

# Analysis III

Arthur Henninger

21. Oktober 2024

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>KAPITEL 1</b>	<b>EINFÜHRUNG</b>	<b>SEITE 2</b>
1.1	Formeln	2
1.2	Fourierreihen und euklidische Vektorräume	3
1.3	Der Satz von Banach-Tarski	9
<b>KAPITEL 2</b>	<b>DAS LEBESGUEMASS</b>	<b>SEITE 11</b>
2.1	Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß	11
2.2	Messbare Mengen	14
2.3	Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes	20

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Formeln

#### Beispiel 1.1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} \\ |B_r^{\mathbb{R}^2}(0)| &= \pi r^2 \\ |B_r^{\mathbb{R}^3}(0)| &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ |B_r^{\mathbb{R}^d}(0)| &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.\end{aligned}$$

**Beweis der Kugelformel:** Archimedes:  $d = 3$ , Halbkugel:  $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\}$

Zylinder  $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$

Kegel  $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$

Es ist

$$\begin{aligned}|Z| &= \pi && \text{(Höhe mal Grundfläche)} \\ |C| &= \frac{1}{3} \pi. && \left( \frac{1}{3} \text{ Höhe mal Grundfläche} \right)\end{aligned}$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe  $x_3$  in der Halbkugel. Es ist  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \implies \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1 - x_3^2}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\left| B_{\sqrt{1-x_3^2}}^{\mathbb{R}^2}(0) \times \{x_3\} \right| &= \pi(1 - x_3^2) \\ &= \pi - \pi x_3^2 \\ &= \left| \left( B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{\mathbb{R}^2}(0) \right) \times \{x_3\} \right|.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$|B^+| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi.$$

□

## Frage 1

- (1) Definition des Volumens?
- (2) Berechnung des Volumens?
- (3) Mehrdimensionale Integrale?
- (4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

## 1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei  $H$  euklidischer VR: Skalarprodukt  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$

$H \times H \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  so dass immer gilt:

- i)  $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$
- ii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm:  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

### Definition 1.1

Eine Folge  $e_n$  von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

### Satz 1.1 Bessel'sche Gleichung

$$\sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2.$$

### Korollar 1.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Beweis:** Sei  $(e_j)$  ein ONS,  $x \in H, N \in \mathbb{N}$ . Es ist

$$x = \left( x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| \left( x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &\quad + \left\langle x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, \dots \right\rangle = \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle \langle e_j, \dots \rangle.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle &= \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=0}^N \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^N \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^N |\langle x, e_j \rangle|^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Bessel'sche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung.  $\square$

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{C}$  abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$H = \{u \in C[0, 1], u(0) = u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u \cdot \bar{v} dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^1 |u|^2 dx.$$

Wir definieren

$$e_j = e^{2\pi i j x}.$$

Behauptung:  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sind ONS

**Beweis:**

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i j x} \overline{e^{2\pi i k x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (j-k)x} dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ \frac{1}{2\pi i (j-k)} \left[ e^{2\pi i (j-k)x} \right]_0^1 = 0 & \end{cases} \quad .\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Bessel'sche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^M |\langle u, e^{2\pi i j x} \rangle|^2 + \left\| u - \sum_{j=N}^M \langle u, e^{2\pi i j x} \rangle e^{2\pi i j x} \right\|^2.$$

### Lemma 1.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=-N}^N |\langle f, e^{2\pi i j x} \rangle|^2 = \|f\|_H^2.$$

### Satz 1.2

Sei  $f \in H$  also stetig auf  $[0, 1]$  mit  $f(1) = f(0)$ . Dann ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} = f.$$

Wir definieren  $a_j = \langle u, e^{2\pi i j x} \rangle$ .

**Beweis:** Nach der Bessel'schen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\| u - \sum_{j=-N}^N a_j e^{2\pi i j x} \right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^N |a_j|^2 \\ &\rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

### Bemerkung 1.1

$H$  ist nicht vollständig (da beispielsweise eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

### Frage 2

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  eine quadratsummierbare Folge, sei also

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^2 < \infty.$$

Ist dann

$$\Rightarrow f_N := \sum_{j=-N}^N a_j e^{2\pi i j x}.$$

Zwar ist sie in  $H$  eine Cauchyfolge, aber  $H$  ist nicht vollständig, wie wir sehen werden.

