Задача коммивояжёра

Артур Мутолапов 798

9 ноября 2019

1 Постановка задачи

1.1 Стандартная задача коммивояжёра

Дано: граф $G = (V, E)$ и веса на рёбрах $w : V \to R_+$
Найти: гамильтонов цикл минимального веса

1.2 Метрическая задача коммивояжёра

Дано: полный граф $G = (V, E)$ и веса на рёбрах $w : V \to R_+$, т.ч. $\forall\, x, y, z \in V :\ w(x, z) \le w(x, y) + w(y, z)$
Найти: гамильтонов цикл минимального веса

2 Т. Для стандартной задачи коммивояжёра не существует константных алгоритмов приближения, если P != NP

Опр. Пусть $true\_ans$ - истинный ответ в задаче коммивояжёра, alg_ans - ответ, полученный в результате работы алгоритма. Алгоритмом с аппроксимацией ρ будем называть алгоритм, такой что $\frac{alg\_ans}{true\_ans} \le \rho$.

Теорема:

$$P \ne NP \Rightarrow \forall \rho \ge 1 \neg\exists \text{ полиномально вычислимого алгоритма с аппроксимацией } \rho$$

Доказательство:

От прот. Зафиксируем ρ, для которого существет алгоритм с аппроксимацией ρ.

1) Пусть $G = (V, E)$ - произвольный граф. Построим полный граф $G' = (V, E')$ и зададим на нём веса рёбер след. образом:

$$c(u,v) = 1,\ (u,v) \in E$$
$$c(u,v) = \rho|V| + 1,\ (u,v) \notin E$$

2) Утв. В G есть гамильтонов цикл $\Leftrightarrow$ в G' есть гамильтонов цикл веса $|V|$.

2.1) Док-во $\Rightarrow$: возьмем гам. цикл в G, тогда он присутствует в том же виде в G', при этом все ребра имеют вес 1, значит весь цикл имеет вес $|V|$.

2.2) Док-во $\Leftarrow$: гамильтонов цикл содержит |V| рёбер по определению. Так как вес цикла равен $|V|$ и все рёбра в G' имеют вес ≥ 1, то каждое ребро (u,v) в этом цикле имеет вес 1, а значит $(u,v) \in E$, а значит все такие ребра образуют гамильтонов цикл в G.

3) Если в G нет гам. цикла, то по (2) самый легкий гам. цикл в G' имеет вес $\geq (\rho|V|+1) + (|V|-1) > \rho|V|$. Отсюда, если в G' существует гам. цикл веса $\leq \rho|V|$, то в G есть гам. цикл.

4) Возьмём алгоритм с аппроксимацией ρ. Пусть ans - результат работы этого алгоритма на графе G. Тогда возможны два случая.

4.1) $ans/\rho > |V| \Rightarrow$ в G' нет гам. цикла веса $|V| \Rightarrow$ по (2) в G нет гам. цикла.

4.2) $ans/\rho \leq |V| \Rightarrow ans \leq \rho|V| \Rightarrow$ по (3) в G есть гам. цикл.

5) Таким образом, в (4) мы за полиномиальное время проверяем, есть ли гам. цикл в графе G, но задача $HAMCYCLE \in NP \Rightarrow P = NP$ - противоречие с условием.

ч.т.д.

3 Алгоритм, дающий 2-приближение

3.1 Описание

1) С помощью алгоритма Крускала найдем минимальное остовное дерево.

2) Запустим по дереву обход в глубину, каждую вновь посещенную вершину записываем в массив, тем самым запоминая порядок обхода. Тогда внутренние вершины дерева будут встречаться в массиве несколько раз, листья - по одному.

3) Оставим в порядке обхода лишь по одному экземпляру каждой вершины, причем оставляем тот экземпляр, который раньше всех встречается в массиве. Добавим в конец полученного пути стартовую вершину - получим гамильтонов цикл.

