МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

Отчёт по лабораторной работе № 3.6.1
"Спектральный анализ электрических сигналов"

Выполнили:
Студенты гр. Б01-305
Миннахметов Артур,
Киселев Руслан

Долгопрудный, 2024

Цель работы: исследование резонанса токов в параллельном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, определение основных параметров контура.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

Теоретические сведения

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

В работе используется разложение функции в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетного - наоборот.

Коэффициенты определяются по формулам:

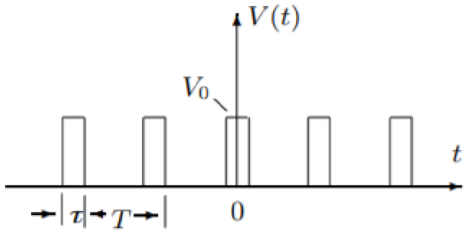
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos\left(n\Omega_1 t\right)dt, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\left(n\Omega_1 t\right)dt. \end{aligned} \tag{3}$$

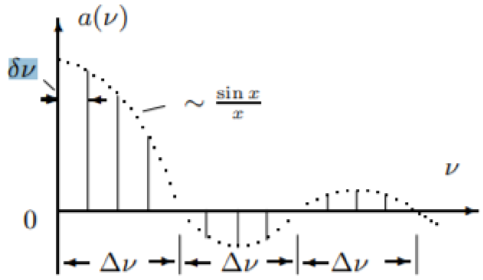
Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2), можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов





Введем величину: $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны:

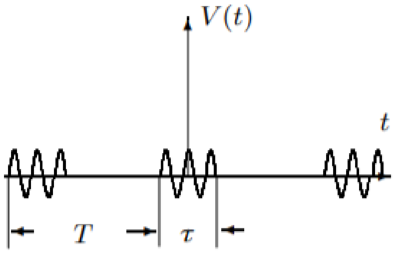
$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(n\Omega_1 \tau/2\right)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

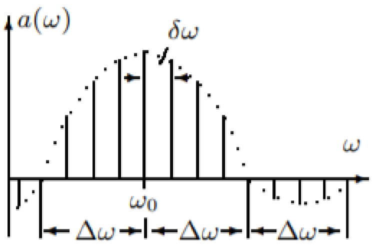
Здесь V_0 - амплитуда сигнала.
Поскольку наша функция четная, $b_n = 0$.
Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстоянию от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться, при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$.
При этом:

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

В работе мы будем проверять справедливость этой формулы.

Периодическая последовательность цугов





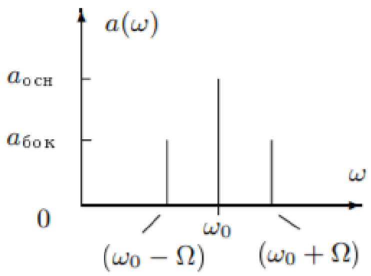
Возьмём цуги колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T.

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(\omega_0 t\right) \cdot \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[\left(\omega_0 - n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}\right]}{\left(\omega_0 - n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[\left(\omega_0 + n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}\right]}{\left(\omega_0 + n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}} \right). \tag{7}$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$:

$$f(t) = A_0\,[1 + m\cos\Omega t]\cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний:

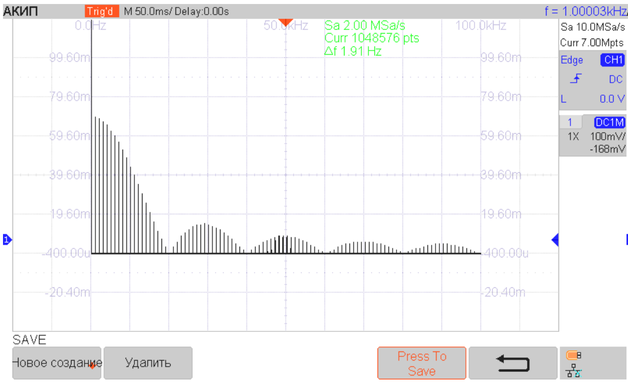
$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos\left(\omega_0 + \Omega\right)t + \frac{A_0 m}{2}\cos\left(\omega_0 - \Omega\right)t. \tag{10}$$

В дальнейшем мы будем использовать эту формулу.

