Типовой расчёт по математике по теме „Кратные интегралы" VII
ст. гр. 950503 Полховский А.Ф.

Вариант 24

№1 Изменить порядок интегрирования.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f\,dx$$

Построим область интегрирования

$y=-\sqrt{2}$; $y=-1$; $x=0$; $x=-\sqrt{2-y^2} \Rightarrow$
$x^2+y^2=2$.

$$D_1: \begin{cases} -\sqrt{2} \le y \le -1 \\ -\sqrt{2-y^2} \le x \le 0 \end{cases}$$

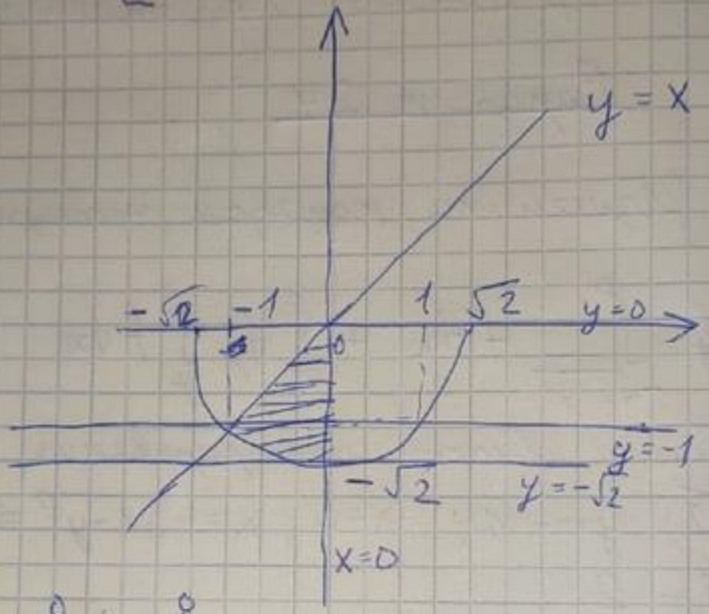
$y=-1$, $y=0$; $x=0$; $x=y$

$$D_2: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ y \le x \le 0 \end{cases}$$

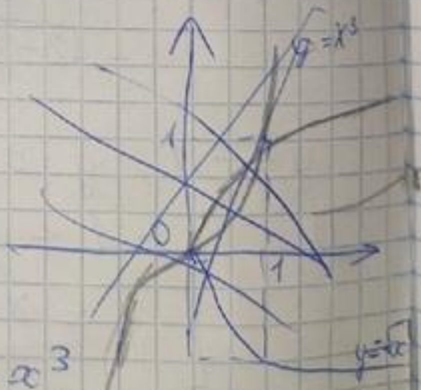
Полховский А.Ф.

$D = D_1 \cup D_2$ область инт-ие:

$$D: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{2-x^2} \le y \le x \end{cases}$$



Ответ: $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\, dy$



№2 Вычислить:

$$\iint\limits_D \left(4xy + 176\, x^3 y^3\right) dx\, dy$$

D: $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^3$.

Область интегрирования: $D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -x^3 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

Интеграл запишется в виде

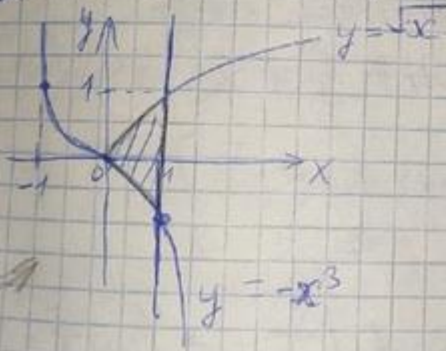
$$\int_0^1 dx \int_{-x^3}^{\sqrt{x}} (4xy + 176x^3y^3)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{4xy^2}{2} + \frac{176x^3y^4}{4} \right)\Bigg|_{-x^3}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 \left(2x\cdot(x - x^6) + 44x^3(x^2 - x^{12})\right)dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2 - 2x^7 + 44x^5 - 44x^{15})\,dx =$$

