Einführung in die diskrete Mathematik

Arthur Henninger

15. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Definition 1.1: Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph ist ein Tripel (V, E, Ψ), wobei V, E endliche Mengen, $V \neq \emptyset$ und

$$\Psi : E \longrightarrow \{x \subset V | \, |X| = 2\} =: \binom{n}{2}.$$

Definition 1.2: Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph (Digraph) ist ein Tripel (V, E, Ψ), wobei V, E endliche Mengen, $V \neq \emptyset$ und

$$\Psi : E \longrightarrow \{(v, y) \in V \times V | x \neq y\}.$$

Definition 1.3: Graph

Ein Graph ist ein gerichteter oder ungerichteter Graph.

Notation 1.1

Wir nennen V die Menge der Knoten (engl. "verticies") und E die Menge der Kanten (engl. ëdges").

Beispiel 1.1 (Graphen)

ungerichteter bzw. gerichteter Graph:

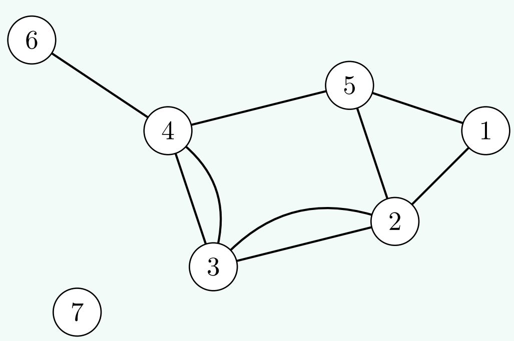


Abbildung 1.1: ungerichteter Graph

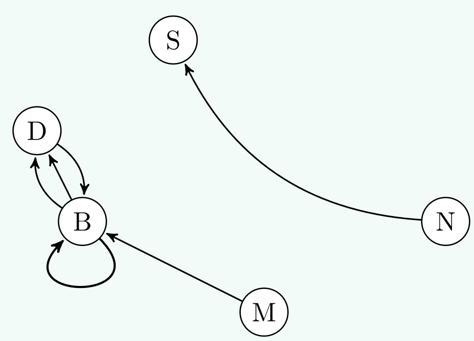


Abbildung 1.2: gerichteter Graph

Definition 1.4: parallele Kanten

Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.

Definition 1.5: einfacher Graph

Ein Graph heißt einfach, wenn er keine parallelen Kanten besitzt.

Notation 1.2
In diesem Fall identifizieren wir $e \in E$ mit $\Psi(e)$. Der Graph (V, E, Ψ) reduziert sich zu $G = (V, E)$.

Notation 1.3 Sprachgebrauch

- $e = \{x, y\}$ oder $e = (x, y)$ Kante
- e verbindet x und y
- x und y sind benachbart/adjazent
- x ist Nachbar von y
- x und y sind mit e inzident
- $G = (V, E)$, $X, Y \subseteq V(G)$
  Ungerichtete Graphen:

$$\begin{aligned} E(X,Y) &:= \{\{x,y\} \in E(G) | x \in X \setminus Y \text{ und } y \in Y \setminus X\} \\ \delta(X) &:= E(X, V(G) \setminus X) \\ \delta(x) &:= \delta(\{x\}) \text{ für } x \in V(G) \\ |\delta(x)| &: \underline{\text{Grad}} \text{ von } x. \end{aligned}$$

  Gerichtete Graphen:

$$\begin{aligned} E^+(X,Y) &:= \{(x,y) \in E(G) | x \in X \setminus Y \text{ und } y \in Y \setminus X\} \\ \delta^+(X) &:= E^+(X, V(G) \setminus X) \\ \delta^-(X) &:= E^+(V(G) \setminus X, X) \\ \delta(X) &:= \delta^+(X) \cup \delta^-(X) \\ \delta^+(x) &= \delta^+(\{x\}) \\ \delta^-(x) &= \delta^-(\{x\}) \\ \delta(x) &= \delta(\{x\}) \\ \left|\delta^+(x)\right| &: \underline{\text{Ausgangsgrad}} \\ |\delta^-(x)| &: \underline{\text{Eingangsgrad}} \\ \delta^+(x) &: \underline{\text{ausgehende Kanten}} \\ \delta^-(x) &: \underline{\text{eingehende Kanten}}. \end{aligned}$$

