Analysis III

Arthur Henninger

17. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)\right| = \pi r^2$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)\right| = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\left|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)\right| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\right\}$
Zylinder $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\right\}$
Kegel $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 1\right\}$
Es ist

$$|Z| = \pi \qquad \text{(Höhe mal Grundfläche)}$$
$$|C| = \frac{1}{3}\pi. \qquad \left(\tfrac{1}{3}\text{ Höhe mal Grundfläche}\right)$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3 in der Halbkugel. Es ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1 \implies \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le \sqrt{1 - x_3^2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\left|B^{\mathbb{R}^2}_{\sqrt{1-x_3^2}}(0) \times \{x_3\}\right| &= \pi(1 - x_3^3)\\ &= \pi - \pi x_3^3\\ &= \left|\left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{R^2}(0)\right) \times \{x_3\}\right|.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$\left|B^+\right| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3\pi}.$$

□

Frage 1

(1) Definition des Volumens?

(2) Berechnung des Volumens?

(3) Mehrdimensionale Integrale?

(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$
$H \times H \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Satz 1.1 Bessel'sche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Korollar 1.1

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Beweis: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j .$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 \\
&\quad + \left\langle x - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, x - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$
\left\langle \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, \dots \right\rangle = \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle \left\langle e_j, \dots \right\rangle .
$$

Außerdem ist

$$
\begin{aligned}
\left\langle x - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j, e_k \right\rangle &= \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle \left\langle e_j, e_k \right\rangle \\
&= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle e_j \right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^{N} \left\langle x, e_j \right\rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \left\langle e_j, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{N} \left| \left\langle x, e_j \right\rangle \right|^2 .
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Bessel'sche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. □

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall $[0, 1]$ nach $\mathbb{C}$ abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$
H = \{u \in C[0, 1], u(0) = u(1)\}
$$

und definieren

$$
\langle u, v \rangle = \int_0^1 u \cdot \overline{v} dx.
$$

Dann ist

$$
\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^1 |u|^2 \, dx.
$$

Wir definieren

$$
e_j = e^{2\pi i j x}.
$$

Behauptung: $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sind ONS

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi ijx}\overline{e^{2\pi ikx}}dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i(j-k)x}dx \\ &= \begin{cases}1 \text{ falls } j = k \\ \frac{1}{2\pi i(j-k)}\left[e^{2\pi i(j-k)x}\right]_0^1 = 0\end{cases} .\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Bessel'sche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^{M} \left|\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle\right|^2 + \left\|u - \sum_{j=N}^{M}\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle e^{2\pi ijx}\right\|^2 .$$

Lemma 1.1

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\left|\langle f, e^{2\pi ijx}\rangle\right|^2 = \|f\|_H^2 .$$

Satz 1.2

Sei $f \in H$ also stetig auf $[0,1]$ mit $f(1) = f(0)$. Dann ist

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\langle f, e^{2\pi inx}\rangle e^{2\pi inx} = f.$$

Wir definieren $a_j = \langle u, e^{2\pi ijx}\rangle$.

Beweis: Nach der Bessel'schen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\|u - \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}\right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^{N}|a_j|^2 \\ &\to 0 \quad (N \to \infty).\end{aligned}$$

Bemerkung 1.1

H ist nicht vollständig (da beispielsweise eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

Frage 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine quadratsummierbare Folge, sei also

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|^2 < \infty.$$

Ist dann

$$\implies f_N := \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi i j x}.$$

Zwar ist sie in H eine Cauchyfolge, aber H ist nicht vollständig, wie wir sehen werden.