Wir definieren für  $f \in H$  den Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \langle f, e_n \rangle$$

und die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

**Beweis des Lemmas:** Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ( $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ ) um:

$$\begin{aligned} D_k(x) &:= \sum_{n=-k}^k e^{2\pi i n x} \\ &= e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi i x})^n \\ &= e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i (2k+1)x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\ &= \frac{e^{2\pi i (k+1)x} - e^{-2\pi i k x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{\pi i x (2k+2) - \pi i x} - e^{-2\pi i k x - \pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=-k}^k \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^k \int_0^1 e^{2\pi i n (x-y)} f(y) dy \\ &= \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned} F_N(x) &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left( e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - e^{-\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{-2\pi i x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2} \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1) \cdot i \sin(\theta) \\ &= 2i \sin(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix} &= (e^{N\pi ix})^2 - 2 \cdot e^{N\pi ix} e^{-N\pi ix} + (e^{-N\pi ix})^2 \\ &= (e^{N\pi ix} - e^{-N\pi ix})^2. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit  $\theta = N\pi x$  und  $\theta = \pi x$  durch Kürzen mit  $2i$  der letzte Term. Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

$$(1) F_N(x) \geq 0$$

$$(2) \int_0^1 F_N(x) dx = \int_0^1 D_N(x) dx = 1, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_N(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 e^{2\pi i n x} + e^{-2\pi i n x} dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 2 \cos(2\pi n x) dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \quad (\text{erster Term fällt wegen ganzer Periode weg}) \\ &= \int_0^1 1 dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_N(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$(3) F_N(x+1) = F_N(x), \text{ denn } (\sin(\theta))^2 = (\pm \sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$$

$$(4) \text{ Für } 0 < x < 1 \text{ gilt } |F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}, \text{ denn } \sin(N\pi x)^2 \leq 1$$



Für  $f \in H$  ist aufgrund der Definition

$$\begin{aligned}
 f_N(x) &:= \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x-y)f(y)dy \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-k}^k \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Identität von vorher)} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N (N-|n|) \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} && \text{(Abzählen)} \\
 &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x}.
 \end{aligned}$$

Das Abzählen sorgt dafür, dass wie die Summe mit  $n = 0$  genau  $N$  mal zählen, die für  $n = 1, -1$  genau  $N - 1$  mal zählen und so weiter.

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |f_N|^2 dy &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle|^2 \\
 &\leq \sum_{n=-N}^N |\langle f, e^{2\pi i n x} \rangle|^2.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \rightarrow f(x) \quad (N \rightarrow \infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Zunächst ist dabei

$$\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) = \int F_N(x-y)(f(y) - f(x))dx.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  gibt es dann  $\delta > 0$ , so dass  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$  für  $|x - y| < \delta$ . Sei  $x \in [0, 1]$ . Wir zerlegen

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\
 &= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y) - f(x))dy && \text{(da } \int F_N = 1) \\
 &= \underbrace{\int_{\delta < |x-y| < 1-\delta} F_N(x-y)(f(y) - f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y| < \delta} \dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y| > 1-\delta} \dots dy}_{:=I_3}.
 \end{aligned}$$

Das erste Integral ist durch

$$|I_1| \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2} \int_0^1 |f(y)| dy + |f(x)| \leq \frac{2}{N} \|f\|_{\sup} \frac{1}{\sin(\pi\delta)^2}.$$

beschränkt. Für das zweite und dritte Integral stellen wir fest

$$\left| \int_{|x-y| < \delta} F_N(x-y)(f(y) - f(x))dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 F_N(y)dy = \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N} \|f\|_{\sup} \sin^{-2}(\pi\delta) < \varepsilon$$

für große  $N$ . Sei nun  $f \in H$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $N_0$ , sodass

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| < \varepsilon$$

für  $N \geq N_0$  und daher  $f_N \rightarrow f$  gleichmäßig und auch

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \right|^2 dx \rightarrow \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Mit den Umformungen zu  $f_N$  schließen wir

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geq \sum_{n=-N}^N |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &\geq \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ &= \left\| \int_0^1 f_N(x-y)f(y)dy \right\|^2 \rightarrow \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

