

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

**Отчёт по лабораторной работе № 3.2.5**  
**"Вынужденные колебания в электрическом контуре"**

Выполнили:  
Студенты гр. Б01-305  
Миннахметов Артур  
Киселев Руслан

Долгопрудный, 2024

# 1 Введение

## 1.1 Теоритическая часть

**Цель работы:** исследование вынужденных колебаний и процессов их установления в колебательном контуре.

**В работе используются:** генератор звуковых частот, вольтметр, частотомер, конденсатор, катушка индуктивности, магазин сопротивлений, осциллограф, универсальный измеритель импеданса ( $LCR$ -метр).

Для  $RLC$  контура (рис. 1) применим 2 правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа, и разделив обе части уравнения на  $CL$ , получим:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL}. \quad (2)$$

Произведём замены  $\gamma = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  – собственная круговая частота,  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$  – период собственных колебаний. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0, \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (5)$$

Для случая  $\gamma < \omega_0$  в силу того, что  $\omega_1 > 0$ , получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (6)$$

Для получения фазовой траектории представим формулу (6) в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

где  $a$  и  $b$  получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и тока через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \quad (8)$$

$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{U_{C0} \omega_0}{\rho \omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \quad (9)$$

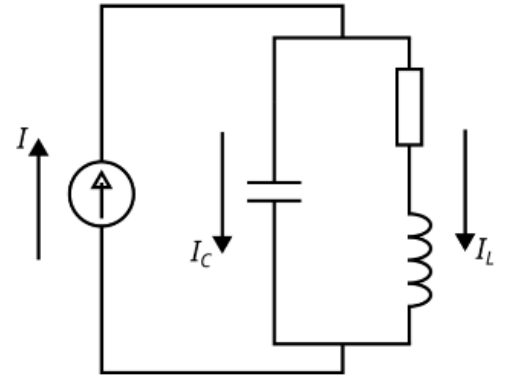


Рис. 1: Описываемый  $RLC$  контур

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (10)$$

где  $\tau$  – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (11)$$

где  $\Theta$  – логарифмический декремент затухания,  $U_k$  и  $U_{k+1}$  – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону,  $N_\tau$  – число полных колебаний за время затухания  $\tau$ .

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней внешнего синусоидального источника. Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рисунке (рис. 1):

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (12)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L \phi_0} \sin(\Omega t - \varphi). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (14)$$

Способы измерения **добротности**:

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$Q = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (15)$$

2. с помощью амплитуды резонанса можно получить добротность (в координатах  $U_C/U_0$ , где  $U_0$  – амплитуда колебаний напряжения источника, от частоты генератора). Отсюда нетрудно определить декремент затухания  $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$ ,

3. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ( $\Delta\Omega$ ) будет численно равна коэффициенту  $\gamma$ , то есть  $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$ .

4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$Q = \frac{\omega_0 n}{2 \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}. \quad (16)$$

## 1.2 Экспериментальная установка

Схема установки для изучения собственных колебаний представлена на рисунке (2), по ходу работы она будет претерпевать некоторые изменения, связанные со съёмом сигнала с различных её частей, что на принцип работы не повлияет, основным же изменением будет смена работы генератора сигналов, соответствующий режим будет описан в практической части, при переходе на него. Пунктиром показана схема подключения при снятия данных о