Wir definieren für $f \in H$ den Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \langle f, e_n \rangle$$

und die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

Beweis des Lemmas: Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ($\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$) um:

$$\begin{aligned} D_k(x) :&= \sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i n x} \\ &= e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi i x})^n \\ &= e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i (2k+1) x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\ &= \frac{e^{2\pi i (k+1) x} - e^{-2\pi i k x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{\pi i x (2k+2) - \pi i x} - e^{-2\pi i x k - \pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=-k}^{k} \left\langle f, e^{2\pi i n x} \right\rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^{k} \int_0^1 e^{2\pi i n (x-y)} f(y) dy \\ &= \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned} F_N(x) :&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left(e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - e^{-\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{-2\pi i x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2} \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1)\cdot i\sin(\theta) \\ &= 2i\sin(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix} &= (e^{N\pi ix})^2 - 2\cdot e^{N\pi x}e^{-N\pi ix} + (e^{-N\pi ix})^2 \\ &= (e^{N\pi ix} - e^{-N\pi ix})^2. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit $\theta = N\pi x$ und $\theta = \pi x$ durch Kürzen mit $2i$ der letzte Term.
Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = \int_0^1 D_N(x)dx = 1$, denn

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_N(x)dx &= \int_0^1 \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx}dx + \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 2\cos(2\pi nx)dx + \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i\cdot 0\cdot x}dx \qquad \text{(erster Term fällt wegen ganzer Periode weg)} \\ &= \int_0^1 1dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_N(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 D_k(x) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$, denn $(\sin(\theta))^2 = (\pm\sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$, denn $\sin(N\pi x)^2 \leq 1$

Für $f \in H$ ist aufgrund der Definition

$$\begin{aligned}
f_N(x) :&= \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 D_k(x-y)f(y)dy \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-k}^{k}\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle e^{2\pi inx} && \text{(Identität von vorher)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}(N-|n|)\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle e^{2\pi inx} && \text{(Abzählen)} \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle e^{2\pi inx}.
\end{aligned}$$

Das Abzählen sorgt dafür, dass wie die Summe mit $n = 0$ genau N mal zählen, die für $n = 1, -1$ genau $N-1$ mal zählen und so weiter.
Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_N|^2\,dy &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^2\left|\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle\right|^2 \\
&\le \sum_{n=-N}^{N}\left|\left\langle f, e^{2\pi inx}\right\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \to f(x) \quad (N\to\infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Zunächst ist dabei

$$\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) = \int F_N(x-y)(f(y)-f(x))dx.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es dann $\delta > 0$, so dass $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $|x-y| < \delta$. Sei $x \in [0,1]$. Wir zerlegen

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\
&= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy && \text{(da } \textstyle\int F_N = 1) \\
&= \underbrace{\int_{\delta<|x-y|<1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y|<\delta}\dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y|>1-\delta}\dots dy}_{:=I_3}.
\end{aligned}$$

Das erste Integral ist durch

$$|I_1| \le \frac{1}{N}\frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}\int_0^1 |f(y)|\,dy + |f(x)| \le \frac{2}{N}\,\|f\|_{\sup}\frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

beschränkt. Für das zweite und dritte Integral stellen wir fest

$$\left|\int_{|x-y|<\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dx\right| \le \frac{\varepsilon}{4}\int_0^1 F_N(y)dy = \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\left|\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N}\|f\|_{\sup} \sin^{-2}(\pi\delta) < \varepsilon$$

für große N. Sei nun $f \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es N_0, sodass

$$\left|\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x)\right| < \varepsilon$$

für $N \geq N_0$ und daher $f_N \to f$ gleichmäßig und auch

$$\int_0^1 \left|\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy\right|^2 dx \to \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

Mit den Umformungen zu f_N schließen wir

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &\geq \sum_{n=-N}^{N} |\langle f, e_n\rangle|^2 \\
&\geq \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e_n\rangle|^2 \\
&= \left\|\int_0^1 f_N(x-y)f(y)dy\right\|^2 \to |f|^2 .
\end{aligned}$$

□

Vorlesung vom 10.10.2024

1.3 Der Satz von Banach-Tarski

Gewünschte Eigenschaften eines Volumens

(1) $A \subset \mathbb{R}^d, |A| \in [0,\infty]$

(2) $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$

(3) Invariant unter einer Kongruenzabbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung)

