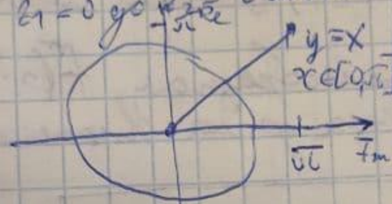
$g_{24} = \frac{J_1}{E_2}$ $\quad g_{43} = \frac{J_1}{E_2}$

$U_{44}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R}\right)$

I. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_L \sin z\, dz$, L – отрезок прямой от точки $O(0;0)$ до точки $M(\pi;\pi)$ (от $z_1 = 0$, до $z_2 = \pi + i\pi$)

$$\int\limits_L \sin z\, dz = \left| z_1 = 0 \text{ до } z_2 = \pi + i\pi \quad y = x,\ x \in [0,\pi] \right| = \int_0^{\pi} \sin(x+iy)\, d(x+iy)$$



$$= \int\limits_L \sin z\, dz = \cancel{\int\limits_l u\,dx - v\,dy + \int\limits_l (u\,dy + v\,dx)}$$

$$= \int\limits_L \sin(x+iy)\, d(x+iy) = \int\limits_l \left((\sin x \cdot \cos(iy) + \cos(x) \cdot \sin(iy) \right) d\, x+iy$$

$$= \int\limits_L \sin x \cdot \cos(iy)$$

2)

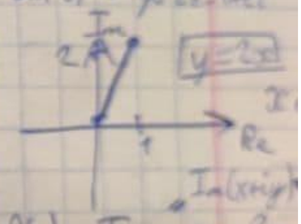
IV Вычислить интеграл по заданной L

$$\int_L f(z)\,dz = \int (u(x;y) + i\,v(x;y))\,d(x+iy) = \int (u(x;y) + i\,v(x;y))\,(dx+i\,dy) =$$

$$= \int_L u(x;y)\,dx - v(x;y)\,dy + i\int_L v(x;y)\,dx + u(x;y)\,dy$$

① $\int_L \operatorname{Im} z\,dz$ а) L: отрезок, соедин. т. $z_1=0$ и $z_2 = 1+2i$
б) L: дуга параболы $y=2x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+2i$

$$\int_{L_1} \operatorname{Im} z\,dz = \left| L_1: \text{отр.},\ z_1=0,\ z_2=1+2i \right| = \left| \right.$$



$\boxed{y=2x}$

$\operatorname{Im}(x+iy)$

$f(z) = \operatorname{Im} z = y = 2x$

$dz = d(x+iy) = d(x+2ix) =$
$= dx + d(2ix) = dx + 2i\,dx$

$$= \int_0^1 2x\,(dx + 2i\,dx) =$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx + 4i\int_0^1 x\,dx =$$

$$= (x^2 + 2ix^2)\Big|_0^1 = 1+2i$$

$$\int_{L_2} \operatorname{Im} z\,dz = \Big| L_2: y = 2x^2: z_1 = 0 \text{ до } z_2 = 1+2i \quad x\in[0;1]$$

$y=2x^2$

$f(z) = \operatorname{Im} z = y = 2x^2$
$dz = d(x+iy) = d(x+i2x^2) =$
$= dx + 2i\cdot 2x\,dx = dx + 4ix\,dx \Big| =$

$$= \int_0^1 2x^2(dx + 4ix\,dx) = 2\int_0^1 x^2\,dx + 8i\int_0^1 x^3\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 2i\,x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i$$

② $\int (4\pi + z^2)\,dz = \Big| L: |z| = 2$ - окр-сть, $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right.$

