

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

**Отчёт по лабораторной работе № 1.2.2**  
**"Экспериментальная проверка закона вращательного движения на**  
**крестообразном маятнике"**

Выполнил:  
Студент гр. Б01-305  
Миннахметов Артур

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ход работы</b>	<b>5</b>
2.1	Измерения . . . . .	5
2.2	Обработка . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Выводы</b>	<b>8</b>

# 1 Введение

**Цель работы:** экспериментально проверить уравнение (1), получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

**В работе используются:** крестообразный маятник, набор перегрузков, секундомер, линейка, штангенциркуль.

Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где  $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$  – угловое ускорение ( $\omega$  – угловая скорость),  $I$  – полный момент инерции тела относительно оси вращения,  $M$  – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

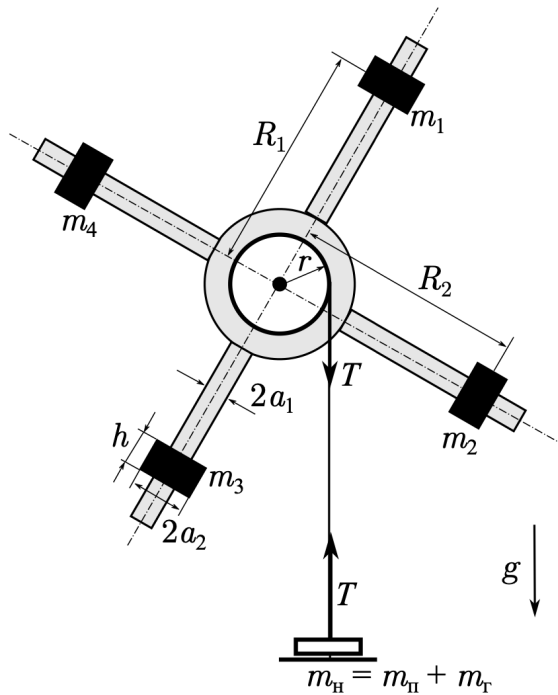


Рис. 1: Крестообразный маятник Обербека

**Экспериментальная установка.** Для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник», устройство которого изображено на рис. 1. Маятник состоит из четырех тонких стержней радиуса  $a$ , укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов ( $r_1$  и  $r_2$ ) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции  $I$  маятника можно изменять, передвигая грузы  $m_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) вдоль стержней и меняя  $R_i$ . На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней легкая платформа известной массы  $m_{\text{п}}$ , служит для размещения перегрузков  $m_{\text{т}}$ .

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота  $\varphi(t)$ , угловой скорости  $\omega \equiv \dot{\varphi}$  и углового ускорения маятника  $\beta \equiv \ddot{\varphi}$  от времени, а также углового ускорения от угловой скорости  $\beta(\omega)$ .

**Вывод уравнения движения маятника.** Рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент создаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити:  $M_n = rT$ , где  $r$  - радиус шкива ( $r_1$  или  $r_2$ ). Силу  $T$  выразим из уравнения движения платформы:  $m_n \ddot{y} = m_n g - T$ , где  $m_n = m_n + m_r$ , — масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити  $\ddot{y} = \beta r$ . Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_n = m_n r (g - \beta r). \quad (2)$$

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси  $M_{тр}$ . Таким образом, с учетом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_n r^2) \beta = m_n g r - M_{тр}. \quad (3)$$

Заметим, что в наших опытах, как правило,  $m_n r^2 \ll I$ , и соответственно  $M_n \approx m_n g r$ . Если трение мало,  $M_{тр} \ll m_n g r$ , то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением  $\beta_0 \approx m_n g r / I$ .

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование — отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние  $M_{тр}$ . Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине  $M_{тр}$ . Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси  $N$  (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости и вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивление воздуха). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна  $N = m_m g + T$ , где  $m_m$  масса маятника (как правило,  $m_m \gg m_n$ ), можно записать

$$M_{тр} \simeq \left(1 + \frac{m_n}{m_m}\right) M_0 + \eta \omega \approx M_0 + \eta \omega, \quad (4)$$

где  $M_0$  — момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса (минимальное значение силы трения),  $\eta$  - некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

**Методика эксперимента.** Малость величины трения  $M_{тр}$  в работе обеспечивается за счёт использования в креплении подшипников качения. Однако учёт трения всё же оказывается необходим, поскольку оно существенно влияет на результаты опыта как при малых массах перегрузков (когда  $m_n \sim M_0 / g r$ ), так и при больших, поскольку при увеличении  $m_n$  возрастает сила реакции в оси и угловая скорость вращения маятника, а с ней и вязкое трение.