(4) $\left|(0,1)^d\right| = 1$ (Normierung)

Satz 1.3 Banach-Tarski

Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^3, j = 1, \ldots, 6$ und Kongruenzabbildugnen $\varphi_j, j = 1, \ldots, 6$, sodass

(i)

$$B_1(0) = \bigcup_{j=1}^{6} A_j.$$

(ii)

$$B_1(-2e_1) \cup B_1(2e_1) = \bigcup_{j=1}^{6} \varphi_j(A_j).$$

Bemerkung 1.2

Wir werden den Beweis nicht führen, wollen jedoch anmerken, dass er das Auswahlaxiom verwendet.

Konsequenz: Wir können nicht jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ein Volumen mit den gewünschten Eigenschaften zuordnen. Durch Verzicht auf das Auswahlaxiom könnten wir doch jeder Teilmenge ein Volumen zuordnen, haben aber dann andere Probleme.

Kapitel 2

Das Lebesguemaß

2.1 Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß

Definition 2.1: Dyadische Würfel

Wir definieren $Q_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}^d$, $k \in \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$Q_{jk} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d | 2^k j_m \leq x_m < 2^k (j_m + 1), 1 \leq m \leq d \right\}.$$

Q_{jk} ist ein Würfel mit Kantenlänge 2^k und Ecke $2^k \cdot j$.

Eigenschaften:

(i) $Q_{jk} \cap Q_{j'k'} \neq \{\} \implies Q_{jk} \subset Q_{j'k'}$ oder $Q_{j'k'} \subset Q_{jk}$

(ii) Jede offene Menge ist disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln, deren Kantenlänge kleiner als die Distanz zum Komplement (bzw. Rand) ist.

(iii) Das Volumen definieren wir als $\left| Q_{jk} \right| = 2^{k \cdot d}$

Lemma 2.1

Ist Q_{jk} endliche disjunkte Vereinigung

$$Q_{jk} = \bigcup_{k=1}^{N} Q_{j_n k_n}$$

so ist

$$\left| Q_{jk} \right| = \sum_n \left| Q_{j_n k_n} \right|.$$

Beweis: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k'}$$

disjunkte Vereinigung von Würfeln gleicher Kantenlänge.
Es gibt genau $(2^{k-k'})^d$

$$\implies \sum_n \left| Q_{j_n k'} \right| = (2^{k-k'})^d \cdot 2^{k'd} = 2^{kd} = \left| Q_{jk} \right|.$$

2. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ mit } k' = \min_n k_n$$

Zerlege $Q_{j_n k_n}$ zweimal, Fall 1 tritt ein: $|Q_{jk}| = \sum |Q_{j_n k_n}|$

□

Definition 2.2

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Wir nennen eine Folge dyadischer Q_{jk} eine Überdeckung von A, falls

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Wir definieren das äußere Lebesguemaß von A durch

$$m_*^d(A) = \inf \left\{ \sum_n |Q_{j_n k_n}| \middle| A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right\}.$$

Eigenschaften:

(1) Monotonie: $A \subset B \implies m_*^d(A) \leq m_*^d(B)$

(2) Subadditivität:

$$m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Wenn A und B einen positiven Abstand haben, dann gilt

$$m_*^d(A \cup B) = m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Es gilt immer

$$m_*^d\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum_n m_*^d(A_n).$$

(3) Für jede beschränkte Menge A gilt

$$m_*^d(A) < \infty.$$

Beweis: (1) Jede Überdeckung von B überdeckt A.

(2)

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n'} \implies A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n' k_n'}$$

$$\implies m_d^*(A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |j_n k_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n' k_n'}|$$

$$\text{und } m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Abstand von $A, B > 0$: genügt. Würfel mit Kantenlänge $< \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot$ Abstand. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ genauso wie im ersten Fall

(3) Jede beschränkte Menge liegt in der Vereinigung von 2^d dyadischen Würfeln.

