

# VIII

Плывовый расчёт по математике  
по теме "Векторный анализ"  
ст. гр 950503 - Плывовский А.В.

## Вариант 24

№2 Найти угол между градиентами  
скалярных полей  $V(x, y, z)$  и  $U(x, y, z)$  в точке

$$V = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{yz^3}{\sqrt{3}},$$

$$U = \frac{xy^2}{z^3},$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{y^2}{z^3} \vec{i} + \frac{2xy}{z^3} \vec{j} - \frac{3xy^2}{z^4} \vec{k}$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \vec{j} - \frac{16}{9} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \left[ \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}; \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}; -\frac{16}{9} \right]$$

$$\vec{\text{grad}} V = 27\sqrt{2}x^2 \vec{i} - \frac{3y^2}{2\sqrt{2}} \vec{j} - \frac{12yz^2}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{27\sqrt{2}}{9} \vec{i} - \frac{3 \cdot 7}{2\sqrt{2}} \vec{j} - \frac{12 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 2} \vec{k} =$$

$$= 3\sqrt{2} \vec{i} - 3\sqrt{2} \vec{j} - 6\sqrt{3} \vec{k}$$

$$\vec{r} = 3\sqrt{2}\vec{i} - 3\sqrt{2}\vec{j} - 6\sqrt{3}\vec{k}$$

$$\cos \rho = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{16}{8} \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{64 \cdot 2}{9 \cdot 3} + \frac{64 \cdot 2}{81 \cdot 3} + \frac{16 \cdot 16}{81} \cdot \sqrt{9 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

103. Найти векторные линии в векторном поле  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = 9z\vec{i} - 4x\vec{k}$$

$$a_x = 9z; \quad a_y = 0; \quad a_z = -4x;$$

Уравнение векторной линии:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

$$\frac{dx}{9z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-4x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{9z} = -\frac{dz}{4x} \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$4x dx + 9z dz = 0$$

$$C_1 = 0$$

Интегрируем:

$$\int 4x dx + \int 9z dz = C_2; \quad 2x^2 + \frac{9}{2}z^2 = C_2$$

$$\frac{x^2}{3z^2} + \frac{z^2}{2z^2} = C_2 \quad - \text{интеграл}$$



№5 Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через часть плоскости  $P$ , расположенную в 1-ой октанте (криволинейный сегмент с осью  $Oz$ )

$$\vec{a} = 6\pi x \vec{i} + 6\pi y \vec{j} + 8 \vec{k}$$

$$P: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

$$P: z = 3 - \frac{3x}{2} - \frac{3y}{4}$$

$$\vec{N} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right\} - \text{нормальный вектор}$$

$$\text{Длина: } |\vec{N}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{12} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left[ \frac{6}{\sqrt{61}}; \frac{3}{\sqrt{61}}; \frac{4}{\sqrt{61}} \right]$$

Скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{6\pi x + 6\pi y + 8}{\sqrt{61}}$$

Поток векторного поля:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \frac{1}{\sqrt{61}} \iint_S (6\pi x + 6\pi y + 8) dS = \\ &= \frac{1}{\sqrt{61}} \iint_D (6\pi x + 6\pi y + 8) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \end{aligned}$$

Но  $z'_x = -\frac{3}{2}$ ;  $z'_y = -\frac{3}{4}$ , поэтому,

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{61}}{4}$$

Тогда Поток:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} \iint_D (6\pi x + 6\pi y + 8) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 dx \int_0^{4-x} (6\pi x + 6\pi y + 8) dy = \frac{1}{2} \times \\
 &\times \int_0^2 dx \left( 3\pi xy + \frac{3\pi y^2}{2} + 4y \right) \Big|_0^{4-x} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (12\pi x - 6\pi x^2 + 6\pi(4-x+x^2) + 16 - 8x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (-12\pi x + 8x + 24\pi + 16) dx = \\
 &= \int_0^2 (12\pi + 8 - 4x - 6\pi x) dx = (12\pi x + 8x - 2x^2 - 3\pi x^2) \Big|_0^2 = \\
 &= 24\pi + 16 - 8 - 12\pi = 12\pi + 8.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $12\pi + 8$ .