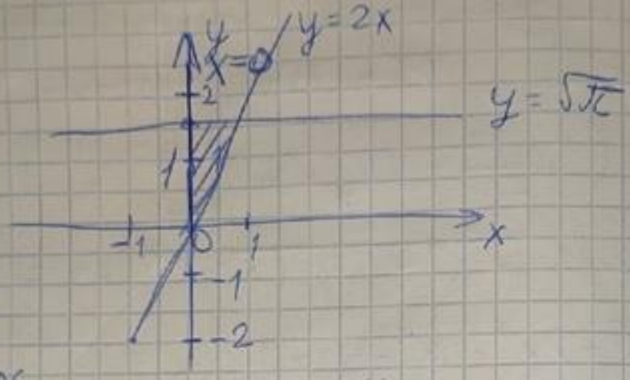
$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^8}{8} + \frac{44x^6}{6} - \frac{44x^{16}}{16}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{8} + \frac{44}{6} - \frac{44}{16} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{22}{3} - \frac{11}{4} = 8 - 3 = 5$$



Ответ: 5.

№3 Вычислить:

$$\iint_D y^2 \cos xy \, dx\,dy \qquad D: x = 0,\ y = \sqrt{\pi},\ y = 2x$$



Область интегрир-ие:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{\pi} \\ 0 \le x \le \frac{y}{2} \end{cases}$$

т.к. Интеграл запишется в виде:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_0^{y/2} y^2 \cos xy \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} y^2 dy \int_0^{y/2} \cos(xy)\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \frac{y^2}{2}; & \text{пр. интер.} \ t_1 = \frac{\pi}{2} \\ dt = y\,dy; & t_2 = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= -(0 - 1) = 1$$

Ответ: 1

№4 Вычислить:

$$\iiint_V y^2 z \cos\frac{xyz}{9} \, dx\, dy\, dz,$$

$x =$

$\cos 0) =$

$$V: \begin{cases} x=9,\ y=1,\ z=2\pi \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$$

Интеграл запишется в виде

$$\int_0^1 dy \int_0^{2\pi} dz \int_0^9 y^2 z \cos\frac{xyz}{9}\, dx =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{2\pi} y^2 z\, dz \int_0^9 \cos\frac{xyz}{9}\, dx = \int_0^1 dy \int_0^{2\pi} y^2 z \cdot \left(\frac{\sin\frac{xyz}{9}}{\frac{yz}{9}} \right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{2\pi} 9y \cdot (\sin(yz) - \sin 0) \cdot dy = 9 \int_0^1 y\, dy \int_0^{2\pi} \sin yz\, dz =$$

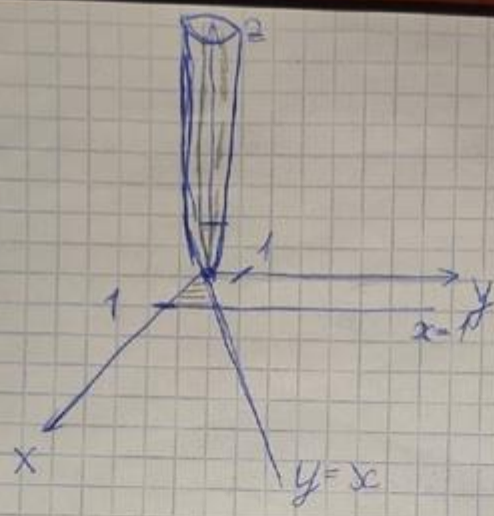
$$= 9 \int_0^1 \frac{y\, dy}{y} \cdot (-\cos yz)\Big|_0^{2\pi} = -9 \int_0^1 dy \cdot (\cos 2\pi y - \cos 0) =$$

$$= -9 \left(\frac{\sin 2\pi y}{2\pi} - y \right)\Bigg|_0^1 = -9(0-1) = 9$$

Ответ: 9.

