Analysis III

Arthur Henninger

October 9, 2024

Contents

Kapitel 1

Einführung

1.1 Formeln

Beispiel 1.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\left|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)\right| = \pi r^2$$

$$\left|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)\right| = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)\right| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} r^d.$$

Beweis der Kugelformel: Archimedes: $d = 3$, Halbkugel: $B^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\right\}$
Zylinder $Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\right\}$
Kegel $C = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$
Es ist

$$|Z| = \pi \qquad \text{(Höhe mal Grundfläche)}$$

$$|C| = \frac{1}{3}\pi. \qquad \left(\tfrac{1}{3} \text{ Höhe mal Grundfläche}\right)$$

Wir betrachten eine Halbkugel und einen Zylinder, aus dem ein Kegel ausgeschnitten wurde. Wir untersuchen Schnitte auf Höhe x_3: Es ist

$$\begin{aligned}\left|B_{\sqrt{1-x_3^3}}^{\mathbb{R}^2}(0) \times \{x_3\}\right| &= \pi(1 - x_3^3)\\ &= \pi - \pi x_3^3\\ &= \left|\left(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus B_{x_3}^{R^2}(0)\right) \times \{x_3\}\right|.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri (Die Volumen sind gleich, wenn die Flächen der Schnitte gleich sind.). Also gilt:

$$\left|B^+\right| = |Z \setminus C| = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3\pi}.$$

□

Frage 1

(1) Definition des Volumens?

(2) Berechnung des Volumens?

(3) Mehrdimensionale Integrale?

(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2 Fourierreihen und euklidische Vektorräume

Sei H euklidischer VR: Skalarprodukt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$
$H \times H \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ so dass immer gilt:

i) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle \in \mathbb{K}$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Definition 1.1

Eine Folge e_n von Vektoren heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}.$$

Satz 1.1 Besselsche Gleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 + \left\| x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Korollar 1.1

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \left| \langle x, e_j \rangle \right|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Proof: Sei (e_j) ein ONS, $x \in H, N \in \mathbb{N}$. Es ist

$$x = \left(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j \right) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j .$$

Es ist

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\|\left(x-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right)+\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\|^2\\ &= \left\|x-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\|^2+\left\|\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\|^2\\ &+\left\langle x-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j,\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle+\left\langle \sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j, x-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle.\end{aligned}$$

Die unteren Skalarprodukte sind 0, denn

$$\left\langle \sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j,\dots\right\rangle=\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle \langle e_j,\dots\rangle .$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\left\langle x-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j,e_k\right\rangle &= \langle x,e_k\rangle-\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle \langle e_j,e_k\rangle\\ &= \langle x,e_k\rangle-\langle x,e_k\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^N \langle x,e_j\rangle e_j\right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^N \langle x,e_j\rangle \overline{\langle x,e_k\rangle} \langle e_j,e_k\rangle\\ &= \sum_{j=0}^N \left|\langle x,e_j\rangle\right|^2 .\end{aligned}$$

Wir erhalten die Besselsche Gleichung durch Einsetzen dieses Resultats in die erste Gleichung. □

Wir untersuchen stetige Funktionen, die aus dem Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ abbilden und 0 und 1 auf denselben Wert schicken. Sie repräsentieren damit alle periodischen Funktionen:

$$H=\{u\in C[0,1],u(0)=u(1)\}$$

und definieren

$$\langle u,v\rangle=\int_0^1 u\cdot\overline{v}dx.$$

Dann ist

$$\|u\|^2=\langle u,u\rangle=\int_0^1 |u|^2\,dx.$$

Wir definieren

$$e_j=e^{2\pi ijx}.$$

Behauptung: $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sind ONS

Proof:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_k\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi ijx}\overline{e^{2\pi ikx}}dx\\ &= \int_0^1 e^{2\pi i(j-k)x}dx\\ &= \begin{cases}1 \text{ falls } j = k\\ \frac{1}{2\pi i(j-k)}\left[e^{2\pi i(j-k)x}\right]_0^1 = 0\end{cases}.\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Besselsche Gleichung auf das ONS anwenden:

$$\|u\|^2 = \sum_{j=N}^{M}\left|\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle\right|^2 + \left\|u - \sum_{j=N}^{M}\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle e^{2\pi ijx}\right\|^2.$$

Lemma 1.1

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}\left|\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle\right|^2 = \|u\|^2.$$

Korollar 1.2
Mit $a_j = \langle u, e^{2\pi ijx}\rangle$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} = u \text{ in } H.$$

Proof: Nach der Besselschen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\|u - \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx}\right\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j=-N}^{N}|a_j|^2\\ &\to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

Bemerkung 1.1
H ist nicht vollständig (da beispielswese eine Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine nicht stetige Funktion konvergieren kann)

□

Frage 2

$$\sum |a_j|^2 < \infty.$$

und

$$\Longrightarrow \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{2\pi ijx} \text{ Cauchyfolge }.$$

Konvergiert sie?

