ genau $N - 1$ mal zählen und so weiter.

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |f_N|^2 dy &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle|^2 \\
 &\leq \sum_{n=-N}^N |\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle|^2.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \rightarrow f(x) \quad (N \rightarrow \infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Zunächst ist dabei

$$\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) = \int F_N(x-y)(f(y) - f(x))dx.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es dann $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $|x - y| < \delta$. Sei $x \in [0, 1]$. Wir zerlegen

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\
 &= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y) - f(x))dy && \text{(da } \int F_N = 1) \\
 &= \underbrace{\int_{\delta < |x-y| < 1-\delta} F_N(x-y)(f(y) - f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y| < \delta} \dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y| > 1-\delta} \dots dy}_{:=I_3}.
 \end{aligned}$$

Das erste Integral ist durch

$$|I_1| \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2} \int_0^1 |f(y)| dy + |f(x)| \leq \frac{2}{N} \|f\|_{\sup} \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

beschränkt. Für das zweite und dritte Integral stellen wir fest

$$\left| \int_{|x-y| < \delta} F_N(x-y)(f(y) - f(x))dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 F_N(y)dy = \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N} \|f\|_{\sup} \sin^{-2}(\pi\delta) < \varepsilon$$

für große N . Sei nun $f \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es N_0 , sodass

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| < \varepsilon$$

für $N \geq N_0$ und daher $f_N \rightarrow f$ gleichmäßig und auch

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \right|^2 dx \rightarrow \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Mit den Umformungen zu f_N schließen wir

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geq \sum_{n=-N}^N |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &\geq \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &= \left\| \int_0^1 f_N(x-y)f(y)dy \right\|^2 \rightarrow \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

2. Vorlesung - 10.10.2024

1.3 Der Satz von Banach-Tarski

Gewünschte Eigenschaften eines Volumens

- (1) $A \subset \mathbb{R}^d, |A| \in [0, \infty]$
- (2) $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$
- (3) Invariant unter einer Kongruenzabbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung)
- (4) $|(0, 1)^d| = 1$ (Normierung)

Satz 1.3 Banach-Tarski

Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^3, j = 1, \dots, 6$ und Kongruenzabbildungen $\varphi_j, j = 1, \dots, 6$, sodass

(i)

$$B_1(0) = \bigcup_{j=1}^6 A_j.$$

(ii)

$$B_1(-2e_1) \cup B_1(2e_1) = \bigcup_{j=1}^6 \varphi_j(A_j).$$

Bemerkung 1.2

Wir werden den Beweis nicht führen, wollen jedoch anmerken, dass er das Auswahlaxiom verwendet.

Konsequenz: Wir können nicht jeder Teilmenge des \mathbb{R}^d ein Volumen mit den gewünschten Eigenschaften zuordnen. Durch Verzicht auf das Auswahlaxiom könnten wir doch jeder Teilmenge ein Volumen zuordnen, haben aber dann andere Probleme.

Kapitel 2

Das Lebesguemaß

2.1 Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß

Definition 2.1: Dyadische Würfel

Wir definieren $Q_{j,k}, j \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$Q_{jk} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^k j_m \leq x_m < 2^k(j_m + 1), 1 \leq m \leq d\}.$$

Q_{jk} ist ein Würfel mit Kantenlänge 2^k und Ecke $2^k \cdot j$.

Eigenschaften:

- (i) $Q_{jk} \cap Q_{j'k'} \neq \{\} \implies Q_{jk} \subset Q_{j'k'}$ oder $Q_{j'k'} \subset Q_{jk}$
- (ii) Jede offene Menge ist disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln, deren Kantenlänge kleiner als die Distanz zum Komplement (bzw. Rand) ist.
- (iii) Das Volumen definieren wir als $|Q_{jk}| = 2^{k \cdot d}$

Lemma 2.1

Ist Q_{jk} endliche disjunkte Vereinigung

$$Q_{jk} = \bigcup_{k=1}^N Q_{j_n k_n}$$

so ist

$$|Q_{jk}| = \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

Beweis: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k'}$$

disjunkte Vereinigung von Würfeln gleicher Kantenlänge.
Es gibt genau $(2^{k-k'})^d$

$$\implies \sum_n |Q_{j_n k'}| = (2^{k-k'})^d \cdot 2^{k'd} = 2^{kd} = |Q_{jk}|.$$

2. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ mit } k' = \min_n k_n$$

Zerlege $Q_{j_n k_n}$ zweimal, Fall 1 tritt ein: $|Q_{jk}| = \sum |Q_{j_n k_n}|$

□

Definition 2.2

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Wir nennen eine Folge dyadischer Q_{jk} eine Überdeckung von A , falls

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Wir definieren das äußere Lebesguemaß von A durch

$$m_*^d(A) = \inf \left\{ \sum_n |Q_{j_n k_n}| \mid A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right\}.$$

Eigenschaften:

(1) Monotonie: $A \subset B \implies m_*^d(A) \leq m_*^d(B)$

(2) Subadditivität:

$$m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Wenn A und B einen positiven Abstand haben, dann gilt

$$m_*^d(A \cup B) = m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Es gilt immer

$$m_*^d\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_*^d(A_n).$$

(3) Für jede beschränkte Menge A gilt

$$m_*^d(A) < \infty.$$

Beweis: (1) Jede Überdeckung von B überdeckt A .

