Analysis III

Arthur Henninger

16. November 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1. Vorlesung - 08.10.2024

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)\right| = \pi r^2$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)\right| = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)\right| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\right\}$
Zylinder $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\right\}$
Kegel $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$
Es ist

$$|Z| = \pi \qquad \text{(Höhe mal Grundfläche)}$$
$$|C| = \frac{1}{3}\pi. \qquad \text{(} \tfrac{1}{3} \text{ Höhe mal Grundfläche)}$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3 in der Halbkugel. Es ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \implies \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1 - x_3^2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left|B^{\mathbb{R}^2}_{\sqrt{1-x_3^2}}(0) \times \{x_3\}\right| &= \pi(1 - x_3^3) \\ &= \pi - \pi x_3^3 \\ &= \left|\left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{R^2}(0)\right) \times \{x_3\}\right|. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$|B^+| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3\pi}.$$

□

Frage 1

(1) Definition des Volumens?

(2) Berechnung des Volumens?

(3) Mehrdimensionale Integrale?

(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$
$H \times H \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Satz 1.1 Bessel'sche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Korollar 1.2

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Beweis: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j .$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\|\left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 \\ &= \left\|x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 + \left\|\sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 \\ &+ \left\langle x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, \dots \right\rangle = \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle \langle e_j, \dots\rangle .$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, e_k\right\rangle &= \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle \langle e_j, e_k\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^{N} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} \langle e_j, e_k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N} \left|\langle x, e_j\rangle\right|^2 .\end{aligned}$$

Wir erhalten die Bessel'sche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. □

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall $[0, 1]$ nach $\mathbb{C}$ abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$H = \{u \in C[0, 1], u(0) = u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u \cdot \overline{v} dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^1 |u|^2 \, dx.$$

Wir definieren

$$e_j = e^{2\pi ijx}.$$

Behauptung: $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sind ONS

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi ijx}\overline{e^{2\pi ikx}}dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i(j-k)x}dx \\ &= \begin{cases}1 \text{ falls } j=k \\ \frac{1}{2\pi i(j-k)}\left[e^{2\pi i(j-k)x}\right]_0^1 = 0\end{cases}.\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Bessel'sche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^{M}\left|\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle\right|^2 + \left\|u - \sum_{j=N}^{M}\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle e^{2\pi ijx}\right\|^2.$$

Lemma 1.3

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\left|\left\langle f, e^{2\pi ijx}\right\rangle\right|^2 = \|f\|_H^2.$$

Satz 1.4
Sei $f \in H$ also stetig auf $[0,1]$ mit $f(1)=f(0)$. Dann ist

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle e^{2\pi inx} = f.$$

Wir definieren $a_j = \left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle$.

Beweis: Nach der Bessel'schen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\|u - \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}\right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^{N}|a_j|^2 \\ &\to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

Bemerkung

H ist nicht vollständig (da beispielsweise eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

Frage 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine quadratsummierbare Folge, sei also

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|^2 < \infty.$$

Ist dann

$$\implies f_N := \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi i j x}.$$

Zwar ist sie in H eine Cauchyfolge, aber H ist nicht vollständig, wie wir sehen werden.

Wir definieren für $f \in H$ den Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \langle f, e_n \rangle$$

und die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

Beweis des Lemmas: Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ($\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$) um:

$$\begin{aligned}
D_k(x) :&= \sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i n x} \\
&= e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi i x})^n \\
&= e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i (2k+1)x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\
&= \frac{e^{2\pi i (k+1)x} - e^{-2\pi i k x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i x (2k+2) - \pi i x} - e^{-2\pi i x k - \pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-k}^{k} \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^{k} \int_0^1 e^{2\pi i n (x-y)} f(y) dy \\
&= \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned}
F_N(x) :&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left(e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - e^{-\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{-2\pi i x} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2} \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1)\cdot i\sin(\theta) \\ &= 2i\sin(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix} &= (e^{N\pi ix})^2 - 2\cdot e^{N\pi x}e^{-N\pi ix} + (e^{-N\pi ix})^2 \\ &= (e^{N\pi ix} - e^{-N\pi ix})^2. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit $\theta = N\pi x$ und $\theta = \pi x$ durch Kürzen mit $2i$ der letzte Term.
Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = \int_0^1 D_N(x)dx = 1$, denn

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_N(x)dx &= \int_0^1 \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx}dx + \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 2\cos(2\pi nx)dx + \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \qquad \text{(erster Term fällt wegen ganzer Periode weg)} \\ &= \int_0^1 1dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_N(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 D_k(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$, denn $(\sin(\theta))^2 = (\pm\sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$, denn $\sin(N\pi x)^2 \leq 1$

Für $f \in H$ ist aufgrund der Definition

$$\begin{aligned} f_N(x) :&= \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 D_k(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-k}^{k}\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Identität von vorher)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}(N-|n|)\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Abzählen)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle e^{2\pi i n x}. \end{aligned}$$

Das Abzählen sorgt dafür, dass wie die Summe mit $n = 0$ genau N mal zählen, die für $n = 1, -1$ genau $N - 1$ mal zählen und so weiter.
Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|f_N\right|^2 dy &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^2 \left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \sum_{n=-N}^{N}\left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \to f(x) \quad (N\to\infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Zunächst ist dabei

$$\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) = \int F_N(x-y)(f(y)-f(x))dx.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es dann $\delta > 0$, so dass $\left|f(x) - f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $\left|x - y\right| < \delta$. Sei $x \in [0, 1]$. Wir zerlegen

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\ &\quad= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy && \left(\text{da } \int F_N = 1\right) \\ &\quad= \underbrace{\int_{\delta<\left|x-y\right|<1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{\left|x-y\right|<\delta} \ldots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{\left|x-y\right|>1-\delta} \ldots dy}_{:=I_3}. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist durch

$$|I_1| \leq \frac{1}{N}\frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}\int_0^1 \left|f(y)\right| dy + \left|f(x)\right| \leq \frac{2}{N}\left\|f\right\|_{\sup}\frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

beschränkt. Für das zweite und dritte Integral stellen wir fest

$$\left|\int_{\left|x-y\right|<\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}\int_0^1 F_N(y)dy = \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N} \|f\|_{\sup} \sin^{-2}(\pi\delta) < \varepsilon$$

für große N. Sei nun $f \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es N_0, sodass

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| < \varepsilon$$

für $N \geq N_0$ und daher $f_N \to f$ gleichmäßig und auch

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \right|^2 dx \to \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Mit den Umformungen zu f_N schließen wir

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geq \sum_{n=-N}^{N} |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &\geq \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &= \left\| \int_0^1 f_N(x-y)f(y)dy \right\|^2 \to |f|^2. \end{aligned}$$

□

---

2. Vorlesung - 10.10.2024

1.3 Der Satz von Banach-Tarski

Gewünschte Eigenschaften eines Volumens

(1) $A \subset \mathbb{R}^d, |A| \in [0, \infty]$

(2) $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$

(3) Invariant unter einer Kongruenzabbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung)

(4) $\left|(0,1)^d\right| = 1$ (Normierung)

Satz 1.5 Banach-Tarski

Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^3, j = 1, \ldots, 6$ und Kongruenzabbildugnen $\varphi_j, j = 1, \ldots, 6$, sodass

(i)

$$B_1(0) = \bigcup_{j=1}^{6} A_j.$$

(ii)

$$B_1(-2e_1) \cup B_1(2e_1) = \bigcup_{j=1}^{6} \varphi_j(A_j).$$

Bemerkung

Wir werden den Beweis nicht führen, wollen jedoch anmerken, dass er das Auswahlaxiom verwendet.

Konsequenz: Wir können nicht jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ein Volumen mit den gewünschten Eigenschaften zuordnen. Durch Verzicht auf das Auswahlaxiom könnten wir doch jeder Teilmenge ein Volumen zuordnen, haben aber dann andere Probleme.

Kapitel 2

Das Lebesguemaß

2.1 Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß

Definition 2.1: Dyadische Würfel

Wir definieren $Q_{j,k}, j \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$Q_{jk} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d | 2^k j_m \leq x_m < 2^k (j_m + 1), 1 \leq m \leq d \right\}.$$

Q_{jk} ist ein Würfel mit Kantenlänge 2^k und Ecke $2^k \cdot j$.

Eigenschaften:

(i) $Q_{jk} \cap Q_{j'k'} \neq \{\} \implies Q_{jk} \subset Q_{j'k'}$ oder $Q_{j'k'} \subset Q_{jk}$

(ii) Jede offene Menge ist disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln, deren Kantenlänge kleiner als die Distanz zum Komplement (bzw. Rand) ist.

(iii) Das Volumen definieren wir als $\left|Q_{jk}\right| = 2^{k \cdot d}$

Lemma 2.1

Ist Q_{jk} endliche disjunkte Vereinigung

$$Q_{jk} = \bigcup_{k=1}^{N} Q_{j_n k_n}$$

so ist

$$\left|Q_{jk}\right| = \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

Beweis: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k'}$$

disjunkte Vereinigung von Würfeln gleicher Kantenlänge.
Es gibt genau $(2^{k-k'})^d$

$$\implies \sum_n \left|Q_{j_n k'}\right| = (2^{k-k'})^d \cdot 2^{k'd} = 2^{kd} = \left|Q_{jk}\right|.$$

2. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ mit } k' = \min_n k_n$$

Zerlege $Q_{j_n k_n}$ zweimal, Fall 1 tritt ein: $\left|Q_{jk}\right| = \sum \left|Q_{j_n k_n}\right|$

□

Definition 2.2

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Wir nennen eine Folge dyadischer Q_{jk} eine Überdeckung von A, falls

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Wir definieren das äußere Lebesguemaß von A durch

$$m_*^d(A) = \inf \left\{ \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right| \middle| A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right\}.$$

Eigenschaften:

(1) Monotonie: $A \subset B \implies m_*^d(A) \leq m_*^d(B)$

(2) Subadditivität:

$$m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Wenn A und B einen positiven Abstand haben, dann gilt

$$m_*^d(A \cup B) = m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Es gilt immer

$$m_*^d \left(\bigcup A_n \right) \leq \sum_n m_*^d(A_n).$$

(3) Für jede beschränkte Menge A gilt

$$m_*^d(A) < \infty.$$

Beweis: (1) Jede Überdeckung von B überdeckt A.

(2)

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n'} \implies A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n' k_n'}$$
$$\implies m_d^*(A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|j_n k_n\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n' k_n'}\right|$$
$$\text{und } m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Abstand von $A, B > 0$: genügt. Würfel mit Kantenlänge $< \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot$ Abstand. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ genauso wie im ersten Fall

(3) Jede beschränkte Menge liegt in der Vereinigung von 2^d dyadischen Würfeln.

□

3. Vorlesung - 15.10.2024

Satz 2.2
Für jede disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}$$

gilt

$$m_*\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) = \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

Beweis: Wir wissen

$$m_*^d\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) \leq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|$$

nach Definition. Zu zeigen:

$$m_*^d\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) \geq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

1. Fall: Ein Würfel Q_{jk}, $m^*(Q_{jk}) = 2^{kd}$.
   Für endliche Überdeckung: Lemma 2.1

   $$Q_{jk} \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ ohne Einschränkung: } Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n n_k} \text{ disjunkt }.$$

   Zu zeigen: $\left|Q_{jk}\right| \leq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|$

   $$\implies m_*^d(Q_{jk}) = \inf\left\{\sum \dots\right\}.$$

   Sei $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

   $$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jk} &= \left\{x | 2^k j_l \leq x_l \leq 2^k(j_l + 1 - 2^{-m})\right\} \text{ abgeschlossen, beschränkt } \implies \text{ kompakt} \\ Q_{j_n,k_n} \subset Q^m_{j_n k_n} &= \left\{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 2^{-m}) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\right\} \text{ offen} \end{aligned}$$

   Es gilt

   $$\implies \tilde{Q}_{jl} \subset Q_{jl} \subset \bigcup_n Q_{j_n,k_n} \subset \bigcup_n Q^m_{j_n,k_n}.$$

   Die kompakte Menge $\tilde{Q}_{jl}$ wird also durch offene Mengen überdeckt. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

   $$\implies \exists N : \tilde{Q}_{jl} \subseteq \bigcup_{n=1}^N Q^m_{j_n,k_n}.$$

   Nach Lemma 2.1 kleinste Kantenlänge, zählen.

   $$\begin{aligned} \text{Für } \tilde{Q}_{j,k} : (2^m - 1)^d 2^{(k-m)d} &\leq (2^m + 1)^d \sum_{n=0}^N 2^{(k_n - m)d} \\ \left|Q_{jk}\right| &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}}\right)^d \sum_{n=1}^\infty \left|Q_{j_n k_n}\right| \\ &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-n}}\right)^d m_*^d(Q_{jn}) \,\forall m \geq 1, \implies \left|Q_{jn}\right| \leq m^*(Q_{jn}). \end{aligned}$$

   Die letzten Schritte ergeben sich, indem das Infimum über alle Zerlegungen betrachtet wird. Die Ungleichung gilt damit für jede Überdeckung.