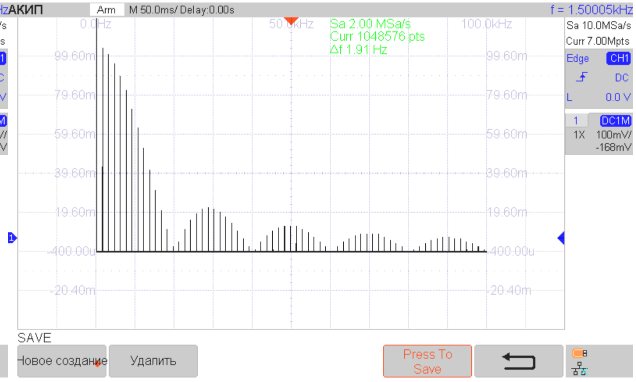
Результаты измерений

Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

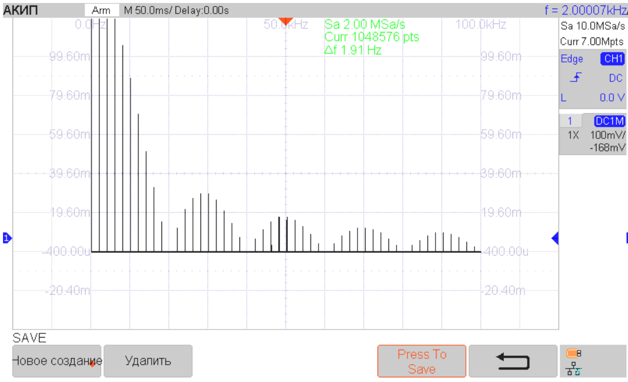
Устанавив прямоугольные колебания с $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс, мы получили на экране спектр сигнала и, изменяя либо τ, либо $\nu_{\text{повт}}$, наблюдали, как изменяется спектр.



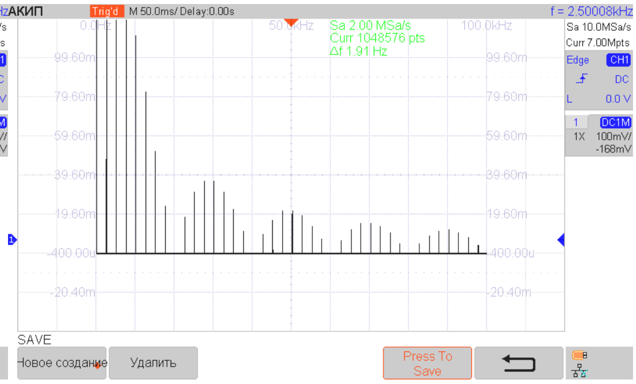
((a)) $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс



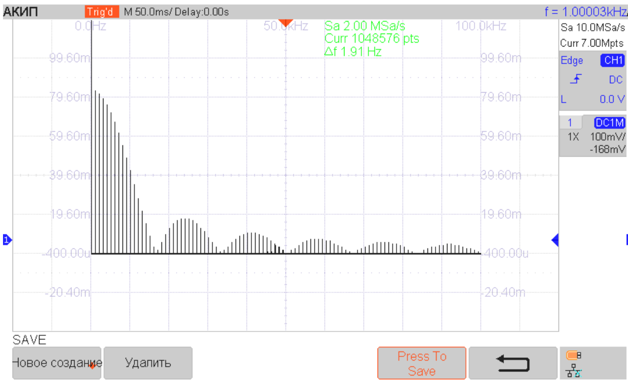
((b)) $\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс



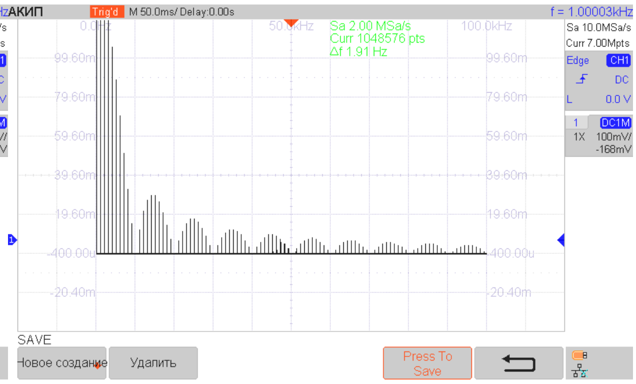
((c)) $\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 50$ мкс



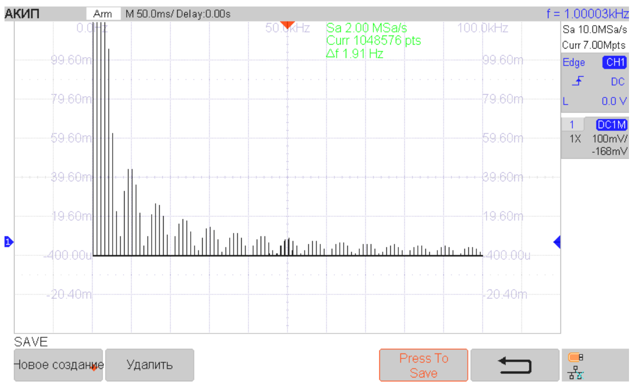
((d)) $\nu_{\text{повт}} = 2.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс



((e)) $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 60$ мкс



((f)) $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс



((g)) $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 150$ мкс

Проведя измерения зависимости ширины спектра от $\Delta\nu$, установили связь между $\Delta\nu$ и τ, полученную из формулы (6):

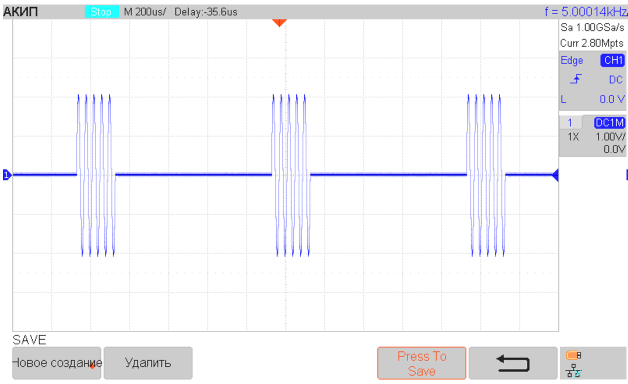
τ, мкс	50	75	100	125	150	175	200
$\Delta\nu$, кГц	19.6	13.4	9.8	8.0	6.5	5.5	4.5
$1/\tau \cdot 10^3$, с$^{-1}$	20	13	10	8	7	6	5

$$\boxed{\Delta\nu\tau = 1{,}00 \pm 0{,}02}$$

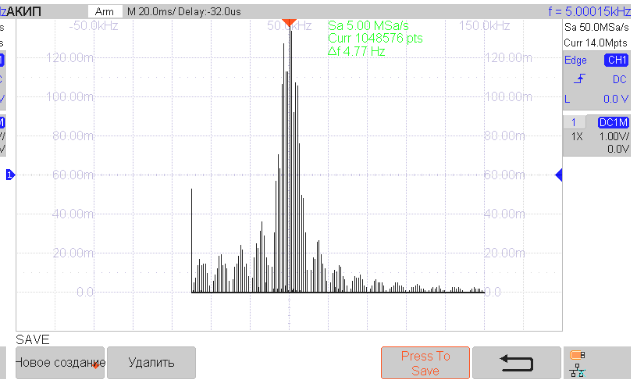
Формула (6) действительно выполняется.

Исследование спектра периодической последовательности цугов

На экране была получена последовательность цугов с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = T/\nu_0 = 100$ мкс).