Влияние вязкой составляющей трения можно исключить следующим образом. Экспериментальная установка позволяет измерять зависимость углового ускорения от угловой скорости  $\beta(\omega)$ . Если верны высказанные выше соображения о величине силы трения, из (3) и (4) следует, что угловое ускорение должно быть линейной функцией угловой скорости:  $\beta = \beta_0 + k\omega$ . В таком случае, определив по экспериментальным данным (с помощью расчётной программы) коэффициенты прямой, можно найти начальное угловое ускорение  $\beta_0$ , значение которого и используется при проверке основного соотношения (3) при различных параметрах системы ( $m_n, I, r$ ).

Момент инерции всей системы вычисляется по теореме Гюйгенса- Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2), \quad (5)$$

где  $I_0$  - момент инерции системы без грузов,  $I_i$  — момент инерции  $i$ -го груза относительно оси, проходящей через его центр масс (перпендикулярно плоскости рис. 1).

## 2 Ход работы

### 2.1 Измерения

1. Основные величины, которые были измерены самими первыми:

- диаметр малого шкива  $d_1 = (18,9 \pm 0,1)$  мм
- диаметр большого шкива  $d_2 = (35,9 \pm 0,1)$  мм
- для 2 и 3 расстояние между грузами 225 мм

Номер груза	Масса груза, г	Высота груза, мм	Диаметр груза, мм
4.1	155,5	25,0	32,9
4.2	148,9	25,1	32,9
4.3	151,9	25,0	32,9
4.4	150,1	25,0	33,0

2. Теперь измерим показатели  $k$  и  $\beta_0$  для маятника без грузов:

Направление	$k, 1/c$	$\beta_0, 1/c^2$	$m_n, г$
Вверх	$-0,03424 \pm 0,0018$	$3,147 \pm 0,0057$	110,1
Вниз	$-0,0419 \pm 0,004$	$3,014 \pm 0,0077$	110,1
Вверх	$-0,0661 \pm 0,015$	$2,184 \pm 0,028$	72,1
Вниз	$-0,04039 \pm 0,0025$	$1,996 \pm 0,0062$	72,1
Вверх	$-0,05968 \pm -0,013$	$1,776 \pm 0,023$	60
Вниз	$-0,03976 \pm 0,0045$	$1,664 \pm 0,0095$	60

3. Далее рассмотрим вращение маятника с грузами при закручивании нити на большой шкив:

Направление	$k, 1/c$	$\beta_0, 1/c^2$	$m_n, г$
Вверх	$-0,01922 \pm 0,004$	$1,361 \pm 0,0086$	110,1
Вниз	$-0,01643 \pm 0,0011$	$1,324 \pm 0,0028$	110,1
Вверх	$-0,02582 \pm 0,0053$	$1,398 \pm 0,0091$	110,1
Вниз	$-0,01409 \pm 0,0019$	$1,337 \pm 0,0046$	110,1
Вверх	$-0,01509 \pm 0,00099$	$1,332 \pm 0,00096$	110,1
Вниз	$-0,01714 \pm 0,0015$	$1,317 \pm 0,0029$	110,1
Вверх	$-0,01322 \pm 0,0022$	$0,8557 \pm 0,0021$	72,1
Вниз	$-0,01645 \pm 0,0011$	$0,8592 \pm 0,0012$	72,1
Вверх	$-0,01268 \pm 0,0012$	$0,8537 \pm 0,001$	72,1
Вниз	$-0,01457 \pm 0,0013$	$0,8739 \pm 0,0019$	72,1
Вверх	$-0,01077 \pm 0,0012$	$0,8401 \pm 0,0012$	72,1
Вниз	$-0,01464 \pm 0,001$	$0,8747 \pm 0,0016$	72,1
Вверх	$-0,01157 \pm 0,0021$	$0,697 \pm 0,0019$	60
Вниз	$-0,01437 \pm 0,0012$	$0,7255 \pm 0,001$	60
Вверх	$-0,01787 \pm 0,0057$	$0,7172 \pm 0,0075$	60
Вниз	$-0,01402 \pm 0,0017$	$0,7273 \pm 0,0036$	60
Вверх	$-0,01531 \pm 0,0013$	$0,7414 \pm 0,0011$	60
Вниз	$-0,01351 \pm 0,0015$	$0,7641 \pm 0,0027$	60

4. Далее рассмотрим вращение маятника с грузами при закручивании нити на малый шкив:

Направление	$k, 1/c$	$\beta_0, 1/c^2$	$m_n, \text{г}$
Вверх	$-0,003826 \pm 0,0014$	$0,3444 \pm 0,00082$	60
Вниз	$-0,01046 \pm 0,00087$	$0,4352 \pm 0,0012$	60
Вверх	$-0,005627 \pm 0,0026$	$0,3494 \pm 0,001$	60
Вниз	$-0,01134 \pm 0,0016$	$0,4279 \pm 0,0023$	60

5. Далее рассмотрим вращение маятника с грузами при закручивании нити на большой шкив, но с другим расстоянием между грузами (312 мм):