Beweis des Lemmas: Wir betrachten den Dirichlet-Kern und formen ihn mithilfe der geometrischen Summe ($\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$) um:

$$\begin{aligned}
D_k(x) :&= \sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i n x} \\
&= e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} (e^{2\pi i x})^n \\
&= e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i(2k+1)x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \\
&= \frac{e^{2\pi i(k+1)x} - e^{-2\pi i k x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{\pi i x(2k+2) - \pi i x} - e^{-2\pi i x k - \pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \\
&= \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-k}^{k} \left\langle f, e^{2\pi i n x} \right\rangle e^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-k}^{k} \int_0^1 e^{2\pi i n(x-y)} f(y) dy \\
&= \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Wir betrachten Fejérkern und formen ihn um:

$$\begin{aligned}
F_N(x) :&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} \left(e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} - e^{-\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{-2\pi i x} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{N} \frac{e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x})^2} \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) - (-1) \cdot i\sin(\theta) \\
&= 2i\sin(\theta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
e^{2N\pi i x} - 2 + e^{-2N\pi i x} &= (e^{N\pi i x})^2 - 2 \cdot e^{N\pi x} e^{-N\pi i x} + (e^{-N\pi i x})^2 \\
&= (e^{N\pi i x} - e^{-N\pi i x})^2.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit $\theta = N\pi x$ und $\theta = \pi x$ durch Kürzen mit $2i$ der letzte Term.
Wir stellen folgende Eigenschaften fest:

(1) $F_N(x) \geq 0$

(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = \int_0^1 D_N(x)dx = 1$, denn

$$\begin{aligned}
\int_0^1 D_N(x)dx &= \int_0^1 \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx} dx \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx} dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx} dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 2\cos(2\pi nx) dx + \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\
&= \int_0^1 e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx && \text{(erster Term fällt wegen ganzer Periode weg)} \\
&= \int_0^1 1 dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F_N(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$, denn $(\sin(\theta))^2 = (\pm \sin(\theta + n\pi))^2 = (\sin(\theta + n\pi))^2$

(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N(\sin(\pi x))^2}$, denn $\sin(N\pi x)^2 \leq 1$

Für $f \in H$ ist

$$\begin{aligned}
f_N(x) :&= \int_0^1 F_N(x-y) f(y) dy \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-k}^{k} \left\langle f, e^{2\pi inx} \right\rangle e^{2\pi inx} && \text{(Identität von vorher)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N} (N - |n|) \left\langle f, e^{2\pi inx} \right\rangle e^{2\pi inx} && \text{(Abzählen)} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left\langle f, e^{2\pi inx} \right\rangle e^{2\pi inx}.
\end{aligned}$$

Das Abzählen sorgt dafür, dass wie die Summe mit $n = 0$ genau N mal zählen, die für $n = 1, -1$ genau $N - 1$ mal zählen und so weiter.

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_N(y)|^2\,dy &= \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)^2 \left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2 \\ &\le \sum_{n=-N}^{N}\left|\left\langle f, e^{2\pi i n x}\right\rangle\right|^2 .\end{aligned}$$

Wir werden zeigen:

$$f \in H \implies \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \to f(x) \quad (N \to \infty) \text{ gleichmäßig in } x.$$

Sei nun $\delta > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}&\int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy - f(x)\\ &\quad= \int_0^1 F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy \qquad \left(\text{da } \textstyle\int F_N = 1\right)\\ &\quad= \underbrace{\int_{\delta<|x-y|<1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{|x-y|<\delta} \dots dy}_{:=I_2} + \underbrace{\int_{|x-y|>1-\delta} \dots dy}_{:=I_3} .\end{aligned}$$

Es ist

$$|I_1| \le \frac{1}{N}\frac{1}{\sin(\delta)^2}\int_0^1 |f(y)|\,dy + |f(x)| .$$

Analog sind auch die anderen Integrale abzuschätzen, insgesamt konverkiert das Integral trotz Unvollständigkeit.

□