2. Fall:

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Es folgt für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left|Q_{j_n k_n}\right| &= m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \qquad \text{(1. Fall)}\\ &\leq m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(Q_{j_n k_n})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right|.\end{aligned}$$

Wir haben den ersten Fall auf endlich viele disjunkte Würfel angewendet, da das Argument für einen Würfel auch diesen Fall abdeckt.
Schließlich gilt

$$N \to \infty \implies m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

□

2.2 Messbare Mengen

Definition 2.3

Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U existiert mit $A \subseteq U$ und $m^*(U \backslash A) < \varepsilon$.

Eigenschaften:

(1) Offene Mengen sind messbar,

Beweis:

$$m_*^d(\{\}) = 0.$$

□

(2) Nullmengen: $m_*^d(A) = 0 \implies A$ messbar

Beweis: Falls

$$\begin{aligned} m_*^d(A) = 0, \varepsilon > 0 &\implies \exists\, Q_{j_n k_n} \text{ mit } A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}, \sum \left|Q_{j_n k_n}\right| < 2^{-d}\varepsilon.\\ \tilde{Q}_{j_n k_n} &= \left\{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 1) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\right\}\\ &\implies A \subset \bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}, m_*^d(\tilde{Q}_{j_n k_n}) \leq 2^d \left|Q_{j_n k_n}\right|\\ m_*^d\left(\bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(3) abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: A_n seien messbar, $\varepsilon > 0$, U_n offen, $A_n \subset U_n$, $m_*^d(U_n \backslash A_n) < 2^{-1-n}\varepsilon$.

$$\begin{aligned} m_*^d\left(\bigcup U_n \Big\backslash \bigcup A_n\right) &\leq m_*^d\left(\bigcup (U_n \backslash A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_*^d(U_n \backslash A_n) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(4) Abgeschlossene Mengen sind messbar.

Beweis: Wegen (3) genügt es, A kompakt zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$, U offen, $A \subset U$ mit $m_*^d(U) \leq m_*^d(A) + \varepsilon$.

$$A = \bigcup_n \left(\overline{B_n(o)} \cap A\right).$$

Siehe Beweis von Satz 2.2: $\exists\, Q_{j_n k_n}, Q^m_{j_n k_n}, A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}$ mit

$$\sum \left|Q_{j_n k_n}\right| \leq m_*^d(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A kompakt $\implies V = U \backslash A$ offen

$$\begin{aligned} V = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} &\text{ disjunkt, Abstand zu Komplement} \\ > 2^{k_n} &\implies \text{ positive Distanz zu } A. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \implies m_*^d(A) + \varepsilon &\geq m_*^d(U) \\ &\geq m_*^d\left(A \cup \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) && \text{(positiver Abstand)} \\ &= m_*^d(A) + m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \\ &= m_*^d(A) + \sum_{n=1}^{N} \left|Q_{j_n k_n}\right| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right| &\leq \varepsilon \\ m^*(V) &= m^*(U \backslash A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right| && \text{(wegen 2.2)} \\ &\leq \varepsilon \\ \implies \text{ messbar }. \end{aligned}$$

□

(5) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.

Beweis: Sei A messbar, $A \subset U_n$ offen, $m_*^d(U_n \backslash A) < \frac{1}{n}$.
$\mathbb{R}^d \backslash U_n$ ist abgeschlossen, messbar nach (4)

$$\begin{aligned} \implies S &= \bigcup_n (\mathbb{R}^d \backslash U_n) \subset \mathbb{R}^d \backslash A \text{ messbar} \\ T &= (\mathbb{R}^d \backslash A) \backslash S \subset U_n \backslash A \; \forall n \\ \implies m_*^d((\mathbb{R}^d \backslash A) \backslash S) < \frac{1}{n} \\ &\implies T \text{ Nullmenge, messbar .} \end{aligned}$$

$\implies$ $\mathbb{R}^d \backslash A = S \cup T$ messbar als Vereinigung zweier Messbarer Mengen □

(6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: Zweimal Komplemente, abzählbare Vereinigungen. □

Bemerkung

Solange das Auswahlaxiom nicht genutzt wird, kann man keine nicht messbaren Mengen konstruieren.

Satz 2.3

(1) Die (Lebesgue)-messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra, d.h.

- die leere Menge ist messbar,
- Komplemente und abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar

(2) σ-Additivität: Sind E_n messbare disjunkte Mengen, so gilt

$$m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty m_*^d(E_n)$$
$$m_*^d(\emptyset) = 0.$$

Beweis:

Bemerkung

(1) haben wir bereits gesehen.

Zunächst seinen E_n beschränkt, $\varepsilon > 0, \mathbb{R}^d \backslash E_n$ messbar $\implies$ $\exists\, U_n$ offen mit $m_*^d(U_n \backslash (\mathbb{R}^d \backslash E_n)) < 2^{-1-n} \cdot \varepsilon$ $\implies$ $\mathbb{R}^d \backslash U_n =: F_n \subset E_n$ abgeschlossen mit

$$m_*^d(E_n \backslash F_n) < 2^{-n-1} \cdot \varepsilon.$$

Die Mengen F_n sind disjunkt und kompakt

$$\begin{aligned} \implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) &\geq m_*^d\left(\bigcup_{n=0}^N F_n\right) \| \\ &= \sum_{n=0} m_*^d(F_n) && \text{(positiver Abstand)} \\ &\geq \sum_{n=0}^N m_*^d(E_n) - \varepsilon \\ \implies m_*^d\left(\bigcup_n E_n\right) &\geq \sum_{n=1}^\infty m_*^d(E_n). \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt immer

$$\implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) = \sum m_*^d(E_n) \text{ für } E_n \text{ beschränkt.}$$

Im Allgemeinen Fall setzen wir

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_n \cap (B_{m+1}(0) \backslash B_m(0)) \\ \implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) &= \sum_{n,m} m_*^d(E_{n,m}) \\ m_*^d(E_n) &= \sum_m m_*^d(E_{n,m}) \end{aligned}$$

.

□

---

4. Vorlesung - 17.10.2024

Definition 2.4

Wir nennen messbare Mengen Lebesguemengen. Wir definieren das Lebesguemaß m^d als die Einschränkung von m_*^d auf die Lebesguemengen.

Lemma 2.4

Seien E_n messbar, $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_n E_n$ ist messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_n).$$

Ist $E_{n+1} \subset E_n$ und $m^d(E_n) < \infty$ für ein n, so gilt $E = \bigcap_n E_n$ messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_n).$$

Beweis: (1) $E_0 = \emptyset$, $F_n = E_{n+1} \backslash E_n$ disjunkt. Für messbar, disjunkt

$$E = \bigcup F_n \implies m^d(E) = \sum_n m^d(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N m^d(F_n) = \lim_{N\to\infty} m^d(E_N).$$

(2) $E_{n+1} \subset E_n, m^d(E_n) < \infty$

$$m^d(E_0 \backslash E) = m^d(E_0) - m^d(E_n) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_0 \backslash E_n) = m^d(E_0) - \lim_{n\to\infty} E_n.$$

□

Satz 2.5 Regularität des Lebesguemaßes

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue, $\varepsilon > 0$.
Dann gilt:

(1) $\exists U$ offen: $A \subset U, m^d(U \backslash A) < \varepsilon$

(2) $\exists B$ abgeschlossen: $B \subset A, m^d(A \backslash B) < \varepsilon$

(3) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert $K \subset A$ kompakt mit $m^d(A \backslash K) < \varepsilon$.

(4) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert eine endliche disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n},$$

sodass die symmetrische Differenz $A \triangle F := (A \cup F) \backslash (A \cap F)$ die Ungleichung $m^d(A \triangle F) < \varepsilon$ erfüllt.

Beweis: (1) Haben wir gesehen

(2) Haben wir gesehen

(3) Sei B wie in (2)

$$K_n = B \cap \overline{B_n(o)} \implies B = \bigcup K_n.$$

K_n kompakt: Lemma 2.4:

$$m^d(B) = \lim_{n \to \infty} m^d(K_n) \implies \lim_{n \to \infty} m^d(B \backslash K_n) = 0.$$

(4) U wie in (1).

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt} \\ &\implies m^d(U) = \lim_{N \to \infty} m^d \left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n} \right) \\ &\implies \exists N : m^d \left(U \backslash \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n} \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $m^d(A) < \infty \implies m^d(U) < \infty$. Also gilt

$$A \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n} \right) \subset (U \backslash A) \cup \left(U \backslash \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n} \right) \implies m^d(A \triangle F) < 2\varepsilon.$$

□

Satz 2.6 Transformationseigenschaften unter affinen Abbildungen
Sei $\varphi : x \to Ax + b$ eine affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$. Für $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$m_*^d(\varphi(E)) = |\det A| \, m_*^d(E).$$

E messbar $\implies$ $\varphi(E)$ messbar

Beweis: Jede Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen (vertauschen Zeilen, multiplizieren Zeilen, ziehen Vielfache von Zeilen voneinander ab). Es genügt, Elementarmatrizen zu betrachten.

1) Translation ($A = 1$). Es genügt, Translation in eine Koordinatenrichtung zu betrachten.

$$m_d^*(\varphi(E)) \leq \sum_n m_d^*(\varphi(Q_{j_n k_n})) \text{ für } E \subset Q_{j_n k_n}.$$

Es genügt, die Abschätzung für $E = Q_{jk}$ zu zeigen

$$\begin{aligned} &\implies \leq |\det A| \sum_n \left| Q_{j_n k_n} \right| \\ &\implies m_d^*(\varphi(E)) \leq |\det A| \, m_d^{*A(E)}. \end{aligned}$$

A invers $\implies \geq \implies =$, $\det A = 0 \implies$ fertig
Zu zeigen: $m_d^*(Q_{jk} + ke_1) = m_d^*(Q_{jk}) = |Q_{jk}|$
für $d = 1$ wird $0, 1$ auf $k, k+1$ gemappt. Überdecken durch dyadische Würfel der Länge 2^m, $m < k$

$$2^{k(d-1)}((2^{k-m} - 1)2^m) \leq m_*^d(Q_{jk} + ke_1) \qquad \leq 2^{k(d-1)}(2^{k-m} + 1)2^m (= 2^{kd}), m \to -\infty.$$

Anzahl der Würfel der Kantenlänge 2^m in dem vorhandenen Würfel $Q + ke_1$:

$$2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} - 1) \text{ enthalten } 2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} + 1) \text{ Würfel der } 2^m \text{ enthalten } Q + ke_1.$$

2)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \geq 0$. Genügt: $d = 1$, $Q_{0,k}$, $2^m < \lambda 2^k$

$$\underbrace{\lfloor 2^{k-m}\lambda \rfloor}_{\to 2^k} \cdot 2^m \leq \underbrace{m^*(Q_{0,k})}_{m \to \infty} \leq \left(\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \cdot \lambda \rfloor}_{2^k} + 1 \right) 2^m.$$

3)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & h & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Genügt $d = 2$.
Maximal $2(\lfloor k \rfloor + 1) \cdot 2^{k-m}$ Würfel schneiden $\varphi(Q_{jk})$, aber sind nicht Teilmenge $\to$ zähle

$$m_*^d(\varphi(Q_{jk})) = |Q_{jk}|.$$

4) Permutationen, $Q_{jk} \to Q_{j,k} = \varphi(Q_{j,k})$

$$\implies \varphi = Ax + b, m_*^d(\varphi(E)) = m_*^d(E) = m_*^d(E)\,|\det(A)|.$$

E messbar, $\det A = 0 \implies m_*^d(\varphi(E)) = 0 \implies$ Nullmenge, messbar, $\det A \neq 0$, U offen $\implies \varphi(U)$ offen, (Umkehrabbildung ist affin $\implies$ stetig, Urbilder offener Mengen sind offen)

$$U \supset E, m_*^d(\varphi(U) \backslash \varphi(E)) = m_*^d(\varphi(U \backslash E)) = |\det A|\, m_*^d(U \backslash E).$$

$\square$

2.3 Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes

Definition 2.5: σ-Algebra

sei X eine Menge. Eine σ-Algebra ist eine Familie von Teilmengen

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{P}(X),$$

sodass

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$

(2) $A \in \mathcal{A}(X) \implies X \backslash A \in \mathcal{A}(X)$

(3) $A_n \in \mathcal{A}(X) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$

Bemerkung

Lebesguemengen bilden eine σ-Algebra

Beispiel 2.1

1) $\mathcal{P}(X)$

2) $\{\emptyset, X\}$

3) (X, d) metrischer Raum.
$\mathcal{B}(X)$ ist die σ-Algebra der Borelmengen, die von den offenen Mengen erzeugt wird, d.h. die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.
Zur Konstruktion:

- $\mathcal{P}(X)$ enthält jede offene Menge
- $\mathcal{B}(X) = \{A \subset X | A$ ist in jeder $\sigma -$ Algebra enthalten, die alle offenen Mengen enthält$\}$.

