# 1.3.1. Классическая вероятность. Геометрическая вероятность. Формула полной вероятности и формулы Байеса

## Цель занятия:

Напомнить основные аксиомы, понятия и базовые утверждения теории вероятностей

## План занятия:

1. Подробно рассмотрим аксиоматику Колмогорова.
2. Рассмотрим классическую и геометрическую вероятность как частные случаи вероятностных пространств
3. Выведем формулу полной вероятности и формулу Байеса.
4. Разберем пример применения формулы Байеса.

## Аксиоматика Колмогорова

В теоретико-множественной аксиоматике теории вероятностей основной объект – это вероятностное пространство $(\Omega, F, P)$. Оно состоит из трех основных ингредиентов:

$\Omega$ – **пространство элементарных событий**. Его элементы $\omega \in \Omega$ называются **элементарными событиями**. В результате любого случайного эксперимента на выходе может наблюдаться только одно элементарное событие (или исход) $\omega$.

$F \subset 2^{\Omega}$ – **алгебра подмножеств множества $\Omega$**. Ее элементы $A \in F$ называются **измеримыми подмножествами $\Omega$** и интерпретируются как случайные события. Требуется, чтобы $F$ было так называемой $\sigma$-алгеброй, то есть, чтобы оно было замкнуто относительно взятия счетного количества пересечений и/или объединений ее элементов, а также взятия дополнений. Это требование соотносится с интуитивным представлением о случайных событиях: **пересечению** событий $A \cap B$ отвечает событие, состоящее в том, что A и B произошли одновременно. **Объединению** $A \cup B$ – событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B. Другими словами, в некотором смысле пересечение – это логическое **"и"**, объединение – это логическое **"или"**. Взятие **дополнения** $\bar{A}$ при этом, разумеется, соответствует логическому **"не"**.

$P: F \to [0, 1]$ – **вероятностная мера** (или просто **вероятность**). Требуется, чтобы $P$ была - аддитивной, то есть, чтобы $P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \cup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ для попарно непересекающихся измеримых событий $A_k$. При этом требуется также, чтобы $P(\oslash) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

## Классическая и геометрическая вероятность как частные случаи вероятностных пространств

**Если множество $\Omega$ конечно или счетно,** то говорят о так называемой дискретной модели теории вероятностей. Очень важный в приложениях случай вероятностного пространства – это так называемая **классическая вероятность.** Пусть $\Omega$ – конечно, и состоит из элементарных событий $\omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, которые по той или иной причине необходимо считать "равновероятными", "равновозможными". (Пример такой ситуации – это, скажем, подбрасывание честной игральной кости. $\Omega$ в таком случае состоит из шести элементов $\omega_1, \ldots, \omega_6$, интерпретация которых такова: $\omega_k =$ "на кубике выпало число $k$".) Алгебра событий $F$ в таком случае совпадает со всеми подмножествами $\Omega$, то есть, $F = 2^{\Omega}$. Меру $P$ определяют на элементарных событиях равномерным образом, то есть, $P(\omega_k) = \frac{1}{n}$. Ясно, что такое определение позволяет вычислить вероятность любого события (подмножества) $A \subset \Omega$ по формуле $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Эта формула – и есть **классическое определение вероятности**.

В жизни бывают ситуации, когда $\Omega$ не является счетным. Пример такой ситуации – это стрельба в круглую мишень. Скажем, можно задаться вопросом, с какой вероятностью гипотетический стрелок попадет внутрь круга радиуса вдвое меньше, чем мишень. В таком случае говорят о непрерывных моделях вероятности. Одна из простейших таких моделей – так называемая **геометрическая вероятность.** В ней пространство $\Omega$ является измеримым (по Лебегу, например) подмножеством вещественного пространства $R^n$, алгебра $F \subset 2^{\Omega}$ определяется тогда, как алгебра измеримых подмножеств $\Omega$ , а сама вероятность определяется по формуле, аналогичной классической вероятности: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu$ – мера в $R^n$ (опять же, например, Лебега).

## Формула полной вероятности и формула Байеса

Очень важное определение. Пусть $(\Omega, F, P)$ – вероятностное пространство. Пусть $A \in F$ – некоторое событие положительной вероятности, то есть, $P(A) \neq 0$. Тогда для всех измеримых подмножеств $B \in F$ можно определить так называемую условную вероятность события $B$ при наступлении события $A$ по формуле

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Эта формула называется **формулой условной вероятности**, и сама величина $P(B|A)$ называется **условной вероятностью** события $B$ при наступлении события $A$.

Если теперь мыслить $P(\cdot|A) = P_A$ как функцию $P_A : F \to [0, 1]$, то мы получим новую вероятностную меру на $F$, и, следовательно, новое вероятностное пространство $(\Omega, F, P_A)$. Мыслить эту меру нужно следующим образом: предположим, событие $A$ уже наступило, и это известно достоверно. Тогда можно задаться вопросом: с какой вероятностью при этом знании (как говорят, апостериорном) наступит событие $B$? Ответ дается формулой условной вероятности.