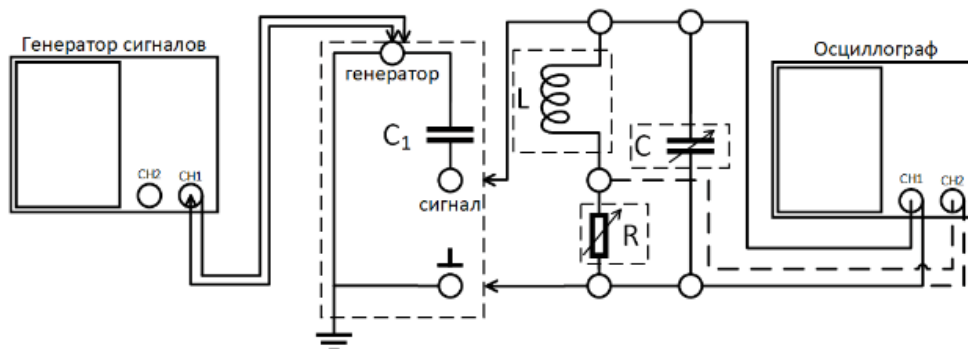


Рис. 2: Схема установки для изучения собственных колебаний

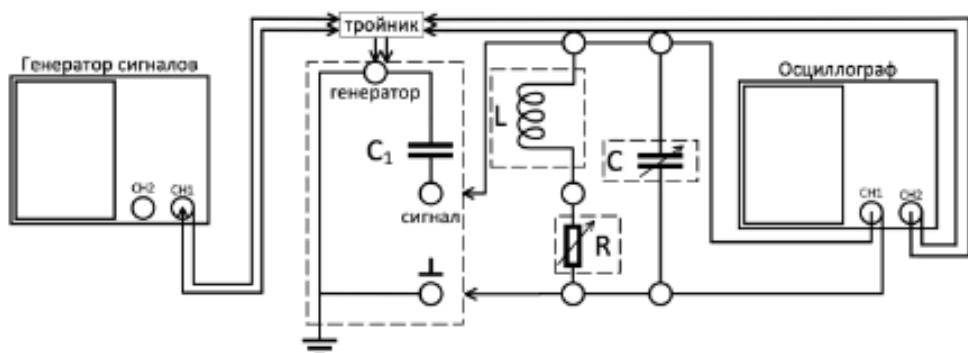


Рис. 3: Схема установки для изучения вынужденных колебаний и биений

колебаниях в фазовой плоскости, на рисунке (3) изображена схема установки для исследования АЧХ, ФЧХ и наблюдения биений.

Красным прямоугольником выделен колебательный контур, «состояния» элементов так же будут описаны в практической части. Конденсатор ( $C_1$ ) между генератором сигналов и колебательным контуром служит для того, чтобы импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, происходящие в контуре.

## 2 Ход работы

### 2.1 Измерения

**Инструментальные погрешности:** вольтметр  $\Delta U = 0.1$  В, частотомер  $\Delta \nu = 1$  Гц, индуктивность  $\Delta L = 1$  мГн.

1. На магазине сопротивлений установлено минимальное сопротивление, на магазине индуктивности установлено значение  $L = 100$  мГн. Вычисленно значение емкости  $C_0 = 1,2$  нФ – емкость цепи без включенного конденсатора.

2. С помощью изменения емкости измерены периоды. Результаты в табл. 1.

3. Приняв  $L = 100$  мГн, рассчитана  $C^*$ , при которой собственная частота колебаний цепи

$T$ , мкс	$C_{\text{магазин}}$ , мкФ
94,2	0,001
114	0,002
128	0,003
145	0,004
156	0,005
168	0,006
190	0,008
200	0,009

Таблица 1: Зависимость  $T(C_{\text{магазин}})$

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC^*}}$  равно 6,5 кГц.  $C^* = 6$  нФ. Также рассчитано критическое сопротивление  $R_{cr} = 2\sqrt{L/C^*} = 8165$  Ом.

4. На магазине установлена емкость 6 нФ. Рассмотрены 2 соседние амплитуды в зависимости от сопротивления  $R$  на магазине. Результаты приведены в таблице 2

$R$ , Ом	$U_m$ , В	$U_{m+1}$ , В
408,25	3,16	2,18
734,85	2,66	1,4
1061,45	2,16	0,88
1388,05	1,86	0,6
1714,65	1,52	0,42
2041,25	1,26	0,28

Таблица 2:  $U_m$  и  $U_{m+1}$  от  $R$

5. На магазине введено значение 408,25 Ом. На канал 2(Y) подано падение напряжения на резисторе. Результаты измерений приведены в таблице 3.

$R$ , Ом	$\Delta$ , цена деления
408,25	0,6
734,85	0,4
1061,45	0,25
1388,05	0,13
1714,65	0,10
2041,25	0,08

Таблица 3: Свободные колебания на фазовой плоскости

6. Генератор переключен в режим подачи синусоидального сигнала. Значение емкости выставлено в  $C^*$ , а сопротивление  $R_1 = 0,05R_{cr}$ . Схема собрана как на рис. 4. Также найдено значение резонансной частоты  $\nu_{рез} = 5,92$  кГц, вблизи которой и будет изменяться частота. Результаты зависимости приведены в таблице 4.