№ 5 Вычислить:

$$\iiint_V (x+y)\, dx\, dy\, dz; \quad V: \begin{cases} y = x;\ y=0;\ x=1 \\ z=0;\ z = 30x^2 + 60y^2 \end{cases}$$



Интеграл запишется в виде:

$$\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\,dy \int_0^{30x^2+60y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\,dy\,(30x^2+60y^2) =$$

$$= 30\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)(x^2+2y^2)\,dy =$$

$$= 30\int_0^1 dx \int_0^x (x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)\,dy =$$

$$= 30\int_0^1 dx \left(x^3y+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2xy^3}{3}+\frac{2y^4}{4}\right)\Big|_0^x =$$

$$= 30\int_0^1 dx \left(x^4+\frac{x^4}{2}+\frac{2x^4}{3}+\frac{x^4}{2}\right) =$$

$$= 30\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^5}{10}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 30\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-0\right) = \frac{80}{5} = 16$$

Ответ: 16.

№6
данны
$x=$
$x^2=$
x^2+
окруж
Найдё
x^2
$D=3$
Точка $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$

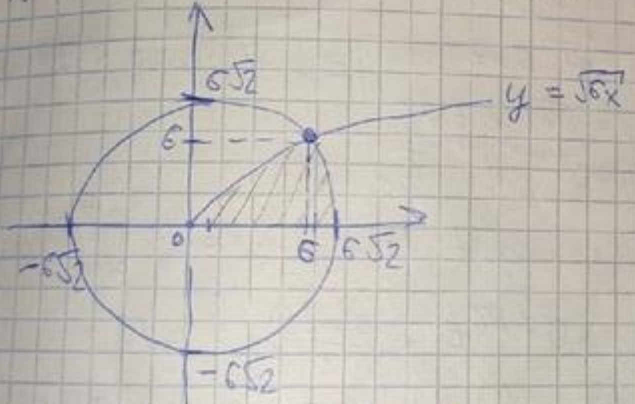
№6 Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

$x = \sqrt{72 - y^2}$, $6x = y^2$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$.

$x^2 = 72 - y^2$

$x^2 + y^2 = 72$; $y^2 = 6x$; $y = 0$; $y \geqslant 0$

окружность $(R = \sqrt{72})$ парабола ось OX всё выше OX.



$(30x^2+60y)\Big] =$

Найдём т. пересечения: $\begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 + y^2 = 72 \end{cases}$

$x^2 + 6x - 72 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 72 = (3 \cdot 6)^2$

$x_2 = \dfrac{-6 + 3 \cdot 6}{2} = 6$

$x_1 = \dfrac{-6 - 3 \cdot 6}{2} = -12 - \varnothing$, не подходит т.к. $y \geqslant 0$

Точка $\begin{cases} x = 6 \\ y = \sqrt{6x} = 6 \end{cases}$

Области опр. кот.ф-ии:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 6 \\ \frac{y^2}{6} \le x \le \sqrt{72-y^2} \end{cases}$$

Площадь:

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_0^6 dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{72-y^2}} dx =$$

$$= \int_0^6 \left(\sqrt{72-y^2} - \frac{y^2}{6}\right) dy = \int_0^6 \sqrt{72-y^2}\,dy - \frac{y^3}{18}\Big|_0^6 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{72}\sin t \\ dy = \sqrt{72}\cos t\,dt \\ \text{пределы инт-ия:} \\ t_1 = 0;\quad t_2 = \frac{\pi}{4} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{72}\cdot\cos t \cdot \sqrt{72}\cos t\,dt - \frac{6^3}{18} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 72\cdot\cos^2 t\cdot dt - \frac{36}{3} = 36\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt -$$

$$- 12 = 36\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 12 =$$

$$= 36\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - 12 = 9\pi + 18 - 12 = 9\pi + 6.$$

Ответ. $9\pi + 6$.