□

Vorlesung vom 15.10.2024

Satz 2.2

Für jede disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}$$

gilt

$$m_*\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) = \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

Beweis: Wir wissen

$$m_*^d\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) \leq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|$$

nach Definition. Zu zeigen:

$$m_*^d\left(\bigcup_n Q_{j_n k_n}\right) \geq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

1. Fall: Ein Würfel Q_{jk}, $m^*(Q_{jk}) = 2^{kd}$.
   Für endliche Überdeckung: Lemma 2.1

   $$Q_{jk} \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ ohne Einschränkung: } Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n n_k} \text{ disjunkt }.$$

   Zu zeigen: $\left|Q_{jk}\right| \leq \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|$

   $$\implies m_*^d(Q_{jk}) = \inf\left\{\sum \ldots\right\}.$$

   Sei $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

   $$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jk} &= \left\{x | 2^k j_l \leq x_l \leq 2^k(j_l + 1 - 2^{-m})\right\} \text{ abgeschlossen, beschränkt } \implies \text{ kompakt} \\ Q_{j_n,k_n} \subset Q^m_{j_n k_n} &= \left\{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 2^{-m}) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\right\} \text{ offen} \end{aligned}$$

   Es gilt

   $$\implies \tilde{Q}_{jl} \subset Q_{jl} \subset \bigcup_n Q_{j_n,k_n} \subset \bigcup_n Q^m_{j_n,k_n}.$$

   Die kompakte Menge $\tilde{Q}_{jl}$ wird also durch offene Mengen überdeckt. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

   $$\implies \exists N : \tilde{Q}_{jl} \subseteq \bigcup_{n=1}^N Q^m_{j_n,k_n}.$$

   Nach Lemma 2.1 kleinste Kantenlänge, zählen.

   $$\begin{aligned} \text{Für } \tilde{Q}_{j,k} : (2^m - 1)^d 2^{(k-m)d} &\leq (2^m + 1)^d \sum_{n=0}^N 2^{(k_n - m)d} \\ \left|Q_{jk}\right| &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}}\right)^d \sum_{n=1}^\infty \left|Q_{j_n k_n}\right| \\ &\leq \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-n}}\right)^d m_*^d(Q_{jn}) \forall m \geq 1, \implies \left|Q_{jn}\right| \leq m^*(Q_{jn}). \end{aligned}$$

   Die letzten Schritte ergeben sich, indem das Infimum über alle Zerlegungen betrachtet wird. Die Ungleichung gilt damit für jede Überdeckung.

2. Fall:

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Es folgt für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left|Q_{j_n k_n}\right| &= m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) && \text{(1. Fall)}\\ &\leq m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(Q_{j_n k_n})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right|.\end{aligned}$$

Wir haben den ersten Fall auf endlich viele disjunkte Würfel angewendet, da das Argument für einen Würfel auch diesen Fall abdeckt.
Schließlich gilt

$$N \to \infty \implies m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right|.$$

□

2.2 Messbare Mengen

Definition 2.3

Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U existiert mit $A \subseteq U$ und $m^*(U \backslash A) < \varepsilon$.

Eigenschaften:

(1) Offene Mengen sind messbar,

Beweis:

$$m_*^d(\{\}) = 0.$$

□

(2) Nullmengen: $m_*^d(A) = 0 \implies A$ messbar

Beweis: Falls

$$\begin{aligned} m_*^d(A) = 0, \varepsilon > 0 &\implies \exists Q_{j_n k_n} \text{ mit } A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}, \sum \left|Q_{j_n k_n}\right| < 2^{-d}\varepsilon.\\ \tilde{Q}_{j_n k_n} &= \left\{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 1) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\right\}\\ &\implies A \subset \bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}, m_*^d(\tilde{Q}_{j_n k_n}) \leq 2^d \left|Q_{j_n k_n}\right|\\ m_*^d\left(\bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}\right) &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

(3) abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: A_n seien messbar, $\varepsilon > 0$, U_n offen, $A_n \subset U_n$, $m_*^d(U_n \setminus A_n) < 2^{-1-n}\varepsilon$.

$$\begin{aligned} m_*^d\left(\bigcup U_n \Big\backslash \bigcup A_n\right) &\leq m_*^d\left(\bigcup (U_n \setminus A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_*^d(U_n \setminus A_n) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(4) Abgeschlossene Mengen sind messbar.

