Индивидуальное домашнее задание
по математике

Полковский Артем Федорович – 24 вар.

Задание 2.2 (24 вар)

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A(x)$, заданного с помощью следующей матрицы оператора

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$$

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 + 0 + 0 - 1 \cdot 1 (1-\lambda) =$$

$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) - 1 + \lambda = 4 - 4\lambda + \lambda^2 -$$

$$- 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 =$$

$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1)(1-\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(1-\lambda)$$

$$\varphi_A(\lambda) = 0$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 3)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ или $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$$D = 16 - 12 = 2^2$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\lambda_3 = \frac{4+2}{2} = 3$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. – собств. значения

$\lambda 3)$

$\lambda 1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1 & 2x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \text{ – любое, например, } 0 \\ x_1 + x_2 - 0 = 0 \\ x_1 + x_2 - 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{x}_1 = \begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

общее реш-е

Бесконечное мн-во решений, ~~беск-ое множ-во~~ ~~– собств. векторов~~

$\lambda 2)$ Аналогично как для λ_1

λ3)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_2 \\ x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Беск-е мн-во решений.

Общее решение:

$$\vec{x}_3 \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

Общие решения (собств. вектора)

$$\vec{X_1} = \begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \qquad \vec{X_3} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$