Eigenschaften:

(1)

$$An \in \mathcal{A} \implies \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}.$$

Beweis:

$$\overbrace{X \backslash \underbrace{\left(\bigcap_n A_n \right)}_{\in \mathcal{A}}}^{\in \mathcal{A}} = \bigcup_n \underbrace{(x \backslash A_n)}_{\in \mathcal{A}}.$$

□

(2) Q_{jk} sind Bachmenge:

$$\left\{x_l \geq 2^k j_e | 1 \leq l \leq d\right\} \cap \left\{x_k < 2^k (j_e + 1) | 1 \leq l \leq d\right\} \in B(\mathbb{R}^d).$$

(3) $X = \mathbb{R}^d$. Translate von Borellmengen sind Borellmengen. Translate von offenen Mengen sind offen $\implies$ erzeugte σ-Agebtra $B(\mathbb{R}^d)$ ist invariant unter Translation.
Bilder von Borellemgene unter affiner Abbildung sind wieder Borell

Beweis: (i) Invertertierbar: Offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet

(ii) $\varphi(x) = Ax + b, \det A = 0$ approximiert durch invertierbare Abbildungen

□

Satz 2.7 Eindeutigkeit von m^d

Sei $\lambda : B(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(1) $\lambda(Q_{0,0}) = 1$

(2) $A_n \in B(\mathbb{R}^d)$ disjunkt $\implies \lambda\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum \lambda(A_n)$

(3) $A \in B(\mathbb{R}^d), x \in R^d \implies \lambda(A + x) = \lambda(A)$

Dann ist $\lambda(A) = m^d(A)\, \forall A \in B(\mathbb{R}^d)$

Beweis: (1) Translationsinvarianz: $\lambda(Q_{j,k}) = \lambda(Q_{0,k})$

$$\lambda(Q_{0,k}) = 2^d \lambda(Q_{0,k-1}),$$

da $Q_{n,k}$ Vereinigung von 2^d Würfeln der Kantenlänge 2^{k-1} ist.

$$\implies \lambda(Q_{j,k}) = 2^{kd}, \lambda(Q_{0,0}) = 1.$$

(2) Offene Mengen sind abzählbare disjunkte Vereinigungen von

$$\begin{aligned} Q_{j_n,k_n} &\implies \lambda(U) = m^d(U)\, \forall U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.} \\ &\implies \lambda(A) = m^d(A)\, \forall A \text{ abgeschlossen..} \end{aligned}$$

(3) Satz 2.5 A Lebesgue (insbesondere Borell) $\implies \exists B_n \subset A \subset U_n$, B_n als auch U_n offen, $m^d(A \backslash B_n) < \varepsilon, m^d(U_n \backslash A) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} B = \bigcup_n B_n, U \subset \bigcap_n U_n \in B(\mathbb{R}^d) \\ \implies m^d(U \backslash B) = \lambda(U \backslash B) = 0 \\ \implies \lambda(U) = \lambda(A) = m^d(A). \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Wir haben genutzt, dass für A beschräkt, $A \subset B_R(0)$

$$\begin{aligned} \lambda(B_R(0)) &= \lambda(B_R(0) \backslash A) + \lambda(A) \\ m^d(B_R(0)) &= m^d(B_R(0) \backslash A) + m^d(A). \end{aligned}$$

Je zwei untereinander stehende Summanden sind hier gleich.

Kapitel 3

Das Hausdorffmaß und der Satz von Carethéodory

Wir betrachten

$$c_d = m^d(B_1^{\mathbb{R}^d}(0)) = \frac{r^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}.$$

Sei $\alpha > 0, c_\alpha = \frac{\pi^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}$. Der Durchmesser $\operatorname{diam}(A)$ für $A \subset X$, (X,d) metrischer Raum ist

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\left\{d(x,y) | x, y \in A\right\}.$$

. $A, B \subset X$. Abstand $d(A,B) = \inf\left\{d(x,y) | x \in A, y \in B\right\}$

3.1 Äußere Maße und das Hausdorffmaß

Definition 3.1: Hausdorffmaß

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $0 \leq \alpha, 0 < \delta, A \subset X$

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = c_\alpha \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^\alpha : A \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n \subset X, \operatorname{diam} F_n < \delta\right\} \in [0,\infty]$$

und

$$\mathcal{H}_*^\alpha(A) := \limsup_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \in [0,\infty].$$

Eigenschaften:

(1)

$$\delta_1 < \delta_2 \implies \mathcal{H}_{\delta_1}^\alpha(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^\alpha(A) \implies \mathcal{H}_*^\alpha = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A).$$

(2)

$$A \subset B \implies \mathcal{H}_\delta^\alpha \leq \mathcal{H}_\delta^\alpha(B) \text{ und } \mathcal{H}_*^\alpha(A) \leq \mathcal{H}_*^\alpha(B).$$

(3) Subadditivität:

$$\mathcal{H}_*^\alpha\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}_*^\alpha(A_n).$$

Beweis: Sei $\delta > 0, \varepsilon > 0$, $(F_{nm})_m$ eine Überdeckung von A_n

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) + 2^{-1-n}\varepsilon > c_\alpha \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(F_{nm})}{2}\right)^\alpha, \ \operatorname{diam} F_{nm} < \delta$$

$$\implies \mathcal{H}^\alpha_\delta\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) < \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) + \varepsilon$$

$$\implies \mathcal{H}^\alpha_\delta\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\alpha_*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) &= \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta\left(\bigcup_n A_n\right)\\ &\le \lim_{\delta\downarrow 0} \sim_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n)\\ &\le \sum_{n=1}^\infty \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n)\\ &= \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_*(A_n).\end{aligned}$$

□

(4) Sein $A, b \subset X$ mit positivem Abstand. Dann gilt

$$\mathcal{H}^\alpha_*(A \cup B) = \mathcal{H}^\alpha_*(A) + \mathcal{H}^\alpha_*(B).$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{H}^*_\delta(A \cup B) + \varepsilon > c_\alpha \sum \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^\alpha,$$

wobei $A \cup B \subset \bigcup F_n, \operatorname{diam} F_n < \delta$. Nun ist $F \subset X, F \cap A \ni x, F \cap B \ni y$

$$\begin{aligned}&\implies \operatorname{diam} F \ge d(x,y) \ge d(A,B)\\ &\implies F_n \cap A = \emptyset \text{ oder } F_n \cap B = \emptyset.\end{aligned}$$

Sei $M \subset \mathbb{N} : n \in M \iff F_n \cap A = \emptyset$

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \le \sum_{n\in M} \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^\alpha, \mathcal{H}^\alpha_\delta(B) \le c_\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus M} \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^\alpha \implies \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \mathcal{H}^\alpha_\delta(B) \le \mathcal{H}^\alpha_\delta(A \cup B) + \varepsilon.$$

□

(5) $\mathcal{H}^0_*(A) =$ Anzahl der Elemente

Beweisskizze: $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{2} \inf d(x_i, x_j) \quad i \neq j\\ &\implies \mathcal{H}^0_\delta(A) = N\\ &\implies \mathcal{H}^0_*(A) = N.\end{aligned}$$

A unendlich $\implies \forall N \exists A_n \subset A$ mit N Elementen

$$\implies \mathcal{H}^0_*(A) \ge \mathcal{H}^0_*(A_N) = N \implies \mathcal{H}^0_*(A) < \infty.$$

□

(6) $(X,d),(Y,\delta)$ metrische Räume

$$\varphi : X \to Y \text{ Lipschitzstetig mit Konstante } L.$$

Also

$$\delta(\varphi(x),\varphi(y)) \leq L \cdot d(x,y) \implies \mathcal{H}^\alpha_*(\varphi(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}^\alpha_*(A)\,\forall A \subset X.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam}(\varphi(F)) \leq L \operatorname{diam}(F)\,\forall F \subset X \\ \implies \mathcal{H}^\alpha_{K\delta}(\varphi(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \implies &\mathcal{H}^\alpha_*(\varphi(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}^\alpha_*(A). \end{aligned}$$

□

(7) $X = \mathbb{R}^d, \lambda > 0$

$$\mathcal{H}^\alpha_*(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha_*(A).$$

folgt aus (6)

(8)

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \implies \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) &\leq \delta^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \cdot \frac{c_\beta}{c_\alpha} \\ \left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^\beta &= \underbrace{\left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^{\beta-\alpha}}_{\leq \delta^{\beta-\alpha} \text{ falls } \dim F < \delta} \left(\frac{\operatorname{diam} F}{2}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\beta_*(A) > 0 &\implies \mathcal{H}^\alpha_*(A) = \infty \\ \mathcal{H}^\beta_*(A) < \infty &\implies \mathcal{H}^\alpha_*(A) = 0. \end{aligned}$$

3.2 Der Satz von Carethéodory

Definition 3.2: äußeres Maß

Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$$

heißt *äußeres Maß*, falls

(1) $\mu_*(\emptyset) = 0$

(2) $A \subset B \implies \mu_*(A) \leq \mu_*(B)$

(3) Subadditiv: $\mu_*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum \mu_*(A_n)$

Ist (X,d) ein metrischer Raum, μ_* äußeres Maß. Wir nennen μ_* ein metrisches äußeres Maß, falls

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \text{ für } d(A,B) > 0.$$

Bemerkung

m^d_* und $\mathcal{H}^\alpha_*$ sind metrische äußere Maße.

Definition 3.3: Carethéodory messbar

Sei μ_* ein äußeres Maß auf X. $A \subset X$ heißt μ-messbar, falls

$$\mu_*(E) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*((X \setminus A) \cap E)\, \forall E \subset X.$$

Satz 3.1 Carethéodory

Sei μ_* ein äußeres Maß auf X. Die μ-messbaren Mengen bilden eine σ-Algebtr. Sind A_n messbar und disjunkt, so gilt

$$\mu_*\left(\bigcup A_n\right) = \sum_n \mu_*(A_n).$$

Ist μ_* ein äußeres metrisches Maß, so ist jede Borellmenge messbar.
Für messbare Mengen schreiben wir $\mu(A) := \mu_*(A)$.