3.2 Точность аппроксимации

Т. Полученный гамильтонов цикл имеет вес не более чем в 2 раза больший, чем вес решения метрической задачи коммивояжёра на этом графе.

Доказательство:

1) Пусть M - вес минимального остовного дерева, OPT - вес минимального гам. цикла., T_2 - вес цикла, полученного на шаге (2) алгоритма, T_3 - вес цикла, полученного на шаге (3) алгоритма.

2) $M \leq OPT$, т.к. пройдя по каждому ребру остовного дерева по одному разу, будут посещены все вершины, притом вес обхода будет минимален по определению, т.к. остовное дерево минимально.

3) Утв. $T_3 \leq T_2$. Доказательство: пусть последовательность ребер $(e_i, .., e_j)$ в гам. цикле веса T_2 заменилась ребром e в гам. цикле веса T_3. Тогда по нер-ву треугольника: $w_e \leq w_{e_i} + .. + w_{e_j}$ ч.т.д.

4) $T_2 = 2M$, т.к. каждое ребро дерева посещается ровно два раза.

5) Итого $T_3 \leq T_2 = 2M \leq 2OPT$.

ч.т.д.

4 Алгоритм, дающий 1.5-приближение

4.1 Формулировки

Лемма о рукопожатиях. Любой конечный неориентированный граф имеет чётное число вершин нечетных степеней.

Опр. Паросочетание - набор попарно несмежных ребер.

Опр. Совершенное паросочетание - паросочетание, в котором участвуют все вершины графа. То есть любая вершина графа инцидентна ровно одному ребра, входящему в паросочетание.

Опр. Порождённый подграф графа - это другой граф, образованный из подмножества вершин графа вместе со всеми ребрами, соединяющими пары вершин из этого подмножества.

Опр. Эйлеров цикл - это цикл, проходящий по всем ребрам графа

4.2 Описание

Пусть $G = (V, E)$ - полный граф, $w : E \to R_+$ - веса его ребер. Также $\forall x, y, z \in V : w(x, y) \leq w(x, z) + w(z, y)$.

1) С помощью алгоритма Крускала находим минимальное остовное дерево T графа G.

2) Пусть O - набор вершин с нечетными степенями в T. По лемме о рукопожатиях: $|O| = 2k$ для некоторого $k \in N$.

3) Находим совершенное паросочетание M минимального веса в порождённом подграфе, заданном вершинами из O.

4) Комбинируем ребра M и T - получаем мультиграф H, в котором каждая вершина имеет четную степень.

5) Находим эйлеров цикл в H.

6) Преобразуем найденный эйлеров цикл в гамильтонов, пропуская повторяющиеся вершины.

4.3 Точность аппроксимации

Т. Полученный гамильтонов цикл имеет вес не более чем в 1.5 раза больший, чем вес решения метрической задачи коммивояжёра на этом графе.

Доказательство:

1) Пусть C - оптимальный обход в задаче коммивояжёра. Тогда $w(T) \leq w(C)$ (см. 3.2. пункт (2) доказательства).

2) Нумеруем вершины O в циклическом порядке по C и делим C на два множества путей — одно имеет нечётные номера в циклическом порядке, а второе имеет чётные номера. Каждый набор путей соответствует совершенному паросочетанию множества O, которое сочетает в пару две конечные точки каждого пути, а вес этого сочетания не превосходит веса путей. Поскольку эти два множества путей разбивают рёбра C, одно из этих двух множеств имеет максимум половину веса C, и благодаря неравенству треугольника их соответствующее паросочетание имеет вес, который также не менее половины веса C. Совершенное паросочетание минимального веса не может иметь больший вес, так что $w(M) \leq w(C)/2$. Сложение весов T и M даёт вес эйлерова цикла, который не превосходит $3w(C)/2$. Благодаря неравенству треугольника сокращение не увеличивает вес, так что вес результата также не превосходит $3w(C)/2$.

ч.т.д.