### Vorlesung vom 10.10.2024

## 1.3 Der Satz von Banach-Tarski

Gewünschte Eigenschaften eines Volumens

- (1)  $A \subset \mathbb{R}^d, |A| \in [0, \infty]$
- (2)  $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$
- (3) Invariant unter einer Kongruenzabbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung)
- (4)  $|(0, 1)^d| = 1$  (Normierung)

### Satz 1.3 Banach-Tarski

Es existieren paarweise disjunkte Mengen  $A_j \subset \mathbb{R}^3, j = 1, \dots, 6$  und Kongruenzabbildungen  $\varphi_j, j = 1, \dots, 6$ , sodass

(i)

$$B_1(0) = \bigcup_{j=1}^6 A_j.$$

(ii)

$$B_1(-2e_1) \cup B_1(2e_1) = \bigcup_{j=1}^6 \varphi_j(A_j).$$

**Bemerkung 1.2**

Wir werden den Beweis nicht führen, wollen jedoch anmerken, dass er das Auswahlaxiom verwendet.

Konsequenz: Wir können nicht jeder Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ein Volumen mit den gewünschten Eigenschaften zuordnen. Durch Verzicht auf das Auswahlaxiom könnten wir doch jeder Teilmenge ein Volumen zuordnen, haben aber dann andere Probleme.

# Kapitel 2

## Das Lebesguemaß

### 2.1 Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß

#### Definition 2.1: Dyadische Würfel

Wir definieren  $Q_{j,k}, j \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}$  wie folgt:

$$Q_{jk} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2^k j_m \leq x_m < 2^k(j_m + 1), 1 \leq m \leq d\}.$$

$Q_{jk}$  ist ein Würfel mit Kantenlänge  $2^k$  und Ecke  $2^k \cdot j$ .

Eigenschaften:

- (i)  $Q_{jk} \cap Q_{j'k'} \neq \{\} \implies Q_{jk} \subset Q_{j'k'}$  oder  $Q_{j'k'} \subset Q_{jk}$
- (ii) Jede offene Menge ist disjunkte Vereinigung von dyadischen Würfeln, deren Kantenlänge kleiner als die Distanz zum Komplement (bzw. Rand) ist.
- (iii) Das Volumen definieren wir als  $|Q_{jk}| = 2^{k \cdot d}$

#### Lemma 2.1

Ist  $Q_{jk}$  endliche disjunkte Vereinigung

$$Q_{jk} = \bigcup_{k=1}^N Q_{j_n k_n}$$

so ist

$$|Q_{jk}| = \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

**Beweis:** Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k'}$$

disjunkte Vereinigung von Würfeln gleicher Kantenlänge.  
Es gibt genau  $(2^{k-k'})^d$

$$\implies \sum_n |Q_{j_n k'}| = (2^{k-k'})^d \cdot 2^{k'd} = 2^{kd} = |Q_{jk}|.$$

2. Fall:

$$Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ mit } k' = \min_n k_n$$

Zerlege  $Q_{j_n k_n}$  zweimal, Fall 1 tritt ein:  $|Q_{jk}| = \sum |Q_{j_n k_n}|$

□

### Definition 2.2

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Wir nennen eine Folge dyadischer  $Q_{jk}$  eine Überdeckung von  $A$ , falls

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Wir definieren das äußere Lebesguemaß von  $A$  durch

$$m_*^d(A) = \inf \left\{ \sum_n |Q_{j_n k_n}| \mid A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right\}.$$

Eigenschaften:

(1) Monotonie:  $A \subset B \implies m_*^d(A) \leq m_*^d(B)$

(2) Subadditivität:

$$m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Wenn  $A$  und  $B$  einen positiven Abstand haben, dann gilt

$$m_*^d(A \cup B) = m_*^d(A) + m_*^d(B).$$

Es gilt immer

$$m_*^d\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_*^d(A_n).$$

(3) Für jede beschränkte Menge  $A$  gilt

$$m_*^d(A) < \infty.$$

**Beweis:** (1) Jede Überdeckung von  $B$  überdeckt  $A$ .

(2)

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j'_n k'_n} &\implies A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j'_n k'_n} \\ &\implies m_*^d(A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j'_n k'_n}| \\ &\text{und } m_*^d(A \cup B) \leq m_*^d(A) + m_*^d(B). \end{aligned}$$

Abstand von  $A, B > 0$ : genügt. Würfel mit Kantenlänge  $< \frac{1}{2\sqrt{d}} \cdot \text{ABSTAND}$ .  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  genauso wie im ersten Fall

(3) Jede beschränkte Menge liegt in der Vereinigung von  $2^d$  dyadischen Würfeln.