- K-regulärer Graph: $|\delta(x)| = K \forall x \in V(G)$.
- Ein Knoten vom Grad 0 heißt isolierter Knoten.
- Falls mehrere Graphen betrachtet werden: G, H, F, füge Graphen als Index hinzu: $\delta_G(x), \delta_H(x), \ldots$

Satz 1.1

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{x \in V(G)} |\delta(x)| = 2 \cdot |E| .$$

Korollar 1.2

In jedem Graphen ist die Anzahl an Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Satz 1.3

Für jeden Digraphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{x \in V(G)} \delta^-(x) = \sum_{x \in V(G)} \delta^+(x).$$

Definition 1.6: Teilgraph

Ein Graph $H = (V(H), E(H))$ ist ein Teilgraph (Subgraph, Untergraph) eines Graphen $G = (V(G), E(G))$, falls

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ und } E(H) \subseteq E(G).$$

Wir sagen auch: G enthält H (als Teilgraph).

- Falls $V(H) = V(G)$, so ist H ein aufspannender Teilgraph.
- Der Graph H ist induzierter Teilgraph von G, falls

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ und } E(H) = \{\{x, y\} \in E(G) | x, y \in V(H)\} .$$

Bemerkung 1.1

Ein induzierter Teilgraph ist insbesondere durch die Knotenmenge festgelegt.

Notation 1.4

"H ist der von $V(H)$ induzierte Teilgraph von G"

$$H := G[V(H)].$$

Für $x \in V(G)$ definiere:

$$G - x := G[V(G) \setminus \{x\}].$$

Für $e \in E(G)$ definiere:

$$G - e := (V(G), E(G) \setminus \{e\}).$$

Für $e \in \binom{V(G)}{2}$ mit $e \notin E(G)$.

$$G + e. = (V(G), E(G) \cup \{e\}).$$

Definition 1.7: vollständiger Graph

$$\left(V, \binom{V}{2}\right) := K_n, \text{ falls } |V| = n.$$

Definition 1.8: Isomorphie

Zwei Graphen G und H heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : V(G) \to V(H)$ gibt, sodass

$$\varphi(\{x, y\}) := \{\varphi(x), \varphi(y)\}$$

eine Bijektion zwischen $E(G)$ und $E(H)$ darstellt. φ ist Isomorphismus. Alternativ kann auch

$$\{x, y\} \in E(G) \iff \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E(H)$$

gelten.C:w

Notation 1.5 isomorphe Graphen
$G \cong H$ oder $G = H$

Bemerkung: Für $G = (V(G), E(G))$ und $H = (V(H), E(H))$ müssen $\varphi : V(G) \to V(H)$ und $\sigma : E(G) \to E(H)$ "kompatible"Bijektionen sein.

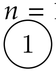
Notation 1.6 Sprechweise
F ist Teilgraph von G meint: F ist isomorph zu einem Teilgraphen von G

Vorlesung vom 10.10.2024

Feststellungen:

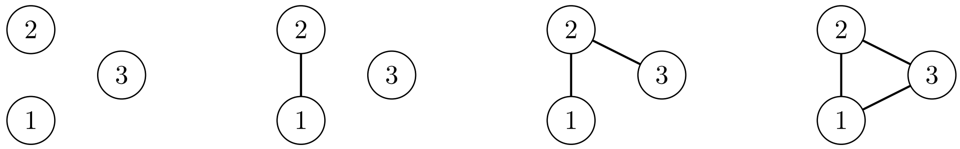
- $\varphi : V(g) \to V(H)$ Isomorphismus $\implies$ $g - x \cong H - \varphi(x \forall x \in V(G))$ (Isomorphie erhält Teilgraphen)
- Isomorphieproblem: Sind G und H isomorph? Ungelöst, d.h. kein polynomieller Algorithmus (polynomielle Laufzeit in den Kanten) bekannt.
  - $\mathcal{O}(n^2 \cdot n!) \approx \mathcal{O}(2^{n \log n})$ trivial
  - schnellster bekannter Algorithmus für Graphenisomorphie: Babai (2025) Laufzeit $\mathcal{O}(2^{\text{poly}(\log n)})$
- Ungelöstes Problem: Wenn ich $\varphi : V(G) \to V(H)$ finde, sodass $G - x \cong H - \varphi(x) \forall x \in V(G)$ gilt, ist dann $G \cong H$. (Außer im Fall der Graphen mit 2 Punkten, die in G verbunden und in H nicht verbunden sind.)
  - andere Formulierung: G Graph, betrachte Multimenge M aller Graphen $G - x, x \in V(G)$. Behauptung: G ist der einzige Graph mit dieser Multimenge (mit Wiederholung) an Teilgraphen, falls $|V(G)| \geq 3$.
  - Name: Graph Reconstruction Problem (scheint offensichtlich zu gelten)
- Ein Isomorphismus von G nach G heißt Automorphismus. Die Menge aller Ismorphismen eines Graphen bildet seine Automorphismengruppe. Jede existente Gruppe ist die Automorphismengruppe eines Graphen.

Nicht isomorphe einfache ungerichtete Graphen:

- $n = 1$:
  

- $n = 2$:

- $n = 3$:



- $n = 4$: 11 Graphen

Wie lange dauert die Erzeugung:

- $2^{\binom{n}{2}} \cdot n! \cdot n^2$ (alle probieren und jeweils Isomorphietest machen)
- Besser: 2^{n-1}
  - Idee: Kanonische Repräsentation: den aller isomorphen Graphen, dessen Adjazenzmatrix als Binärzahl minimal ist
  - Dann kann man bei jedem Graphen unabhängig von anderen Graphen nachtesten, ob es sich bereits um die kanonische Repräsentation handelt.
  - Bemerkung: Es ist im Mittel recht einfach zu testen, ob der Graph die kanonische Repräsentation darstellt (indem man durch Zeilen- oder Spaltenpermutationen versucht, die Binärzahl zu verkleinern). Im Extremfall müssen dennoch alle Spalten- und Zeilenpermutationen getestet werden, dies tritt aber selten auf. Der Algorithmus taugt daher nur zur Findung aller nicht-isomorphen einfachen ungerichteten Graphen gleichzeitig. Insbesondere wird aus einer Repräsentation nicht die kanonische erzeugt, sonst wäre hierdurch ein einfacher Isomorphietest möglich.

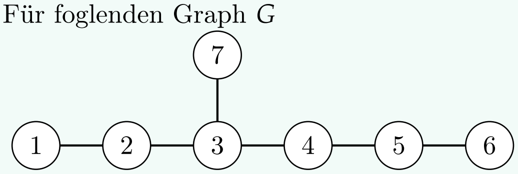
Beispiel 1.2

Automorphismengruppe von G: $\mathrm{Aut}(G)$

- $$|\mathrm{Aut}(\text{Graph, der Würfel repräsentiert})| = 48.$$

  $$|\mathrm{Aut}(3 \text{ Punkte in Reihe})| = |\mathrm{Aut}(2 \text{ Punkte in Reihe})| = 2.$$

  Für foglenden Graph G



  ist $|V(G)| > 1$ aber $|\mathrm{Aut}(G)| = 1$.

Satz 1.4

Es gibt immer mindestens

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

viele nicht-isomorphe einfache ungerichtete Graphen und mindestens

$$\frac{4^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

viele nicht isomorphe einfache gerichtete Graphen auf n Knoten.

