VIII

Типовой рассчёт по математике
по теме „Векторный анализ"
ст. гр 950503 – Полховский А.Д.

Вариант 24

№2 Найти угол между градиентами скалярных полей $v(x,y,z)$ и $u(x,y,z)$ в точке

$$v = 9\sqrt{2}\,x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}},$$

$$u = \frac{xy^2}{z^3},$$

$$M\left(\frac{1}{3},\ 2,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\,|b|\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$$\overline{\text{grad}\,u} = \frac{y^2}{z^3}\vec{i} + \frac{2xy}{z^3}\vec{j} - \frac{3xy^2}{z^4}\vec{k}$$

$$\overline{\text{grad}\,u} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{16}{9}\vec{k}$$

$$\vec{a}\left\{\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};\ \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}};\ -\frac{16}{9}\right\}$$

$$\overline{\text{grad}\,v} = 27\sqrt{2}\,x^2\vec{i} - \frac{3y^2}{2\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{12z^2}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$$\overline{\text{grad}\,v} = \frac{27\sqrt{2}}{9}\vec{i} - \frac{3\cdot 4}{2\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{12\cdot 3}{\sqrt{3}\cdot 2}\cdot\vec{k} =$$

$$= 3\sqrt{2}\,\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j} - 6\sqrt{3}\,\vec{k}$$

$\vec{b}\{3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; -5\sqrt{5}\}$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\cdot 3\sqrt{2} + \frac{16}{9}\cdot 5\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{64\cdot 2}{9\cdot 3} + \frac{64\cdot 2}{81\cdot 3} + \frac{16\cdot 15}{81}}\cdot\sqrt{9\cdot 2 + 9\cdot 2 + 125}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

№3 Найти векторные линии в векторном поле a:

$$a = 9z\,\vec{i} - 4x\,\vec{k}$$

$a_x = 9z$; $a_y = 0$; $a_z = -4x$;

Уравнение векторной линии:

$$\boxed{\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}}$$

$$\frac{dx}{9z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-4x} \Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \\ \frac{dx}{9z} = -\frac{dz}{4x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x\,dx + 9z\,dz = 0 \\ y = C_1 \end{cases}$$

Интегрируем:

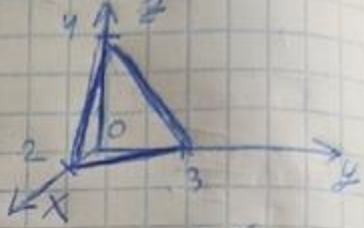
$$\int 4x\,dx + \int 9z\,dz = C_2;\quad 2x^2 + \frac{9}{2}z^2 = C_2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = C_2}$$ — эллипсы

№6 Найти поток векторного поля a через часть плоскости P, расположенную в 1-ом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz)

$$a = \pi x \vec{i} + 2\pi y \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$P: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$



$$P: z = 3 - \frac{3x}{2} - \frac{3y}{4}$$

$\vec{N} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right\}$ — нормальный вектор

Длина: $|\vec{N}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{12}, \Rightarrow$

$$\underline{\vec{n}} = \frac{\vec{N}}{|N|} = \left\{ \frac{6}{\sqrt{61}}; \frac{3}{\sqrt{61}}; \frac{4}{\sqrt{61}} \right\}$$

Скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{6\pi x + 6\pi y + 8}{\sqrt{61}}$$

Поток векторного поля:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n})\, ds = \frac{1}{\sqrt{61}} \iint_S (6\pi x + 6\pi y + 8)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{61}} \iint_D (6\pi x + 6\pi y + 8) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx dy$$

Но $z'_x = -\frac{3}{2}$; $z'_y = -\frac{3}{4}$, поэтому,

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{61}}{4}.$$

Тогда Поток:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} \iint_D (6\pi x + 6\pi y + 8)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (6\pi x + 6\pi y + 8)\,dy = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^2 dx \left(3\pi xy + \frac{3\pi y^2}{2} + 4y\right)\Big|_0^{4-2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(12\pi x - 6\pi x^2 + 6\pi(4 - 4x + x^2) + 16 - 8x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-12\pi x - 8x + 24\pi + 16\right) dx =$$

$$= \int_0^2 (12\pi + 8 - 4x - 6\pi x)\,dx = \left(12\pi x + 8x - 2x^2 - 3\pi x^2\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 24\pi + 16 - 8 - 12\pi = 12\pi + 8.$$

Ответ: $12\pi + 8$.