(2)

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j'_n k'_n} &\implies A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j'_n k'_n} \\ &\implies m_*^d(A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j'_n k'_n}| \\ &\text{und } m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B). \end{aligned}$$

Abstand von $A, B > 0$: genügt. Würfel mit Kantenlänge $< \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \text{ABSTAND}$. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ genauso wie im ersten Fall

(3) Jede beschränkte Menge liegt in der Vereinigung von 2^d dyadischen Würfeln.

□

Satz 2.2

Für jede disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}$$

gilt

$$m_* \left(\bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) = \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

Beweis: Wir wissen

$$m_*^d \left(\bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) \leq \sum_n |Q_{j_n k_n}|$$

nach Definition. Zu zeigen:

$$m_*^d \left(\bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) \geq \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

1. Fall: Ein Würfel Q_{jk} , $m^*(Q_{jk}) = 2^{kd}$.

Für endliche Überdeckung: Lemma 2.1

$$Q_{jk} \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ ohne Einschränkung: } Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt.}$$

$$\text{Zu zeigen: } |Q_{jk}| \leq \sum_n |Q_{j_n k_n}|$$

$$\implies m_*^d(Q_{jk}) = \inf \left\{ \sum \dots \right\}.$$

Sei $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jk} &= \{x | 2^k j_l \leq x_l \leq 2^k(j_l + 1 - 2^{-m})\} \text{ abgeschlossen, beschränkt} \implies \text{kompakt} \\ Q_{j_n, k_n} &\subset Q_{j_n, k_n}^m = \{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 2^{-m}) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\} \text{ offen} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\implies \tilde{Q}_{jl} \subset Q_{jl} \subset \bigcup_n Q_{j_n, k_n} \subset \bigcup_n Q_{j_n, k_n}^m.$$

Die kompakte Menge \tilde{Q}_{jl} wird also durch offene Mengen überdeckt. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

$$\implies \exists N : \tilde{Q}_{jl} \subseteq \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n, k_n}^m.$$

Nach Lemma 2.1 kleinste Kantenlänge, zählen.

$$\text{Für } \tilde{Q}_{j,k} : (2^m - 1)^d 2^{(k-m)d} \leq (2^m + 1)^d \sum_{n=0}^N 2^{(k_n-m)d}$$

$$\begin{aligned} |Q_{jk}| &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}} \right)^d \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| \\ &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-n}} \right)^d m_*^d(Q_{jn}) \forall m \geq 1, \implies |Q_{jn}| \leq m^*(Q_{jn}). \end{aligned}$$

Die letzten Schritte ergeben sich, indem das Infimum über alle Zerlegungen betrachtet wird. Die Ungleichung gilt damit für jede Überdeckung.

2. Fall:

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Es folgt für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |Q_{j_n k_n}| &= m_*^d \left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) \\ &\leq m_*^d \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(Q_{j_n k_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|. \end{aligned} \tag{1. Fall}$$

Wir haben den ersten Fall auf endlich viele disjunkte Würfel angewendet, da das Argument für einen Würfel auch diesen Fall abdeckt.

Schließlich gilt

$$N \rightarrow \infty \implies m_*^d \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|.$$

□

2.2 Messbare Mengen

Definition 2.3

Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U existiert mit $A \subseteq U$ und $m^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

Eigenschaften:

- (1) Offene Mengen sind messbar,

Beweis:

$$m_*^d(\{\}) = 0.$$

□

- (2) Nullmengen: $m_*^d(A) = 0 \implies A$ messbar

Beweis: Falls

$$\begin{aligned} m_*^d(A) = 0, \varepsilon > 0 &\implies \exists Q_{j_n k_n} \text{ mit } A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}, \sum |Q_{j_n k_n}| < 2^{-d} \varepsilon. \\ \tilde{Q}_{j_n k_n} &= \{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 1) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\} \\ &\implies A \subset \bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}, m_*^d(\tilde{Q}_{j_n k_n}) \leq 2^d |Q_{j_n k_n}| \\ m_*^d \left(\bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n} \right) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

- (3) abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: A_n seien messbar, $\varepsilon > 0$, U_n offen, $A_n \subset U_n$, $m_*^d(U_n \setminus A_n) < 2^{-1-n} \varepsilon$.

$$\begin{aligned} m_*^d \left(\bigcup U_n \setminus \bigcup A_n \right) &\leq m_*^d \left(\bigcup (U_n \setminus A_n) \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_*^d(U_n \setminus A_n) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(4) Abgeschlossene Mengen sind messbar.