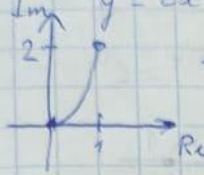
$= 2\int_0 x\,dx + 4i\int x\,dx =$

$= (x^2 + 2ix^2)\Big|_0^1 = 1 + 2i$

$f(z) = \operatorname{Im} z = y = 2x$

$dz = d(x+iy) = d(x + i2x) = dx + d(2ix) = dx + 2i\,dx$

$\int_{L_2} \operatorname{Im} z\,dz = \left| \begin{array}{l} L_2:\ y = 2x^2;\ z_1 = 0 \text{ до } z_2 = 1+2i \\ y = 2x^2 \quad x \in [0;1] \\ f(z) = \operatorname{Im} z = y = 2x^2 \\ dz = d(x+iy) = d(x + i2x^2) = \\ = dx + 2i \cdot 2x\,dx = dx + 4ix\,dx \end{array} \right| =$



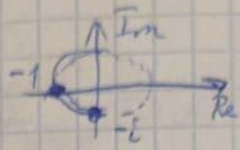
$= \int_0^1 2x^2(dx + 4ix\,dx) = 2\int_0^1 x^2\,dx + 8i\int_0^1 x^3\,dx =$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 2ix^4\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i$

② $\int_L (i\bar{z} + z^2)\,dz = \left| \begin{array}{l} L:\ |z| = 2 \text{ - окр-сть},\ \arg z \in [\frac{\pi}{2};\pi] \\ \boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi} \\ f(z) = f(r \cdot e^{i\varphi}) = ir \cdot e^{-\varphi \cdot i} + r^2 \cdot e^{i2\varphi} = |r = 2| = \\ = 2ie^{-i\varphi} + 4e^{i2\varphi} \quad \varphi \in [\frac{\pi}{2};\pi] \end{array} \right| =$

$= 2\cdot 2\cdot i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (i\cdot e^{i\varphi} + 2e^{i2\varphi})\, e^{i\varphi}\cdot d\varphi = 4i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (i + 2e^{3i\varphi})\, d\varphi =$

$= 4i\left(i\varphi + \frac{2}{3i} e^{3i\varphi}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4\left(-\varphi + \frac{2}{3} e^{3i\varphi}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4\left(-\frac{\pi}{2} +\right.$

$\left.+ \frac{2}{3}\left(e^{3\pi i} - e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)\right) =$ |  | $= 4\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(-1+i)\right) =$

$= -2\pi - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} i$

I ② $\int z^k \cdot dz$, а) L – окр. $|z|=1$, $\arg z \in [0; 2\pi]$
б) L – окр. $|z|=1$, $\arg z \in [0; 4\pi]$

$\int_L z^k \cdot dz =$ | L: $|z|=1$ $\arg z = [0; 2\pi]$; z^k – аналит $z \in C$, $k \neq -1$; $k=-1$, $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$ | =

$= \left| \left[\begin{array}{l} \frac{z^{k+1}}{k+1}\Big|_0^{2\pi},\ k \neq -1 \\ \ln z \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} \end{array} \right. \right| = \left| z = r\cdot e^{i\varphi} = e^{i\varphi} \right|$

1) $k \neq -1$ $\quad J = \frac{1}{k+1}\left(e^{i\varphi(k+1)}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k+1}\left(e^{i2\pi(k+1)} - e^{i0}\right) =$
$= \frac{1}{k+1}(1-1) = 0$

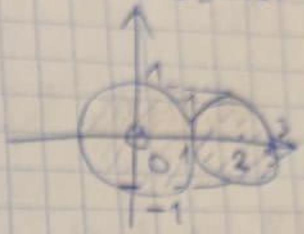
2) $k=-1$ $\quad \int_L \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_0^{2\pi} = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)\Big|_0^{2\pi} = i(2\pi + 2\pi k -$
$- 0 - 2\pi k) = 2\pi i$

$\oint_L \frac{dz}{z} = 2\pi i$

4. $\oint\limits_L \frac{dz}{(z+2)^3 z} = \left| \begin{array}{l} g(z) = \frac{1}{(z+2)^3 z} \\ z \neq 0, \quad z \neq -2 \end{array} \right.$

