I. 1) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, при $z=\infty$ $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z-2} = 0$ - У.О.Т

$z_0 = 2$

$\lim\limits_{z\to 2} \frac{1}{z-2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \Rightarrow z_0 = 2$ - полюс

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0)^m = A = |m - min$ - порядок полюса, при $A\neq 0| = \lim\limits_{z\to 2} \frac{1}{z-2}(z-2)^m = |m=1| =$

$= \lim \frac{z-2}{z-2} = 1$

$z_0 = 2$ - полюс 1-~~го~~ порядка

2) $f(z) = \frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2} = \frac{z+2}{(z+2)(z-2)^3}$.

$z_1 = -2$; $z_2 = 2$

$\lim\limits_{z\to -2} \frac{\cancel{(z+2)}\,1}{\cancel{(z+2)}(z-2)^3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{-1}{64}$ - У.О.Т. - $z_1 = -2$

$\lim\limits_{z\to 2} \frac{\cancel{z+2}\,1}{\cancel{(z+2)}(z-2)^2} = \infty$ - полюс

$\lim\limits_{z\to 2} \frac{\cancel{(z+2)}\,1}{\cancel{(z+2)}(z-2)^3}(z-2)^m = |m=3| = \lim\limits_{z\to 2} \frac{\cancel{(z+2)}(z-2)^3}{\cancel{(z+2)}(z-2)^3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_2 = 2$ - полюс 3-го порядка

$z=\infty$; $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\cancel{(z+2)}}{\cancel{(z+2)}(z-2)^3} = 0$ - У.О.Т.

3) $f(z) = \sin\frac{1}{z-2}$

$z_0 = 2$

$\lim\limits_{z \to 2} \sin\frac{1}{z-2}$ — $\overline{\exists}$ — С.О.Т.

$z = \infty$ $\lim\limits_{z \to \infty} \sin\frac{1}{z-2} = \sin 0 = 1$ — У.О.Т.

4) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$

$z_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{\cos z} = \infty$ — полюс

$z_1 = \infty$ $f(z)\ \overline{\exists} \Rightarrow z_1 = \infty$ — не явл. изол.

5) $f(z) = \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$

$z_1 = 0$; $z_2 = -2$; $z_3 = 1$

1) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} = \infty$ — полюс

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} \cdot z^m = |m=1| = \lim\limits_{z \to 0} \frac{(z+3)z}{z(z+2)(z-1)^2} = \frac{3}{2}$

$z_1 = 0$ — полюс 1-го порядка

2) $\lim\limits_{z \to -2} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} = \infty$ — полюс

$\lim\limits_{z \to -2} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}(z+2)^m = |m=1| = \lim\limits_{z \to -2} \frac{z+3}{z(z-1)^2} = \left(\frac{1}{-18}\right)$

$z_2 = -2$ - полюс 1-ого порядка

3) $\lim\limits_{z \to 1} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} = \infty$ - полюс

$\lim\limits_{z \to 1} \frac{(z+3)(z-1)^m}{z(z+2)(z-1)^2} = |m=2| = \lim\limits_{z \to 1} \frac{(z+3)(z-1)^2}{z(z+2)(z-1)^2} =$

$= \frac{4}{3}$

$z_3 = 1$ - полюс 2-ого порядка

4) $z = \infty$

$\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2} \sim \lim\limits_{z \to \infty} \frac{z}{z^4} = \lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{z^3} = 0$ - У.О.Т.

8) $f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$

$z = \infty$

$\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z^2}{1+z^2} = 1$ - У.О.Т.

9) $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$

$z = 0$

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ - $\nexists$ - С.О.Т.

$z = \infty$

$\lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1} = \frac{1}{2}$ - У.О.Т.

13) $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^5}$

1) $z_1=-1$ — полюс 1-го порядка

$\lim\limits_{z\to -1} f(z)=\infty$ — полюс

$\lim\limits_{z\to 1} f(z)\cdot(z+1)^m = |m=1| = \lim\limits_{z\to 1}\frac{z\cancel{(z+1)}}{\cancel{(z+1)}(z-2)^3(z+i)^5} =$

$=\frac{1}{2\cancel{z}(-1+i)^5}$

2) $z_2=2$ — полюс 3-го порядка

$\lim\limits_{z\to 2} f(z)=\infty$ — полюс

$\lim f(z)(z-2)^m = |m=3| = \frac{z(z-2)^3}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^5} =$

$=\frac{2}{3(2+i)^5}$

3) $z=-i$ — полюс 5-го порядка

$\lim\limits_{z\to -i} f(z)=\infty$ — полюс

$\lim\limits_{z\to -i} f(z)(z+i)^m = |m=5| = \lim\limits_{z\to i}\frac{z(z+i)^5}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^5} =$

$=\frac{-i}{(1-i)(-i-2)^3}$

4) $z=\infty$

$\lim\frac{z}{(z+1)(z-2)^3(z+i)^5}=0$ — У.О.Т.

III 4) $\frac{1}{z}\cdot\cos z = f(z)$

$z_0 = 0$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$

$\frac{1}{z}\cos z = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{главн.}} - \underbrace{\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots}_{\text{прав.}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}(-1)^n}{(2n)!}$

$C_{-1} = 1$

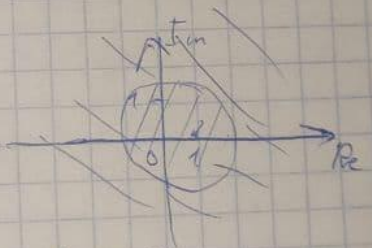
5) $z\cdot\sin z = f(z)$

$z_0 = 0$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$

$z\cdot\sin z = z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^8}{8!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$

2) $f(z) = \frac{1}{3-z}$, $z_0 = 1$



1) $|z-1| < 2$

2) $|z-1| > 2$

$\frac{1}{3-z} = 2\cdot\frac{1}{\frac{2}{2} - \frac{(z-1)}{2}} = \left| \begin{matrix} S \div \\ b_1 = 1;\ |q| = \frac{|z-1|}{2} < 2 \end{matrix} \right| =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n-1}}$

$\frac{1}{3-z} = 2\cdot\frac{1}{\frac{2}{2} - \frac{(z-1)}{2}} = 2\cdot\frac{2}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z-1} - 1} =$

$= -2\cdot\frac{2}{z-1}\cdot\frac{1}{1 - \frac{2}{z-1}} = \left| \begin{matrix} S \div \\ b_1 = 1,\ |q| = \left|\frac{2}{z-1}\right| > 2 \end{matrix} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(z-1)^n}$