Einführung in die diskrete Mathematik

Arthur Henninger

October 10, 2024

Contents

Kapitel 1

Grundlagen

Definition 1.1: Ungerichtete Graphen

Ein <u>ungerichteter Graph</u> ist ein Tripel (V, E, Ψ), wobei V, E endliche Mengen, $V \neq \emptyset$ und

$$\Psi : E \longrightarrow \{x \subset V \,|\, |X| = 2\} =: \binom{n}{2}.$$

Definition 1.2: Gerichtete Graphen

Ein <u>gerichteter Graph (Digraph)</u> ist ein Tripel (V, E, Ψ), wobei V, E endliche Mengen, $V \neq \emptyset$ und

$$\Psi : E \longrightarrow \{(v, y) \in V \times V | x \neq y\}.$$

Definition 1.3: Graph

Ein <u>Graph</u> ist ein gerichteter oder ungerichteter Graph.

Notation 1.1

Wir nennen V die Menge der Knoten (engl. "verticies") und E die Menge der Kanten (engl. "edges").

Beispiel 1.1 (Graphen)

ungerichteter bzw. gerichteter Graph:

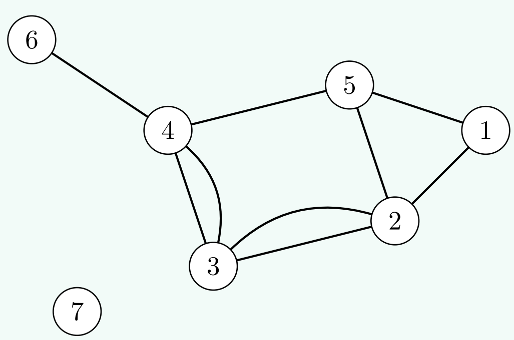

Figure 1.1: ungerichteter Graph

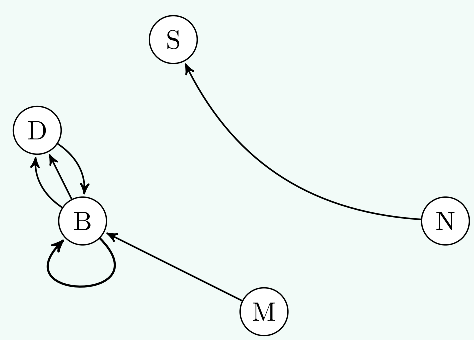

Figure 1.2: gerichteter Graph

Definition 1.4: parallele Kanten

Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.

Definition 1.5: einfacher Graph

Ein Graph heißt einfach, wenn er keine parallelen Kanten besitzt.

> **Notation 1.2**
> In diesem Fall identifizieren wir $e \in E$ mit $\Psi(e)$. Der Graph (V, E, Ψ) reduziert sich zu $G = (V, E)$.

Notation 1.3 Sprachgebrauch

- $e = \{x, y\}$ oder $e = (x, y)$ Kante
- e verbindet x und y
- x und y sind benachbart/adjazent
- x ist Nachbar von y
- x und y sind mit e inzident
- $G = (V, E)$, $X, Y \subseteq V(G)$
  Ungerichtete Graphen:

$$\begin{aligned} E(X,Y) &:= \{\{x,y\} \in E(G) | x \in X \setminus Y \text{ und } y \in Y \setminus X\} \\ \delta(X) &:= E(X, V(G) \setminus X) \\ \delta(x) &:= \delta(\{x\}) \text{ für } x \in V(G) \\ |\delta(x)| &: \ \underline{\text{Grad}} \text{ von } x. \end{aligned}$$

  Gerichtete Graphen:

$$\begin{aligned} E^+(X,Y) &:= \{(x,y) \in E(G) | x \in X \setminus Y \text{ und } y \in Y \setminus X\} \\ \delta^+(X) &:= E^+(X, V(G) \setminus X) \\ \delta^-(X) &:= E^+(V(G) \setminus X, X) \\ \delta(X) &:= \delta^+(X) \cup \delta^-(X) \\ \delta^+(x) &= \delta^+(\{x\}) \\ \delta^-(x) &= \delta^-(\{x\}) \\ \delta(x) &= \delta(\{x\}) \\ \left|\delta^+(x)\right| &: \ \underline{\text{Ausgangsgrad}} \\ |\delta^-(x)| &: \ \underline{\text{Eingangsgrad}} \\ \delta^+(x) &: \ \underline{\text{ausgehende Kanten}} \\ \delta^-(x) &: \ \underline{\text{eingehende Kanten}}. \end{aligned}$$

- K-regulärer Graph: $|\delta(x)| = K \forall x \in V(G)$.
- Ein Knoten vom Grad 0 heißt isolierter Knoten.
- Falls mehrere Graphen betrachtet werden: G, H, F, füge Graphen als Index hinzu: $\delta_G(x), \delta_H(x), \ldots$

Satz 1.1

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{x \in V(G)} |\delta(x)| = 2 \cdot |E|\,.$$

Korollar 1.2

In jedem Graphen ist die Anzahl an Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Satz 1.3

Für jeden Digraphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{x \in V(G)} \delta^-(x) = \sum_{x \in V(G)} \delta^+(x).$$

Definition 1.6: Teilgraph

Ein Graph $H = (V(H), E(H))$ ist ein Teilgraph (Subgraph, Untergraph) eines Graphen $G = (V(G), E(G))$, falls

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ und } E(H) \subseteq E(G).$$

Wir sagen auch: G enthält H (als Teilgraph).

- Falls $V(H) = V(G)$, so ist H ein aufspannender Teilgraph.
- Der Graph H ist induzierter Teilgraph von G, falls

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ und } E(H) = \{\{x, y\} \in E(G) | x, y \in V(H)\}\,.$$

Bemerkung 1.1

Ein induzierter Teilgraph ist insbesondere durch die Knotenmenge festgelegt.

Notation 1.4

"H ist der von $V(H)$ induzierte Teilgraph von G"

$$H := G[V(H)].$$

Für $x \in V(G)$ definiere:

$$G - x := G[V(G) \setminus \{x\}].$$

Für $e \in E(G)$ definiere:

$$G - e := (V(G), E(G) \setminus \{e\}).$$

Für $e \in \binom{V(G)}{2}$ mit $e \notin E(G)$.

$$G + e. = (V(G), E(G) \cup \{e\}).$$

Definition 1.7: vollständiger Graph

$$\left(V, \binom{V}{2}\right) := K_n, \text{ falls } |V| = n.$$

Definition 1.8: Isomorphie

Zwei Graphen G und H heißen isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ gibt, sodass

$$\varphi(\{x, y\}) := \{\varphi(x), \varphi(y)\}$$

eine Bijektion zwischen $E(G)$ und $E(H)$ darstellt. φ ist Isomorphismus.

> **Notation 1.5** isomorphe Graphen
> $G \cong H$ oder $G = H$

Bemerkung: Für $G = (V(G), E(G))$ und $H = (V(H), E(H))$ müssen $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ und $\sigma : E(G) \longrightarrow E(H)$ "kompatible" Bijektionen sein.

Kapitel 2

Bäume und Arboreszenzen

Kapitel 3

Kürzeste Wege

Kapitel 4

Netzwerkflüsse

Kapitel 5

Kostenminimale Flüsse

Kapitel 6

NP-Vollständigkeit