№7 Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

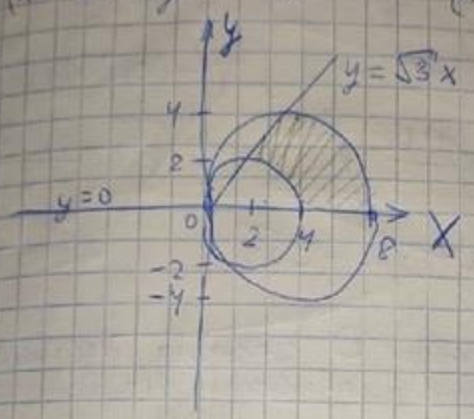
$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3}x.$$

$x^2-4x+4+y^2=4,$ $\qquad$ $x^2-8x+16+y^2=16$

$(x-2)^2+y^2=2^2;$ $\qquad$ $(x-4)^2+y^2=4^2$



$\ldots\cos t \cdot dt =$

$= \frac{6^3}{18} =$

$\ldots 2t)\,dt =$

…нной

В полярных координатах

$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\Rightarrow$

$x^2+y^2=\rho^2$, $dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\theta$

Запишем ур-ия ~~других~~ окр-стей и прямых

(1) $\rho^2=4\rho\cos\theta,\qquad \rho=4\cos\theta,$

(2) $\rho^2=8\rho\cos\theta,\qquad \rho=8\cos\theta;$

(3) $y=\sqrt{3}x, \Leftrightarrow, \rho\sin\theta=\sqrt{3}\rho\cos\theta$

(4) $y=\rho\sin\theta=0$ (~~может~~ при $\theta=0$);

Из (3) $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$, $\Rightarrow \theta=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

$\underline{\theta=\frac{\pi}{3}}$

Область интегрирования: $D: \begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{3} \\ 4\cos\theta\le\rho\le 8\cos\theta \end{cases}$

Площадь:

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} \rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} d\theta =$$

$$= 24 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta = 12 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= 12\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 12\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\right) =$$

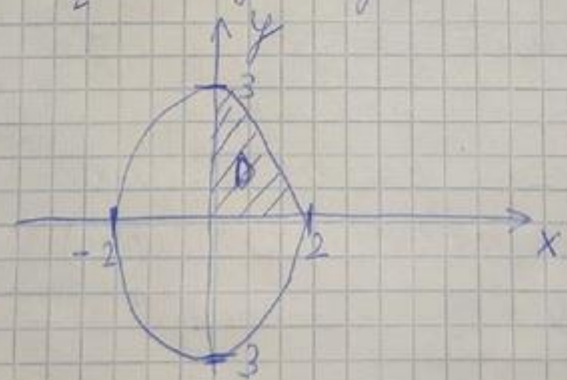
$$= 12\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4\pi + 3\sqrt{3}$$

№9 Пластинка D задана неравенствами, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

D: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$; – эллипс

$x \ge 0$, $y \ge 0$;

$\mu = \cancel{15x^5y}\ x^5 y$



Перейдём к полярным координатам

$x = 2R\cdot\cos\varphi$, $y = 3R\cos\varphi$

$\frac{x^2}{4} +$ ...

Плотность

$\mu = 3$ ...

Масса:

$M =$ ...

$= (-$ ...

$= -12$ ...

Ответ ...

№10 ...

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow R^2=1;\ R=1$

Плотность:

$\mu = 32\cdot R^5 \cdot \cos^5\varphi \cdot 3R\cdot\sin\varphi = 96R^6\cos^5\varphi\sin\varphi$

Масса:

Пр-лы инт-ия $\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le R\le 1\end{cases}$

$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 96R^6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 6R\cdot dR =$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi \frac{96\cdot 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\cdot 1^8}{8} =$

$=(-72)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\, d(\cos\varphi) = -\frac{72}{6}\cdot\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$=-12\cdot(0-1)=12.$

