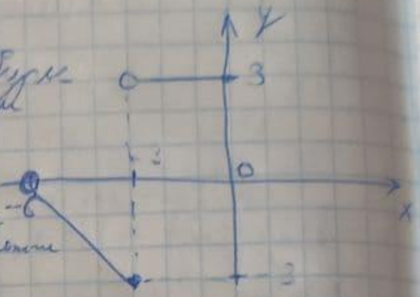
Вариант 21 — Пыховски А. Я.

1. Функция f с периодом $T=6$ задана графически на промежутке $[-6;0]$

1.1. Разложить f в ряд Фурье
1.2. Построить графики ф-ии $f(x)$ и суммы ряда Фурье $S(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$
1.3. Найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, используя полученное разложение



Построим график ф-ии на $(-\infty;+\infty)$

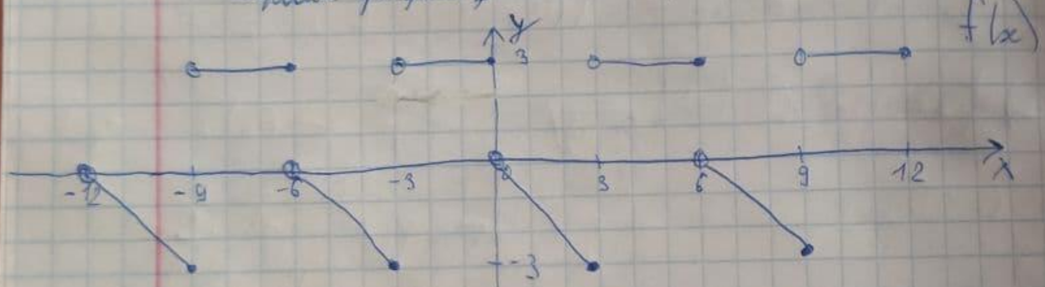
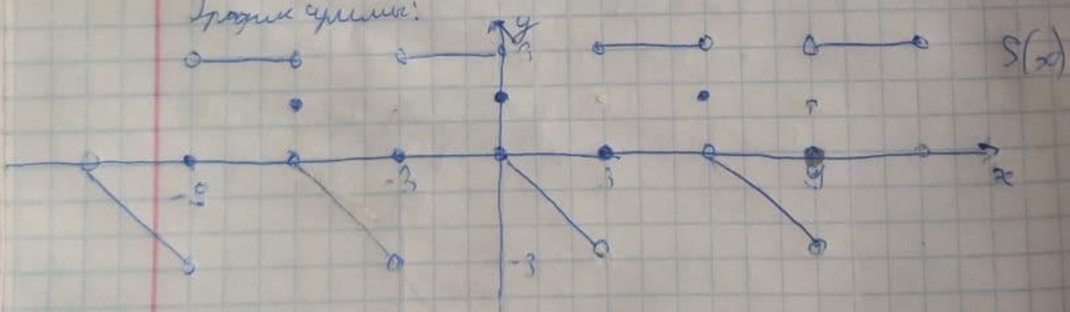


График суммы:



$T=6$, $T=2l$, $l=3$

Ряд – полный, т.к. ф-ия не явл-ся ни чётной, ни нечётной, ряд будет выглядеть как

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

Аналитически $f(x)$ будет выглядеть:

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x \in (-3;0] \\ -x-6, & x \in (-6;-3] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;3] \\ 3, & x \in (-3;0] \end{cases}$$

Ищем коэф-ты:

$$1)\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot dx = \frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3}(-x)\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}dx +\right.$$

$$\left.+\int_{-3}^{0} 3\cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) = \frac{1}{3}\left(\int_{3}^{0} \underset{(1)}{x\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}}dx + \int_{-3}^{0} 3\cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x \quad (1) \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{3}dx \\ du = dx \\ v = \frac{3\sin\left(\frac{\pi n x}{3}\right)}{\pi n} \end{array}\right| \quad \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$\int x\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{3x\sin\frac{\pi n x}{3}}{\pi n} - \frac{3}{\pi n}\int \sin\frac{\pi n x}{3}dx =$$

$$= \left| u = \frac{\pi n x}{3} \quad \int u - \frac{\pi n}{3}dx \right| = \frac{3\pi n x \sin\frac{x\pi n}{3}}{n^2\pi^2} +$$

$$+\frac{9\cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right)}{\pi^2 n^2} = \left(\frac{3\pi n x\sin\frac{x\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} + \frac{9\cos\frac{\pi n x}{3}}{\pi^2 n^2}\right)\Bigg|_{3}^{0} +$$

$$+\frac{9\sin\left(\frac{\pi n x}{3}\right)}{\pi n}\Bigg|_{-3}^{0} = \frac{9}{\pi^2 n^2} - \frac{9\cos\pi n}{\pi^2 n^2} + 0 =$$

$$= \frac{9}{\pi^2 n^2}(1-\cos\pi n) = \frac{9}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$2)\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} 3\sin\frac{\pi n x}{3}dx +\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{3}(-x)\sin\frac{\pi n x}{3}dx\right) = \frac{1}{3}\left(3\cdot\left(-\cos\frac{\pi n x}{3}\right)\cdot\frac{3}{\pi n}\Bigg|_{-3}^{0} -\right.$$

$$-\left(x\cdot\frac{3}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{3}\right) + \frac{3}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{3}\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(x \cdot \frac{3}{\pi n} \cos\frac{\pi n x}{3} - \frac{9}{(\pi n)^2} \sin\frac{\pi n x}{3}\right)\right.$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\pi n} \left(3\left(-\left(\cos 0 - \cos(-\pi n)\right)\right) + 3\cos \pi n - \frac{3}{\pi n} \ldots\right.$