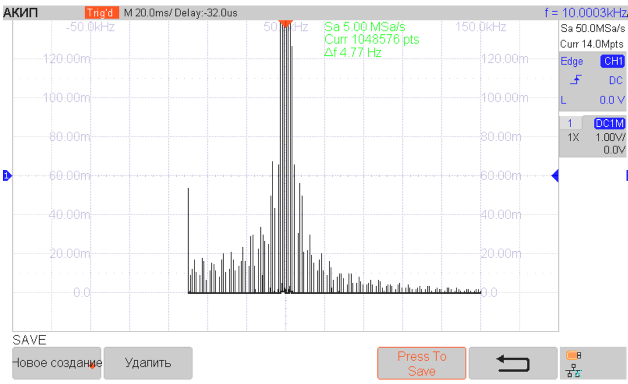


((h)) Последовательность цугов

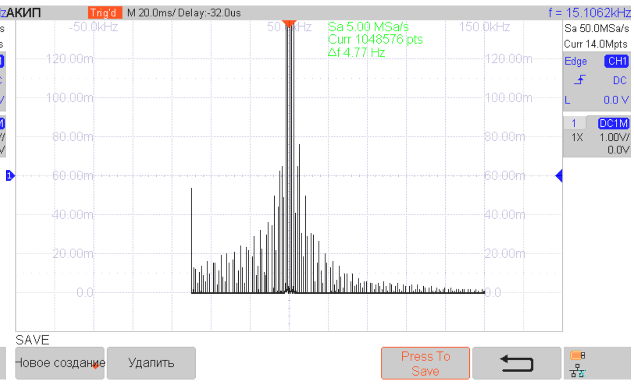


((i)) Спектр для цугов

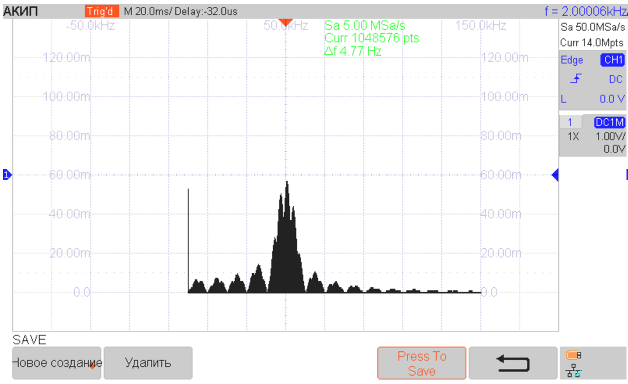
Мы изменяли эти параметры по одному и фиксировали результат:



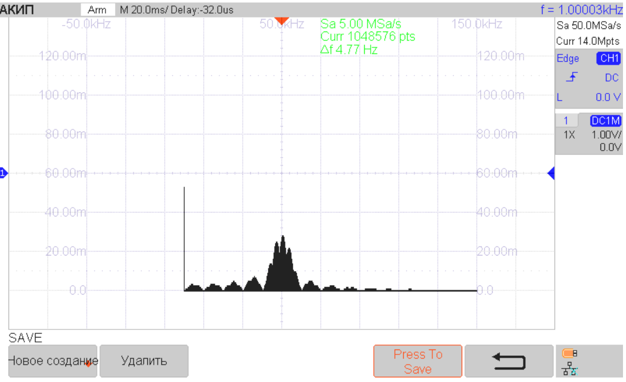
((j)) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 10$



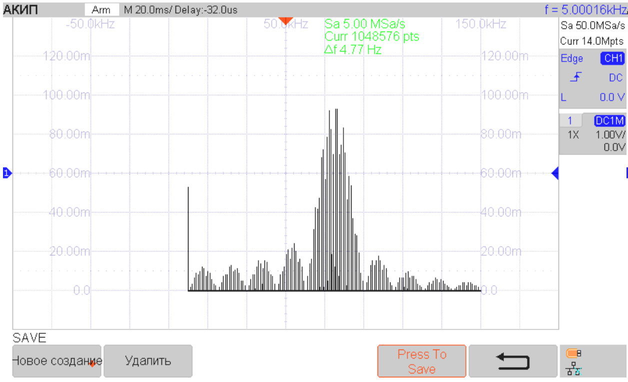
((k)) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 15$



