

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

**Отчёт по лабораторной работе № 1.2.3**  
**"Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного**  
**подвеса"**

Выполнил:  
Студент гр. Б01-305  
Миннахметов Артур

Долгопрудный, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ход работы</b>	<b>6</b>
2.1	Измерения . . . . .	6
2.2	Обработка . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Выводы</b>	<b>9</b>

# 1 Введение

**Цель работы:** измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**В работе используются:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

Здесь  $r$  — расстояние элемента массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

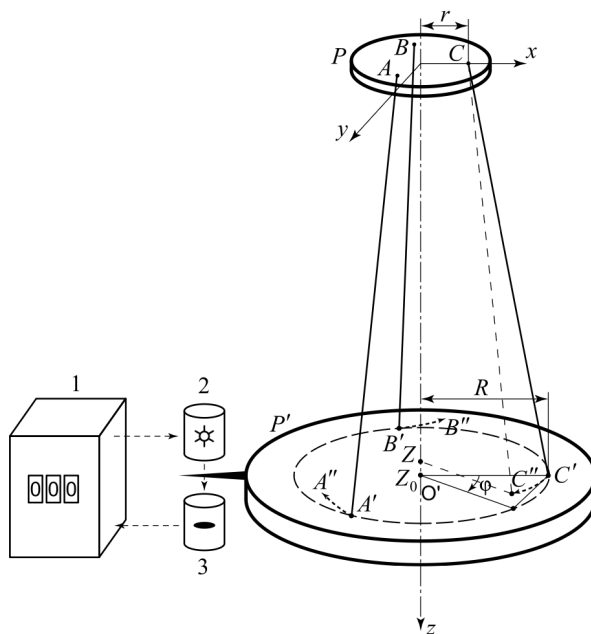


Рис. 1: Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  вращающейся платформы  $P'$ .

Платформа  $P$  укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных движению маятника, учет которых сильно усложнил бы

расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы, возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E. \quad (2)$$

Здесь  $I$  — момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  — масса платформы с телом,  $\varphi$  — угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (угловая скорость),  $z$  — координата по вертикали центра нижней платформы  $P'$  при равновесии ( $\varphi = 0$ ),  $z_0$  — координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ . Первый член в левой части уравнения — кинетическая энергия вращения, второй член — потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  — полная энергия системы (платформы с телом).

Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая сила возникает благодаря силе тяжести.

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе —  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C''$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка переходит в  $C''$  с координатами  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ . Расстояние между точками  $C$  и  $C''$  равно длине нити  $L$ . Поэтому

$$(R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = L^2. \quad (3)$$

Учитывая, что при малых углах  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ , получаем

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi \approx z_0^2 - Rr\varphi^2. \quad (4)$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла  $\varphi$ , имеем

$$z \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}. \quad (5)$$

Подставляя это значение  $z$  в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E. \quad (6)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\varphi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0. \quad (7)$$

Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}. \quad (8)$$

Из формулы (8) находим момент инерции

$$I = kmT^2. \quad (9)$$

Здесь  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$  – величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время  $\tau$  уменьшения амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний  $T$ . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau \gg T \quad (10)$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

## 2 Ход работы

### 2.1 Измерения

1. Измерены константы установки:

- $R = (114,1 \pm 0,5)$  мм,
- $r = (30,5 \pm 0,5)$  мм,
- $m = (1004,8 \pm 0,5)$  г,
- $z_0 = (220 \pm 1)$  см.

2. Измерены некоторые величины тел, момент инерции которых стоит измерить:

- Диск: масса  $m_{\text{диск}} = (587,6 \pm 0,1)$  г, диаметр  $d_{\text{диск}} = (170,5 \pm 1)$  мм
- Кольцо: масса  $m_{\text{кольцо}} = (581,3 \pm 0,1)$  г, внешний диаметр  $d_{\text{внеш}} = (167,0 \pm 0,1)$  мм, внутренний диаметр  $d_{\text{внутр}} = (156,6 \pm 0,1)$  мм
- Полуокруг №1: масса  $m_1 = (526,6 \pm 0,1)$  г, диаметр  $d_1 = (80,0 \pm 0,1)$  мм
- Полуокруг №2: масса  $m_2 = (526,1 \pm 0,1)$  г, диаметр  $d_2 = (79,8 \pm 0,1)$  мм

3. Измерены периоды колебаний на трифилярном подвесе (погрешность измерения времени  $\Delta t = 10^{-3}$  с):

Название	Кол-во колебаний		Время, с		Период колебаний	
	Изм. 1	Изм. 2	Изм. 1	Изм. 2	Изм. 1	Изм. 2
Диск	11	10	43,597	40,146	3,963	4,015
Кольцо	12	10	51,368	42,685	4,281	4,269
2 полуокруга	10	10	32,816	32,775	3,282	3,276
Кольцо и диск	10	10	40,134	41,036	4,013	4,104
Без груза	10	11	44,462	48,712	4,446	4,428