Beweis: Wegen (3) genügt es, A kompakt zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$, U offen, $A \subset U$ mit $m_*^d(U) \leq m_*^d(A) + \varepsilon$.

$$A = \bigcup_n \left(\overline{B_n(o)} \cap A \right).$$

Siehe Beweis von Satz 2.2: $\exists Q_{j_n k_n}, Q_{j_n k_n}^m, A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}$ mit

$$\sum |Q_{j_n k_n}| \leq m_*^d(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A kompakt $\implies V = U \setminus A$ offen

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt, Abstand zu Komplement} \\ &> 2^{k_n} \implies \text{positive Distanz zu } A. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \implies m_*^d(A) + \varepsilon &\geq m_*^d(U) \\ &\geq m_*^d \left(A \cup \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) && \text{(positiver Abstand)} \\ &= m_*^d(A) + m_*^d \left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) \\ &= m_*^d(A) + \sum_{n=1}^N |Q_{j_n k_n}| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| &\leq \varepsilon \\ m^*(V) &= m^*(U \setminus A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| && \text{(wegen 2.2)} \\ &\leq \varepsilon \\ \implies &\text{messbar.} \end{aligned}$$

□

(5) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.

Beweis: Sei A messbar, $A \subset U_n$ offen, $m_*^d(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$.
 $\mathbb{R}^d \setminus U_n$ ist abgeschlossen, messbar nach (4)

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \bigcup_n (\mathbb{R}^d \setminus U_n) \subset \mathbb{R}^d \setminus A \text{ messbar} \\ T &= (\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S \subset U_n \setminus A \forall n \\ \Rightarrow m_*^d((\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S) &< \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow T \text{ Nullmenge, messbar.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus A = S \cup T$ messbar als Vereinigung zweier Messbarer Mengen □

(6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: Zweimal Komplemente, abzählbare Vereinigungen. □

Bemerkung 2.1

Solange das Auswahlaxiom nicht genutzt wird, kann man keine nicht messbaren Mengen konstruieren.

Satz 2.3

- (1) Die (Lebesgue)-messbaren Mengen bilden eine σ -Algebra, d.h.
 - die leere Menge ist messbar,
 - Komplemente und abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar
- (2) σ -Additivität: Sind E_n messbare disjunkte Mengen, so gilt

$$\begin{aligned} m_*^d \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n) \\ m_*^d(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis:

Bemerkung 2.2

(1) haben wir bereits gesehen.

Zunächst seien E_n beschränkt, $\varepsilon > 0$, $\mathbb{R}^d \setminus E_n$ messbar $\Rightarrow \exists U_n$ offen mit $m_*^d(U_n \setminus (\mathbb{R}^d \setminus E_n)) < 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus U_n =: F_n \subset E_n$ abgeschlossen mit

$$m_*^d(E_n \setminus F_n) < 2^{-n-1} \cdot \varepsilon.$$

Die Mengen F_n sind disjunkt und kompakt

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_*^d \left(\bigcup E_n \right) &\geq m_*^d \left(\bigcup_{n=0}^N F_n \right) \parallel \\ &= \sum_{n=0}^N m_*^d(F_n) && \text{(positiver Abstand)} \\ &\geq \sum_{n=0}^N m_*^d(E_n) - \varepsilon \\ \Rightarrow m_*^d \left(\bigcup_n E_n \right) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n). \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt immer

$$\Rightarrow m_*^d\left(\bigcup E_n\right) = \sum m_*^d(E_n) \text{ für } E_n \text{ beschränkt.}$$

Im Allgemeinen Fall setzen wir

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_n \cap (B_{m+1}(0) \setminus B_m(0)) \\ \Rightarrow m_*^d\left(\bigcup E_n\right) &= \sum_{n,m} m_*^d(E_{n,m}) \\ m_*^d(E_n) &= \sum_m m_*^d(E_{n,m}) \end{aligned}$$

□

4. Vorlesung - 17.10.2024

Definition 2.4

Wir nennen messbare Mengen Lebesguemengen. Wir definieren das Lebesguemaß m^d als die Einschränkung von m_*^d auf die Lebesguemengen.

Lemma 2.4

Seien E_n messbar, $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_n E_n$ ist messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

Ist $E_{n+1} \subset E_n$ und $m^d(E_n) < \infty$ für ein n , so gilt $E = \bigcap_n E_n$ messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

Beweis: (1) $E_0 = \emptyset$, $F_n = E_{n+1} \setminus E_n$ disjunkt. Für messbar, disjunkt

$$E = \bigcup F_n \Rightarrow m^d(E) = \sum_n m^d(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N m^d(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^d(E_N).$$

(2) $E_{n+1} \subset E_n$, $m^d(E_n) < \infty$

$$m^d(E_0 \setminus E) = m^d(E_0) - m^d(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_0 \setminus E_n) = m^d(E_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

□

Satz 2.5 Regularität des Lebesguemaßes

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue, $\varepsilon > 0$.

Dann gilt:

- (1) $\exists U$ offen: $A \subset U$, $m^d(U \setminus A) < \varepsilon$
- (2) $\exists B$ abgeschlossen: $B \subset A$, $m^d(A \setminus B) < \varepsilon$

(3) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert $K \subset A$ kompakt mit $m^d(A \setminus K) < \varepsilon$.