□

**Satz 2.2**

Für jede disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}$$

gilt

$$m_* \left( \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) = \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

**Beweis:** Wir wissen

$$m_*^d \left( \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) \leq \sum_n |Q_{j_n k_n}|$$

nach Definition. Zu zeigen:

$$m_*^d \left( \bigcup_n Q_{j_n k_n} \right) \geq \sum_n |Q_{j_n k_n}|.$$

1. Fall: Ein Würfel  $Q_{jk}$ ,  $m^*(Q_{jk}) = 2^{kd}$ .

Für endliche Überdeckung: Lemma 2.1

$$Q_{jk} \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ ohne Einschränkung: } Q_{jk} = \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt.}$$

$$\text{Zu zeigen: } |Q_{jk}| \leq \sum_n |Q_{j_n k_n}|$$

$$\implies m_*^d(Q_{jk}) = \inf \left\{ \sum \dots \right\}.$$

Sei  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jk} &= \{x | 2^k j_l \leq x_l \leq 2^k(j_l + 1 - 2^{-m})\} \text{ abgeschlossen, beschränkt} \implies \text{kompakt} \\ Q_{j_n, k_n} &\subset Q_{j_n, k_n}^m = \{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 2^{-m}) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\} \text{ offen} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\implies \tilde{Q}_{jl} \subset Q_{jl} \subset \bigcup_n Q_{j_n, k_n} \subset \bigcup_n Q_{j_n, k_n}^m.$$

Die kompakte Menge  $\tilde{Q}_{jl}$  wird also durch offene Mengen überdeckt. Folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

$$\implies \exists N : \tilde{Q}_{jl} \subseteq \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n, k_n}^m.$$

Nach Lemma 2.1 kleinste Kantenlänge, zählen.

$$\text{Für } \tilde{Q}_{j,k} : (2^m - 1)^d 2^{(k-m)d} \leq (2^m + 1)^d \sum_{n=0}^N 2^{(k_n-m)d}$$

$$\begin{aligned} |Q_{jk}| &\leq \left( \frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}} \right)^d \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| \\ &\leq \left( \frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-n}} \right)^d m_*^d(Q_{jn}) \forall m \geq 1, \implies |Q_{jn}| \leq m^*(Q_{jn}). \end{aligned}$$

Die letzten Schritte ergeben sich, indem das Infimum über alle Zerlegungen betrachtet wird. Die Ungleichung gilt damit für jede Überdeckung.

2. Fall:

$$\bigcup_n Q_{j_n k_n}.$$

Es folgt für  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |Q_{j_n k_n}| &= m_*^d \left( \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) \\ &\leq m_*^d \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(Q_{j_n k_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|. \end{aligned} \tag{1. Fall}$$

Wir haben den ersten Fall auf endlich viele disjunkte Würfel angewendet, da das Argument für einen Würfel auch diesen Fall abdeckt.

Schließlich gilt

$$N \rightarrow \infty \implies m_*^d \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|.$$

□

## 2.2 Messbare Mengen

### Definition 2.3

Wir nennen  $A \subset \mathbb{R}^d$  messbar, falls für alle  $\varepsilon > 0$  eine offene Menge  $U$  existiert mit  $A \subseteq U$  und  $m^*(U \setminus A) < \varepsilon$ .

Eigenschaften:

- (1) Offene Mengen sind messbar,

**Beweis:**

$$m_*^d(\{\}) = 0.$$

□

- (2) Nullmengen:  $m_*^d(A) = 0 \implies A$  messbar

**Beweis:** Falls

$$\begin{aligned} m_*^d(A) = 0, \varepsilon > 0 &\implies \exists Q_{j_n k_n} \text{ mit } A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}, \sum |Q_{j_n k_n}| < 2^{-d} \varepsilon. \\ \tilde{Q}_{j_n k_n} &= \{x | 2^{k_n}(j_{n,l} - 1) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\} \\ &\implies A \subset \bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n}, m_*^d(\tilde{Q}_{j_n k_n}) \leq 2^d |Q_{j_n k_n}| \\ m_*^d \left( \bigcup \tilde{Q}_{j_n k_n} \right) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