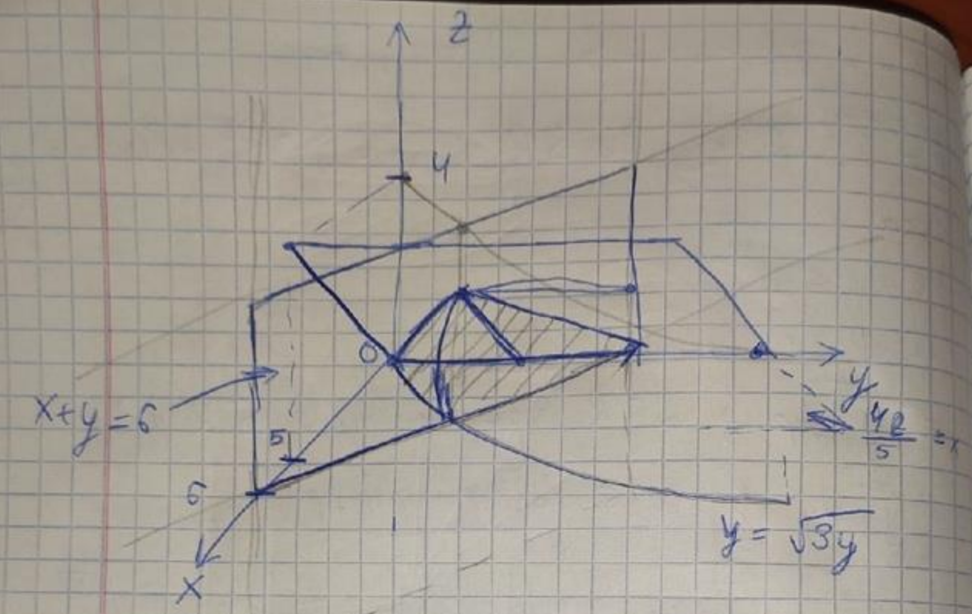
Ответ: 12.

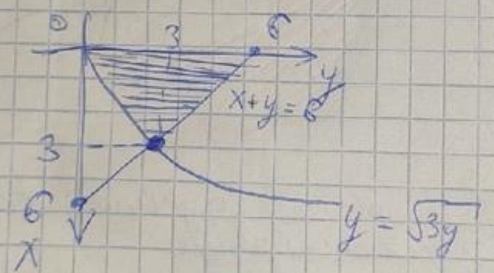
№10 Найти объём тела, заданного ограничивающими его поверхностями

$x+y=6,\quad x=\sqrt{3y}$

$z=4x/5,\quad z=0$

Изобразим пов-ти:





Т.-ка пересечения:

$$\begin{cases} \cancel{y=\sqrt{3x}} \quad x=\sqrt{3y} \\ x+y=6 \end{cases} \qquad x+\frac{x^2}{3}=6 \qquad x^2+3x-18=0$$

$$D = 9+4\cdot 18 = 81 = 9^2$$

$$\cancel{x_2 - \varnothing} \qquad x_1 = \frac{-3+9}{2} = 3 \quad (x \geq 0)$$

$$y_1 = 3$$

Область инт-ия:

$$V: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ \frac{x^2}{3} \le y \le 6-x \\ 0 \le z \le \frac{4x}{5} \end{cases}$$

Объем тела:

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{6-x} dy \int_0^{\frac{4x}{5}} dz =$$

$$= \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{6-x} \frac{4x}{5} dy = \frac{4}{5} \int_0^3 x\,dx \cdot \left((6-x) - \frac{x^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{5} \int_0^3 x \cdot \left(6 - x - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{4}{5} \int_0^3 \left(6x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \left(3 \cdot 9 - \frac{27}{3} - \frac{27 \cdot 3}{4 \cdot 3}\right) = \frac{4}{5} \cdot 9\left(3 - 1 - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 9}{5} \left(2 - \frac{3}{4}\right) = 9.$$

Ответ: 9.