(4) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert eine endliche disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n},$$

sodass die symmetrische Differenz $A \Delta F := (A \cup F) \setminus (A \cap F)$ die Ungleichung $m^d(A \Delta F) < \varepsilon$ erfüllt.

Beweis: (1) Haben wir gesehen

(2) Haben wir gesehen

(3) Sei B wie in (2)

$$K_n = B \cap \overline{B_n(o)} \implies B = \bigcup K_n.$$

K_n kompakt: Lemma 2.4:

$$m^d(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(K_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(B \setminus K_n) = 0.$$

(4) U wie in (1).

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt} \\ \implies m^d(U) &= \lim_{N \rightarrow \infty} m^d\left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \\ \implies \exists N : m^d\left(U \setminus \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) &< \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $m^d(A) < \infty \implies m^d(U) < \infty$. Also gilt

$$A \Delta \left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \subset (U \setminus A) \cup \left(U \setminus \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \implies m^d(A \Delta F) < 2\varepsilon.$$

□

Satz 2.6 Transformationseigenschaften unter affinen Abbildungen

Sei $\varphi : x \rightarrow Ax + b$ eine affine Abbildung des \mathbb{R}^n . Für $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$m_*^d(\varphi(E)) = |\det A| m_*^d(E).$$

E messbar $\implies \varphi(E)$ messbar

Beweis: Jede Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen (vertauschen Zeilen, multiplizieren Zeilen, ziehen Vielfache von Zeilen voneinander ab). Es genügt, Elementarmatrizen zu betrachten.

1) Translation ($A = 1$). Es genügt, Translation in eine Koordinatenrichtung zu betrachten.

$$m_d^*(\varphi(E)) \leq \sum_n m_d^*(\varphi(Q_{j_n k_n})) \text{ für } E \subset Q_{j_n k_n}.$$

Es genügt, die Abschätzung für $E = Q_{jk}$ zu zeigen

$$\begin{aligned} &\implies \leq |\det A| \sum_n |Q_{j_n k_n}| \\ &\implies m_d^*(\varphi(E)) \leq |\det A| m_d^{*A(E)}. \end{aligned}$$

A invers $\implies \geq \implies =$, $\det A = 0 \implies$ fertig

Zu zeigen: $m_d^*(Q_{jk} + ke_1) = m_d^*(Q_{jk}) = |Q_{jk}|$

für $d = 1$ wird $0, 1$ auf $k, k + 1$ gemappt. Überdecken durch dyadische Würfel der Länge 2^m , $m < k$

$$2^{k(d-1)}((2^{k-m} - 1)2^m) \leq m_*^d(Q_{jk} + ke_1) \leq 2^{k(d-1)}(2^{k-m} + 1)2^m (= 2^{kd}), m \rightarrow -\infty.$$

Anzahl der Würfel der Kantenlänge 2^m in dem vorhandenen Würfel $Q + ke_1$:

$$2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} - 1) \text{ enthalten } 2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} + 1) \text{ Würfel der } 2^m \text{ enthalten } Q + ke_1.$$

2)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \end{pmatrix}.$$

$\lambda \geq 0$. Genügt: $d = 1$, $Q_{0,k}$, $2^m < \lambda 2^k$

$$\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \lambda \rfloor}_{\rightarrow 2^k} \cdot 2^m \leq \underbrace{m^*(Q_{0,k})}_{m \rightarrow \infty} \leq \left(\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \cdot \lambda \rfloor}_{2^k} + 1 \right) 2^m.$$

3)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & h & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Genügt $d = 2$.

Maximal $2(\lfloor k \rfloor + 1) \cdot 2^{k-m}$ Würfel schneiden $\varphi(Q_{jk})$, aber sind nicht Teilmenge; zähle

$$m_*^d(\varphi(Q_{jk})) = |Q_{jk}|.$$

4) Permutationen, $Q_{jk} \rightarrow Q_{j,k} = \varphi(Q_{j,k})$

$$\implies \varphi = Ax + b, m_*^d(\varphi(E)) = m_*^d(E) = m_*^d(E) |\det(A)|.$$

E messbar, $\det A = 0 \implies m_*^d(\varphi(E)) = 0 \implies$ Nullmenge, messbar, $\det A \neq 0$, U offen $\implies \varphi(U)$ offen, (Umkehrabbildung ist affin \implies stetig, Urbilder offener Mengen sind offen)

$$U \supset E, m_*^d(\varphi(U) \setminus \varphi(E)) = m_*^d(\varphi(U \setminus E)) = |\det A| m_*^d(U \setminus E).$$

□

2.3 Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes

Definition 2.5: σ -Algebra

sei X eine Menge. Eine σ -Algebra ist eine Familie von Teilmengen

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{P}(X),$$

sodass

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$
- (2) $A \in \mathcal{A}(X) \implies X \setminus A \in \mathcal{A}(X)$
- (3) $A_n \in \mathcal{A}(X) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$