1108 Найти поток векторного поля  $a$  через замкнутую поверхность  $S$ .

$$a = (2x+y)\vec{i} + (y+2z)\vec{k}$$

$$S: \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2) \\ z = 4(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} a = 2 + 2 = 4$$

$$2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$$

$$2 = 8\rho^2$$

$$\rho = \frac{1}{2}$$

$$\Pi = \iiint_V 4 dV = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \int_{4\rho^2}^{2-4\rho^2} dz =$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} (2\rho - 8\rho^3) d\rho =$$





$$= 4 \int_0^{2\pi} (\rho^2 - 2\rho^4)^{1/2} d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot 2\pi = \pi$$

Ответ:  $\pi$ .

№9 Найти поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$ .

$$\vec{a} = x^2 \vec{e}$$

$$S: \begin{cases} z = 1-x-y \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = 2x$$

$$z=0$$

$$y=1-x$$

Поток

$$\pi = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 2x dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2x(1-x-y) dy =$$

$$= 2 \int_0^1 x dx \left( \int_0^{1-x} dy - \int_0^{1-x} xy dx - \int_0^{1-x} y^2 dy \right) =$$

$$= 2 \int_0^1 x \left( y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

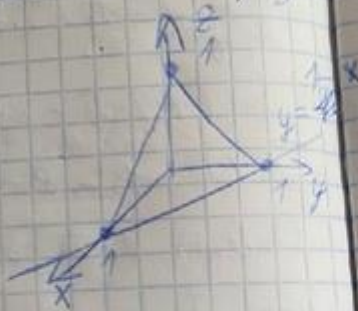
$$= 2 \int_0^1 x \left( 1-x-x+x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2 - 2x^2 + 2x^3 - x + 2x^2 - x^3) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Ответ:  $\frac{1}{12}$ .

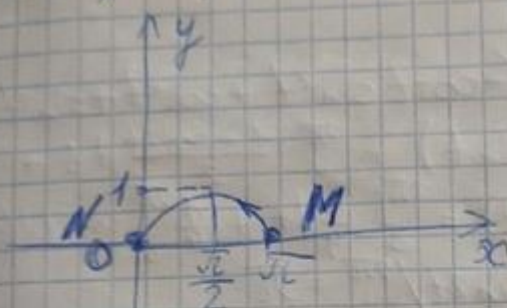


№ 10. Найти работу вектора  $F$  при перемещении точки  $M$  по дуге  $L$  от точки  $N$ .

~~№ 10~~  $\vec{F} = xy \vec{e}$

$L: y = \sin x$

$N(\pi, 0), M(0, 0)$



$\int (x-y)dy =$  Работа поля:  $A = \int_L \vec{F} \cdot \vec{S} =$

$= A = \int_{NN} xy dx = \int_{\pi}^0 x \sin x dx = \left[ \begin{array}{l} U = x \\ dU = dx \\ V = \sin x \\ dV = \cos x \end{array} \right] =$

$= -x \cos x \Big|_{\pi}^0 + \int_{\pi}^0 \cos x dx = - (0 - \pi \cos \pi) +$

$+ \sin x \Big|_{\pi}^0 = \pi(-1) + 0 = -\pi.$

Ответ:  $-\pi.$

№ 11. Найти ур-ние кривой, если  $a$  — число конуса  $\sqrt{b}$  — радиус,  $c$  — высота.





Заменим  $\int_C$  параметриз. сполучаючись

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 0 \end{cases}$$

Визначимо функцію підінтегрування

$$Q = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-y x' + x y' + 3z^2 z') dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + 0) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Отже:  $2\pi$ .



~~10~~