Bemerkung

Aussagen:

- messbare Mengen bilden eine σ-Algebra
- μ_* ist σ-additiv auf messbaren Mengen
- μ_* metrisch $\implies$ jede Borellmenge ist messbar

---

6. Vorlesung - 24.10.2024

Beweis: 0) A Nullmenge ($\mu_*(A) = 0$) $\implies$ A messbar
Sei $E \subset X$. O.B.d.A.: $\mu_*(E) < \infty$. Es ist $\mu_*(A \cap E) \leq \mu_*(A) = 0$ und

$$\mu_*(E) \leq \underbrace{\mu_*(E \cap A)}_{=0} + \mu_*(E \cap (X \setminus A)) \leq \mu_*(E).$$

Dies Impliziert Gleichheit $\implies$ A messbar. Also A messbar $\implies$ $X \setminus A$ messbar

1) Seien A_1 und A_2 messbar. $E \subset X$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu_*(E) &= \mu_*(E \cap A_1) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1)) \\
&\overset{A \text{ messbar}}{=} \mu_*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1) \cap A_2) \\
&+ \mu_*(E \cap A_1 \cap (X \setminus A_2)) + \mu_*(E \cap (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)) \\
&\geq \mu_*(\underbrace{E \cap (A_1 \cup A_2)}_{=(A_1 \cap A_2) \cup A_1 \cap (X \setminus A_1) \cup A_2 \cap (X \setminus A_1)}) + \mu_*(\underbrace{E \cap (X \setminus (A_1 \cup A_2))}_{=E \cap (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)}) \\
&\geq \mu_*(E).
\end{aligned}$$

Also $\implies$ $A_1 \cup A_2$ messbar und $A_1 \cap A_2$ messbar. Seien A_1, A_2 messbar und disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu_*(A_1 \cup a_2) &= \mu_*(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu_*((X \setminus A_1) \cap (A_1 \cup A_2)) \\
&= \mu_*(A_1) + \mu_*(A_2).
\end{aligned}$$

2) Seien A_n messbar, disjunkt.

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad G_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \text{ messbar }.$$

Schritt 1: Sei $E \subset X, \mu_*(E) < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu_*(G_N \cap E) &= \mu_*(A_n \cap (G_n \cap E)) + \mu_*((X \setminus A_N) \cap (G_N \cap E)) \\
&= \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*(G_{N-1} \cap E) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu_*(A_n \cap E). && \text{(Induktion)}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n \cap E) < \infty.$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\mu_*(E) &= \mu_*(G_N \cap E) + \mu_*((X \setminus G_n) \cap E) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*((X \setminus G) \cap E). && \text{(G messbar, Monotonie)}
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $N \to \infty$, so finden wir aufgrund der Subadditivität

$$\begin{aligned}
\mu_*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n \cap E) + \mu_*((X \setminus G) \cap E) \\
&\geq \mu_*(E \cap G) + \mu_*(E \cap (X \setminus G)) \\
&\geq \mu_*(E).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\mu_*(E \cap G) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E \cap A_n) &\geq \mu_*(E \cap G) \\
\implies \mu_*(E) &= \mu_*(E \cap G) + \mu_*(E \cap (X \setminus G)) \\
&\implies G \text{ messbar} \\
E = G \implies \mu_*(G) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n).
\end{aligned}$$

Seien A_n messbar

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \Bigg\backslash \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n &\implies \tilde{A}_n \text{messbar, disjunkt} \\
\bigcup A_n = \bigcup \tilde{A}_n &\implies \sigma\text{-Algebra}, \sigma\text{-additiv}.
\end{aligned}$$

Bemerkung

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ disjunkt.}$$

Wir hatten folgende Fälle:

1) $\mu_*(A_m) = \infty \implies \mu_*(G) = \infty$

2) $\mu_*(A_m) < \infty \, \forall n, \sum \mu_*(A_n) = \infty$

$$\begin{aligned} \implies \mu_*(G_N) &= \sum_{n=1}^{N} \mu_*(A_n) \to \infty \\ (E = G_N) | \mu_*(G) &\geq \mu_*(G_N). \end{aligned}$$

3) $\sum \mu_*(A_n) < \infty \implies \mu_*(G) < \infty, E = G$

3) μ_* sei ein metrisches äußeres Maß. Wir zeigen F abgesclossen $\implies$ F messbar $\implies$ Borellmengen messbar. Sei $F \subset X$ abgeschlossen, $E \subset X, \mu_*(E) < \infty$

$$E_n = \left\{ x \in E : d(x,F) \geq \frac{1}{n} \right\} \implies X \backslash F \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \subset E_{n+1}, d(E_n, F) \geq \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &\geq \mu_*((E \cap F) \cup E_n) \\ &= \mu_*(E \cap F) + \mu_*(E_n). \end{aligned} \tag{*}$$

Sei

$$\begin{aligned} B_n &:= E_{n+1} \cap (X \backslash E_n) \\ &= \left\{ x \in E | \frac{1}{n+1} \leq d(x,F) < \frac{1}{n} \right\} \\ d(E_n, B_{n+1}) &\geq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0, \text{ da } d(x,F) \geq \frac{1}{n}, d(x,F) < \frac{1}{n+1} \\ \mu_*(E_{2n+1}) &\geq \mu_*(B_{2n} \cup E_{2n-1}) = \mu_*(B_{2n}) + \mu_*(E_{2n-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu_*(B_{2k}) \\ \mu_*(E_{2n}) &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \mu_*(B_{2n-1}) \\ &\implies \sum_k \mu_*(B_k) < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu_*(E_n) &\leq \mu_*((X \backslash F) \cap E) \\ &\leq \mu_*(E_n) + \overbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(B_j)}^{\to 0 \quad (n \to \infty)} \\ \implies \lim_{n \to \infty} \mu_*(E_n) &= \mu_*((X \backslash F) \cap E). \end{aligned}$$

Mit (*) folgt

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &\geq \mu_*(F \cap E) + \lim_{n \to \infty} \mu_*(E_n) = \mu_*(F \cap E) + \mu_*((X \backslash F) \cap E) \overset{\text{subadd.}}{\geq} \mu_*(E) \\ \implies \mu_*(E) &= \mu_*(E \cap F) + \mu_*(E \cap (X \backslash F)) \implies F \text{ messbar.} \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Abgeschlossenheit wurde in

$$X \backslash F = \bigcup_n \left\{ x | d(x,F) > \frac{1}{n} \right\}.$$

□

Definition 3.4

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt Maß, falls

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt $\implies \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ σ-additiv.

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.
Ist $\mathcal{A} = B(x)$ Borellmengen, so nennen wir μ ein Borellmaß.

Beispiel 3.1

1) $\mathcal{A}$ Lebesguemengen, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, m^d)$

2) (X, d) mit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{H}^\alpha)$, wobei $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{H}_*^\alpha|_{\mathcal{B}(X)}$ oder $\mathcal{A}$ die Menge der $\mathcal{H}_*^\alpha$-messbaren Mengen, $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{H}_*^\alpha|_{\mathcal{A}}$

Lemma 3.2

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum,

1) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1}$

$$\implies \bigcup A_n \in \mathcal{A} \text{ und } \mu\left(\bigcup A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2) $A_n \in \mathcal{A}, A_{n+1} \subset A_n, \mu(A_N) < \infty$ für ein N

$$\implies \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Beweis: Siehe Lebesguemaß. ◻

3.3 $\mathcal{H}^d$ auf $\mathbb{R}^d$

Satz 3.3

Für $A \times \mathbb{R}^d$ gilt:

i) A $\mathcal{H}^d$-messbar $\iff$ Lebesugemsssbar

ii) $\mathcal{H}_*^d(A) = m_*^d(A)$

Lemma 3.4 Isodiametrische Ungleichung

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann ist

$$m_*^d(A) \leq m^d\left(B_{\frac{\operatorname{diam} A}{2}}(0)\right).$$

Beweis: (1) Behauptung.
(3.5) Aus der isodiametrischen ungleichung der $\mathcal{H}_\delta^d$-Überdecukung und der Überdeckung durch Würfel folgern wir:

$$m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_*^d(A) \leq c_d 2^{-d} d^{\frac{d}{2}} m_*^d(A).$$

In der Definition von $\mathcal{H}_*^d$ dürfen wir offene Mengen nehmen $F \subset X, F_\varepsilon = \{x | d(x,F) < \varepsilon\}$ offen. ($\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \cdot \operatorname{diam} F$).
Sei $A \subset X$, $A \subset \bigcup F_n$ (Lemma 3.4)

$$\implies m_*^d(A) \leq \sum_n m_*^d(F_n) \leq \sum_n c_d \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^d.$$

$\mathcal{H}_\delta^d$: Infimum

$$\implies m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_\delta^d(A) \,\forall \delta > 0 \implies m_*^d(A) \leq \mathcal{H}_*^d(A).$$

Es ist

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}, \delta > 0, \text{ o.B.d.A. } 2^{k_n} < \delta.$$

Also

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) \leq c_d \left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^d \sum \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

Wegen Infimum

$$\implies \mathcal{H}_\delta^d(A) \leq c_d \left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^d m_*^d(A) \implies \mathcal{H}_*^d(A) \leq c_d 2^{-d} d^{\frac{d}{2}} m_*^d(A).$$

□

---

7. Vorlesung - 29.10.2024

Anderer Beweis?: $\mathcal{H}^d$ einschränken auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Mit Translationsinvarianz und Satz 2.7 folgt

$$\frac{1}{\mathcal{H}^d(Q_{??})}\mathcal{H}^d(A) \,\forall A \text{ Borell}$$

folgt

$$\operatorname{diam}(F) = \operatorname{diam}(\overline{F}).$$

$\implies$ Für $\mathcal{H}_\delta^d$ können wir abgeschlossene Mengen nehmen. Nun gilt

$$\forall A \subset \mathbb{R}^d \,\forall \varepsilon > 0 \exists\, B \text{ Borell mit } \mathcal{H}_\delta^d - \mathcal{H}_\delta^d(A) < \varepsilon \text{ für } A \subset B.$$

(B Vereinigung der Mengen der Überdeckung).
Sei A $\mathcal{H}^d$ messbar. $\exists\, B_m$ Borell: $A \subset B_m, \mathcal{H}_{\frac{1}{m}}^d(B) \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{m}}^d(A) + \frac{1}{m}$.
Sei $B = \bigcap B_m$ Borell $\implies A \subset B, \mathcal{H}_*^d(A) = \mathcal{H}^d(B) \implies \mathcal{H}_*^d(B \backslash A) = 0$.

$$\implies m_*(B\backslash A) = 0, \mathbb{R}^d \backslash A = \underbrace{\mathbb{R}^d \backslash B}_{\text{Borell}} \cup \underbrace{(B\backslash A)}_{\text{Lebesgue}} \implies X \backslash A \text{ Lebesguemenge.}$$

Sei A Lebesgue $\overset{\text{Ü1}}{\implies} B \subset A$ Borell, $m_d(A\backslash B) = 0 \implies A\backslash B$ ist $\mathcal{H}^d$-Nullmenge $\implies A = B \cup (A\backslash B)$ ist $\mathcal{H}^d$-messbar.

Noch zu zeigen: $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\neq 0, m^d(U) < \infty$. Dann ist $\mathcal{H}^d(U) \leq m^d(U)$.
Wir werden zeigen:

$$\forall r_0 > 0 \exists B_{r_n}(x_n) \subset U \text{ disjunkt mit } m^d\left(U \setminus \bigcup_n B_{r_n}(x_n)\right) = 0, r_n < r_0.$$

Und

$$V = \bigcup_n B_{r_n}(x_n)$$
$$\mathcal{H}^d(0) = \mathcal{H}^d_{r_0}(V) \leq \sum c_d r_n^d = m^d(V).$$

Es gilt

$$m_d(U\setminus V) = \mathcal{H}_d(U\setminus V) = 0 \implies m_d(U) = m_d(V) \geq \mathcal{H}^d(V) = \mathcal{H}^d(U).$$

□

Lemma 3.5 Überdeckungslemma nach Vitali

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $B_{r_n}(X_n)$ mit $1 \leq n \leq N$ eine endliche Menge von Bällen. Dann existierte $M \subset \{1, \ldots, N\}$ sodass

$$\bigcup_{n=1}^N B_{r_n}(x_n) \subseteq \bigcup_{n\in M} B_{3r_n}(x_n)$$

und

$$B_{r_n}(x_n) \cap B_{r_m}(x_m) = \emptyset \, \forall n, m \in M.$$

Beweis: Ohne Einschränkung: $r_1 \geq r_2 \geq r_2 \geq \ldots$. Wir wählen rekursiv Bälle:

1) $B_{r_1}(x_1)$. $B_{r_1}, \ldots, B_{r_{n_k}}$ gewählt, disjunkt. $B_{r_{n_{k+1}}}(x_{n_{k+1}})$ ist der nächste Ball, der zu den ausgewählten disjunkt ist. Sei $B_{r_n}(x_n)$ ein nicht ausgewählter Ball $\implies \exists\, n_k < n : B_{r_{n_k}}(x_n) \cap B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$. Also

$$r_n \leq r_m \implies B_{r_n}(x_n) \subset B_{3r_{n_k}}(x_{n_k}).$$

□

Lemma 3.6

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $r_0 > 0$. Dann existiert eine Folge disjunkter Bälle

$$B_{r_n}(x_n) \subset U,$$

sodass

$$m^d(U\setminus \bigcup B_{r_n}(x_n)) = 0.$$

Beweis: Sei U beschränkt (Ü1 allgemeiner Fall).
Wir werden zeigen $\exists\, \vartheta > 0$ unabhängig von U und $B_1, \ldots, B_N$ disjunkte Bälle mit

$$m^d\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \geq \vartheta m^d(U)$$

mit Radius $< r_0$. Dann folgt

$$m^d(\overline{B_r(x)}) = m^d(B_r(x)) \implies m^d(\partial B_r(x)) = 0.$$

Also

$$m^d(B_r(x)) = c_d r^d = \lim_{R\downarrow r} \underbrace{m^d(B_R(x))}_{\supset \overline{B_r(x)}}.$$

Rekursiv dann $U_0 = U \dots U_n$.
Seien $B_1, \dots, B_N$ wir in der Aussage,

$$V_1 = \bigcup_{n=1}^{N} \overline{B_n} \text{ offen}, U_1 = U \setminus V_1 \text{ abgeschlossen.}$$

Also ist

$$m^d(U_n) = m^d(U_{n+1}) - m^d(V_1) \leq (1-\vartheta) m^d(U_{n-1}) \leq (1-\vartheta)^n m^d(U) \implies m^d(\bigcap U_n) = 0 \implies \text{ Lemma.}$$

Beweis der Aussage: Innere Regularität:

$$m^d(U) = \sup \left\{ m^d(K) | K \text{ kompakt} \right\}..$$

Nun $\exists\, K \subset U : m^d(K) \geq \frac{1}{2} m^d(U)$.

$$\forall x \in K \exists\, r_x > 0 : B_{r_x}(x) \subset U \implies K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r_x}(x).$$

Kompaktheit:

$$\exists\, x_1, \dots, x_N : K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{r_{x_n}}(x_n).$$

Schließlich $\exists\, M \subset \{1, \dots, N\}$:
Es folgt

$$\begin{aligned}
m^d(K) &\leq m^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_{r_n}(x_n)\right) \\
&\leq m^d\left(\bigcup_{n \in M} B_{3r_{x_n}}(x_n)\right) \\
&\leq \sum_{n \in M} m^d(B_{3r_{x_n}}(x_n)) \\
&= 3^d \sum_{n \in M} (B_{r_{x_n}}(x_n)) \\
&\overset{\text{disjunkt}}{=} m^d\left(\bigcup_{n \in M} B_{r_{x_n}}(x_n)\right) \\
&\implies m^d(U) \leq 2 \cdot 3^d m^d\left(\bigcup_{n \in M} B_{r_n}(x_n)\right).
\end{aligned}$$

Also

$$\vartheta = \frac{1}{2} 3^{-d}.$$

$\square$

3.4 Die Cantormenge $C_{\frac{2}{3}}$

Tertiärdarstellung: $x \in [0,1]$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} = (0, a_1 \dots)_3 \text{ mit } a_j \in \{0,1,2\} .$$

Die Darstellung ist eindeutig, falls wir $\overline{2}$ ausschlisßen.

Definition 3.5

Die $\frac{2}{3}$ Cantormenge besteht aus allen Zahlen in $[0,1]$, für die $a_0 \in \{0,2\}$ gewählt werden können.

Eigenschaften:

1) Es ist $0 = (0, \overline{0})_3, 1 = (0, \overline{2})_3, \frac{1}{2} = (0, 0\overline{2}), \frac{2}{3} = (0,2)_3 \in C_{\frac{2}{3}}$. Jeder Tertiärbruch, der 1 höchstens an der letzten Stelle hat, liegt in $C_{\frac{2}{3}}$.

2)

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cap C_{\frac{2}{3}} = \emptyset, \text{ da } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \ni x = (0, 1 \dots).$$

3) $C_{\frac{2}{3}}$ ist perfekt:

- $C_{\frac{2}{3}}$ ist abgeschlossen (und damit kompakt)

$$x = (0, a_1 \dots)_3, x_n = (0, a_{1n} \dots)_3, \quad x_n \longrightarrow x.$$

  Mit $a_j, a_1^j \neq 1$ ist

$$x_n \longrightarrow x \iff a_{jn} = a_j \text{ für } n \geq n(j).$$

- $x \in C_{\frac{2}{3}}$ ist Grenzwert einer Folge $x_n \in C_{\frac{2}{3}}$. $x_n \neq x$
  - 1. Fall: unendlicher Tertiärbruch

$$x = (0, a_1 \dots)_3 = \lim_{n \to \infty} x_n, x_n = (0, a_1 \dots a_n)_3.$$

  - 2. Fall: Endlicher Tertiärbruch:

$$x = (0, a_1 \dots a_n).$$

    a) $a_n = 2 \implies x_n = x + 2 \cdot 3^{-n}$
    b) $a_n = 1 \implies x_n = x - 3^n$

4) $C_{\frac{2}{3}}$ enthält kein offenes Intervall. Sonst $\exists I = (l_3^{-k}, (l+1)3^{-k}) \subset C_{\frac{2}{3}}$ mit $l = (a_1 \dots a_n)_3$ und $a_n = 1$

5) $\mathbb{Q} \cap C_{\frac{2}{3}}$ (endliche Tertiärbrüche) ist dich in $C_{\frac{2}{3}}$

6) Multiplikation mit 3:

$$\begin{aligned} C_{\frac{2}{3}} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] &\longrightarrow C_{\frac{2}{3}} \\ (0, 0a_1 \dots)_3 &\mapsto (0, a_1 \dots)_3 \end{aligned}$$

ist bijektiv. Außerdem ist

$$\begin{aligned} x \mapsto 3x - 2 : C_{\frac{2}{3}} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] &\longrightarrow C_{\frac{2}{3}} \\ (0, 2a_1 \dots)_3 &\mapsto (0, a_1 \dots)_3 \end{aligned}$$

bijektiv.

Satz 3.7
Es ist

$$\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C_{\frac{2}{3}}) = c_{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Konsequenz:

$$\mathcal{H}^{d}(C_{\frac{2}{3}}) = \begin{cases} 0 & \alpha \quad > \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ \infty & \alpha \quad < \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}.$$

Beweis: Zu zeigen:

$$2^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} c_{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \leq c_{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \sum \left(\frac{\operatorname{diam} F_n}{2}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

(1) $\delta > 3^{-k}$. Wir überdecken $C_{\frac{2}{3}}$ mit 2^k Intervallen der Länge 3^{-k}

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(C_{\frac{2}{3}}) \leq c_\alpha 2^k \left(\frac{1}{2 \cdot 3^k}\right)^{\alpha} = c_\alpha 2^{k-\alpha} 2^{-k\alpha} = c_\alpha 2^{-\alpha} \exp(k(\log 2 - \alpha \log 3)).$$

Also

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \text{ und } \mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}_{\delta}(C_{\frac{2}{3}}) \leq c_\alpha 2^{-\alpha}.$$

(2) Dürfen annehmen: $\delta > 0$, $C_{\frac{2}{3}} \subset \bigcup I_n$, I_n offen,

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta} \leq \sum_n c_{\frac{\log 2}{\log 3}} \left(\frac{|I_n|}{2}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}}.$$

(3) $C_{\frac{2}{3}}$ kompakt

$$\implies C_{\frac{2}{3}} \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n.$$

(4) Seien I_n ohne Einschränkung paarweise disjunkt. Falls nicht: $I_1 \cap I_2 \ni x$. Also

$$\implies I_1 \cap I_2 \cap ([0,1] \backslash C_{\frac{2}{3}}) \text{ enthält offenes Intervall }.$$

$\implies$ Für das disjunkte Intervall, die $I_1 \cap I_2 \cap C_{\frac{2}{3}}$ überdecken.

$$\underset{a_1}{(} \quad \underset{a_2}{(} \overset{b_1' b_2'}{(\,)} \underset{b_1}{)} \quad \overset{b_2}{)} \text{ mit } (\,) \in [0,1] \backslash C_{\frac{2}{3}}.$$

(5) Abeschlossenes Intervall mit Endpunkten ???

(6) $I_n = [l_n, r_n]$, $l_1 = 0 < r_4 < l_2 < r_2$ Es gelte

$$\frac{r_n - l_n}{3} < 3^{-m} \leq r_n - l_n.$$

Ersetze I_n durch $[l_n, a] \cup [b, r_n]$. $|a - b_n| \leq 3^{-m}, |r_n - b| \leq 3^{-m}$.
Behauptung:

$$|a - l_n|^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} + (r_n - b)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \leq (r_n - l_n)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Nun ist durch Einesetzen von r_n und l_n

$$(a-l_n)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} + (r_n-b)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} - (r_n-l_n)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

wächst monoton, fällt monoton

$$(3^{-m})^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} + (3^{-m})^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} - (3^{1-m})^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung

(7) Ersetze Intervalle durch kleine Intervalle $\rightsquigarrow$ alle Intervalle sind am Ende gleich groß, Länge 3^{-k}. Hatten "$\leq$" betrachtet.

Konsequenz:

$$\mathcal{H}^\alpha(C_{\frac{2}{3}}) = \infty \text{ für } \alpha < \frac{\ln 2}{\ln 3} \mathcal{H}^\alpha(C_{\frac{2}{3}}) = 0 \qquad \text{für } \alpha > \frac{\ln 2}{\ln 3}$$
$$\implies \mathcal{H}^1(C_{\frac{2}{3}}) = m^1(C_{\frac{2}{3}}) = 0.$$

□

Definition: Die Teufelstreppe

$\Phi : C_{\frac{2}{3}} \longrightarrow [0,1]$ mit

$$\Phi((0,a_1\ldots)_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} 2^{-n} \text{ mit } a_n \in [0,2].$$

Also zum Beispiel

$$(0,1)_3 = (0,0\overline{2})_3 \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ und } (0,2)_3 \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ und } \Phi((0,\overline{2})_3) = 1.$$

Definiere

$$\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1],$$

indem ich Φ in den offenen Intervallen konstant fortsetze.

Eigenschaften:

(1) Φ wächst monoton

(2) Φ ist surjektiv. Binärdarstellung $\implies$ Φ ist stetig

(3) Φ ist konstant auf Intervallen der Form

$$[(0,a_1\ldots a_k 1)_3, (0,a_1\ldots a_k 2)_3].$$

(4) Sei $\hat{C}_{\frac{2}{3}} \subset C_{\frac{2}{3}}$ bei der wir die letzten Entpunkte entfernen.

$$\Phi : \hat{C}_{\frac{2}{3}} \longrightarrow [0,1] \text{ bijektiv.}$$

(5)

$$m^1(C_{\frac{2}{3}}) = 0 \implies m^1([0,1] \backslash C_{\frac{2}{3}}) = 1.$$

Φ ist lokal in $[0,1]\backslash C_{\frac{2}{3}}$ konstant.

(6) Es gilt für $x > y$:

$$\Phi(x) - \Phi(y) = \frac{2^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{c_{\frac{\ln 2}{\ln 3}}} \mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C_{\frac{2}{3} \cap [y,x]}).$$

Behauptung: Genügt, die Aussage für (stetig)

$$[y,x] = [\underbrace{(0,a_1 \dots a_k)_3}_{=x}, (0,a_1 \dots a_k)_3 + 3^{-k-1}]$$

zu zeigen $\implies$ Aussage für $x, y \in C_{\frac{2}{3}} \cap \mathbb{Q}$
Es gilt

$$a_n \in [0,2].$$

Außerdem

$$\Phi(x + 3^{-k-1}) - \Phi(x) = 2^{-k-1}$$
$$\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}([x, x+3^{-k-1}] \cap C_{\frac{2}{3}}) = 2^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} c_{\frac{\ln 2}{\ln 3}} 3^{(-k-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}}$$
$$\exp(\ln 3(-k-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}) = 3^{(-k-1)\frac{\ln 2}{\ln 3}} = \exp((-k-1)\ln 2) = 2^{-k-1}.$$

3.5 Radonmaße

Definition 3.6

Ein Maß μ auf einem metrischen Raum heißt Tadonmaß, falls jede Borellmenge messbar ist und

1) μ ist lokal endlich, d.h. $\forall x \exists r : \mu(B_r(x)) < \infty$
2) $\mu(A) = \sup \left\{ \mu(K) | K \subset A, K \text{ kompakt} \right\}$ (Innere Regularität)

Lemma 3.8
Sei μ ein lokal endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist μ ein Radonmaß und von innen und außen regulär.