$L_1: |z-2| = 1$

$L_2: |z| = 1$

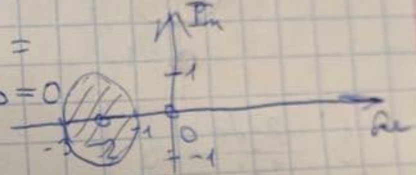


$\oint g(z) \cdot dz = 0$

$\oint\limits_{L_2} \frac{dz}{(z+2)^3 z} = \oint \frac{\frac{1}{(z+2)^3}}{z-0} dz = 2\pi i \left.\frac{1}{(z+2)^3}\right|_{z=0} =$

$= \frac{2\pi i}{2^3} = \frac{\pi i}{4}$

$\oint \frac{dz}{(z+2)^3 z} = \left| \begin{array}{l} L_3: |z+2| = 1 \\ |z| = a \\ |a| < 1 \end{array} \right| z_0 = 0 \quad =$



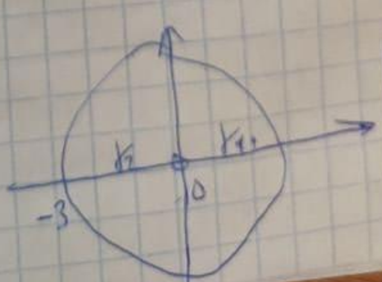
$\int\limits_{L_3} = \oint\limits_{\substack{|z+2|=a \\ |a|<1}} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{(z+2)^3} \cdot dz$

$= \left| \begin{array}{l} z_0 = -2 \\ n = 2 \\ f(z) = \frac{1}{z} \end{array} \right| = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left.\left(\frac{1}{z}\right)''\right|_{z=-2} = \left| \left(\frac{1}{z}\right)'' = (z^{-1})'' = \right.$

$-(-z^{-2})' = (-1)(-2) \cdot z^{-3} = \frac{2}{z^3} = \frac{2\pi i}{2} \cdot \left.\frac{2}{z^3} = \right|_{z=-2} = \pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) =$

$= -\frac{\pi i}{4}$

$\oint\limits_{L_4} \frac{dz}{(z+2)^2 z} = \left| \; L_4: |z| = 3 \right.$



$=$

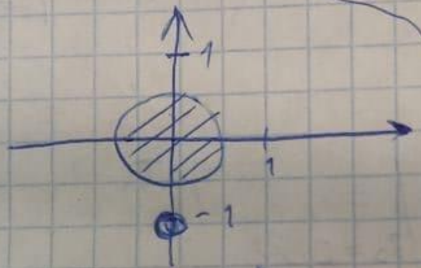
$$\oint\limits_{\substack{|z|=a \\ |a|<1}} \frac{\frac{1}{(z+2)^3}}{z}\,dz + \oint\limits_{\substack{|z+2|=a \\ |a|<1}} \frac{\frac{1}{z}}{(z+2)^3}\,dz = \frac{\pi i}{4} + \left(-\frac{\pi i}{4}\right) = 0$$

$$\oint \frac{dz}{(z+2)^3 z} = \left[\begin{array}{l} 0 \quad \text{оди} \\ \frac{\pi i}{4} - z=0 \\ -\frac{\pi i}{4} - z=-2 \end{array}\right.$$

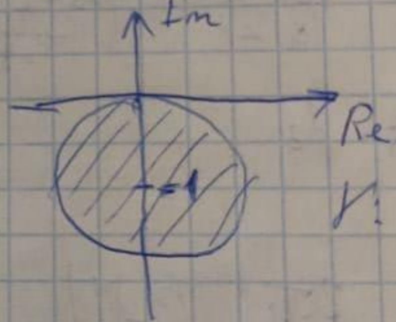
I ③ $\oint\limits_L \frac{z^2\,dz}{z+i}$ а) $L: |z| = \frac{1}{2}$ б) $L: |z+i| = 1$