№11. Найти объём тела заданного ограничивающими его поверхностями.

$$\cancel{x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}\,y}$$

$$x^2 + y^2 = 9x, \quad x^2 + y^2 = 12x,$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y = 0 \ (y \ge 0)$$

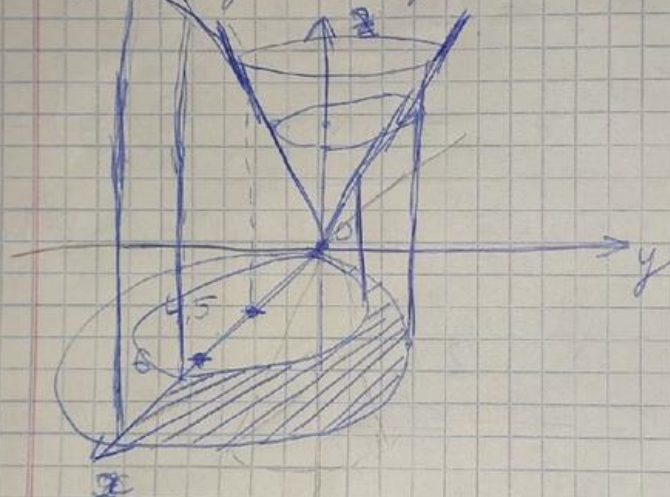
~~Изобразим~~ Построим графики ф-ции

$x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$; $\quad x^2 - 12x + 36 + y^2 = ...$

$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$; $\quad (x-6)^2 + y^2 = 6^2$;

круг в OXY $\quad$ круг в OXY

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ — конус



В полярных координатах:

$\rho^2 = 9\rho\cos\theta$, $\rho = 9\cos\theta$;

$\rho^2 = 12\rho\cos\theta$; $\rho = 12\cos\theta$; цилиндр $\quad z = \rho$ — конус

Область инт-ия:

$$V: \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 9\cos\theta \le \rho \le 12\cos\theta \\ 0 \le z \le \rho \end{cases}$$

Объём:

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{9\cos\theta}^{12\cos\theta} \rho\, d\rho \int_0^{\rho} dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{9\cos\theta}^{12\cos\theta} \rho^2\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_{9\cos\theta}^{12\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{12^3\cos^3\theta - 9^3\cos^3\theta}{3}\, d\theta =$$

$$= \frac{12^3-9}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\, d\theta = (12^2\cdot 4 - 9^2\cdot 3)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cos\theta\, d\theta = 9(64-27)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta =$$

$$=9\cdot 37\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 9\cdot 37\left(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=9\cdot 37\left(1-\frac{1}{3}\right)=9\cdot 37\cdot\frac{2}{3} = 222.$$

Ответ: 222.

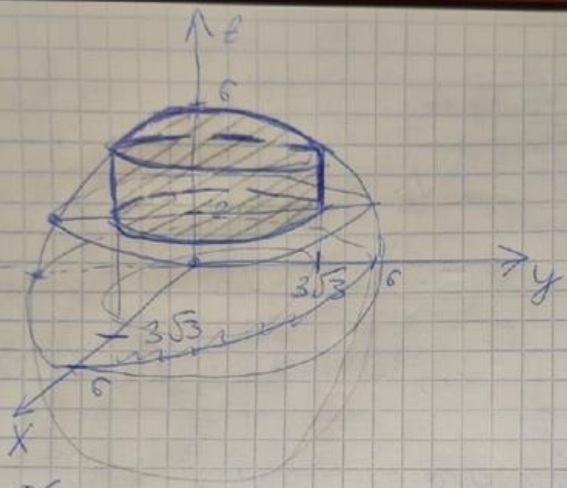
№13 Найти объём тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $R=3\sqrt{3}$

$$\underbrace{z=\sqrt{36-x^2-y^2}}_{\text{сфера}},\quad z=2,\quad \underbrace{x^2+y^2=27}_{\text{цилиндр}}.$$

$$x^2+y^2+z^2=36$$

Область огр-на в цилиндр. координ.:

$$V:\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 3\sqrt{3} \\ 2\le z\le\sqrt{36-\rho^2} \end{cases}$$