Beweis: Zu zeigen: Äußere Regularität: A Borell,

$$\mu(A) = \inf \left\{ \mu(U) : A \subset U, U \text{ offen} \right\} \iff \forall \varepsilon \exists U \text{ offen} : \mu(U \backslash A) < \varepsilon, A \subset U.$$

Daraus folgt mit Komplementen und σ-Additivität

$$\mu(A) = \sup \left\{ \mu(K) | K \subset A \right\}.$$

μ lokal endlich $\implies \mu(K) < \infty \, \forall K$ kompakt

$$\mathcal{F} := \left\{ A \text{ Borell} | \, \forall \varepsilon \exists U \text{ offen}, A \subset U, \mu(U \backslash A) < \varepsilon \right\}.$$

Eigenschaften:

1) offene Mengen liegen in $\mathcal{F}$
2) Abzählbare Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{F}$ liegen in $\mathcal{F}$. Gleiches Argument wie früher
3) Abzählbare Schnitte bleiben in $\mathcal{F}$. Seien $A_n \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0, A_n \subset U_n, \mu(U_n \backslash A_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_n U_n \backslash \bigcap_n A_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_n (U_n \backslash A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \backslash A_n) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Auch gilt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_n U_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcap_{n=1}^N U_n\right)\\ &\implies \exists N:\mu\left(\underbrace{\bigcap_{n=1}^N U_n}_{V \text{ offen}}\setminus\bigcap_{n=1}^\infty U_n\right)<\varepsilon\\ &\implies \mu\left(V\setminus\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)<2\varepsilon.\end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$N\setminus\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subset V\setminus U\cup U\setminus\bigcap_{n=1}^\infty A_n.$$

4) Sei A abgeschlossen.

$$A=\bigcap U_n, U_n=\left\{x, d(x,A)<\frac{1}{n}\right\} \implies A\in\mathcal{F}.$$

Sei $\mathcal{A}=\left\{A : A\in\mathcal{F} \text{ und } \mathbb{R}^d\setminus A\subset F\right\}$

Wir wissen bereits:

1) offene Menge liegt in $\mathcal{A}$
2) Komplemente sind in $\mathcal{A}$
3) abzählbare Vereinigungen sind in $\mathcal{A}$

$\implies \mathcal{A}$ ist σ-Algebra $\implies \mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Wir haben verwendet, dass $\mu(\mathbb{R}^d)$ endlich $\to$ σ-Additivität □

Definition 3.8

Ein Maß μ auf X heißt σ-endlich, falls messbare Mengen A_n existieren mit $X=\bigcup A_n$ und $\mu(A_n)<\infty$.

Bemerkung

μ lokal endlich $\implies$ σ-endlich.

Kapitel 4

Das Lebesgueintegral

. Vorlesung - 05.11.2024

4.1 Definition messbarer Funktionen und des Lebesgueintegrals

Bemerkung

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit offensichtlichen Rechenregeln für $\pm\infty$. Wir setzen außerdem $0\infty = 0$.

Definition 4.1: messbare Funktionen

Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((t, \infty]) \in \mathcal{A}$ liegt (also messbar ist).

Bemerkung: erste Eigenschaften messbarer Funktionen

(1) Stetige Funktionen auf einem metrischen Raum sind Borellmessbar.

(2) Die Abbildung

$$[0, \infty) \ni t \to \mu(\{x : f(x) > t\}) \in [0, \infty]$$

ist monoton fallend.

Definition 4.2: Lebesgueintegral

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ messbar. Wir definieren

$$\int_X f \, d\mu := \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt \in [0, \infty) \cup \{\infty\} .$$

Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gilt entweder

$$\int_X \max\{f, 0\} \, d\mu < \infty$$

oder

$$\int_X \max\{-f, o\}\, d\mu < \infty,$$

so definieren wir

$$\int f d\mu := \int \max\{f, 0\}\, d\mu - \int \max\{-f, 0\}\, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Wir nennen f integrierbar, falls beide Integrale endlich sind.

Bemerkung

Jede beschränkte, monotone Funktion auf einem kompakten Intervall ist Riemann integrierbar. Ist $f : X \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ messbar und

$$\mu(\{x : f(x) > t\}) = \infty$$

für ein t, so setzen wir $\int f d\mu = \infty$. Im anderen Fall existiert das Riemannintegral

$$\int_a^b \mu(\{x : f(x) > t\}) dt$$

für $0 < a < b < \infty$ und wir definieren das Integral als das uneigentliche Integral

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ b \to \infty}} \int_a^b \mu(\{x : f(x) > t\}) dt.$$

Da

$$\{-f > t\} = \{f < -t\} = X \setminus \{f \geq -t\} = \cap_n (X \setminus \{f(x) > -t - \frac{1}{n}\}),$$

ist $-f$ messbar.

Beispiel 4.1
Sei $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) < \infty$. Dann ist

$$\int_X \chi_A d\mu = \int_0^\infty \mu(\chi_A > t) dt = \int_0^1 \mu(A) dt = \mu(A).$$

Mit $\mu = m^1$ und $A = \mathbb{Q}$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} dm^1 = m^1(\mathbb{Q}) = 0.$$

$\chi_{\mathbb{Q}}$ ist damit integrierbar, aber nicht Riemannintegrierbar.

Beispiel 4.2
Wir betrachten $f : \mathbb{R}^d \to (0, 1], f(x) = e^{-|x|^2}$. Diese Funktion ist stetig und daher Lebesguemessbar. Für $0 < t < 1$ ist

$$\{x : f(x) > t\} = B_r(0)$$

mit $r = \sqrt{-\ln(t)}$. Da

$$m^d(B_r(0)) = m^d(B_1(0)) \cdot r^d,$$

folgt der Definition und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} m &= m^d(B_1(0)) \int_0^1 (-\ln(t))^{\frac{d}{2}} dt \\ &= m^d(B_1(0)) \int_0^1 (s)^{\frac{d}{2}} e^{-s} dt \\ &= m^d(B_1(0)) \Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right).\end{aligned}$$

4.2 Messbare Funktionen

Lemma 4.1

Sei $(X, \mathcal{A})$ eine Menge mit einer σ-Algebra, (Y, d) ein metrischer Raum, $f : X \longrightarrow Y$ und $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, falls U offen, so sind die Urbilder von Borellmengen messbar.

Korollar

Insbesondere gilt: Sind (X, d^X) und (Y, d^Y) metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ stetig, so sind Urbilder von Borellmengen wieder Borellmengen.

Beweis: Aus

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$
$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A),$$
$$f^{-1}\left(\bigcap A_n\right) = \bigcap f^{-1}(A_n)$$

folgt, dass $\mathcal{S} = \left\{A : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\right\}$ eine σ-Algebra ist. Sie enthält offene Mengen und damit alle Borellmengen. □

Satz 4.2

(1) Ist $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesbar, so sind Urbilder von Borellmengen messbar.

(2) Die messbaren Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum. Summen und Produkte zweier messbarer Funktionen $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sind messbar.

(3) Ist I ein offenes Intervall und $f : X \longrightarrow I$ messbar und $\phi \in C(I; \mathbb{R})$, so ist $\phi \circ f$ messbar.

(4) Seien $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind

$$x \mapsto \sup_n f_n(x),$$
$$x \mapsto \inf_n f_n(x),$$
$$x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$
$$x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

messbar. Insbesondere folgt aus

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \forall x \in X,$$

dass f messbar ist.

Beweis: Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Nach Lemma 4.1 genügt es zu zeigen, dass Urbilder offener Mengen messbar sind. Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind abzählbare Vereinigungen offener Intervalle, also genügt es, offene Intervalle zu betrachten. Die Intervalle $[t, \infty]$ sind abzählbare Schnitte von Intervallen der Art $(t, \infty]$. Wir schreiben offene Intervalle als

$$(s, t) = (s, \infty] \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus [t, \infty]).$$

Seien nun f, g messbar und $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\{x : f(x) + g(x) > t\right\} &= \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{x : f(x) > \frac{n}{m+1}, g(x) > t - \frac{n}{m+1}\right\} \\ &= \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{x : f(x) > \frac{n}{m+1}\right\} \cap \left\{g(x) > t - \frac{n}{m+1}\right\}.\end{aligned}$$

Damit ist die Summe messbarer Funktionen messbar. Für $t > 0$ ist außerdem

$$\{f(x)g(x) > t\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X : f(x) > \frac{n}{m}, g(x) > \frac{tm}{n}\right\} \cup \left\{f(x) < -\frac{n}{m}, g(x) < -\frac{tm}{n}\right\}.$$

Daher ist auch diese Menge messbar, falls f und g messbar sind. Das Argument lässt sich leicht für $t = 0$ und $t < 0$ modifizieren. Die kosntante Funktion $g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ ist messbar, also ist auch λf messbar, wenn f messbar ist. Damit sind Vielfache messbarer Funktionen messbar und messbare Funktionen bilden einen Vektorraum.
Wir wollen (3) beweisen. Die Komposition ist messbar, da $\phi^{-1}((t,\infty))$ für stetige ϕ offen ist. Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\left\{x \in \sup_n f_n(x) > t\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) > t\},$$
$$\left\{x \in \inf_n f_n(x) > t\right\} = X \setminus \left\{\inf_n f_n \leq t\right\} = X \setminus \bigcup_m \left\{\inf_n f_n < t + \frac{1}{m}\right\}$$

und

$$\{\inf f_n < t\} = \bigcup_n \{f_n < t\}$$
$$\left\{x : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) > t\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq m}^{\infty}\{x : f_n(x) > t\}$$

und

$$\left\{x : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) < t\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq m}\{f : f_n(x) < t\}$$

und damit sind diese Funktionen messbar. Falls der Limes für x existiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

□

Definition 4.3

Wir sagen, eine mit $x \in X$ parametrisierte Aussage gilt μ fast überall, falls eine μ Nullmenge N existiert, sodass die Aussage für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Sind f, g messbare Funktionen, so sagen wir

$$f = g \text{ fast überall},$$

falls eine Nullmenge existiert, außerhalb derer $f(x) = g(x)$ gilt.

Satz 4.3

Wir betrachten die Äquivlanzklassen $\tilde{f}$ messbarer Funktionen, für die $|f(x)| < \infty$ fast überall ist bzgl. der Relation $f = g$ fast überall. Diese Äquivalenzklassen bilden ienen reellen Vektorraum.

Beweis: Die Beziehung $f = g$ fast überall definiert eine Äquivalenzrelation messbarer Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Sei f wie im Satz, d.h. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar und $N_f = \{x : |f(x)| = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Wir definieren

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \notin N_f \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\hat{f} = f$ fast überall und $\hat{f}$ ist messbar. Jede Äquivalenzklasse hat also einen Vertreter, der Werte in $\mathbb{R}$ annimmt.
Nach Satz 4.2 sind $\hat{f} + \hat{g} = f \hat{+} g$ und $\hat{f}\hat{g} = \hat{fg}$ außerhalb von der Nullmenge $N_f \cup N_g$. Wir definieren die Summe der Äquivalenzklassen als die Äquivalenzklasse von $\tilde{f} + \tilde{g}$ und genauso das Produkt $\lambda\tilde{f} = \widetilde{\lambda f}$. Damit bilden die Äquivalenzklassen einen reellen Vektorraum. □

10. Vorlesung - 07.11.2024

Im folgenden ist (X, d) metrischer Raum und μ ein Radonmaß. Ferner sei E μ-messbar und $\mu(E) < \infty$.

