Analysis III

Arthur Henninger

October 8, 2024

Contents

Kapitel 1

Einführung

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)\right| = \pi r^2$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)\right| = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)\right| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\right\}$
Zylinder $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\right\}$
Kegel $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$
Es ist

$$|Z| = \pi \qquad \text{(Höhe mal Grundfläche)}$$
$$|C| = \frac{1}{3}\pi. \qquad \text{(} \tfrac{1}{3} \text{ Höhe mal Grundfläche)}$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3: Es ist

$$\begin{aligned}\left|B^{\mathbb{R}^2}_{\sqrt{1-x_3^3}}(0) \times \{x_3\}\right| &= \pi(1 - x_3^3)\\ &= \pi - \pi x_3^3\\ &= \left|\left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{R^2}(0)\right) \times \{x_3\}\right|.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$\left|B^+\right| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3\pi}.$$

□

Frage 1

(1) Definition des Volumens?

(2) Berechnung des Volumens?

(3) Mehrdimensionale Integrale?

(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$
$H \times H \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Satz 1.1 Besselsche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Korollar 1.1

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Proof: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\|\left(x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right) + \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 \\ &= \left\|x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 + \left\|\sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 \\ &+ \left\langle x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, \dots\right\rangle = \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle\left\langle e_j, \dots\right\rangle.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, e_k\right\rangle &= \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle\left\langle e_j, e_k\right\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^{N}\left\langle e, e_j\right\rangle\overline{\langle x, e_n\rangle}\left\langle e_j, e_n\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N}\left|\left\langle x, e_j\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Besselsche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. □

Wir untersuchen

$$H = \{u \in C[0,1], u(0) = u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u \cdot \overline{v} dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^1 |u|^2\, dx.$$

Wir definieren

$$e_j = e^{2\pi i j x}.$$

Behauptung: $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sind ONS

Proof:

$$\begin{aligned}\left\langle e_j, e_k\right\rangle &= \int_0^1 e^{\pi i j x}\overline{e^{2\pi i k x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{\pi i (j-k) x} dx \\ &= \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ \frac{1}{2\pi i (j-k)}\left[e^{\pi i (j-k) x}\right]_0^1 \end{cases} \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Damit ist nach Bessel

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^{M} \left|\left\langle u, e^{\pi ijx}\right\rangle\right|^2 + \left\|u - \sum_{j=N}^{M} \left\langle u, e^{\pi ijx}\right\rangle\right\|^2.$$

Lemma 1.1

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} \left|\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle\right|^2 = \|u\|^2.$$

Korollar 1.2
Mit $a_j = \left\langle u, e^{\pi ijx}\right\rangle$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} = 0 \text{ in } H.$$

Proof:

$$\begin{aligned}\left\|u - \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}\right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^{N} |a_j|^2 \\ &\to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

Bemerkung: H nicht vollständig. □

Frage 2

$$\sum |a_j|^2 < \infty.$$

und

$$\implies \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} \text{ Cauchyfolge }.$$

Konvergiert sie?

Beweis des Lemmas: Dirichletkerm (geometrische Summe):

$$\begin{aligned}D_k(x) &= \sum_{n=-k}^{k} e^{\pi inx} \\ &= e^{-2\pi ikx} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi ix})^n \\ &= e^{-2\pi ikx} \frac{e^{2\pi i(2k+1)x} - 1}{e^{2\pi ik} - 1} \\ &= \frac{e^{(2k+1)\pi ix} - e^{-(2k+1)\pi ix}}{e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=-k}^{k}\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^{k}\int_0^1 e^{\pi i n(x-y)} f(y)dy \\ &= \int_0^1 D_k(x-y)f(y)dy.\end{aligned}$$

Fejerkem:

$$\begin{aligned}F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N}\frac{1}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}}\sum_{k=0}^{N-1}(e^{(2k+1)\pi i x}-e^{-(2k+1)\pi i x}) \\ &= \frac{1}{N}\frac{1}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}}\left(e^{\pi i x}\frac{e^{2N\pi i x}-1}{e^{2\pi i x}-1}-e^{-\pi i x}\frac{e^{2N\pi i x}-1}{e^{-2\pi i x}-1}\right) \\ &= \frac{1}{N}\frac{e^{2N\pi i x}-2+e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x}-e^{-\pi i x})^2} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.\end{aligned}$$

Eigenschaften:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = \int_0^1 D_N(x)dx = 1$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$

Für $f \in H$ ist

$$\begin{aligned}f_N(x) := &\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle e^{2\pi i n x}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_N(y)|^2\, dy &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^2 \left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \sum_{n=-N}^{N}\left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Wir werden zeigen:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \to f(x) \quad (N \to \infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Sei nun $\delta > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}&\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\ &= \int_0^1 F_N(x-y)(f(x)-f(y))dy \qquad \left(\text{da } \int F_N = 1\right) \\ &= \underbrace{\int_{\delta<|x-y|<1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y|<\delta}\dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y|>1-\delta}\dots dy}_{:=I_3}.\end{aligned}$$

Es ist

$$|I_1| \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin(\delta)^2} \int_0^1 |f(y)| \, dy + |f(x)| \, .$$

Analog sind auch die anderen Integrale abzuschätzen, insgesamt konverkiert das Integral trotz Unvollständigkeit.

$\square$