Analysis III

Arthur Henninger

October 8, 2024

Contents

Kapitel 1

Einführung

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx &= \sqrt{\pi} \\
\left|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)\right| &= \pi r^2 \\
\left|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)\right| &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
\left|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)\right| &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.
\end{aligned}
$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\right\}$
Zylinder $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\right\}$
Kegel $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$
Es ist

$$
\begin{aligned}
|Z| &= \pi && \text{(Höhe mal Grundfläche)} \\
|C| &= \frac{1}{3}\pi. && (\tfrac{1}{3}\text{ Höhe mal Grundfläche})
\end{aligned}
$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3: Es ist

$$
\begin{aligned}
\left|B^{\mathbb{R}^2}_{\sqrt{1-x_3^3}}(0) \times \{x_3\}\right| &= \pi(1 - x_3^3) \\
&= \pi - \pi x_3^3 \\
&= \left|\left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{R^2}(0)\right) \times \{x_3\}\right|.
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$
\left|B^+\right| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3\pi}.
$$

□

Frage 1

(1) Definition des Volumens?

(2) Berechnung des Volumens?

(3) Mehrdimensionale Integrale?

(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$
$H \times H \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Satz 1.1 Besselsche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Korollar 1.1

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Proof: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j .$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\|\left(x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right) + \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 \\ &= \left\|x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 + \left\|\sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 \\ &+ \left\langle x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\rangle + \left\langle \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, \ldots\right\rangle = \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle \left\langle e_j, \ldots\right\rangle.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j, e_k\right\rangle &= \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle \left\langle e_j, e_k\right\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle e_j\right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^{N}\left\langle x, e_j\right\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle}\left\langle e_j, e_k\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N}\left|\left\langle x, e_j\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Besselsche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. □

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$H = \{u \in C[0,1], u(0) = u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u \cdot \overline{v} dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^1 |u|^2\, dx.$$

Wir definieren

$$e_j = e^{2\pi i j x}.$$

Behauptung: $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sind ONS

Proof:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi ijx}\overline{e^{2\pi ikx}}dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i(j-k)x}dx \\ &= \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ \frac{1}{2\pi i(j-k)}\left[e^{2\pi i(j-k)x}\right]_0^1 = 0 \end{cases} .\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Besselsche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^{M} \left|\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle\right|^2 + \left\|u - \sum_{j=N}^{M}\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle e^{2\pi ijx}\right\|^2 .$$

Lemma 1.1

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\left|\left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle\right|^2 = \|u\|^2 .$$

Korollar 1.2
Mit $a_j = \left\langle u, e^{2\pi ijx}\right\rangle$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} = u \text{ in } H.$$

Proof: Nach der Besselschen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\|u - \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}\right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^{N}\left|a_j\right|^2 \\ &\to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

Bemerkung 1.1
H ist nicht vollständig (da beispielswese eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

Frage 2

$$\sum\left|a_j\right|^2 < \infty.$$

und

$$\implies \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} \text{ Cauchyfolge } .$$

Konvergiert sie?

Beweis des Lemmas: Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ($\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$) um:

$$\begin{aligned}
D_k(x) :&= \sum_{n=-k}^{k} e^{\pi inx} \\
&= e^{-2\pi ikx} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi ix})^n \\
&= e^{-2\pi ikx} \frac{e^{2\pi i(2k+1)x} - 1}{e^{2\pi ix} - 1} \\
&= \frac{e^{2\pi i(k+1)x} - e^{-2\pi ikx}}{e^{2\pi ix} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi ix}}{e^{-\pi ix}} \\
&= \frac{e^{\pi ix(2k+2)-\pi ix} - e^{-2\pi ixk-\pi ix}}{e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}} \\
&= \frac{e^{(2k+1)\pi ix} - e^{-(2k+1)\pi ix}}{e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-k}^{k} \left\langle f, e^{2\pi inx} \right\rangle e^{2\pi inx} &= \sum_{n=-k}^{k} \int_0^1 e^{\pi in(x-y)} f(y)dy \\
&= \int_0^1 D_k(x-y) f(y)dy.
\end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned}
F_N(x) :&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi ix} - e^{-(2k+1)\pi ix}) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left(e^{\pi ix} \frac{e^{2N\pi ix} - 1}{e^{2\pi ix} - 1} - e^{-\pi ix} \frac{e^{2N\pi ix} - 1}{e^{-2\pi ix} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix}}{(e^{\pi ix} - e^{-\pi ix})^2} \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1) \cdot i\sin(\theta) \\
&= 2i\sin(\theta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
e^{2N\pi ix} - 2 + e^{-2N\pi ix} &= (e^{N\pi ix})^2 - 2 \cdot e^{N\pi x} e^{-N\pi ix} + (e^{-N\pi ix})^2 \\
&= (e^{N\pi ix} - e^{-N\pi ix})^2.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit $\theta = N\pi x$ und $\theta = \pi x$ durch Kürzen mit $2i$ der letzte Term.
Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = \int_0^1 D_N(x)dx = 1$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$, denn $(\sin(\theta))^2 = (\pm\sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$

Für $f \in H$ ist

$$\begin{aligned} f_N(x) :&= \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left\langle f, e^{2\pi i n x} \right\rangle e^{2\pi i n x}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_N(y)|^2 \, dy &= \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right)^2 \left|\left\langle f, e^{2\pi i n x} \right\rangle\right|^2 \\ &\leq \sum_{n=-N}^{N} \left|\left\langle f, e^{2\pi i n x} \right\rangle\right|^2. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \to f(x) \quad (N \to \infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Sei nun $\delta > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \\ &= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy && \left(\text{da } \textstyle\int F_N = 1\right) \\ &= \underbrace{\int_{\delta < |x-y| < 1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y|<\delta} \dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y|>1-\delta} \dots dy}_{:=I_3}. \end{aligned}$$

Es ist

$$|I_1| \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin(\delta)^2} \int_0^1 |f(y)| \, dy + |f(x)|.$$

Analog sind auch die anderen Integrale abzuschätzen, insgesamt konverkiert das Integral trotz Unvollständigkeit.

□