Beispiel 4.3
$X = \mathbb{R}^d, \mu = m^d, E = B_R(0)$

Satz 4.4
Sei $f_n, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar und $f_n \longrightarrow f$ fast überall. Dann gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, K \subset E \text{ kompakt und } \mu(E \setminus K) < \varepsilon \text{ und } f_n\big|_K \to f\big|_K.$$

Beweis: Da Nullmengen irrelevant sind, dürfen wir annehmen: $f_n(x) \longrightarrow f(x)\, \forall x \in E$. Es ist

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \left\{ x \in E : \sup_{n \geq N} \left| f_n(x) - f(x) \right| > \frac{1}{m} \right\} = \emptyset.$$

Es folgt

$$\overset{\forall \varepsilon > 0}{\Longrightarrow} \exists\, N_m : \ \mu \left\{ x \in E \mid \sup_{n \geq N_m} \left| f_n(x) - f(x) \right| > \frac{1}{m} \right\} < 2^{-1-m} \varepsilon.$$

Nach der Definition des Radonmaßes folgt:

$$\exists\, K_m \subset E, \text{sodass } \underbrace{\exists\, K_m :}_{\subset E \setminus A_m} \mu\, (E \setminus K_m) < 2^{-m} \cdot \frac{1}{m} \text{ für } x \in K_m, n \geq N_m.$$

Es ist

$$K := \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$$

kompakt also

$$\Longrightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{1}{m}, x \in K,\ n \supset N_m \text{ und } \mu(E \setminus K) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus K_m) < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

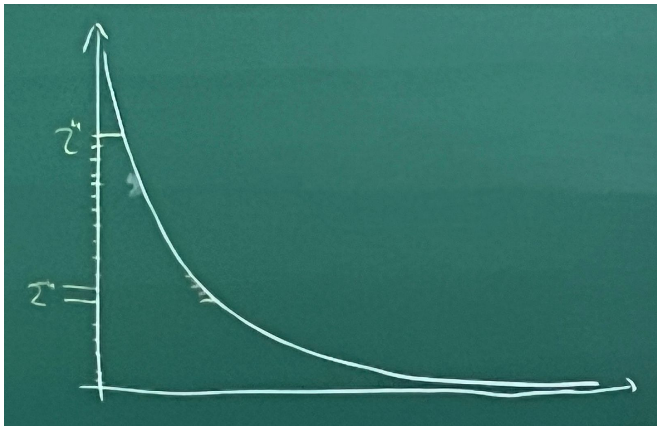
□

Definition 4.4

Eine einfache Funktion ist eine messbare Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt, d.h. eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen. $\boxed{f = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \chi_{A_n}}$

Lemma 4.5
Sei $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge einfacher Funktionen (f_n) mit $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ und $f_n(x) \longrightarrow f(x)\, \forall x \in X$
Die einfachen Funktionen bilden einen Vektorraum. Produkte einfacher Funktionen sind einfach

Beweis: $f_n(x) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } f(x) \geq 2^n \\ \frac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{falls } f(x) < 2^n \end{cases}$



□

Satz 4.6 Lusin

Sei $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $\left|f(x)\right| < \infty$ fast überall
$\Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon\, \exists\, K \subset E$ kompakt, sodass $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$ und $f\big|_K$ ist stetig.
Jede messbare Funktion ist fast stetig

Beweis: 1) $f = f_+ + f_- = \max\left\{f, 0\right\} - \max\left\{-f, 0\right\}$
Genügt: $f \geq 0$ zu betrachten

2) Lemma 4.5 $\exists\, f_n$ einfach, $f_n \uparrow f\, \forall\, x \in E$

3) Satz von Egorov, Satz 4.4: $\forall\, \varepsilon > 0$
$\exists\, K : \quad f_n\big|_K \longrightarrow f\big|_K$ gleichmäßig $\mu(E \backslash K) < \frac{\varepsilon}{2}$
f_n einfache Funktion, $f_n = \sum_{m=1}^{M_n} \lambda_{nm} \chi_{A_{nm}}$, wobei $A_{nm} \cap A_{n\tilde{m}} = \emptyset$, $m \neq \tilde{m}$
$A_{n0} = E \Big\backslash \bigcup_{m=1}^{M_n} A_{nm}$
Radonmaß: $\exists\, K_{nm}$ kompakt, $K_{nm} \subset A_{nm}$
$\mu(A_{nm} \backslash K_n m) < 2^{-2-n-m}\, \varepsilon$
$K_n = \bigcup_{n=0}^{M_n} \underbrace{K_{nm}}_{\text{disjunkt, positiver Abstand}}$ kompakt. $\mu(E \backslash K_n) < 2^{-1-m}\varepsilon, f_n$ stetig auf K
$K = K_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ kompakte Menge,
$\mu(E \backslash K) < \varepsilon, f_n\big|_K$ stetig,
$f_n\big|_K \longrightarrow f\big|_K$ gleichmäßig
$\Longrightarrow \quad f\big|_K$ stetig

□

4.3 Die Konvergenzsätze

$\theta, \theta_n : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ monoton fallend.

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \theta(t)\, dt \in [0, \infty].$$

Lemma 4.7

Sei $n \longrightarrow \theta_n(t)$ monoton wachsend, $\theta_n \uparrow \theta$.
$\forall t \in (0, \infty)$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty \theta_n(t)\, dt \longrightarrow \int_0^\infty \theta(t)\, dt.$$

Beweis: Es gilt:

$$\int_0^\infty \theta_n(t)\,dt \leq \int_0^\infty \theta(t)\,dt$$
$$\theta(t) < \infty\,\forall t \text{ ohne Einschränkung.}$$

Äquidistante Zerlegung: $a = t_0 < t_1 \ldots < t_M = b$

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{b-a}{M}\theta_n(t_m) \leq \int_a^b \theta_n(t)\,dt \leq \sum_{m=1}^{M} \frac{b-a}{M}/theta_n(t_{m-1})$$
$$\implies \text{Riemann integrierbar.}$$

Annahme: $\int_0^\infty \theta(t)\,dt < \infty$ (sonst: leichte Variation)
Sie $\varepsilon > 0 \quad \exists\, 0 < a < b < \infty$:

$$\int_0^\infty \theta(t)\,dt - \int_a^b \theta(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wähle M: $\frac{b-a}{M}\theta(a) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\implies \left|\int_a^b \theta_n(t)\,dt - \sum_{m=1}^{M} \frac{b-a}{M}\theta_n(t_n)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\implies \exists\, N : \sum_{m=1}^{M} \frac{b-a}{M}\left(\theta(t_m) - \theta_n(t_m)\right) < \frac{2\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq N..$$

$$\implies n \geq N$$
$$\int_0^\infty \theta(t)\,dt \geq \int_0^\infty \theta_n(t)\,dt \geq \int_a^b \theta_n(t)\,dt \geq \sum_{m=0}^{M-1} \frac{b-a}{M}\theta_n(t_m)$$
$$\geq \sum_{m=1}^{M} \frac{b-a}{M}\theta(t_m) - c\frac{\varepsilon}{3} \geq \int_a^b \theta(t)\,dt - \frac{2\varepsilon}{3} \geq \int_a^b \theta(t)\,dt - \varepsilon$$
$$\implies 0 \leq \int_0^\infty \theta_n(t)\,dt - \int_0^\infty \theta_n(t)\,dt < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$
$$\implies \text{Aussage.}$$

□

Satz 4.8 Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f, f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. $0 \geq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $f_n(x) \uparrow f(x)$ fast überall
Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int d\,d\mu.$$

Beweis: Satz 4.2 f messbar.

$$\left\{f(x) > t\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{f_n(x) > t\right\}$$
$$\implies \mu\left(\left\{f_n(x) > t\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{f(x) > t\right\}\right)$$
$$= \lim_{m\to\infty} \mu\left(\left\{x \mid f_n(x) > t\right\}\right).$$

$\theta_n(t) := \mu\left(\left\{f_n(x) > t\right\}\right)$ $\qquad$ θ, θ_n monoton fallend.
$\theta(t) := \mu\left(\left\{f(x) > t\right\}\right)$ $\qquad$ $\theta_n(t), \theta(t)\,\forall t$

Lemma 4.7:

$$\int f_n \, d\mu = \int_0^\infty \theta_n(t) \, dt \to \int_0^\infty \theta(t) \, t = \int f \, d\mu.$$

□

---

11. Vorlesung - 12.11.2024

Lemma 4.9 Lemma von Fatue

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann ist

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \\ g_N(x) &= \inf_{n\geq N} f_n(x). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2 sind dann g_N, f messbar. $N \to g_N(x)$ ist monoton wachsend.
Nach Satz 4.8 ist dann

$$\int g_N d\mu > \int f d\mu \quad (N \to \infty) | g_N(x) \to f(x).$$

Nach Konstruktion ist $g_N(x) \leq f_n(x)$ für $n \geq N$. Also ist

$$\int f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int g_N d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Denn

$$\begin{aligned} \int f_N d\mu &\leq \int f_N d\mu && (n \geq N) \\ &\leq \inf_{n\geq N} \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

□

Satz 4.10 Dominierte Konvergenz, Satz von Lebesue

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $g : X \to [0, \infty]$ sei intergierbar, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar, $|f_n(x)| \leq g(x)$ f.ü., $f_n \to f$ f.ü.. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Bemerkung

g heißt Majorante, f messbar (Satz 4.2)

$$\int |f_n| \, d\mu \le \int g d\mu$$
$$\int |f| \, d\mu \le \int g d\mu$$
$$\{|f_n(x)| > t\} \subset \{g(x) > t\}.$$

Beweis: $f_n \to f$ f.ü. $\iff$

$$f_{n,+} = \max\{f_n, 0\} \to f_+ \text{ und } f_{n,-} = \max\{-f_n, 0\} \to f_- \text{ f.ü..}$$

Es genügt: Beweis für $f_n \ge 0$.

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ f.ü. .}$$

Nach dem Lemma von Fatu:

$$\int f d\mu \le \liminf \int f_n d\mu.$$

Da g int.

$$\implies \infty > \int_0^\infty \mu(\{g(x) > t\}) dt = \lim_{a\downarrow 0\ b\uparrow\infty} \int_a^b \mu(\{g(x) > t\}) dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\implies \exists\, a < b : \int_a^b \dots dt + \frac{\varepsilon}{4} > \int f d\mu.$$

Sei

$$A = \{x : a \le g(x) \le b\} \implies \int \chi_{X\setminus A} g d\mu = \frac{\varepsilon}{4} > \int_{X\setminus A} g d\mu \ge \int_{X\setminus A} |f_n| \, d\mu.$$

Zu zeigen:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu.$$

$\implies$ Annahme des Satzes mit Schlussfolgerung aus Lemma von Fatu. Dann Lemma von Fatu:

$$\int_A b - f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_A b - f_n d\mu.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\{x \in A : b - f(x) \geq t\} &= A \setminus \{f(x) > b - t\} \\ \mu(\{x \in A | b - f(x) \geq t\}) &= \mu(A) - \mu(A \cap \{f > b - t\}) \\ \int_A b - f d\mu &= \int_0^b \mu(x \in A : b - f(x) > t) dt \\ &= \int_0^b \overbrace{\mu(\{x \in A : b - f(x) \geq t\})}^{\text{monoton in } t} dt \\ &= b\mu(A) - \int_0^b \mu(\{x \in A : f(x) > b - t\}) dt && \text{(Monotone Fkt, } \textstyle\int_A (b - f + \varepsilon) d\mu) \\ &= b\mu(A) - \underbrace{\int_0^b \mu(\{x \in A | f(x) > t\}) dt}_{= \int_A f d\mu} && (t' = b - t) \\ \implies b\mu(A) - \int_A &\leq b\mu(A) - \limsup_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu \\ \implies \limsup_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu &\leq \int_A f d\mu.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.12

Für einfache integrierbare Funktionen f und g gilt

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Lemma 4.11

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar, A_n messbar und disjunkt $X = \bigcup_n A_n$. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Beweis: Es genügt, $f \geq 0$ zu betrachten. Sei $X = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$ und A, B messbar. Nun ist

$$\{x | f(x) > t\} = \{x \in A | f(x) > t\} \cup \{x \in B | f(x) > t\} \implies \int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Genauso gilt dies, wenn A, B messbar sind mit $A \cap B = \emptyset$ also

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Induktiv gilt dies für endliche disjunkte Vereinigungen. Nun betrachten wir

$$f = f \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \text{ mit } f_n \uparrow f \text{ f.ü. monoton.}$$