№8 Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S.

$\vec{a} = (2x+y)\vec{i} + (y+2z)\vec{k}$

$S: \begin{cases} z = 2 - 4(x^2+y^2) \\ z = 4(x^2+y^2) \end{cases}$

$\operatorname{div} a = 2 + 2 = 4$

$2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$

$2 = 8\rho^2$

$\rho = \frac{1}{2}$

$$\Pi = \iiint_V 4\,dV = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\,d\rho \int_{4\rho^2}^{2-4\rho^2} dz =$$

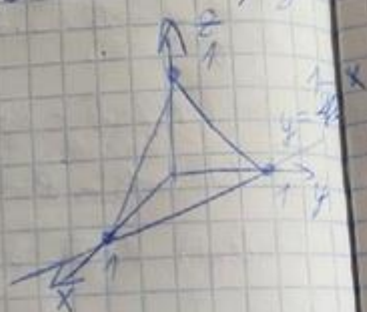
$$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} (2\rho - 8\rho^3)\,d\rho =$$

$= 4\int_0^{2\pi}(\rho^2 - 2\rho^4)\Big|_0^{1/2} d\varphi = 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)d\varphi =$

$= \frac{4}{8}\cdot 2\Pi = \Pi$

Ответ: Π.

№9 Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S.



$\vec{a} = x^2\vec{i}$

$S: \begin{cases} z = 1 - x - y \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \end{cases}$

$div\,\vec{a} = 2x$

$z = 0 \qquad y = 1 - x$

Поток,

$\Pi = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 2x\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2x(1-x-y)dy =$

$= 2\int_0^1 x\,dx\left(\int_0^{1-x} dy - \int_0^{1-x} x\,dx - \int_0^{1-x} y\,dy\right) =$

$= 2\int_0^1 x\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx =$

$= 2\int_0^1 x\left(1 - x - x + x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2}\right)dx =$

$= \int_0^1 (2x - 2x^2 - 2x^2 + 2x^3 - x + 2x^2 - x^3)dx =$

$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

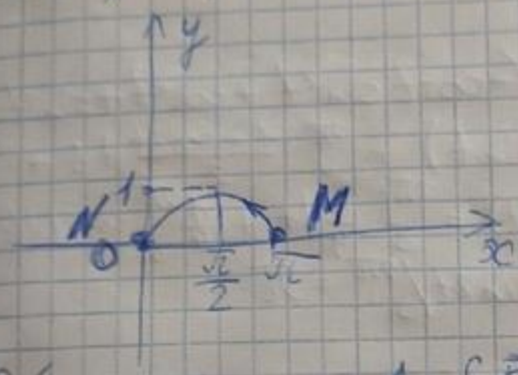
Ответ: $\frac{1}{12}$.

№10. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M до точки N.

Дано: $\vec{F} = xy\,\vec{i}$

L: $y = \sin x$

$M(\pi, 0)$, $N(0, 0)$



Работа равна: $A = \int\limits_L \vec{F}\, d\vec{S} =$

$$= A = \int\limits_{MN} xy\, dx = \int\limits_{\pi}^{0} x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x \\ du = dx \\ v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -x\cos x \Big|_{\pi}^{0} + \int\limits_{\pi}^{0} \cos x\, dx = -(0 - \pi\cos\pi) +$$

$$+ \sin x \Big|_{\pi}^{0} = \pi(-1) + 0 = -\pi.$$

Ответ: $-\pi$.

№11. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствуюнию возрастанию параметра t).

$$\overline{a} = xy\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \ y = \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$x' = -\sin t$$

$$y' = \cos t$$

$$z' = \cos t$$

$$Ц = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,(d \sin t) + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, d(\sin t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t\, d(2t) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Ответ: π.

№12 Найти модуль циркуляции векторного поля a вдоль контура Γ.

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{z}$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 1, \ z > 0 \end{cases}$$

Γ – пересечение сферы и цилиндра. Сфера радиуса $R = 3$, цилиндр радиуса $r = 1$, $\Rightarrow$ Γ – окружность $r = 1$, выше оси OXY на высоте $z = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Запишем Γ в параметрических уравнениях

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= 2\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \; 0 \le t \le 2\pi$$

Тогда $\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 0 \end{cases}$

Циркуляция будет равна

$$C = \oint_{\Gamma} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$

$$= \oint_{\Gamma} (-y x' + x y' + 3z^2 \cdot z')\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ответ: 2π.