Пример применения

1.3.3. Числовые характеристики случайных величин

Оглавление

Цель занятия

Рассмотреть тему “Числовые характеристики случайных величин” для решения задач

План занятия

1. Рассмотрим определения
2. Решим и рассмотрим задачу на вычисление математического ожидания
3. Решим и рассмотрим задачу на вычисление дисперсии

Математическое ожидание:

Для дискретной случайной величины ξ, принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots,$ называется число, определенное формулой

$E\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \cdot P(\xi = x_k)$.

Если ряд в правой части этого равенства не сходится абсолютно, то математическое ожидание не определено.

Для абсолютно непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется формулой

$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_\xi(x)dx$.

Аналогично, определить математическое ожидание абсолютно непрерывной величины можно только в случае, если интеграл в правой части абсолютно сходится.

Отметим важнейшие **свойства матожидания**:

1. $E(c) = c$, где c – число
2. $E(\lambda \cdot \xi + \mu \cdot \eta) = \lambda \cdot E(\xi) + \mu \cdot E(\eta)$, где λ, μ – числа
3. $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$, где ξ, η – независимые случайные величины (имеющие конечные математических ожидания).

Дисперсия случайной величины определяется по формуле

$D\xi = E((\xi - E\xi)^2)$,

Если математическое ожидание в правой части определено и сходится.

Заметим, что в силу линейности математического ожидания можно переписать формулу выше в виде

$D\xi = E((\xi - E\xi)^2) = E(\xi^2 - 2\xi \cdot E\xi + (E\xi)^2) = E(\xi^2) - (E\xi)^2$.

Отметим важнейшие **свойства дисперсии**:

1. $D\xi \geq 0$, если дисперсия вообще определена,
2. $D(c) = 0$,
3. $D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D\xi$, где c – число
4. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, где ξ, η – независимые случайные величины (имеющие конечные дисперсии).

Средним квадратичным отклонением называется корень из дисперсии:

$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$.

Пример вычисления математического ожидания

Сейчас мы на примере посмотрим, как вычислять математическое ожидание и дисперсию для данной случайной величины.

Вычислим матожидание и дисперсию случайной величины, имеющей геометрическое распределение с вероятностью $p : p_k = p \cdot q^{k-1}$, где $q = 1 - p$

$E\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot pq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot (\sum_{k=1}^{+\infty} q^k)' = p(\frac{q}{1-q})' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Пример применения

Пример вычисления дисперсии

Вычислим теперь $E(\xi^2)$:

$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot p_k = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \cdot p_k + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \cdot p_k + E\xi.$

Преобразуем первое слагаемое в этой формуле:

$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p_k = pq \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq(\sum_{k=2}^{+\infty} q^k)'' = pq(\frac{q^2}{1-q})'' = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$

Таким образом,

$D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$

Аналогичным образом можно вычислить матожидания и дисперсии всех случайных величин, о которых шла речь в предыдущем занятии.

Итоги:

1. Рассмотрели определения
2. Решили и рассмотрели задачу на вычисление математического ожидания
3. Решили и рассмотрели задачу на вычисление дисперсии