Beweis: Betrachte K_n. Dieser hat $\binom{n}{2}$ viele Kanten. Jede Teilmenge der Kantenmenge liefert einen Graphen. Dies sind $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen. Maximal $n!$ (Anzahl der Permutationen) davon sind isomorph $\implies$ Es gibt mindestens $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ nicht isomorphe einfache Graphen.
Analog $\frac{4^{\binom{n}{2}}}{n!} = \frac{2^{2\binom{n}{2}}}{n!}$ im gerichteten Fall. □

Man kann zeigen: Es gibt genau $(1+o(1)) \cdot \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ einfache ungerichete bzw. $(1+o(1)) \cdot \frac{4^{\binom{n}{2}}}{n!}$ einfache gerichtete Graphen.
"Fast alle Graphen haben eine triviale Automorphismengruppe"

Definition 1.9: Kantenzug, Weg

Ein Kantenzug in einem GRaphen ist eine Folge $x_1, e_1, x_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, x_k$ mit $k \geq 1$ und $e_i = \{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ bzw. $e_i = (x_i, x_{i+1}) \in E(G)$. Falls $x_1 = x_k$, so ist der Kantenzug geschlossen.
Falls in einem Kantenzug $x_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, x_k$ alle Knoten paarweise verschieden sind, so ist der Graph $P = (\{x_1, \ldots, x_k\}, \{e_1, \ldots, e_{k-1}\})$ ein Weg.

Notation 1.7 Sprachgebrauch

P ist ein $x_1 - x_k$-Weg, P verbindet x_1 mit x_k. x_1, x_k werden die Endknoten von P genannt. Alle anderen Knoten, d.h. $x_2, \ldots, x_{k-1}$ sind die inneren Knoten von P.
Für $x, y \in V(P)$ ist $P_{[x,y]}$ der eindeutige Teilweg in P mit Endknoten x und y.

Lemma 1.5

Es gibt genau dann einen $x - y$-Weg in einem Graphen, wenn es einen $x - y$-Kantenzug gibt.

Beweis aus AlMa I: .

- Per Definition ist ein Weg ein Kantenzug
- Ein Kantenzug kann durch entfernen der Kanten und Knoten zwischen sich wiederholenden Knoten zu einem Weg verkürzt werden.

□

Definition 1.10: Kreis

Falls in einem geschlossenen Kantenzug $x_1, e_1, x_2, \ldots, e_k, x_1$ gilt, dass $x_i \neq x_j$ für $1 \leq i < j \leq k$ so ist der Graph $(\{x_1, \ldots, x_k\}, \{e_1, \ldots, e_k\})$ ein *Kreis*, falls $k \geq 3$, im ungerichteten Fall bzw. $k \geq 2$ im gerichteten Fall. Die *Länge* eines Kreises oder WEges ist die Anzahl seiner Kanten.

Vorlesung vom 15.10.2024

Lemma 1.6

Es sei G ein ungerichteter einfacher Graph, in dem jeder Knoten Grad $\geq k$ hat. Dann enthält G einen Weg der Länge $\geq k$. Falls $k \geq 2$ so enthält G einen Kreis der Länge $\geq k+1$.

Beweis: Sei P ein längster Weg in G, x einer seiner Endknoten.

$\implies$ alle Nachbarn von v liegen in $V(P) \setminus \{x\}$

$\implies$ $|\delta(x)| \leq |V(P)| - 1$, es gilt $k \leq |\delta(x)|$

$\implies$ $|V(P)| - 1 \geq k$ d.h. Länge des Weges ist $\geq k$

Wähle $a \in V(P)$, sodass $\{x, a\} \in E(P)$ und $P_{[a,x]}$ ist längstmöglich.
$\implies$ $P_{[a,x]} + \{x, a\}$ bilder Kreis der Länge $\geq k + 1$ □

Sei E Familie von Mengen oder Graphen. $F \in E$ ist *minimales Element*, falls keine echte Teilmenge bzw. kein echter Teilgraph von F in E enthalten ist.
analog: maximale Elemente

Definition 1.11: zusammenhängend

Sei G einungerichteter Graph. G heißt *zusammenhängend*, falls es für je zwei Knoten $x, y \in V(G)$ einen $x - y$-Weg in G gibt.
Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G heißen *Zusammenhangskomponenten*. Ein Knoten $x \in V(G)$ heißt *Artikulationsknoten* (trennender Knoten), falls $G - x$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G hat.
Eine Kante $e \in E(G)$ heißt *Brücke*, falls $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten als G hat.