Объём тела:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_2^{\sqrt{36-\rho^2}} dz = \theta \Big|_0^{2\pi} \times$$

$$\times \int_0^{3\sqrt{3}} \rho \left(\sqrt{36-\rho^2} - 2\right) d\rho = 2\pi \left(\int_0^{3\sqrt{3}} \sqrt{36-\rho^2}\, \rho\, d\rho - \rho^2 \Big|_0^{3\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 36-\rho^2 \\ dt = -2\rho\, d\rho \qquad \rho\, d\rho = -\frac{dt}{2} \\ t_1 = 36;\ t_2 = 9 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3} \int_0^{9} \sqrt{t}\, dt - (3\sqrt{3})^2 \right) = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{36}^{9} - 27 \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3} (27 - 216) - 27 \right) = 2\pi \cdot 36 = 72\pi.$$

Ответ: 72π.

№ 15. Найти объём тела, заданного неравенствами

$49 \le x^2+y^2+z^2 \le 81$;

$-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0$;

$y \ge 0$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Перепишем координаты в сферические:

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$

Тогда

$7 \le \rho \le 9$

$-\sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{24}} \le \rho\cos\varphi \le 0$

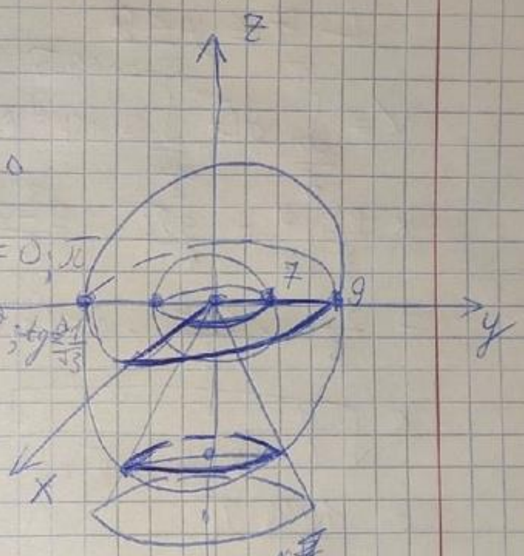
$y = 0 \Rightarrow \rho\sin\theta = 0$; $\theta = 0; \pi$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; $\rho\sin\theta = \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{3}}$; $tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \theta \le \pi$



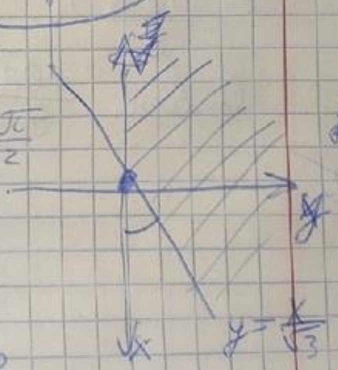
На плоск-ти $z=0$:

$\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

На конусе, $tg\,\beta = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}} =$

$= \sqrt{\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi}} = \sqrt{24}$

$\beta = arctg\sqrt{24}$, $\varphi = \pi - \beta$



$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi-\beta) = \frac{\sin(\pi-\beta)}{\cos(\pi-\beta)} = \frac{\sin\beta}{-\cos\beta} =$$

$$= -\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{24}\ ; \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{24};$$

Тело (обл. ~~инт~~ интегрирования)

$$V: \begin{cases} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \pi \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{24} \\ 7 \le \rho \le 9 \end{cases}$$

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{24}} \sin\varphi \, d\varphi \int_{7}^{9} \rho^2 d\rho = \theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \left(-\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{24}}\right) \times$$

$$\times \frac{\rho^3}{3}\Big|_7^9 = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{9^3-7^3}{3}\left(0-\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{24}\right)\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{386}{3} \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{24}\right) = \frac{965\pi}{9} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\sqrt{24})}} = \frac{965}{9}\frac{\pi}{\sqrt{1+(\sqrt{24})^2}} =$$

$$= \frac{193}{9}\pi$$

Ответ: $\frac{193}{9}\pi$