Bemerkung 2.3

Lebesguemengen bilden eine σ -Algebra

Beispiel 2.1

- 1) $\mathcal{P}(X)$
- 2) $\{\emptyset, X\}$
- 3) (X, d) metrischer Raum.
 $\mathcal{B}(X)$ ist die σ -Algebra der Borelmengen, die von den offenen Mengen erzeugt wird, d.h. die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält.
 Zur Konstruktion:
 - $\mathcal{P}(X)$ enthält jede offene Menge
 - $\mathcal{B}(X) = \{A \subset X \mid A \text{ ist in jeder } \sigma\text{-Algebra enthalten, die alle offenen Mengen enthält}\}.$

Eigenschaften:

(1)

$$A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}.$$

Beweis:

$$\overbrace{X \setminus \left(\underbrace{\bigcap_n A_n}_{\in \mathcal{A}} \right)}^{\in \mathcal{A}} = \bigcup_n \underbrace{(X \setminus A_n)}_{\in \mathcal{A}}.$$

□

(2) Q_{jk} sind Bachmenge:

$$\{x_l \geq 2^k j_e \mid 1 \leq l \leq d\} \cap \{x_k < 2^k(j_e + 1) \mid 1 \leq l \leq d\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- (3) $X = \mathbb{R}^d$. Translate von Borelmengen sind Borelmengen. Translate von offenen Mengen sind offen \implies erzeugte σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist invariant unter Translation.
 Bilder von Borelmengen unter affiner Abbildung sind wieder Borell

- Beweis:** (i) Invertierbar: Offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet
(ii) $\varphi(x) = Ax + b, \det A \neq 0$ approximiert durch invertierbare Abbildungen

□

Satz 2.7 Eindeutigkeit von m^d

Sei $\lambda : B(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (1) $\lambda(Q_{0,0}) = 1$
- (2) $A_n \in B(\mathbb{R}^d)$ disjunkt $\implies \lambda(\bigcup_n A_n) = \sum \lambda(A_n)$
- (3) $A \in B(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d \implies \lambda(A + x) = \lambda(A)$

Dann ist $\lambda(A) = m^d(A) \forall A \in B(\mathbb{R}^d)$

Beweis: (1) Translationsinvarianz: $\lambda(Q_{j,k}) = \lambda(Q_{0,k})$

$$\lambda(Q_{0,k}) = 2^d \lambda(Q_{0,k-1}),$$

da $Q_{n,k}$ Vereinigung von 2^d Würfeln der Kantenlänge 2^{k-1} ist.

$$\implies \lambda(Q_{j,k}) = 2^{kd}, \lambda(Q_{0,0}) = 1.$$

(2) Offene Mengen sind abzählbare disjunkte Vereinigungen von

$$\begin{aligned} Q_{j_n, k_n} &\implies \lambda(U) = m^d(U) \forall U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.} \\ &\implies \lambda(A) = m^d(A) \forall A \text{ abgeschlossen.} \end{aligned}$$

(3) Satz 2.5 A Lebesgue (insbesondere Borell) $\implies \exists B_n \subset A \subset U_n, B_n$ als auch U_n offen, $m^d(A \setminus B_n) < \varepsilon, m^d(U_n \setminus A) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_n B_n, U \subset \bigcap_n U_n \in B(\mathbb{R}^d) \\ &\implies m^d(U \setminus B) = \lambda(U \setminus B) = 0 \\ &\implies \lambda(U) = \lambda(A) = m^d(A). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4

Wir haben genutzt, dass für A beschränkt, $A \subset B_R(0)$

$$\begin{aligned} \lambda(B_R(0)) &= \lambda(B_R(0) \setminus A) + \lambda(A) \\ m^d(B_R(0)) &= m^d(B_R(0) \setminus A) + m^d(A). \end{aligned}$$

Je zwei untereinander stehende Summanden sind hier gleich.

Kapitel 3

Das Hausdorffmaß und der Satz von Carathéodory

Wir betrachten

$$c_d = m^d(B_1^{\mathbb{R}^d}(0)) = \frac{r^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}.$$

Sei $\alpha > 0, c_\alpha = \frac{\pi^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}$. Der Durchmesser $\text{diam}(A)$ für $A \subset X$, (X, d) metrischer Raum ist

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

. $A, B \subset X$. Abstand $d(A, B) = \inf \{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$

3.1 Äußere Maße und das Hausdorffmaß

Definition 3.1: Hausdorffmaß

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $0 \leq \alpha, 0 < \delta, A \subset X$

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = c_\alpha \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } F_n}{2} \right)^\alpha : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, F_n \subset X, \text{diam } F_n < \delta \right\} \in [0, \infty]$$

und

$$\mathcal{H}_*^\alpha(A) := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \in [0, \infty].$$

Eigenschaften:

(1)

$$\delta_1 < \delta_2 \implies \mathcal{H}_{\delta_1}^\alpha(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^\alpha(A) \implies \mathcal{H}_*^\alpha = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A).$$