Satz 1.7

(a) Ein ungerichteter Graph G ist genau dann zusammenhängend, falls $\delta(X) \neq \emptyset \, \forall \emptyset \subsetneq X \subsetneq V(G)$.

(b) Sei G gerichteter Graph und $r \in V(G)$. Genau dann gibt es einen $r - x$-Weg für jedes $x \in V(G)$, falls $\delta^+(X) \neq \emptyset \, \forall X \subsetneq V(G)$ mit $r \in X$.

Beweis: Prop 3.13 und 3.14 in AlMa I □

Definition 1.12

- Ein ungerichteter einfacher Graph heißt *Wald*, falls er keinen Kreis enthält.
- Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald.
- Ein *spannender Baum* ist ein spannender Teilgraph, der Baum ist.
- Ein *Blatt* ist ein Knoten vom Grad 1 in einem Baum.

Frage 1

Wie viele nicht-isomorphe Bäume auf n Knoten gibt es?

Solution

Bäume liegen meist nicht in der trivialen Automorphismengruppe (Gibt es zum Beispiel 2 Blätter an einem Knoten, kann man diese aufeinander mappen).

Proposition 1.8

Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten hat mindestens 2 Blätter.

Beweis: AlMa I □

Satz 1.9

Sei G ungerichteter einfacher Graph auf n Knoten. Dann sind äquivalent:

(a) G ist ein Baum

(b) zwischen je 2 Knteon in G gibt es einen eindeutigen Weg

(c) G ist minimaler Graph mit Knotenmenge $V(G)$ und $\delta(X) \neq \emptyset \, \forall \emptyset \subsetneq X \subsetneq V(G)$.

(d) G ist minimaler zusammenhängender Graph auf $V(G)$

(e) G ist maximaler kreisfreier Graph

(f) G hat $n-1$ Kanten und ist kreisfrei

(g) G hat $n-1$ Kanten und ist zusammenhängend.

Beweis: Satz 3.20 in AlMa I □

Korollar 1.10

Ein Wald auf n Knoten mit k Zusammenhangskomponenten hat $n-k$ Kanten. (Lemma 3.19b AlMa I)

Beweis: Jede Zusammenhangskomponente ist Baum mit n_i Knoten $i = 1, \ldots, k$. Diese haben zusammen

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = -k + \sum_{i=1}^{k} n_i = -k + n$$

Kanten. □

Korollar 1.11

Ein ungerichteter Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn er einen spannenden Baum enthält.

Beweis: Wegen (d) $\implies$ (a) in Satz 1.9. □

Für einen Digraphen G ist der *zugrunde liegende ungerichtete Graph* derjenige Graph G', den man aus G erhält, indem man jedes $(x, y) \in E(G)$ durch $\{x, y\} \in E(G')$ ersetzt (parallele Kanten können entstehen).
Umgekehrt heißt G *Orientierung* von G'.
Ein Digraph heißt *zusammenhängend*, falls sein zugrundeliegender ungerichteter Graph zusammenhängend ist.
Ein Digraph heißt *Branching*, falls er keine Kreise enthält und $|\delta^-(x)| \leq 1 \, \forall x \in V(G)$.