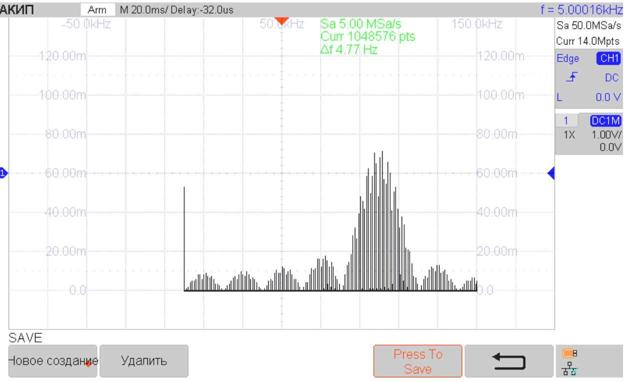
((l)) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 2.5$ мс, $N = 5$



((m)) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс, $N = 5$



((n)) $\nu_0 = 75$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$



((o)) $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$

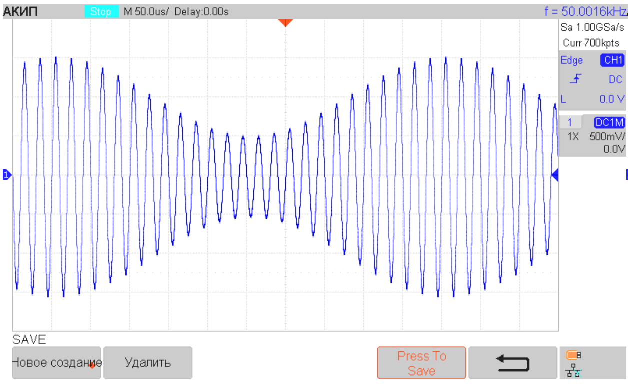
Далее мы зафиксировали $\nu_0 = 50$ кГц, $N = 5$. Для этих параметров измерили, меняя T ($\nu_{\text{повт}}$), зависимость $\delta\nu$ от τ.

$\Delta\nu$, кГц	23	32	35	38	35	45
n	42	33	18	13	10	8
$\nu_{\text{повт}}$, кГц	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0

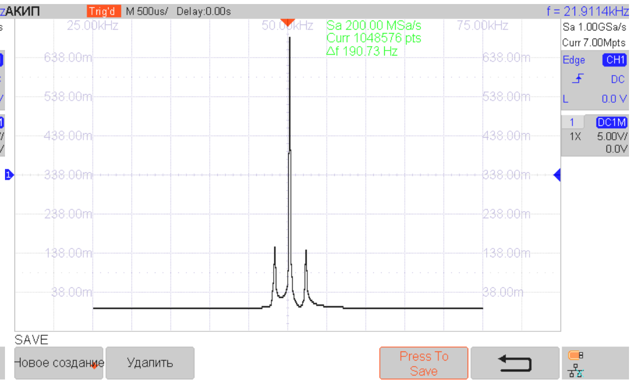
Итоговое отношение: $\boxed{\dfrac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = 1{,}05 \pm 0{,}08}$

Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

На экран выводилась картина амплитудно-модулированного сигнала с характерными параметрами: несущая частота $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубина модуляции - 50 % ($m = 0.5$). Картины данного сигнала и его спектра выглядят следующим образом:



((p)) Амплитудно-модулированный сигнал



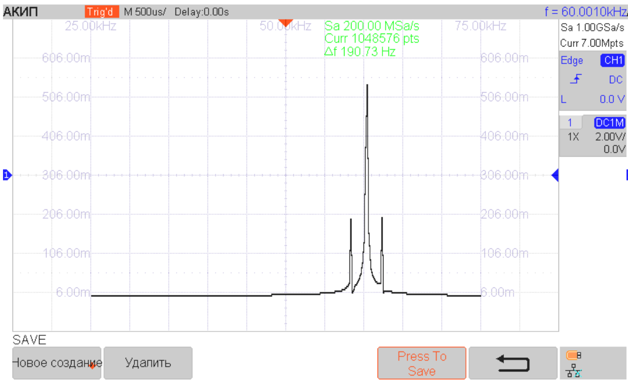
((q)) Спектр для $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц

Найдем для этого сигнала A_{max} и A_{min} и проверим справедливость формулы (9):