- (3) abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

**Beweis:**  $A_n$  seien messbar,  $\varepsilon > 0$ ,  $U_n$  offen,  $A_n \subset U_n$ ,  $m_*^d(U_n \setminus A_n) < 2^{-1-n} \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} m_*^d \left( \bigcup U_n \setminus \bigcup A_n \right) &\leq m_*^d \left( \bigcup (U_n \setminus A_n) \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_*^d(U_n \setminus A_n) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

(4) Abgeschlossene Mengen sind messbar.

**Beweis:** Wegen (3) genügt es,  $A$  kompakt zu betrachten. Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $U$  offen,  $A \subset U$  mit  $m_*^d(U) \leq m_*^d(A) + \varepsilon$ .

$$A = \bigcup_n \left( \overline{B_n(o)} \cap A \right).$$

Siehe Beweis von Satz 2.2:  $\exists Q_{j_n k_n}, Q_{j_n k_n}^m, A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}$  mit

$$\sum |Q_{j_n k_n}| \leq m_*^d(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$A$  kompakt  $\implies V = U \setminus A$  offen

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt, Abstand zu Komplement} \\ &> 2^{k_n} \implies \text{positive Distanz zu } A. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \implies m_*^d(A) + \varepsilon &\geq m_*^d(U) \\ &\geq m_*^d \left( A \cup \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) && \text{(positiver Abstand)} \\ &= m_*^d(A) + m_*^d \left( \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n} \right) \\ &= m_*^d(A) + \sum_{n=1}^N |Q_{j_n k_n}| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| &\leq \varepsilon \\ m^*(V) &= m^*(U \setminus A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{j_n k_n}| && \text{(wegen 2.2)} \\ &\leq \varepsilon \\ \implies \text{messbar.} \end{aligned}$$

□

(5) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.



**Beweis:** Sei  $A$  messbar,  $A \subset U_n$  offen,  $m_*^d(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ .  
 $\mathbb{R}^d \setminus U_n$  ist abgeschlossen, messbar nach (4)

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \bigcup_n (\mathbb{R}^d \setminus U_n) \subset \mathbb{R}^d \setminus A \text{ messbar} \\ T &= (\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S \subset U_n \setminus A \forall n \\ \Rightarrow m_*^d((\mathbb{R}^d \setminus A) \setminus S) &< \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow T \text{ Nullmenge, messbar.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus A = S \cup T$  messbar als Vereinigung zweier Messbarer Mengen □

(6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar.

**Beweis:** Zweimal Komplemente, abzählbare Vereinigungen. □

#### Bemerkung 2.1

Solange das Auswahlaxiom nicht genutzt wird, kann man keine nicht messbaren Mengen konstruieren.

#### Satz 2.3

- (1) Die (Lebesgue)-messbaren Mengen bilden eine  $\sigma$ -Algebra, d.h.
  - die leere Menge ist messbar,
  - Komplemente und abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar
- (2)  $\sigma$ -Additivität: Sind  $E_n$  messbare disjunkte Mengen, so gilt

$$\begin{aligned} m_*^d \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n) \\ m_*^d(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

**Beweis:**

#### Bemerkung 2.2

(1) haben wir bereits gesehen.

Zunächst seien  $E_n$  beschränkt,  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbb{R}^d \setminus E_n$  messbar  $\Rightarrow \exists U_n$  offen mit  $m_*^d(U_n \setminus (\mathbb{R}^d \setminus E_n)) < 2^{-1-n} \cdot \varepsilon \Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus U_n =: F_n \subset E_n$  abgeschlossen mit

$$m_*^d(E_n \setminus F_n) < 2^{-n-1} \cdot \varepsilon.$$

Die Mengen  $F_n$  sind disjunkt und kompakt

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_*^d \left( \bigcup E_n \right) &\geq m_*^d \left( \bigcup_{n=0}^N F_n \right) \parallel \\ &= \sum_{n=0}^N m_*^d(F_n) && \text{(positiver Abstand)} \\ &\geq \sum_{n=0}^N m_*^d(E_n) - \varepsilon \\ \Rightarrow m_*^d \left( \bigcup_n E_n \right) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*^d(E_n). \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt immer

$$\Rightarrow m_*^d\left(\bigcup E_n\right) = \sum m_*^d(E_n) \text{ für } E_n \text{ beschränkt.}$$