Beweis: Wegen (3) genügt es, A kompakt zu betrachten. Sei $\varepsilon > 0$, U offen, $A \subset U$ mit $m_*^d(U) \leq m_*^d(A) + \varepsilon$.

$$A = \bigcup_n \left(\overline{B_n(o)} \cap A\right).$$

Siehe Beweis von Satz 2.2: $\exists Q_{j_n k_n}, Q^m_{j_n k_n}, A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}$ mit

$$\sum \left|Q_{j_n k_n}\right| \leq m_*^d(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

A kompakt $\implies V = U \setminus A$ offen

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt, Abstand zu Komplement} \\ &> 2^{k_n} \implies \text{ positive Distanz zu } A. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \implies m_*^d(A) + \varepsilon &\geq m_*^d(U) \\ &\geq m_*^d\left(A \cup \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) && \text{(positiver Abstand)} \\ &= m_*^d(A) + m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \\ &= m_*^d(A) + \sum_{n=1}^{N} \left|Q_{j_n k_n}\right| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right| &\leq \varepsilon \\ m^*(V) &= m^*(U \setminus A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|Q_{j_n k_n}\right| && \text{(wegen 2.2)} \\ &\leq \varepsilon \\ \implies \text{ messbar }. \end{aligned}$$

□

(5) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.

Beweis: Sei A messbar, $A \subset U_n$ offen, $m_*^d(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$.
$\mathbb{R}^d \setminus U_n$ ist abgeschlossen, messbar nach (4)

$$\implies S = \bigcup_n (\mathbb{R}^d \setminus U_n) \subset \mathbb{R}^d \setminus A \text{ messbar}$$
$$T = (\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S \subset U_n \setminus A \; \forall n$$
$$\implies m_*^d((\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S) < \frac{1}{n}$$
$$\implies T \text{ Nullmenge, messbar .}$$

$\implies \mathbb{R}^d \setminus A = S \cup T$ messbar als Vereinigung zweier Messbarer Mengen □

(6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar.

Beweis: Zweimal Komplemente, abzählbare Vereinigungen. □

Bemerkung 2.1

Solange das Auswahlaxiom nicht genutzt wird, kann man keine nicht messbaren Mengen konstruieren.

Satz 2.3

(1) Die (Lebesgue)-messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra, d.h.

- die leere Menge ist messbar,
- Komplemente und abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar

(2) σ-Additivität: Sind E_n messbare disjunkte Mengen, so gilt

$$m_*^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n)$$
$$m_*^d(\emptyset) = 0.$$

Beweis:

Bemerkung 2.2

(1) haben wir bereits gesehen.

Zunächst seinen E_n beschränkt, $\varepsilon > 0, \mathbb{R}^d \setminus E_n$ messbar $\implies \exists U_n$ offen mit $m_*^d(U_n \setminus (\mathbb{R}^d \setminus E_n)) < 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \implies \mathbb{R}^d \setminus U_n =: F_n \subset E_n$ abgeschlossen mit

$$m_*^d(E_n \setminus F_n) < 2^{-n-1} \cdot \varepsilon.$$

Die Mengen F_n sind disjunkt und kompakt

$$\implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) \geq m_*^d\left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) \|$$
$$= \sum_{n=0} m_*^d(F_n) \qquad \text{(positiver Abstand)}$$
$$\geq \sum_{n=0}^{N} m_*^d(E_n) - \varepsilon$$
$$\implies m_*^d\left(\bigcup_n E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt immer

$$\implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) = \sum m_*^d(E_n) \text{ für } E_n \text{ beschränkt.}$$