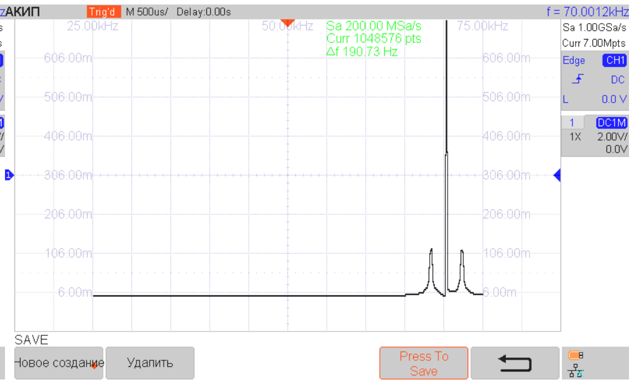
$$A_{max} = 1{,}52 \text{ В}, \quad A_{min} = 0{,}48 \text{ В}, \quad m = 0{,}52$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0.5, а из теоретических расчётов получили 0.52, то видно, что формула (9) верна.

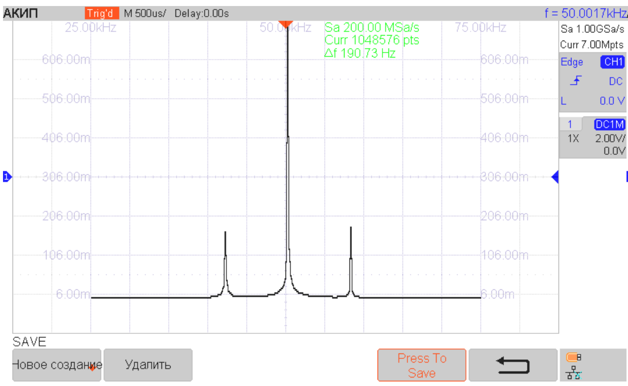
Затем мы получили на экране спектр и изменяли параметры сигнала:



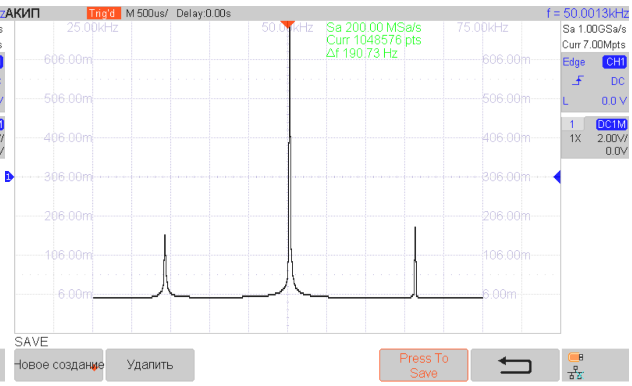
((r)) $\nu_0 = 60$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц



((s)) $\nu_0 = 70$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц



((t)) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 8$ кГц



((u)) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 16$ кГц

Из формулы (10) следует, что $a_{\text{осн}} = A_0$, а $a_{\text{бок}} = \dfrac{mA_0}{2}$.

m, %	10	25	50	75	100
$a_{бок}$, мВ	360	820	1660	2320	3260
$a_{осн}$, мВ	6240	6240	6240	6240	6240
$a_{бок}/a_{осн}$	0.06	0.13	0.27	0.37	0.52
$a_{бок}/a_{осн} \cdot m$, %	57.7	52.6	53.2	49.6	52.2
$a_{бок}/a_{осн} \cdot m = (53{,}1 \pm 1{,}3)\%$					

Из (10) имеем $\dfrac{a_{бок}}{a_{осн}} \cdot m = 0.5$, что с высокой точностью повторяет наш результат.

Заключение

Исследования зависимости ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов от длительности отдельного импульса в первой части работы полностью совпали с теоретическими рассчетами. По наклону графика из этой части можно убедиться в соотношении неопределенностей ($\Delta\nu\Delta t \simeq 1$).

Исследования зависимости расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов дали схожие результаты.

В последней части коэффициенты, получаемые в результате исследования зависимости отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции полностью совпали с теоретически рассчитаными.