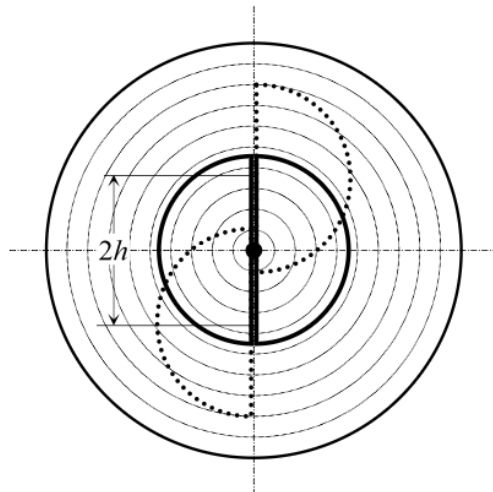


Рис. 2: Расположение тел на платформе

4. Далее измерены для разных  $h$  (рис. 2) периоды колебаний:

$2h$ , см	Кол-во колебаний	Время, с	Период, с
1	10	32.963	3.296
2	10	33.038	3.304
3	12	40.051	3.338
4	10	33.584	3.358
5	11	37.599	3.418
6	10	34.626	3.463
7	10	35.136	3.514
8	10	36.016	3.602
9	10	36.849	3.685
10	16	59.835	3.740
11	10	38.420	3.842
12	10	39.258	3.926
13	10	40.895	4.090
14	10	41.806	4.181
15	10	42.293	4.229
16	10	43.563	4.356
17	10	44.855	4.486
18	10	46.054	4.605
19	10	38.325	3.833

## 2.2 Обработка

5. Расчитаем коэффициент  $k$  для подвеса из (9):

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = (393 \pm 7) \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

6. Расчитаем моменты инерции для тел, участвующих в эксперименте относительно центра масс по оси, перпендикулярной плоскости тела (для тел используется аддитивность формула  $I_{\text{тело}} = k(m + m_{\text{тело}})T^2 - I$ :

- $I = (777 \pm 17) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,
- $I_{\text{диск}} = (218 \pm 18) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,
- $I_{\text{кольцо}} = (362 \pm 21) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- $I_{\text{кольцо+диск}} = (629 \pm 25) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- $I_{\text{полукруги}} = (92 \pm 15) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

7. Далее построим зависимость  $I(4h^2)$ :

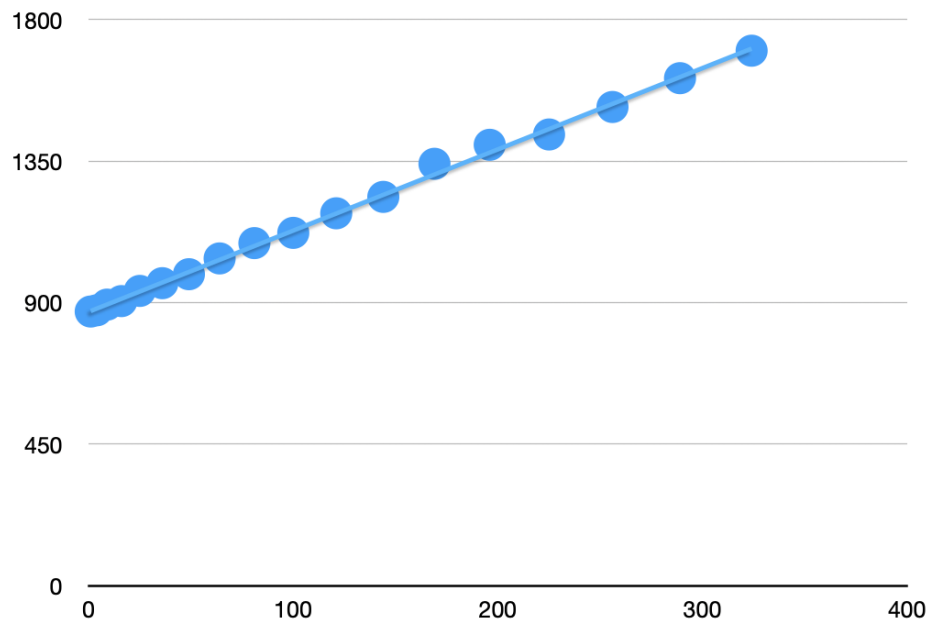


график зависимости имеет зависимость  $I = I(4h^2) = (871 + 3 \cdot 4h^2) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

8. Вычислим из этого момент инерции диска (масса считается известной), используя теорему Гюйгенса-Штейнера:

$$I = (89 \pm 8) \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

9. Посчитаем моменты инерции, используя формулу (1):

- $I_{\text{диск}} = (2135 \pm 3) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- $I_{\text{кольцо}} = (3804 \pm 2) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- $I_{\text{полукруги}} = (842 \pm 2) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$



### 3 Выводы

В ходе эксперимента выявлено, что  $I_{\text{диск}} + I_{\text{кольцо}} \approx I_{\text{кольцо+диск}}$ . Это экспериментально показывает аддитивность моментов инерции. Также моменты инерции, рассчитанные теоритически, попали в погрешность измеренных с помощью трифилярного подвеса моментов, что доказывает правильность решения.

Экспериментально проверена теорема Гюйгенса-Штейнера, которая в действительности выполняется, что и ожидалось.