(2)

$$A \subset B \implies \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \leq \mathcal{H}_\delta^\alpha(B) \text{ und } \mathcal{H}_*^\alpha(A) \leq \mathcal{H}_*^\alpha(B).$$

(3) Subadditivität:

$$\mathcal{H}_*^\alpha \left(\bigcup_n A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_*^\alpha(A_n).$$

Beweis: Sei $\delta > 0, \varepsilon > 0, (F_{nm})_m$ eine Überdeckung von A_n

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_n) + 2^{-1-n} \varepsilon &> c_\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam}(F_{nm})}{2} \right)^\alpha, \quad \text{diam } F_{nm} < \delta \\
 \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &< \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_n) + \varepsilon \\
 \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_n) \\
 \mathcal{H}_*^\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\
 &\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \sim_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_n) \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_*^\alpha(A_n).
 \end{aligned} \tag{*}$$

□

(4) Seien $A, B \subset X$ mit positivem Abstand. Dann gilt

$$\mathcal{H}_*^\alpha(A \cup B) = \mathcal{H}_*^\alpha(A) + \mathcal{H}_*^\alpha(B).$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A \cup B) + \varepsilon > c_\alpha \sum \left(\frac{\text{diam } F_n}{2} \right)^\alpha,$$

wobei $A \cup B \subset \bigcup F_n, \text{diam } F_n < \delta$. Nun ist $F \subset X, F \cap A \ni x, F \cap B \ni y$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \text{diam } F \geq d(x, y) \geq d(A, B) \\
 &\Rightarrow F_n \cap A = \emptyset \text{ oder } F_n \cap B = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Sei $M \subset \mathbb{N} : n \in M \iff F_n \cap A = \emptyset$

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \leq \sum_{n \in M} \left(\frac{\text{diam } F_n}{2} \right)^\alpha, \mathcal{H}_\delta^\alpha(B) \leq c_\alpha \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M} \left(\frac{\text{diam } F_n}{2} \right)^\alpha \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) + \mathcal{H}_\delta^\alpha(B) \leq \mathcal{H}_\delta^\alpha(A \cup B) + \varepsilon.$$

□

(5) $\mathcal{H}_*^0(A) = \text{Anzahl der Elemente}$

Beweisskizze: $A = \{x_1, \dots, x_N\}$

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{1}{2} \inf d(x_i, x_j) \quad i \neq j \\
 &\Rightarrow \mathcal{H}_\delta^0(A) = N \\
 &\Rightarrow \mathcal{H}_*^0(A) = N.
 \end{aligned}$$

A unendlich $\Rightarrow \forall N \exists A_N \subset A$ mit N Elementen

$$\Rightarrow \mathcal{H}_*^0(A) \geq \mathcal{H}_*^0(A_N) = N \Rightarrow \mathcal{H}_*^0(A) < \infty.$$

□

(6) $(X, d), (Y, \delta)$ metrische Räume

$\varphi : X \rightarrow Y$ Lipschitzstetig mit Konstante L .

Also

$$\delta(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L \cdot d(x, y) \implies \mathcal{H}_*^\alpha(\varphi(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}_*^\alpha(A) \forall A \subset X.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{diam}(\varphi(F)) &\leq L \text{diam}(F) \forall F \subset X \\ \implies \mathcal{H}_{k\delta}^\alpha(\varphi(A)) &\leq L^\alpha \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \implies \mathcal{H}_*^\alpha(\varphi(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}_*^\alpha(A). \end{aligned}$$

□

(7) $X = \mathbb{R}^d, \lambda > 0$

$$\mathcal{H}_*^\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}_*^\alpha(A).$$

folgt aus (6)

(8)

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\implies \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \leq \delta^{\beta-\alpha} \mathcal{H}_\delta^\beta(A) \cdot \frac{c_\beta}{c_\alpha} \\ \left(\frac{\text{diam } F}{2} \right)^\beta &= \underbrace{\left(\frac{\text{diam } F}{2} \right)^{\beta-\alpha}}_{\leq \delta^{\beta-\alpha} \text{ falls } \text{diam } F < \delta} \left(\frac{\text{diam } F}{2} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_*^\beta(A) > 0 &\implies \mathcal{H}_*^\alpha(A) = \infty \\ \mathcal{H}_*^\beta(A) < \infty &\implies \mathcal{H}_*^\alpha(A) = 0. \end{aligned}$$

3.2 Der Satz von Carethéodory

Definition 3.2: äußeres Maß

Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

heißt *äußeres Maß*, falls

- (1) $\mu_*(\emptyset) = 0$
- (2) $A \subset B \implies \mu_*(A) \leq \mu_*(B)$
- (3) Subadditiv: $\mu_*(\bigcup A_n) \leq \sum \mu_*(A_n)$

Ist (X, d) ein metrischer Raum, μ_* äußeres Maß. Wir nennen μ_* ein metrisches äußeres Maß, falls

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \text{ für } d(A, B) > 0.$$

Bemerkung 3.1

m_*^d und \mathcal{H}_*^α sind metrische äußere Maße.