Направление	$k, 1/c$	$\beta_0, 1/c^2$	$m_n, \text{г}$
Вверх	$-0,008358 \pm 0,0017$	$0,5206 \pm 0,0017$	60
Вниз	$-0,001135 \pm 0,0012$	$0,558 \pm 0,0021$	60
Вверх	$-0,008094 \pm 0,0013$	$0,526 \pm 0,0012$	60
Вниз	$-0,01042 \pm 0,0015$	$0,5627 \pm 0,0013$	60
Вверх	$-0,001018 \pm 0,0023$	$0,5309 \pm 0,0015$	60
Вниз	$-0,01011 \pm 0,00065$	$0,5639 \pm 0,00059$	60

6. Далее рассмотрим вращение маятника с грузами при закручивании нити на большой шкив, но с другим расстоянием между грузами (382 и 375 мм):

Направление	$k, 1/c$	$\beta_0, 1/c^2$	$m_n, \text{г}$
Вверх	$-0,008433 \pm 0,00037$	$0,3982 \pm 0,00018$	60
Вниз	$-0,006391 \pm 0,00093$	$0,4259 \pm 0,00079$	60

## 2.2 Обработка

7. Из (3) можно посчитать момент инерции для маятника без грузов:

$$I_0 \approx \frac{m_n g r}{\beta_0} = (62 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

8. Посчитаем  $M_n$  для большого шкива:

$$M(m = 110 \text{ г}) = (193 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$M(m = 72 \text{ г}) = (127 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$M(m = 60 \text{ г}) = (106 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

9. Для малого шкива:

$$M(m = 60 \text{ г}) = (56 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

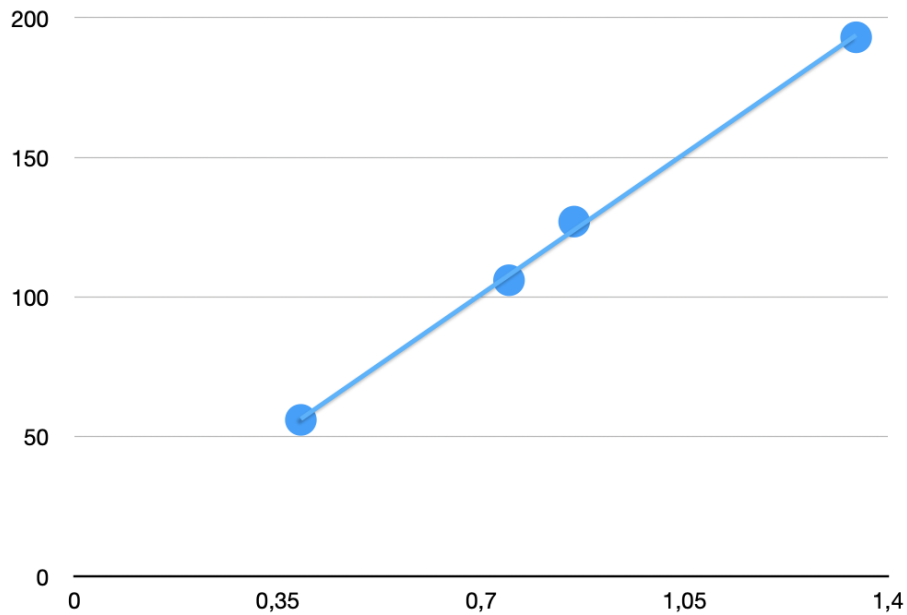
10. Аналогичные измерения для изменения расстояния между грузами:

$$M(\rho = 312 \text{ мм}) = (106 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$M(\rho = 379 \text{ мм}) = (106 \pm 1) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Заметим, что отклонений от значений в пункте 8 нет.

11. Построим зависимость  $M(\beta_0)$  для значений из 8 и 9:



Получилось уравнение  $M(\beta_0) = (143,8 \cdot \beta_0 - 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \approx \text{const}$ , где  $\beta_0$  в  $1/\text{с}^2$ , что говорит, что мы идём в правильном направлении, так как это уравнение приблизительно соответствует уравнению вращательного движения.

Добавка  $M_{\text{тр}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$  объясняется наличием силы трения.

Из этого уравнения  $I = (143,8 \pm 2,5) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

12. Посчитаем суммарный момент инерции по (5) и высчитаем из него  $I_0$ :

$$I_0 = (67 \pm 3) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

13. Получилась зависимость  $\beta_0(\rho)$ . По этой зависимости посчитаем  $I = \frac{M}{\beta_0}$  и  $I_0 = I - \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2)$ :

на данном этапе была слишком большая погрешность (относительная  $> 50\%$ ), что говорит о том, что при измерениях допущены ошибки.

### 3 Выводы

Экспериментально проверено уравнение вращательного движения: доказана линейная зависимость между угловым ускорением и моментом сил. Несмотря на то, что момент инерции, полученный экспериментально, не попал в погрешность с полученным теоретически, можно констатировать, так как они получились достаточно близкими, что момент инерции является коэффициентом пропорциональности в уравнении вращательного движения.

Оценен момент силы трения, который оказался пренебрежимо мал по сравнению с другими измеряемыми величинами.