Im Allgemeinen Fall setzen wir

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_n \cap (B_{m+1}(0) \setminus B_m(0)) \\ \Rightarrow m_*^d\left(\bigcup E_n\right) &= \sum_{n,m} m_*^d(E_{n,m}) \\ m_*^d(E_n) &= \sum_m m_*^d(E_{n,m}) \end{aligned}$$

□

### Vorlesung vom 17.10.2024

#### Definition 2.4

Wir nennen messbare Mengen Lebesguemengen. Wir definieren das Lebesguemaß  $m^d$  als die Einschränkung von  $m_*^d$  auf die Lebesguemengen.

#### Lemma 2.4

Seien  $E_n$  messbar,  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $E = \bigcup_n E_n$  ist messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

Ist  $E_{n+1} \subset E_n$  und  $m^d(E_n) < \infty$  für ein  $n$ , so gilt  $E = \bigcap_n E_n$  messbar und

$$m^d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

**Beweis:** (1)  $E_0 = \emptyset$ ,  $F_n = E_{n+1} \setminus E_n$  disjunkt. Für messbar, disjunkt

$$E = \bigcup F_n \Rightarrow m^d(E) = \sum_n m^d(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N m^d(F_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^d(E_N).$$

(2)  $E_{n+1} \subset E_n$ ,  $m^d(E_n) < \infty$

$$m^d(E_0 \setminus E) = m^d(E_0) - m^d(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_0 \setminus E_n) = m^d(E_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(E_n).$$

□

#### Satz 2.5 Regularität des Lebesguemaßes

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue,  $\varepsilon > 0$ .

Dann gilt:

- (1)  $\exists U$  offen:  $A \subset U$ ,  $m^d(U \setminus A) < \varepsilon$
- (2)  $\exists B$  abgeschlossen:  $B \subset A$ ,  $m^d(A \setminus B) < \varepsilon$

(3) Ist  $m^d(A) < \infty$ , so existiert  $K \subset A$  kompakt mit  $m^d(A \setminus K) < \varepsilon$ .

(4) Ist  $m^d(A) < \infty$ , so existiert eine endliche disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n},$$

sodass die symmetrische Differenz  $A \Delta F := (A \cup F) \setminus (A \cap F)$  die Ungleichung  $m^d(A \Delta F) < \varepsilon$  erfüllt.

**Beweis:** (1) Haben wir gesehen

(2) Haben wir gesehen

(3) Sei  $B$  wie in (2)

$$K_n = B \cap \overline{B_n(o)} \implies B = \bigcup K_n.$$

$K_n$  kompakt: Lemma 2.4:

$$m^d(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(K_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} m^d(B \setminus K_n) = 0.$$

(4)  $U$  wie in (1).

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_n Q_{j_n k_n} \text{ disjunkt} \\ \implies m^d(U) &= \lim_{N \rightarrow \infty} m^d\left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \\ \implies \exists N : m^d\left(U \setminus \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) &< \varepsilon \end{aligned}$$

wegen  $m^d(A) < \infty \implies m^d(U) < \infty$ . Also gilt

$$A \Delta \left(\bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \subset (U \setminus A) \cup \left(U \setminus \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n k_n}\right) \implies m^d(A \Delta F) < 2\varepsilon.$$

□

### Satz 2.6 Transformationseigenschaften unter affinen Abbildungen

Sei  $\varphi : x \rightarrow Ax + b$  eine affine Abbildung des  $\mathbb{R}^n$ . Für  $E \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$m_*^d(\varphi(E)) = |\det A| m_*^d(E).$$

$E$  messbar  $\implies \varphi(E)$  messbar

**Beweis:** Jede Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen (vertauschen Zeilen, multiplizieren Zeilen, ziehen Vielfache von Zeilen voneinander ab). Es genügt, Elementarmatrizen zu betrachten.