Definition 3.3: Carathéodory messbar

Sei μ_* ein äußeres Maß auf X . $A \subset X$ heißt μ -messbar, falls

$$\mu_*(E) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*((X \setminus A) \cap E) \quad \forall E \subset X.$$

Satz 3.1 Carathéodory

Sei μ_* ein äußeres Maß auf X . Die μ -messbaren Mengen bilden eine σ -Algebra. Sind A_n messbar und disjunkt, so gilt

$$\mu_*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu_*(A_n).$$

Ist μ_* ein äußeres metrisches Maß, so ist jede Borellmenge messbar.
Für messbare Mengen schreiben wir $\mu(A) := \mu_*(A)$.

Bemerkung 3.2

Aussagen:

- messbare Mengen bilden eine σ -Algebra
- μ_* ist σ -additiv auf messbaren Mengen
- μ_* metrisch \implies jede Borellmenge ist messbar

6. Vorlesung - 24.10.2024

Beweis: 0) A Nullmenge ($\mu_*(A) = 0$) $\implies A$ messbar

Sei $E \subset X$. O.B.d.A.: $\mu_*(E) < \infty$. Es ist $\mu_*(A \cap E) \leq \mu_*(A) = 0$ und

$$\mu_*(E) \leq \underbrace{\mu_*(E \cap A) + \mu_*(E \cap (X \setminus A))}_{=0} \leq \mu_*(E).$$

Dies Impliziert Gleichheit $\implies A$ messbar. Also A messbar $\implies X \setminus A$ messbar

1) Seien A_1 und A_2 messbar. $E \subset X$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &= \mu_*(E \cap A_1) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1)) \\ &\stackrel{A_1 \text{ messbar}}{=} \mu_*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1) \cap A_2) \\ &\quad + \mu_*(E \cap A_1 \cap (X \setminus A_2)) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)) \\ &\geq \mu_*\left(\underbrace{E \cap (A_1 \cup A_2)}_{=(A_1 \cap A_2) \cup A_1 \cap (X \setminus A_1) \cup A_2 \cap (X \setminus A_1)}\right) + \mu_*\left(\underbrace{E \cap (X \setminus (A_1 \cup A_2))}_{=E \cap (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)}\right) \\ &\geq \mu_*(E). \end{aligned}$$

Also $\implies A_1 \cup A_2$ messbar und $A_1 \cap A_2$ messbar. Seien A_1, A_2 messbar und disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_*(A_1 \cup A_2) &= \mu_*(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu_*((X \setminus A_1) \cap (A_1 \cup A_2)) \\ &= \mu_*(A_1) + \mu_*(A_2). \end{aligned}$$

2) Seien A_n messbar, disjunkt.

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad G_N = \bigcup_{n=1}^N A_n \text{ messbar.}$$

Schritt 1: Sei $E \subset X, \mu_*(E) < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_*(G_N \cap E) &= \mu_*(A_n \cap (G_n \cap E)) + \mu_*((X \setminus A_n) \cap (G_n \cap E)) \\ &= \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*(G_{N-1} \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu_*(A_n \cap E). \end{aligned} \quad (\text{Induktion})$$

Es folgt

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n \cap E) < \infty.$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &= \mu_*(G_N \cap E) + \mu_*((X \setminus G_N) \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^N \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*((X \setminus G) \cap E). \end{aligned} \quad (G \text{ messbar, Monotonie})$$

Betrachten wir nun $N \rightarrow \infty$, so finden wir aufgrund der Subadditivität

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*((X \setminus G) \cap E) \\ &\geq \mu_*(E \cap G) + \mu_*(E \cap (X \setminus G)) \\ &\geq \mu_*(E). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \mu_*(E \cap G) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E \cap A_n) \geq \mu_*(E \cap G) \\ \implies \mu_*(E) &= \mu_*(E \cap G) + \mu_*(E \cap (X \setminus G)) \\ &\implies G \text{ messbar} \\ E = G &\implies \mu_*(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n). \end{aligned}$$

Seien A_n messbar

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_N &= \bigcup_{n=1}^N A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n \implies \tilde{A}_n \text{ messbar, disjunkt} \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \implies \sigma\text{-Algebra, } \sigma\text{-additiv.} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ disjunkt.}$$

Wir hatten folgende Fälle:

- 1) $\mu_*(A_m) = \infty \implies \mu_*(G) = \infty$
- 2) $\mu_*(A_m) < \infty \forall n, \sum \mu_*(A_n) = \infty$

$$\begin{aligned} \implies \mu_*(G_N) &= \sum_{n=1}^N \mu_*(A_n) \rightarrow \infty \\ (E = G_N) | \mu_*(G) &\geq \mu_*(G_N). \end{aligned}$$

$$3) \sum \mu_*(A_n) < \infty \implies \mu_*(G) < \infty, E = G$$

- 3) μ_* sei ein metrisches äußeres Maß. Wir zeigen F abgeschlossen $\implies F$ messbar \implies Borelmengen messbar.
Sei $F \subset X$ abgeschlossen, $E \subset X, \mu_*(E) < \infty$