Очень часто на практике найти (или измерить/оценить) условную вероятность $P(B|A)$ – гораздо более простая задача, чем измерить/оценить вероятность совместного наступления событий $P(A \cap B)$. Поэтому формулу условной вероятности можно читать и в следующем виде:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Эта формула имеет тривиальное, однако чудовищно важное обобщение: **формулу полной вероятности.**

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полный набор попарно несовместных событий положительной вероятности. То есть, требуется, чтобы $Hi \cap Hj = \oslash$ для всех $i, j$, и $\sum_k H_k = 1$. Пусть $A \in F$ – произвольное событие. Тогда справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_k P(A|H_k) \cdot P(H_k).$$

События $H_k$ в этом контексте называются гипотезами, и читать эту формулу можно следующим образом. Вероятность наступления события $A$ может быть вычислена так: нужно найти вероятности $A$ в предположении, что верны все гипотезы $H_k$ из полного набора гипотез, и затем сложить с весами, равными вероятностями самих гипотез.

Отметим еще одну важнейшую формулу теории вероятностей, **формулу Байеса.**

Пусть $A, H \in F$ – два события. Об $H$ мы, опять же, будем думать как о гипотезе из полного набора $\{H, \bar{H}\}$, а об $A$ – как о некотором произвольном событии. Запишем вероятность их одновременного наступления двумя способами посредством формулы условной вероятности:

$$P(A \cap H) = P(H|A) \cdot P(A) = P(A|H) \cdot P(H).$$

Из этой формулы можно выразить вероятность $P(H|A)$:

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)\cdot P(H)}{P(A)},$$

И запишем полную вероятность события $A$, стоящую в знаменателе, посредством формулы полной вероятности:

$$P(A) = P(A\,|\,H)\cdot P(H) + P(A\,|\,\bar{H})\cdot P(\bar{H}).$$

Подставляя это соотношение в уравнение выше, получим знаменитую формулу Байеса:

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)\cdot P(H)}{P(A|H)\cdot P(H) + P(A|\bar{H})\cdot(1-P(\bar{H}))}.$$

В этом контексте вероятность гипотезы $P(H)$ принято называть **априорной вероятностью** гипотезы, а условную вероятность $P(H|A)$ – **апостериорной**. Сила формулы Байеса состоит в том, что она позволяет при появлении новой информации (о том, что произошло событие $A$), улучшить наше представление о том, с какой вероятностью, или, как говорят, с каким уровнем доверия, имеет место гипотеза $H$.

## Пример применения формулы Байеса

Допустим, в некоторой контрольной группе из 10000 человек в среднем 1 имеет приобретенный иммунодефицит. Пациент сдает тест, достоверность которого составляет 99%. Допустим, пришел положительный результат теста. Можно задать вопрос: стоит ли паниковать? Другими словами: с каким уровнем доверия имеет место гипотеза “у пациента ВИЧ”?

Ответ на этот вопрос может дать формула Байеса. До того, как пациент узнал результаты анализов, априорная вероятность заболевания у него составляла $1/10000$. Однако положительный тест вносит поправку в достоверность гипотезы о заболевании.

В наших обозначениях $H =$ "пациент болен ВИЧ", $A =$ "пришел положительный тест". Мы должны вычислить уровень достоверности гипотезы $H$ при условии $A$. Итак, априорная вероятность есть $P(H) = 1/10000$; достоверность теста есть $P(A\,|\,H) = 0,99$. Положительный тест может прийти как в случае, если пациент действительно болен (за это отвечает первое слагаемое в знаменателе, $P(A\,|\,H)\cdot P(H) = 0,99\cdot 0,0001$), так и в случае, если тест оказался ложно-положительным (второе слагаемое, $P(A\,|\,\bar{H})\cdot(1 - P(H)) = 0,01 - 0,9999$). Применяя формулу Байеса, найдем апостериорную вероятность инфекции:

$$P(H|A) = \frac{0,99\cdot 0,0001}{0,99\cdot 0,0001 + 0,01\cdot 0,9999} \approx 0,01 = 1\%.$$

Таким образом, после положительного теста уровень доверия к наличию инфекции у пациента составляет всего 1%! Именно по этой причине тесты на ВИЧ и другие опасные и/или редкие болезни делают дважды или трижды. Действительно, по формуле Байеса можно вычислить апостериорную вероятность инфекции, если известно, что пришло два положительных теста:

$$P(H|A^2) = \frac{0,9999\cdot 0,0001}{0,9999\cdot 0,0001 + 0,0001\cdot 0,9999} = 0,5 = 50\%.$$

В случае с тремя положительными тестами мы имеем:

$$P(H|A^3) = \frac{0,999999\cdot 0,0001}{0,999999\cdot 0,0001 + 0,000001\cdot 0,9999} \approx 0,99 = 99\%.$$

## Итоги:

1. Вспомнили аксиоматику Колмогорова
2. Определили классическую вероятность
3. Определили геометрическую вероятность
4. Вывели формулу полной вероятности и формулу Байеса, продемонстрировали ее работу на примере