1) Translation ( $A = 1$ ). Es genügt, Translation in eine Koordinatenrichtung zu betrachten.

$$m_d^*(\varphi(E)) \leq \sum_n m_d^*(\varphi(Q_{j_n k_n})) \text{ für } E \subset Q_{j_n k_n}.$$

Es genügt, die Abschätzung für  $E = Q_{jk}$  zu zeigen

$$\begin{aligned} &\implies \leq |\det A| \sum_n |Q_{j_n k_n}| \\ &\implies m_d^*(\varphi(E)) \leq |\det A| m_d^{*A(E)}. \end{aligned}$$

$A$  invers  $\implies \geq \implies =$ ,  $\det A = 0 \implies$  fertig

Zu zeigen:  $m_d^*(Q_{jk} + ke_1) = m_d^*(Q_{jk}) = |Q_{jk}|$

für  $d = 1$  wird  $0, 1$  auf  $k, k + 1$  gemappt. Überdecken durch dyadische Würfel der Länge  $2^m$ ,  $m < k$

$$2^{k(d-1)}((2^{k-m} - 1)2^m) \leq m_*^d(Q_{jk} + ke_1) \leq 2^{k(d-1)}(2^{k-m} + 1)2^m (= 2^{kd}), m \rightarrow -\infty.$$

Anzahl der Würfel der Kantenlänge  $2^m$  in dem vorhandenen Würfel  $Q + ke_1$ :

$$2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} - 1) \text{ enthalten } 2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} + 1) \text{ Würfel der } 2^m \text{ enthalten } Q + ke_1.$$

2)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \end{pmatrix}.$$

$\lambda \geq 0$ . Genügt:  $d = 1$ ,  $Q_{0,k}$ ,  $2^m < \lambda 2^k$

$$\underbrace{\lfloor 2^{k-m} \lambda \rfloor}_{\rightarrow 2^k} \cdot 2^m \leq \underbrace{m^*(Q_{0,k})}_{m \rightarrow \infty} \leq \left( \underbrace{\lfloor 2^{k-m} \cdot \lambda \rfloor}_{2^k} + 1 \right) 2^m.$$

3)

$$b = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & h & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Genügt  $d = 2$ .

Maximal  $2(\lfloor k \rfloor + 1) \cdot 2^{k-m}$  Würfel schneiden  $\varphi(Q_{jk})$ , aber sind nicht Teilmenge; zähle

$$m_*^d(\varphi(Q_{jk})) = |Q_{jk}|.$$

4) Permutationen,  $Q_{jk} \rightarrow Q_{j,k} = \varphi(Q_{j,k})$

$$\implies \varphi = Ax + b, m_*^d(\varphi(E)) = m_*^d(E) = m_*^d(E) |\det(A)|.$$

$E$  messbar,  $\det A = 0 \implies m_*^d(\varphi(E)) = 0 \implies$  Nullmenge, messbar,  $\det A \neq 0$ ,  $U$  offen  $\implies \varphi(U)$  offen, (Umkehrabbildung ist affin  $\implies$  stetig, Urbilder offener Mengen sind offen)

$$U \supset E, m_*^d(\varphi(U) \setminus \varphi(E)) = m_*^d(\varphi(U \setminus E)) = |\det A| m_*^d(U \setminus E).$$

□

## 2.3 Sigma-Algebren und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes

### Definition 2.5: $\sigma$ -Algebra

sei  $X$  eine Menge. Eine  $\sigma$ -Algebra ist eine Familie von Teilmengen

$$\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{P}(X),$$

sodass

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$
- (2)  $A \in \mathcal{A}(X) \implies X \setminus A \in \mathcal{A}(X)$
- (3)  $A_n \in \mathcal{A}(X) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$

#### Bemerkung 2.3

Lebesguemengen bilden eine  $\sigma$ -Algebra

### Beispiel 2.1

- 1)  $\mathcal{P}(X)$
- 2)  $\{\emptyset, X\}$
- 3)  $(X, d)$  metrischer Raum.  
 $\mathcal{B}(X)$  ist die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen, die von den offenen Mengen erzeugt wird, d.h. die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält.  
Zur Konstruktion:
  - $\mathcal{P}(X)$  enthält jede offene Menge
  - $\mathcal{B}(X) = \{A \subset X \mid A \text{ ist in jeder } \sigma\text{-Algebra enthalten, die alle offenen Mengen enthält}\}.$