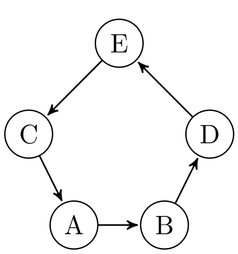


Abbildung 1.3: Kreis

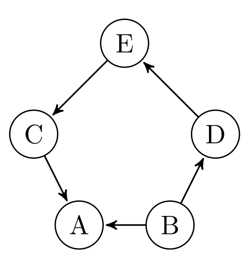


Abbildung 1.4: kein Kreis

Der einem Branching zugrunde liegende ungerichtete Graph ist ein Wald.
Eine *Arboreszenz* ist ein zusammenhängendes Branching. Der einer Arboreszent zugrunde liegende ungerichtete Graph ist ein Baum $\implies$ Bei n Knoten hat die Arboreszent $n-1$ Kanten $\implies$ es gibt genau einen Knoten r mit $\delta^-(r) = \emptyset$. Der Knoten r heißt *Wurzel* der Arboreszenz. Ein Knteon v mit $\delta^+(v) = \emptyset$ heißt *Blatt*.

Satz 1.12

Sei G Digraph mit n Knoten und $r \in V(G)$. Dann sind äquivalent:

(a) G ist Arboreszenz mit Wurzel r

(b) G ist Branching mit $n-1$ Kanten und $\delta^-(r) = \emptyset$

(c) G hat $n-1$ Kanten und jeder Knoten ist von r aus erreichbar

(d) Jeder Knoten ist von r aus erreichbar, aber das Entfernen einer beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft.

(e) G ist kantenminimaler Graph mit $\delta^+(X) \neq \emptyset \, \forall X \subsetneq V(G), r \in X$

(f) $\delta^-(r) \neq \emptyset$ und $\forall v \in V(G)$ gibt es eindeutigen $r-v$-Kantenzug

(g) $\delta^-(v) = \emptyset$ und $|\delta^-(v)| = 1 \, \forall v \in V(G) \setminus \{r\}$ und G enthält keinen Kreis.

Beweis:

- (a) $\implies$ (b) zusammenhängendes Branching, zugrunde liegender Graph ist Baum $\implies \delta^-(r) = \emptyset, n-1$ Kanten.
- (b) $\implies$ (c) $n-1$ Kanten, $\forall v \neq r$ gilt $|\delta^-(v)| = 1 \implies$ "verfolge" rekursiv die eingehenden Kanten zurück. Die Folge muss in r enden und wir haben einen $r-v$-Weg gefunden.
- (c) $\implies$ (d) Folgt aus Satz 1.9 (d) $\iff$ (g)
- (d) $\implies$ (e) Folgt aus Satz 1.7 (b)
- (e) $\implies$ (f) $\delta^-(r) = \emptyset$ folgt aus Kantenminimalität, Satz 1.7 $\implies$ $r-v$-Kantenzug existiert $\implies$ $r-v$-Weg. Sei P ein $r-v$-Weg. Sei Q ein anderer $r-v$-Kantenzug $\implies$ Q enthält mindestens eine Kante, die nicht in P enthalten ist. Sei e letzte Kante entlang des $r-v$-Kantenzugs Q, die nicht in P liegt. $\implies$ e kann entfernt werden ohne die Eigenschaft in (e) zu zerstören.
- (f) $\implies$ (g) $\forall v \in V(G) \setminus \{r\}$ ist $|\delta^-(v)| \geq 1$, da sonst v von r nocht erreichbar wäre.
  Annahme: $|\delta^-(v)| \geq 2 \implies \exists (a,v),(b,r)$. $\exists r-a$-Weg und $r-b$-Weg. $\implies \exists 2$ veschiedene $r-v$-Kantenzüge (Alternative: $\left|\delta^{-1}(v)\right| = 1 \, \forall v \in V_(G) \setminus \{r\}$, Kreis $\implies$ r ist nicht enthalten, d.h. $\nexists r-v$-Kantenzug für einen Knoten des Kreises)
- (g) $\implies$ (a) Nach Definition ist G Branching mit $n-1$ Knoten. Satz 1.9 (f) $\implies$ (G) Arboreszenz.

□

Übung: Reihenfolge ändern und Implikationen zeigen

Kapitel 2

Bäume und Arboreszenzen

Kapitel 3

Kürzeste Wege

Kapitel 4

Netzwerkflüsse

Kapitel 5

Kostenminimale Flüsse

Kapitel 6

NP-Vollständigkeit