Im Allgeminen Fall setzen wir

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_n \cap (B_{m+1}(0)\backslash B_m(0)) \\ \implies m_*^d\left(\bigcup E_n\right) &= \sum_{n,m} m_*^d(E_{n,m}) \\ m_*^d(E_n) &= \sum_m m_*^d(E_{n,m}) \end{aligned}$$

.

□

Vorlesung vom 17.10.2024

Definition 2.4

Wir nennen messbare Mengen Lebesguemengen. Wir definieren das Lebesguemaß m^d als die Einschränkung von m_*^dauf die Lebesguemengen.

Lemma 2.4

Seien E_n messbar, $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_n E_n$ ist messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_n).$$

Ist $E_{n+1} \subset E_n$ und $m^d(E_n) < \infty$ für ein n, so gilt $E = \cap E_n$ messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_n).$$

Beweis: (1) $E_0 = \emptyset$, $F_n = E_{n+1}\backslash E_n$ disjunkt. Für messbar, disjunkt

$$E = \bigcup F_n \implies m^d(E) = \sum_n m^d(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N m^d(F_n) = \lim_{N\to\infty} m^d(E_N).$$

(2) $E_{n+1} \subset E_n, m^d(E_n) < \infty$

$$m^d(E_0\backslash E) = m^d(E_0) - m^d(E_n) = \lim_{n\to\infty} m^d(E_0\backslash E_n) = m^d(E_0) - \lim_{n\to\infty} E_n.$$

□

Satz 2.5 Regularität des Lebesguemaßes

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue, $\varepsilon > 0$.
Dann gilt:

(1) $\exists U$ offen: $A \subset U, m^d(U\backslash A) < \varepsilon$

(2) $\exists B$ abgeschlossen: $B \subset A, m^d(A\backslash B) < \varepsilon$

(3) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert $K \subset A$ kompakt mit $m^d(A\backslash K) < \varepsilon$.

(4) Ist $m^d(A) < \infty$, so existiert eine endliche disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n},$$

sodass die symmetrische Differenz $A \triangle F := (A \cup F)\backslash(A \cap F)$ die Ungleichung $m^d(A \triangle F) < \varepsilon$ erfüllt.

Beweis: (1) Haben wir gesehen

(2) Haben wir gesehen

(3) Sei B wie in (")

$$K_n = B \cap \overline{B_n(o)} \implies B = \bigcup K_n.$$

K_n kompakt: Lemma 2.4:

$$m^d(B) = \lim_{n\to\infty} m^d(K_n) \implies \lim_{n\to\infty} m^d(B\backslash K_n) = 0.$$

(4) U wie in (1).

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt} \\ &\implies m^d(U) = \lim_{N\to\infty} m^d\left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \\ &\implies \exists N : m^d\left(U \backslash \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $m^d(A) < \infty \implies m^d(U) < \infty$. Also gilt

$$A \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \subset (U\backslash A) \cup \left(U \backslash \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}\right) \implies m^d(A \triangle F) < 2\varepsilon.$$

□

Satz 2.6 Transformationseigenschaften unter affinen Abbildungen
Sei $\varphi : x \longrightarrow Ax + b$ eine affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$. Für $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$m_*^d(\varphi(E)) = |\det A|\, m_*^d(E).$$

E messbar $\implies \varphi(E)$ messbar

Beweis: Jede Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen (vertauschen Zeilen, multiplizieren Zeilen, ziehen Vielfache von Zeilen voneinander ab). Es genügt, Elementarmatrizen zu betrachten.