$g(z) = \frac{z^2}{z+i}$ $z=-i$ – особ
на грани. обл

а)



$$\oint\limits_{L_1} \frac{z^2\,dz}{z+i} = 0$$

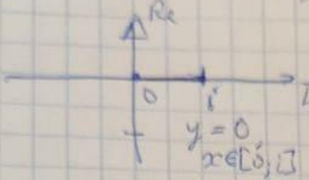


$\gamma: |z+i| = a$
$|a|<1$

$$\oint g(z)\,dz + \oint g(z)\,dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_2} g(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_+} g(z$$

$$\oint\limits_{L_2} \frac{z^2}{z+i}\,dz = 2\pi i \cdot z^2\Big|_{z=-i} = -2\pi i$$

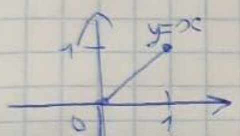
9. $\int_L \operatorname{Re} z \, dz$: L - отрезок прямой $z_1 = 0$, $z_2 = i$ =

$=$ |  $y = 0$, $x \in [0; 1]$ | $= \int 0 \cdot (dx + i\,dx) =$

$= 0$

11) $\int (z^3 - 1)\, dz$:

L - отрезок $z_1 = 0$ до $z_2 = 1+i$



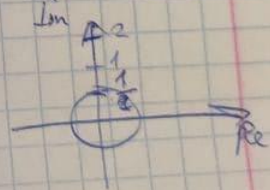
$y = x$ $\quad \int ((x + iy)^3 - 1) \cdot dz = \frac{z^4}{4} - \cancel{z} \Big|_0^1 =$

$= \frac{z^4}{4} - z \Big|_0^1 = \cancel{} \frac{(x+iy)^4}{4} - x + iy \Big|_0^1 =$

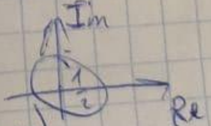
$= \frac{(1 + i\cancel{x})^4}{4} - 1 + i1 = \frac{(1^2 + i^2 + 2i)(2i + 1^2 + i^2)}{4} - 1 + i1 =$

$= \frac{(1 - 1 + 2i)(2i + 1^2 - 1)}{4} - 1 + i = \frac{4i^2}{4} - 1 + i = -2 + i$

12) $\int_L \frac{z}{z+1}\, dz$ $\quad$ а) $|z| = \frac{1}{2}$ $\quad$ б) $|z| = 2$



$\int_L \frac{z}{z+1} = \int \frac{z + 1 - 1}{z+1}\, dx =$



$= \cancel{\int} z - \ln|z+1| = \quad$ а) $=$

$= \left| |z| = \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \cancel{\ln|z+1|} \ln|(x+1) + iy|.$

Занятие 16. $\boxed{\text{Интегрирование ФКП.}}$

~~Теорема~~

Теорема: Пусть $f(x)$ аналитическая в односвязной области D, а l — некоторая кривая (с нач. точкой z_1 и конечной — z_2), целиком лежащая в D. Тогда:

1) Существует первообразная $F(x)$ для $f(x)$ в D, и для $\int_l f(x)dx$ верна ф-ла Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_L f(x)\,dx = F(z_2) - F(z_1)},$$

т.е. этот интеграл не зависит от вида кривой l, а зависит от начальной и конечных точек z_1 и z_2.

2) Если l — замкнутая кривая, то верна теорема Коши:

односв. области $$\boxed{\oint_l f(z)\,dx = 0}$$ ($\oint$ — инт. по замкн. кривой)

3) Если точка z_0 лежит внутри замкнутой кривой l, то верна интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-z_0}\,dx \quad \text{и} \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \; n=1,2\dots$$

Теорема Коши для многосвязной обл-ти:

Если $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной контуром Γ и внутренними по отношению к нему контурами $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ и непрерывна в замкнутой области, ограниченной этими контурами, то

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \dots + \oint_{\gamma_n^-} f(z)\,dz = 0$$