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ x \in E : d(x, F) \geq \frac{1}{n} \right\} \implies X \setminus F \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \subset E_{n+1}, d(E_n, F) \geq \frac{1}{n} \\ \mu_*(E) &\geq \mu_*((E \cap F) \cup E_n) \\ &= \mu_*(E \cap F) + \mu_*(E_n). \end{aligned} \quad (*)$$

Sei

$$\begin{aligned} B_n &:= E_{n+1} \cap (X \setminus E_n) \\ &= \left\{ x \in E \mid \frac{1}{n+1} \leq d(x, F) < \frac{1}{n} \right\} \\ d(E_n, B_{n+1}) &\geq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0, \text{ da } d(x, F) \geq \frac{1}{n}, d(x, F) < \frac{1}{n+1} \\ \mu_*(E_{2n+1}) &\geq \mu_*(B_{2n} \cup E_{2n-1}) = \mu_*(B_{2n}) + \mu_*(E_{2n-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mu_*(B_{2k}) \\ \mu_*(E_{2n}) &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \mu_*(B_{2k-1}) \\ &\implies \sum_k \mu_*(B_k) < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu_*(E_n) &\leq \mu_*((X \setminus F) \cap E) \\ &\quad \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rightarrow 0} \underbrace{\mu_*((X \setminus F) \cap E)}_{\rightarrow 0} \\ &\leq \mu_*(E_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(B_j) \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(E_n) &= \mu_*((X \setminus F) \cap E). \end{aligned}$$

Mit (*) folgt

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &\geq \mu_*(F \cap E) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_*(E_n) = \mu_*(F \cap E) + \mu_*((X \setminus F) \cap E) \stackrel{\text{subadd.}}{\geq} \mu_*(E) \\ \implies \mu_*(E) &= \mu_*(E \cap F) + \mu_*(E \cap (X \setminus F)) \implies F \text{ messbar.} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4

Die Abgeschlossenheit wurde in

$$X \setminus F = \bigcup_n \left\{ x \mid d(x, F) > \frac{1}{n} \right\}.$$

□

Definition 3.4

Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X , $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Maß, falls

$$(1) \mu(\emptyset) = 0$$

(2) $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt $\implies \mu(A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ σ -additiv.

Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt Maßraum.

Ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ Borellmengen, so nennen wir μ ein Borellmaß.

Beispiel 3.1

- 1) \mathcal{A} Lebesguemengen, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, m^d)$
- 2) (X, d) mit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{H}^\alpha)$, wobei $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{H}_*^\alpha|_{\mathcal{B}(X)}$ oder \mathcal{A} die Menge der \mathcal{H}_*^α -messbaren Mengen, $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{H}_*^\alpha|_{\mathcal{A}}$

Lemma 3.2

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum,

- 1) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1}$

$$\implies \bigcup A_n \in \mathcal{A} \text{ und } \mu\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

- 2) $A_n \in \mathcal{A}, A_{n+1} \subset A_n, \mu(A_N) < \infty$ für ein N

$$\implies \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Beweis: Siehe Lebesguemaß. □

3.3 \mathcal{H}^d auf \mathbb{R}^d

Satz 3.3

Jede Lebesguemenge ist Hausdorffmessbar und umgekehrt. Es gilt

$$m_*^d(A) = \mathcal{H}_*^d(A) \forall A \subset \mathbb{R}^d.$$

Lemma 3.4 Isodiametrische Ungleichung

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann ist

$$m_*^d(A) \leq m^d\left(B_{\frac{\text{diam } A}{2}}(0)\right).$$

Beweis: (1) Behauptung.

(3.5)

$$m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_*^d(A) \leq c_d 2^{-d} d^{\frac{d}{2}} m_*^d(A).$$

In der Definition von \mathcal{H}_*^d dürfen wir offene Mengen nehmen $F \subset X, F_\varepsilon = \{x | d(x, F) < \varepsilon\}$ offen. ($\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \cdot \text{diam } F$).
Sei $A \subset X, A \subset \bigcup F_n$ (Lemma 3.4)

$$\implies m_*^d(A) \leq \sum_n m_*^d(F_n) \leq \sum_n c_d \left(\frac{\text{diam } F_n}{2}\right)^d.$$

\mathcal{H}_δ^d : Infimum

$$\implies m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_\delta^d(A) \forall \delta > 0 \implies m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_*^d(A).$$

Es ist

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}, \delta > 0, \text{ o.B.d.A. } 2^{k_n} < \delta.$$

Also

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) \leq c_d \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^d \sum |Q_{j_n k_n}|.$$

Wegen Infimum

$$\implies \mathcal{H}_\delta^d(A) \leq c_d \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^d m_*^d(A) \implies \mathcal{H}_*^d(A) \leq c_d 2^{-d} d^{\frac{d}{2}} m_*^d(A).$$

□