1.3.2. Случайные величины и их распределения

Оглавление

Определения

Цель занятия:

Рассмотреть тему “Случайные величины и их распределения” для решения задач

План занятия:

1. Определения
2. Примеры задач
3. Пример функции распределения случайных величин
4. Примеры абсолютно непрерывных случайных величин

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P), где

Ω – пространство элементарных событий,

F – сигма-алгебра подмножеств Ω , элементы F – события,

P – вероятностная мера, то есть, сигма-аддитивная мера на F, такая, что $P(\Omega) = 1$.

Числовая функция $\xi : \Omega \to R$, измеримая относительно сигма-алгебры F на Ω и борелевской сигма-алгебры $B(R)$, называется случайной величиной. Условие измеримости требует, чтобы прообраз борелевского множества в R был измерим в Ω.

Будем говорить, что для случайной величины ξ задан закон распределения (или просто задано распределение), если указан способ вычислять вероятности попадания значений $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ во всякое борелевское множество в R.

Если случайная величина принимает конечный или счетный набор значений, будем говорить, что она дискретная. Для дискретных случайных величин задать распределение – это задать вероятности, с которыми она принимает все свои возможные значения. Разберем несколько примеров.

Примеры

1. **Геометрическое распределение** с параметром p, $0 < p < 1$.

Случайная величина принимает значения $k = 1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями

$P(\xi = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$

2. **Биномиальное распределение** с параметром p, $0 < p < 1$.

Случайная величина принимает значения $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ (конечное число) с вероятностями

$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k (1 - p)^{n-k}$

3. **Распределение Пуассона** с параметром $\lambda > 0$.

Случайная величина ξ принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Проверка корректности

Проверим, что для этих трех распределений выполнено условие $P(\Omega) = 1$:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$;
2. $\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$;
3. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}! = e^{-\lambda} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$.

Функция распределения случайных величин

В общем случае (не только для дискретных) случайных величин определяется так называемая функция распределения. Это числовая функция действительного переменного, определяемая по формуле

$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) \equiv P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x)$.

Можно показать, что эта функция принимает значения в [0, 1], не убывает, непрерывна справа для всех x, $F(-\infty) = 0$,, $F(+\infty) = 1$.

Заметим, что для дискретной случайной величины функция распределения является ступенчатой.

Если ξ устроена так, что существует такая неотрицательная функция $p_{\xi}(t)$ такая, что при любом $x \in R$ выполнено

$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = \int_0^x p_{\xi}(t)dt$,

То мы будем говорить что ξ – абсолютно непрерывная случайная величина, и p_{ξ} – ее плотность.

Примеры абсолютно непрерывных случайных величин

Приведем основные примеры абсолютно непрерывных случайных величин:

1. **Равномерное распределение на** $[a, b]$**:**

$p_{\xi} = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$,

$F_{\xi} = \frac{x-a}{b-a}\chi_{[a,b]}$.

2. **Показательное распределение с параметром** $\lambda > 0$**:**

$p_{\xi} = \lambda e^{-\lambda x}\chi_{[0,+\infty)}$,

$F_{\xi} = (1 - e^{-\lambda x})\chi_{[0,+\infty)}$.

3. **Нормальное распределение с параметрами** $\mu, \sigma (\sigma > 0)$

$p_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$.

Проверка корректности

Аналогичным образом, проверим для этих распределений, что $P(\Omega) = 1$:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = \int_a^b p(t)dt = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2})dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sqrt{2\pi\sigma^2} = 1$.

Итоги:

1. Вспомнили определения случайных величин\ и их распределений
2. Рассмотрели примеры функции распределения случайных величин
3. Рассмотрели примеры абсолютно непрерывных случайных величин