7. На генераторе установлена резонансная частота. Установлены период повторения сигнала 20 мс, а количеством периодов 15. Измерены амплитуды колебаний, результаты представлены в таблице 5.

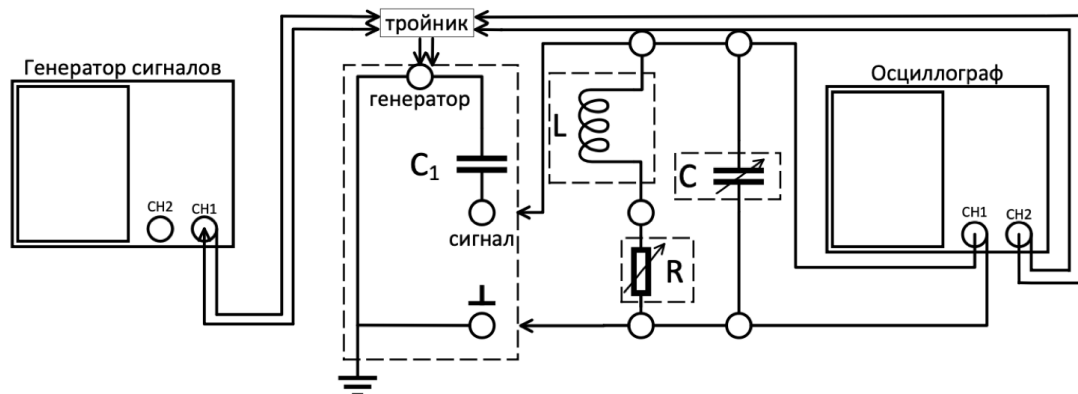


Рис. 4: Схема установки для исследования АЧХ и ФЧХ

## 2.2 Обработка данных

8. Построен график  $T_{\text{экс}}(T_{\text{теор}})$  из пункта 2, где  $T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC}$ . Его можно увидеть на рис. 5. Нетрудно заметить, что теоритические данные практически сошлись с экспериментом. Погрешность получилась около 2%.

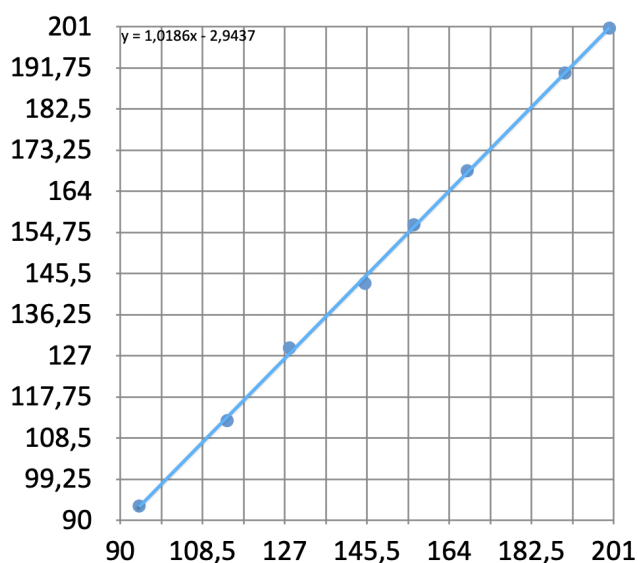


Рис. 5: График  $T_{\text{экс}}(T_{\text{теор}})$

9. Построен график  $1/\Theta^2 = f(1/R^2)$  для пункта 4. Данный представлена на рис. 6. Коэффициент наклона  $K = (1.18 \pm 0.07) \text{ кОм}^2$ . Тогда посчитаем  $R_{\text{cr}} = 6.8 \pm 0.2 \text{ кОм}$ , что не совпадает с теоретическим значением.

