Inteligencia Artificial
Act6: Determinantes de Matrices

Arturo Garza Rodríguez

February 2025

En esta actividad se demostrará si aplicar la regla de Sarrus (o método de la lluvia) a una matriz 4x4 es equivalente a la expansión de Laplace (o método de pivotes), ambos métodos utilizados para obtener el determinante de una matriz.

1. Expansión de Laplace

Sabemos que al aplicar la expansión de Laplace a una matriz M obtenemos el determinante de una matriz.
Comenzamos con una matriz de 4x4 definida con números arbitrarios tal que:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

Este método nos explica que seleccionamos una fila o columna, y usaremos sus elementos como pivotes. La suma de los productos de los pivotes por las matrices menores asociadas respectivamente es el determinante.

1.1. Defínción de productos de pivotes

Seleccionamos la *fila 0* como pivote, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} \tag{4}$$

Terminamos con:

$$\det M = a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} \tag{5}$$

1.2. Determinantes de matrices menores asociadas

Para calcular los determinantes de matrices 3x3, podemos aplicar de nuevo la expansión de Laplace a estas matrices, o, como ya demostramos que la regla de Sarrus sí se cumple para matrices 3x3, usamos esta forma más rápida para obtener su determinante.
No será necesario 'expandir' la matriz, se pueden obtener los productos de manera directa. Recordemos que al utilizar el metodo de pivotes, estaremos alternando el signo entre + y - con cada nuevo término.

1.2.1. Término 1

Para el primer término:

$$a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} \tag{6}$$

Obtenemos su determinante, quedando lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} = fkp + gln + hjo - hkn - gjp - flo \tag{7}$$

Por lo tanto, el primer término se reduce a:

$$a \cdot (fkp + gln + hjo - hkn - gjp - flo) = afkp + agln + ahjo - ahkn - agjp - aflo \tag{8}$$

1.2.2. Término 2

Para el segundo término:

$$-b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} \tag{9}$$

Obtenemos su determinante, quedando lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} = ekp + glm + hio - hkm - gip - elo \tag{10}$$

Por lo tanto, el segundo término se reduce a:

$$-b \cdot (ekp + glm + hio - hkm - gip - elo) = -(bekp + bglm + bhio - bhkm - bgip - belo) \tag{11}$$

Para el tercer término:

$$c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} \tag{12}$$

Obtenemos su determinante, quedando lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} = ejp + flm + hin - hjm - flm - eln \tag{13}$$

1.2.3. Término 3

Por lo tanto, el tercer término se reduce a:

$$c \cdot (ejp + flm + hin - hjm - flm - eln) = cejp + cflm + chin - chjm - cflm - celn \tag{14}$$

Para el cuarto término:

$$-d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} \tag{15}$$

Obtenemos su determinante, quedando lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} = ejo + fkm + gin - gjm - fio - ekn \tag{16}$$

1.2.4. Término 4

Por lo tanto, el cuarto término se reduce a:

$$-d \cdot (ejo + fkm + gin - gjm - fio - ekn) = -(dejo + dfkm + dgin - dgjm - dfio - dekn) \tag{17}$$

1.3. Resultado final

Regresando a ecuación inicial (5), igualamos a lo obtenido:

$$\begin{gathered} \det M = a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} = \\ (afkp + agln + ahjo - ahkn - agjp - aflo) - (bekp + bglm + bhio - bhkm - bgip - belo) \\ +(cejp + cflm + chin - chjm - cflm - celn) - (dejo + dfkm + dgin - dgjm - dfio - dekn) \end{gathered} \tag{18}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \det M = {} & (afkp + agln + ahjo - ahkn - agjp - aflo) - (bekp + bglm + bhio - bhkm - bgip - belo) \\ & +(cejp + cflm + chin - chjm - cflm - celn) - (dejo + dfkm + dgin - dgjm - dfio - dekn) \end{aligned} \tag{19}$$

Este resultado es el que compararemos con el que se obtenga al aplicar la regla de Sarrus a la misma matriz.