1) Translation ($A = 1$). Es genügt, Translation in eine Koordinatenrichtung zu betrachten.

$$m_d^*(\varphi(E)) \leq \sum_n m_d^*(\varphi(Q_{j_n k_n})) \text{ für } E \subset Q_{j_n k_n}.$$

Es genügt, die Abschätzung für $E = Q_{jk}$ zu zeigen

$$\implies \leq |\det A| \sum_n \left|Q_{j_n k_n}\right|$$
$$\implies m_d^*(\varphi(E)) \leq |\det A| \, m_d^{*A(E)}.$$

A invers $\implies \geq \implies =$, $\det A = 0 \implies$ fertig
Zu zeigen: $m_d^*(Q_{jk} + ke_1) = m_d^*(Q_{jk}) = \left|Q_{jk}\right|$
für $d = 1$ wird $0, 1$ auf $k, k+1$ gemappt. Überdecken durch dyadische Würfel der Länge 2^m, $m < k$

$$2^{k(d-1)}((2^{k-m} - 1)2^m) \leq m_*^d(Q_{jk} + ke_1) \qquad \leq 2^{k(d-1)}(2^{k-m} + 1)2^m (= 2^{kd}), m \to -\infty.$$

Anzahl der Würfel der Kantenlänge 2^m in dem vorhandenen Würfel $Q + ke_1$:

$$2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} - 1) \text{ enthalten } 2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} + 1) \text{ Würfel der } 2^m \text{ enthalten } Q + ke_1.$$

2)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \geq 0$. Genügt: $d = 1$, $Q_{0,k}$, $2^m < \lambda 2^k$

$$\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \lambda \rfloor}_{\to 2^k} \cdot 2^m \leq \underbrace{m^*(Q_{0,k})}_{m \to \infty} \leq \left(\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \cdot \lambda \rfloor}_{2^k} + 1 \right) 2^m.$$

3)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & h & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Genügt $d = 2$.
Maximal $2(\lfloor k \rfloor + 1) \cdot 2^{k-m}$ Würfel schneiden $\varphi(Q_{jk})$, aber sind nicht Teilmenge; zähle

$$m_*^d(\varphi(Q_{jk})) = \left|Q_{jk}\right|.$$

4) Permutationen, $Q_{jk} \to Q_{j,k} = \varphi(Q_{j,k})$

$$\implies \varphi = Ax + b, m_*^d(\varphi(E)) = m_*^d(E) = m_*^d(E) \, |\det(A)| \, .$$

E messbar, $\det A = 0 \implies m_*^d(\varphi(E)) = 0 \implies$ Nullmenge, messbar, $\det A \neq 0$, U offen $\implies \varphi(U)$ offen, (Umkehrabbildung ist affin $\implies$ stetig, Urbilder offener MEngen sind offen)

$$U \supset E, m_*^d(\varphi(U) \backslash \varphi(E)) = m_*^d(\varphi(U \backslash E)) = |\det A| \, m_*^d(U \backslash E).$$

$\square$

2.3 Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes

Definition 2.5: σ-Algebra

sei X eine Menge. Eine σ-Algebra ist eine Familie von Teilmengen

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{P}(X),$$

sodass

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$

(2) $A \in \mathcal{A}(X) \implies X \setminus A \in \mathcal{A}(X)$

(3) $A_n \in \mathcal{A}(X) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$

Bemerkung 2.3

Lebesguemengen bilden eine σ-Algebra

Beispiel 2.1

1) $\mathcal{P}(X)$

2) $\{\emptyset, X\}$

3) (X, d) metrischer Raum.
$\mathcal{B}(X)$ ist die σ-Algebra der Borelmengen, die von den offenen Mengen erzeugt wird, d.h. die kleinest e σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.
Zur Konstruktion:

- $\mathcal{P}(X)$ enthält jede offene Menge
- $\mathcal{B}(X) = \{A \subset X | A \text{ ist in jeder } \sigma - \text{Algebra enthalten,d ie alle offenen Mengen enthält}\}$.