10. Вычислена добротность контура для пункта 4:

$$Q(\Theta_{\min}) = 8.5 \pm 0.5, \quad Q(\Theta_{\max}) = 2.1 \pm 0.7.$$

11. Расчет добротности по спирали на фазовой плоскости. В помощью осциллографа получаем портрет колебаний на фазовой плоскости (в режиме XY), определяем декремент затухания по соседним пересечениям оси X. Так как измерения проводились на глаз, то оценим погрешность  $\Delta_U = 0,1$  дел. Результаты представлены в таблице 6

$\nu$ , кГц	$2U_C$ , В	$\Delta t$ , мкс	$\nu$ , кГц	$2U_C$ , В	$\Delta t$ , мкс
5,92	18,6	38,8	6,02	4,58	28,8
5,87	18	44,4	5,97	4,58	29,2
5,82	17,3	46,4	5,92	4,58	31
5,77	16,6	51,6	5,87	4,52	32,2
5,72	15,8	56,4	5,77	4,48	33,8
5,62	13,6	61,2	5,67	4,38	34,6
5,52	11,4	66,3	5,57	4,26	36,4
5,42	9,7	72	5,47	4,16	39,8
5,32	8,7	75,2	5,37	4,02	41,4
5,22	7,5	78,8	5,27	3,86	43,4
5,97	18,2	34,4	6,12	4,70	25,2
6,07	17,5	27,6	6,22	4,70	24,2
6,17	16,2	22	6,32	4,68	22,4
6,27	14,5	17,2	6,42	4,68	19,8
6,37	13,3	14,6	6,52	4,68	19
6,47	11,8	12,4	6,62	4,66	18
6,57	10,3	10,8	6,72	4,6	17,4
6,67	9,52	9,2	6,82	4,58	15,4
6,77	8,8	8,2			
6,87	8,2	6,8			

Таблица 4: Исследование резонансных кривых для  $R_1 = 0,05R_{cr}$  и  $R_2 = 0,25R_{cr}$

$U_1$ , В	$U_2$ , В	$\Theta$
20	17,4	0.14
15	12,3	0.20
17	14,7	0.15

Таблица 5: Процессы установления и затухания

12. Рассчитаны теоретические значения добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1,$$

$$Q_1 = 9.9 \pm 0.4,$$

$$Q_2 = 1.9 \pm 0.1.$$

13. Построен график зависимости  $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$ , где  $U_0$  – напряжение при резонансной частоте  $\nu_0$ . График представлен на рис. 7

14. По АЧХ определена добротность контура:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega} = 8.1 \pm 0.7.$$

15. Построена ФЧХ (рис. 8). По нему определена добротность контура:

$$Q = 9.1 \pm 0.8$$

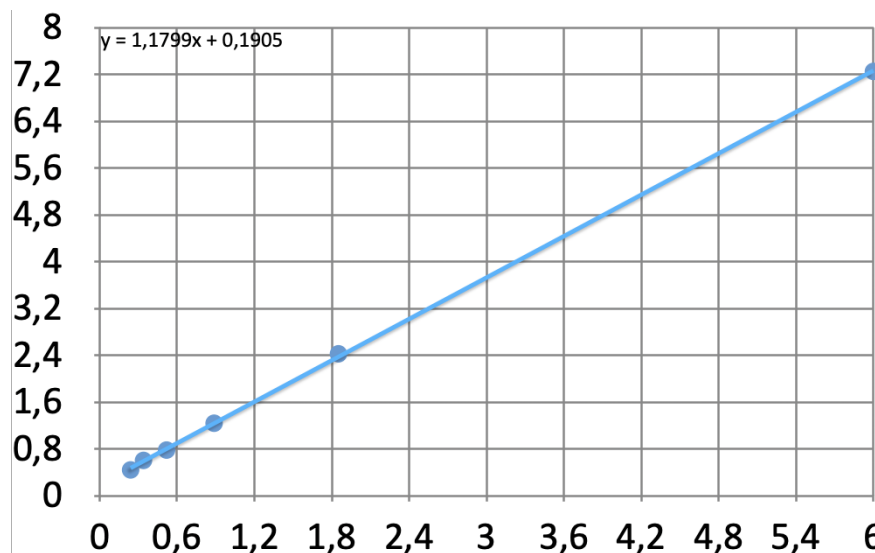


Рис. 6: График  $1/\Theta^2 = f(1/R^2)$

R, Ом	$U_k$ , дел	$U_{k+1}$ , дел	$\theta$	Q	$\Delta_Q$
408	4.4	3	0.38	8.2	0.9
1714	3.8	1	1.34	2.4	0.2