Also

$$\implies \sum_{m=1}^{n} \int_{A_m} f d\mu = \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} f d\mu \to \int f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu.$$

□

Beweis von Lemma 4.12: einfach $\iff$ messbar, endlich viele Werte

$$\implies \exists A_1, \ldots, A_N \text{ messbar disjunkt, } f \text{ und } g \text{ auf } A_N \text{ konstant, } \bigcup_{n=1}^{N} A_n = X.$$

Dann

$$\begin{aligned} &\implies \int_{A_n} f + g d\mu = \int_{A_n} f d\mu + \int_{A_n} g d\mu \\ &\implies \int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

mit Lemma 4.11. □

Satz 4.13

Seien $f, g : X \to (\bar{\mathbb{R}})$ integrierbar. Dann existiert eine Nullmenge N sodass

$$|f(x)| < \infty, |g(x)| < \infty \text{ für } x \in X \setminus N.$$

Die Funktion

$$F(c) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{N} \\ f(x) + g(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar und es gilt

$$\int F d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Bemerkung

Wir schreiben

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Beweis: Ohne Einschränkung: $f, g : X \to \mathbb{R}$. Dann

$$\{x | |F(x)| > t\} \subset \left\{|f(x)| > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{|g(x)| > \frac{t}{2}\right\}.$$

Nun ist also

$$\begin{aligned} \int |F| \, d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{|F| > t\}) dt \\ &\leq \int_0^\infty \mu\left(\left\{|f| > \frac{t}{2}\right\}\right) dt + \int_0^\infty \mu\left(\left\{|g| > \frac{t}{2}\right\}\right) dt \\ &\overset{t'=2t}{=} 2 \int_0^\infty \mu(\{|f| > t'\}) dt' + 2 \int_0^\infty \mu(\{|g| > t'\}) dt' \\ &= 2 \left(\int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu \right) < \infty \\ &\implies F \text{ integrierbar.} \end{aligned}$$

Es existieren einfache Funktionen $f_n \to f, g_n \to g$ mit $|f_n| < f, |g_n| < g$ (Lemma 4.5). Nun gilt

$$\begin{aligned}\int F d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int f_n + g_n d\mu && \text{(Lebesgue, Majorange } |f| + |g| \text{ integrierbar)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu \right)\\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. && \text{(Satz v. Lebesgue. Majorange } |f| \text{ bzw } |g|)\end{aligned}$$

Bemerkung: $f \geq 0$ mit

$$\int \lambda f d\mu = \int_0^\infty \mu(\left\{f > \frac{t}{\lambda}\right\})dt \qquad \overset{t'=\frac{t}{\lambda}}{=} \lambda \int_0^\infty \mu(\{f > t'\})dt'.$$

$f \to \int f d\mu$ ist linear. Also

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu\\ \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu\\ \implies \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.\end{aligned}$$

Analysis 1 □

4.4 Der Banachraum auf $L^1(X, \mu)$

Definition 4.5

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Wir definieren $L^1(X, \mu)$ als die Äquivalenzklassen intergierbarer Funktionen mit der Norm

$$\|\tilde{f}\| = \int |f| d\mu < \infty,$$

wobei f ein beliebiges Element der Äquivalenzklasse ist.
Bemerkungen:

(1) $\|\tilde{f}\|$ ist wohldefiniert:

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ f.ü. }.$$

(2) $\|\lambda \tilde{f}\| = |\lambda| \, \|\tilde{f}\|$, denn $|\lambda f_n| = |\lambda| \, |f_n|$

(3) $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \implies \|\tilde{f} + \tilde{g}\| \leq \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\|$

(4) Vektoren, $\| \, \|$ Norm

(5) $\|\tilde{f}\| \geq 0$

(6) $\|\tilde{f}\| = 0, f \in \tilde{f}$. Dann ist

$$\int |f| d\mu = 0 = \int_o^\infty \mu(\{|f| > t\})dt \implies \mu(\{|f| > t\}) = 0 \, \forall t > 0 \implies f = 0 \text{ f.ü.}.$$

Also

$$\{f = 0\} = \bigcup_n \left\{|f > \frac{1}{n}|\right\}.$$

Satz 4.14

$L^1(X,\mu)$ ist ein Banachraum, d.h. ein vollständiger metrischer Raum.

---

12. Vorlesung - 14.12.2024

Beweis: Seien $(\tilde{f}_n)_n$ Cauchyfolge, $f_n \in \tilde{f}_n$. Es genügt zu zeigen, dass eine Teilfolge konvergiert. Wir können annehmen: $\left\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\right\| < 2^{-n}$. Wir definieren

$$g_n = |f_0| + \sum_{k=1}^{n} |f_n - f_{n-1}|.$$

Es ist $n \longrightarrow g_n(x)$ monoton wachsend also

$$g = |f_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|.$$

Aus der monotonen Konvergenz folgt

$$\|\tilde{g}\| = \int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \|g_n\| = \lim_{n\to\infty} \|f_0\| + \sum_{k=1}^{n} \|f_k - f_{k-1}\| \leq \|f_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|f_0\| + 1.$$

Es folgt die Integrierbarkeit von g. Nun ist

$$|f_m - f_n| \leq g - g_n \text{ für } m \geq n.$$

Also $\Longrightarrow$ $f_n(x)$ Cauchyfolge fast überall (wenn $g(x) - g_n(x) < \infty$). Wir definieren also

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dies gilt nur außerhalb der Nullmenge $\Longrightarrow$ $f_n \to f$ fast überall monoton und $|f_n| \to f$ fast überall, $f_n \to f$ fast überall, $2g$ ist Majorante. Mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\Longrightarrow \int \|f_n - f\|\, d\mu = \int |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

□

Korollar 4.15

$\tilde{f}_n \to \tilde{f}$in $L^1(X,\mu) \implies \exists$ Teilfolge mit $f_{n_k} \to f \quad (k \to \infty)$ fast überall.

Lemma 4.16

Die Abbildung

$$L^1(x,\mu) \ni \tilde{f} \ni f \to \int f\, d\mu$$

ist eine stetige linearea Abbildung mit

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \|f\|.$$

Beweis: 1) Wohldefiniertheit: $f_1 = f_2$ fast überall $\implies \int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$

2) Linear nach Satz 4.13. Nun gilt

$$f = f_+ + f_-, f_+ = \max\{f, 0\}.$$

Also

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu\right| \\ &\leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu \\ &= \int f_+ + f_- d\mu \\ &= \int |f| \, d\mu \\ &= \|\tilde{f}\|.\end{aligned}$$

□

4.5 Stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht

Lemma 4.17

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen, K, A disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion φ mit Werten in $[0, 1]$ und $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$, $\varphi(x) = 0$ für $x \in A$.

Beweis:

$$\delta = \operatorname{dist}(K, A) > 0, \varphi(x) := \max\left\{1 - \frac{1}{\delta} d(x, K), 0\right\}.$$

□

Satz 4.18

Sei μ ein Radonmaß auf (X, d) mit äußerer Regularität. Sei $\tilde{f} \in L^1(X, \mu)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige Funktion g mit

$$\int |f - g| \, d\mu < \varepsilon \quad (\|\tilde{f} - \tilde{g}\| < \varepsilon).$$

Wir sagen, stetige Funktionen sind dicht in $L^1(X, \mu)$.

Beweis: $\exists$ einfache Funktion h:

$$h = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \chi_{A_n}$$

fast überall A_n messbar, $0 < \mu(A_n) < \infty$. Es ist

$$\int |h - f| \, d\mu = \|h - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\exists \, K_n \subset A_n \subset U_n$ mit K_n kompakt, U_n offen und

$$\mu(U_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2\mu(A_n) N |\lambda_n|}.$$

Nach Lemma 4.17 $\exists \phi_n : X \to [0,1]$ stetig mit $\phi_n(x) = 1$ auf K_n, $\phi_n(0) = 0$ für $x \in X \setminus U_n$. Nun gilt

$$\int |\phi_n - \chi_{A_n}| d\mu \leq \mu(U_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2N|\lambda_n|} \implies \left\|\tilde{h} - \sum \lambda_n \tilde{\phi}_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|\lambda_n(\tilde{\chi}_{A_n} - \tilde{\phi}_n)\| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Definition

Für $f : X \to \mathbb{R}$ definieren wir den Träger

$$\operatorname{tr}(f) := \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}.$$

Korollar 4.19
Im Fall $X = \mathbb{R}^d$ sind stetige Funktionen mit kompaktem Träger dicht.

Beweis: Wir können $\delta \leq 1$ wählen. Sei K kompakt $\implies \{x \in \mathbb{R}^d | d(x,k) \leq 1\}$ ist kompakt. □

Satz 4.20
Sei (X,d) ein metrischer Raum, μ ein Radonmaß, $f : X \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Dann existiert eine Borell-messbare Funktion $\hat{f}$ mit

$$\hat{f} = f$$

fast überall.

Beweisskizze: $f \geq 0$, h_n einfache Funktion, $h_n \to f$, A messbar heißt $\exists B$ Borellmenge, $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) = 0$. □

4.6 Punktweise Auswertungen und Lebesgueprodukte

Definition 4.6: Lebesguepunkte

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ m^d-integrierbar. Wir nennen $x \in \mathbb{R}^d$ einen Lebesguepunkt von $\hat{f}$, falls $\forall \varepsilon \exists R > 0$, sodass

$$\left| \fint_{B_{r_1}(x_1)} f(y) dm^d(y) - \fint_{B_{r_2}(x_2)} f(y) dm^d(y) \right| < \varepsilon$$

für alle $r_1, r_2 < R$ und $x \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$

Bemerkung

Es ist

$$\fint_{B_r(x)} f dm^d = \fint_{B_r(x)} f(y) dm^d(y) = \frac{1}{\underbrace{m^d(B_r(x))}_{=r^d m^d(B_1(0))}} \int_{B_r} f(y) dm^d(y).$$

Definition: Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

Sei f integrierbar.

$$Mf(x) = \sup\left\{ \fint_{B_r(z)} |f(y)|\, dm^d(y) | x \in B_r(z) \right\} \subset [0, \infty].$$

Bemerkung

Es gilt

$$\begin{aligned} Mf(x) > t &\implies \exists B_r(z) \ni x : \fint_{B_r(z)} |f(y)|\, dm^d(y) > t \\ &\implies B_r(z) \subset \{Mf > t\} \\ &\implies \{Mf > t\} \text{ ist offen, messbar.} \end{aligned}$$

Lemma 4.21

Es gilt

$$m^d(\{Mf > t\}) \leq \frac{3^d}{t} \int |f|\, d\mu.$$

Beweis: $t > 0$, $x \in \{Mf > t\} \implies \exists \underbrace{B_{r(x)}(z(x))}_{x\in} \subset \{Mf > t\}$ und

$$\fint_{B_{r(x)}(z(x))} |f|\, dm^d > t.$$

Sei $K \subset \{Mf > t\}$ kompakt. m^d ist ein Radonmaß $\implies m^d(A) = \sup_{K \subset A} m^d(K)$. Es ist

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{r(x)}(z(x))$$

mit K kompakt. Es existiert folglich eine endliche Teilüberdeckung. Mit dem Lemma von Vitali sehen wir

$$\exists B_{r_m}(z_m) \text{ dijunkt, } K \subset \bigcup B_{3r_n}(z_m).$$

Es ist

$$\begin{aligned} m^d(K) &\leq \sum_{m=1}^{M} m^d(B_{3r_m}(z_m)) \\ &= 2^d \sum_{m=1}^{M} m^d(B_{r_m}(z_m)) \\ &\leq 2^d \sum_{m=1}^{M} t^{-1} \int_{B_{r_m}(z_m)} |f|\, dm^d \\ &\leq \frac{3^d}{t} \int_{\mathbb{R}^d} |f|\, dm^d \text{ da } B_{r_m}(z_m) \text{ disjunkt .} \end{aligned}$$

□

Satz 4.22

Sei $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d, m^d)$ und L die Menge der Lebesguepunkte in $\mathbb{R}^n \setminus L$ ist eine Nullmenge.

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus L \\ \lim_{r \to 0} ⨍_{B_r(x)} f \, dm^d & \text{für } x \in L \end{cases}.$$

Dann gilt $\hat{f} \in \tilde{f}$.

Beweis: □