2. Regla de Sarrus

Empezamos definiendo de igual forma, una matriz 4x4 tal que:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

2.1. Expansión de matriz de 3x3

La regla de Sarrus nos dice que, para matrices 3x3 se 'eleva' o 'expande' la matriz para que cada elemento de la primer columna tenga dos diagonales (ambas de 3 elementos), una hacia cada lado.
Ej. Si tenemos la matriz N de 3x3

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ampliamos la matrix para que cada elemento de la primer fila (a, b y c) tengan 2 diagonales de 3 elementos. Entonces copiamos la primer columna y la agregamos al costado de la 3 columna:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & a \\ d & e & f & d \\ g & h & i & g \end{pmatrix}$$

De esta forma, el elemento 'a' ya tiene dos diagonales, la diagonal principal de la matriz original, y afh. Pero aún se necesita cumplir para 'b' y 'c', enotnces agregamos otra fila:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$

Ahora, hemos completado ambas diagonales para el elemento 'b', siendo estas bfg, y bdi, de igual forma, se completaron para 'c', la diagonal secundaria de la matriz original, y cdh.
Es decir, para una matrix 3x3, tuvimos que agregar 3-1 columnas, el razonamiento lógico nos dice que al generalizar este predicamiento, tenemos que para una matriz NxN, deberemos agregar las primeras N-1 columnas al costado de la última columna.

2.2. Expansión de matriz 4x4

Siguiendo esta estructura, volvemos con la matris M, como es 4x4, la relación anterior nos dice que agregaremos las primeras 3 columnas al costado de la última, quedando así:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ i & j & k & l & i & j & k \\ m & n & o & p & m & n & o \end{pmatrix}$$

De esta forma, ya tenemos ambas diagonales para todos los elementos de la primera fila. Procedemos a obtener el producto de las diagonales, aquellas que vayan de izquierda a derecha llevan signo positivo (+), mientras que las que van en dirección contraria llevan signo negativo (-).

2.3. Obtencion de términos de matriz expandida

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & a & b & c \\ e & f & g & h & e & f & g \\ i & j & k & l & i & j & k \\ m & n & o & p & m & n & o \end{pmatrix}$$

Las diagonales hacia la derecha de cada uno de los elementos de la *fila 0* son:

$$afkp + bglm + chin + dejo \tag{20}$$

Mientras que las diagonales hacia la izquierda (comenzando desde la ultima columna de la matriz elevada) son:

$$-(cfip + belo + ahkn + dgjm) \tag{21}$$

Al realizar la suma, obenemos que:

$$\det M = afkp + bglm + chin + dejo - cfip - belo - ahkn - dgjm \tag{22}$$

3. Comprobación de resultados

3.1. Expansión de Laplace vs Regla de Sarrus

Una vez que realizamos ambos procedimientos sobre la matriz 4x4, podemos comprobar los resultados.

En las ecuaciones 19 y 22 tenemos que *det M* está igualado a una suma de términos. Por igualación de fórmulas obtenemos que:

$$\begin{aligned} &(afkp + agln + ahjo - ahkn - agjp - aflo) - (bekp + bglm + bhio - bhkm - bgip - belo) \\ &+(cejp + cflm + chin - chjm - cflm - celn) - (dejo + dfkm + dgin - dgjm - dfio - dekn) \\ &= \\ &afkp + bglm + chin + dejo - cfip - belo - ahkn - dgjm \end{aligned} \tag{23}$$

Algunos de los términos se encuentran en ambos lados de la ecuación, por lo que podemos decir que se 'canclean' entre sí, resultando en:

$$\begin{aligned} &agln + ahjo - agjp - aflo - bekp - bglm - bhio + bhkm + bgip + belo \\ &+cejp + cflm - chjm - cflm - celn - dejo - dfkm - dgin + dgjm + dfio + dekn \\ &= \\ &bglm + dejo - cfip - belo - dgjm \end{aligned} \tag{24}$$

Como se aprecia en 24, aunque hayamos eliminado los términos semejantes de ambos lados de la ecuación, no logramos obtener una igualdad coherente, por lo tanto reescribimos esto como:

$$\begin{aligned} &agln + ahjo - agjp - aflo - bekp - bglm - bhio + bhkm + bgip + belo \\ &+cejp + cflm - chjm - cflm - celn - dejo - dfkm - dgin + dgjm + dfio + dekn \\ &\neq \\ &bglm + dejo - cfip - belo - dgjm \end{aligned} \tag{25}$$

4. Concusión final

Aunque logremos reducir un poco más los términos de 24 no lograremos obtener una igualdad, por lo tanto, se comprueba que el 'método de la lluvia' no funciona para matrices 4x4.

■