Таблица 6: Определение добротности по фазовой плоскости

### 3 Выводы

В данной лабораторной работе мы исследовали свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре и различными способами находили его добротность. Самый точный способ, конечно же, теоретический. Затем достаточно эффективен способ вычисления через декремент затухания. Фазовая спираль даёт высокую погрешность, поэтому это не очень надёжный способ вычисления добротности. Способы вычисления через АЧХ и ФЧХ хороши, если есть специальная программа, позволяющая вычислять ширину резонансной кривой, и хорошо снятые данные. Так как данные для нарастания и затухания были сняты неправильно, на них ориентироваться нельзя. Результаты всех измерений приведены в таблице 7

R	Свободные колебания			Вынужденные колебания	
	$f(L, C, R)$	$f(\Theta)$	Спираль	АЧХ	ФЧХ
408.25	$8.5 \pm 0.5$	$9.9 \pm 0.4$	$8.2 \pm 0.9$	$8.1 \pm 0.7$	$9.1 \pm 0.8$
2041.25	$2.1 \pm 0.7$	$1.9 \pm 0.1$	$2.4 \pm 0.2$	—	—

Таблица 7: Итоговая таблица



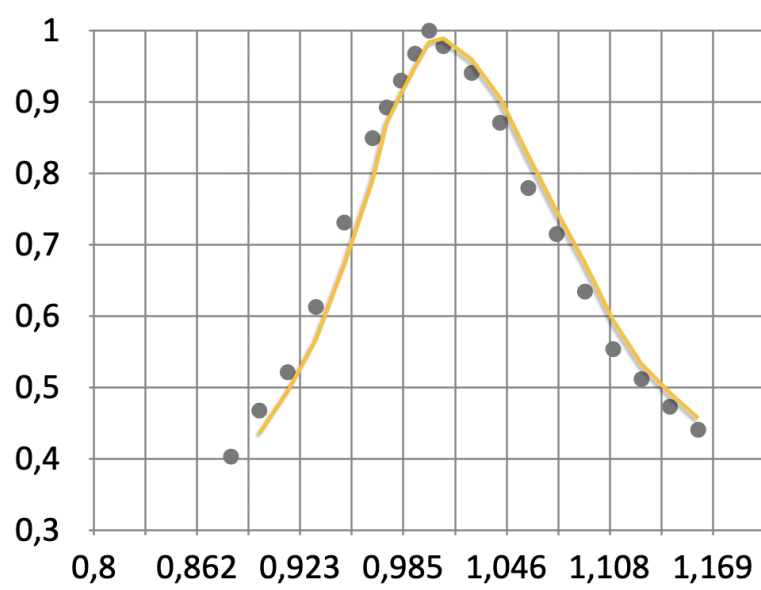


Рис. 7: График  $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$

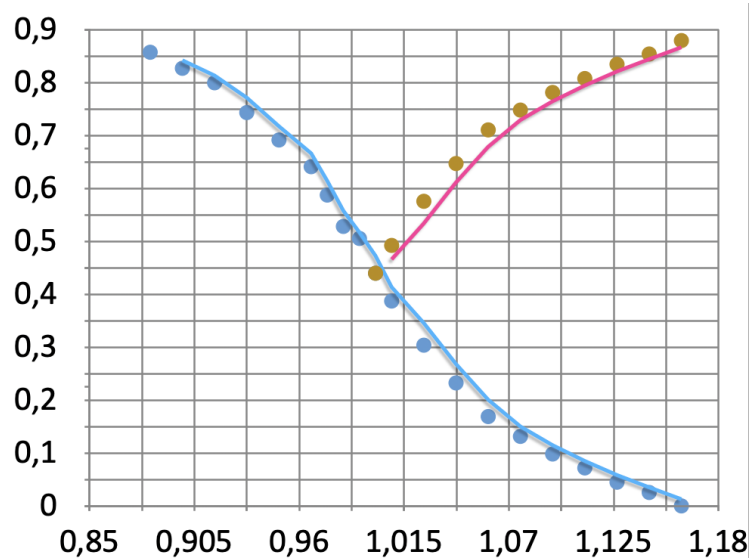


Рис. 8: ФЧХ