$\left.- \left(0 - \frac{3}{\pi n} \cdot \underset{0}{\underbrace{\sin 0}}\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\left(3\left((-1)^n - 1\right) + 3(-1)^n\right) =$

$= \frac{1}{\pi n} \cdot \left(6 \cdot (-1)^n - 3\right).$

3) $a_0 = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} 3\,dx + \int_{0}^{3}(-x)\cdot dx\right) = \frac{1}{3}\left(3x\Big|_{-3}^{0} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}\right) =$

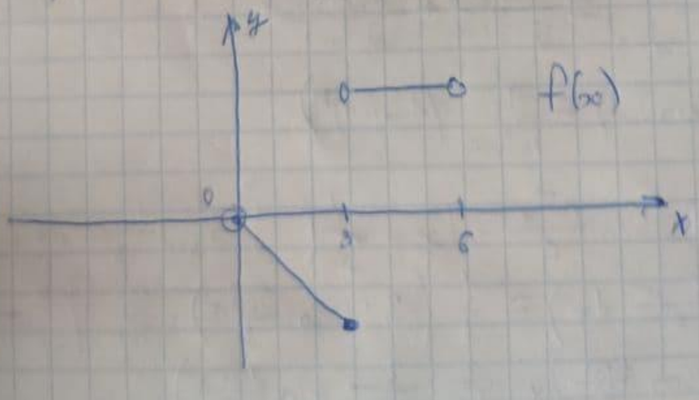
$= \frac{1}{3} \cdot \left(9 - \left(\frac{9}{2} - 0\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$

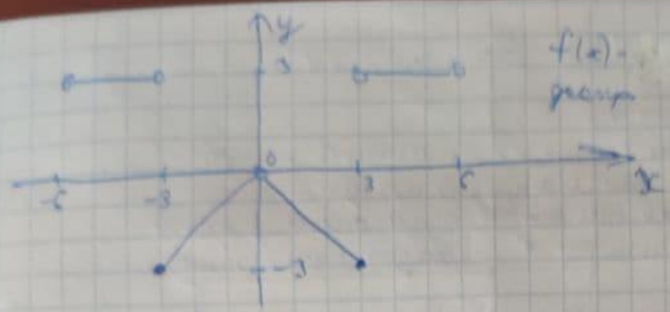
Ітд. $f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{(\pi n)^2} \cdot \left(1 - (-1)^n\right) \cdot \cos\frac{\pi n x}{3} + \frac{1}{\pi n}\left(6(-1)^n \ldots\right.\right.$

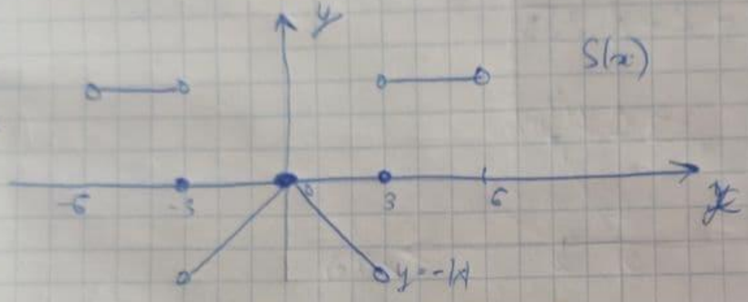
2. Разл-ть ф-цию f, зад-ую на интервале $(0; 6)$ в ряд Фурье по косинусам (доопределив её четным образом на интервале $(-6; 0)$)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } 0 < x \leq 3 \\ 3, & \text{если } 3 < x < 6 \end{cases}$$

Построить графики ф-ции f, её четного продолжения и суммы $S(x)$ ряда Фурье, $x \in [-6; 6]$







~~$T=12$ $l=6$~~ $T=6$ $l=3$

Ф-ия — чётная, коэф. $b_n=0$, ряд неполн.

1) $a_0 = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 (-x)\,dx + \int_3^6 3\,dx\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 3x\Big|_3^6\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{9}{2} + 18 - 9\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} = \frac{3}{2}$

2) $a_n = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 (-x)\cos\frac{\pi n x}{3}\,dx + \int_3^6 3\cos\frac{\pi n x}{3}\,dx\right) =$

$= \left| \begin{array}{l} u=-x \\ du=-1 \\ dv=\cos\frac{\pi n x}{3}dx \quad v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\end{array}\right| = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3x}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 -\right.$

$\left.- \int_0^3 -\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3} + \frac{9}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_3^6\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{9}{\pi n}\cdot\sin \pi n -\right.$

$\left.- \frac{9}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 + \frac{9}{\pi n}\sin 2\pi n - \frac{9}{\pi n}\cdot\sin\pi n\right) =$

$= -\frac{3}{\pi^2 n^2}\cdot(-1)^2 + \frac{3}{\pi^2 n^2} = \frac{3}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{6}{\pi^2(2n-1)^2}$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{\pi^2 (2n-1)^2} \cdot \cos \frac{n \pi x}{3} \right)$$