Dowód ontologiczny Gödla jako próba stworzenia formalnego dowodu istnienia Boga

Artur M. Brodzki

Instytut Informatyki
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechika Warszawska
ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa
abrodzki@mion.elka.pw.edu.pl

Streszczenie Toczące się od starożytności spory o możliwość racjonalnego udowodnienia istnienia Boga jak dotąd nie znalazły ostatecznego rozwiązania. Z punktu widzenia współczesnej nauki szczególnie interesujące są próby przeprowadzenia dowodu na istnienie Boga za pomocą komputera i programów wspomagających automatyczne dowodzenie twierdzeń. Artykuł omawia jeden ze znanych argumentów na rzecz istnienia Boga, tzw. dowód ontologiczny Kurta Gödla, który jest sformalizowany w języku nowoczesnej matematyki i poddaje się analizie komputerowej. Przedstawiono ogólną postać dowodu, wyniki jego zautomatyzowanej weryfikacji, problemy interpretacyjne, a także możliwe modyfikacje i perspektywy na przyszłość.

Keywords: Bóg · Coq · dowód ontologiczny · Gödel · Isabelle · metafizyka · LEO-II · pozytywizm · Satallax

1 Wstęp

Spory o możliwość racjonalnego udowodnienia istnienia Boga (lub bogów) toczą się co najmniej od czasów starożytnych i do dnia dzisiejszego nie znalazły zadowalającego wszystkich rozwiązania. Nie zanosi się też na to, by udało się je zakończyć w przyszłości. Kontrowersje przynajmniej częściowo wynikają z różnych sposobów rozumienia i definiowania pojęcia Boga w poszczególnych tradycjach filozoficznych. Starożytnym Grekom znane było pojęcie Absolutu, czyli – mówiąc ogólnie – bytu podstawowego, z którego wszystko inne się wywodzi. Tak rozumiany Absolut bywa utożsamiany z Bogiem kultury chrześcijańskiej, chociaż zachodzą tutaj istotne różnice – Absolut jest bytem całkowicie bezosobowym, natomiast chrześcijański Bóg posiada własną samoświadomość i wchodzi w osobową relację ze światem stworzonym. Obie tradycje starano się łączyć ze sobą w średniowiecznej scholastyce. Z tego okresu pochodzi klasyczny zestaw dowodów na istnienie Boga, tzw. pięć dróg, autorstwa Tomasza z Akwinu. Wpisują się one w tradycję odkrywania Boga-Stworzyciela poprzez obserwację świata stworzonego (tzw. argumenty kosmologiczne). Rozważano również konstrukcje bardziej abstrakcyjne, próbujące udowodnić istnienie Boga siłą samego rozumu. Najbardziej znanym argumentem tego rodzaju jest tzw. dowód ontologiczny Anzelma z Canterbury. Obie rodziny argumentów wielokrotnie podlegały krytyce.

O ile starożytni i średniowieczni autorzy mieli do dyspozycji jedynie siłę swej własnej intuicji i naturalnej inteligencji, to w XXI wieku możemy już wykorzystać do analizy problemu inteligencję sztuczną. Szczególnie interesujące wydają się próby przeprowadzenia dowodu istnienia Boga (a przynajmniej zweryfikowania któregoś z istniejących) za pomocą komputerowych systemów automatycznego dowodzenia. Aby to było możliwe, należy wpierw sformalizować samo pojęcie Boga i jego podstawowych własności (np. tradycyjnie przypisywanych Bogu atrybutów wszechmocy czy dobra) w języku nowoczesnej matematyki. Najbardziej odpowiednie do tego celu wydają się być argumenty z tradycji „ontologicznej", np. wspomniany już wyżej dowód Anzelma. Okazuje się, że zadanie to zostało wykonane jeszcze w erze przed-komputerowej, przez niemieckiego matematyka i logika Kurta Gödla. Opierając się na dowodzie ontologicznym Anzelma stworzył on zestaw aksjomatów i definicji zapisanych z użyciem logiki modalnej. Udowodnił na ich podstawie twierdzenie o istnieniu obiektu, którego cechy pozwalają interpretować go jako monoteistycznego Boga tradycji judeochrześcijańskiej. Jakkolwiek dowód Gödla wykazuje swoje własne problemy, to jego forma jest na tyle zmatematyzowana, że nadaje się on do komputerowej analizy. Rola i interpretacja tego dowodu pozostają nadal kwestią otwartą.

W następnych rozdziałach opiszę pokrótce kształt obu dowodów ontologicznych: kolejno, Anzelma i Gödla. Następnie przedstawię próby weryfikacji dowodu Gödla za pomocą komputera, a na koniec - możliwe modyfikacje i perspektywy na przyszłość.

2 Dowód Anzelma

Anzelm opublikował swój dowód ontologiczny w 1078 roku, w *Proslogionie*, jednym se swoich głównych dzieł. Dowód Anzelma nosi wyraźne piętno toczącego się w tym czasie sporu filozoficznego o status ontologiczny obiektów abstrakcyjnych (idei), tzw. sporu o uniwersalia. Częstym i znanym od starożytności zarzutem wobec teizmu jest stwierdzenie, jakoby Bóg był jedynie ideą stworzoną przez ludzi i nie mającą związku ze światem zewnętrznym. Anzelm projektował swój dowód z myślą o odparciu takiego kontrargumentu.

Dowód ontologiczny Anzelma przedstawia się następująco.

Aksjomat 1 *Wszystkim istniejącym bytom można przypisać cechę* doskonałości. *Różne byty posiadają cechę doskonałości w rożnym stopniu.*

Aksjomat 2 *Byt istniejący obiektywnie (tzn. poza ludzkim umysłem) jest bardziej doskonały, niż identyczny byt, ale istniejący tylko w ludzkim umyśle.*

Definicja 1 *Bóg jest to byt najbardziej doskonały. Oznacza to, że niemożliwe jest wręcz* wyobrażenie sobie *jakiegokolwiek bytu bardziej doskonałego.*

„Doskonałość" można intepretować rozmaicie, jednak dokładny sposób wartościowania obiektów pod względem tej cechy nie jest istotny z punktu widzenia dowodu. Okazuje się, że na bazie powyższych założeń daje się już udowodnić odpowiednie twierdzenie:

Twierdzenie 1 *Bóg jest bytem istniejącym realnie, poza ludzkim umysłem.*

Dowód. Dowód twierdzenia odbywa się przez zaprzeczenie. Załóżmy, że Bóg istnieje tylko jako wytwór myśli człowieka. Wynika z tego, że nie jest to idea najdoskonalsza, można bowiem wyobrazić sobie Boga bardziej doskonałego: takiego, który istnieje w rzeczywistości realnej. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z przyjętą definicją 1. Uznając założenie początkowe za prawdziwe, otrzymujemy sprzeczność – a zatem Bóg musi być bytem istniejącym realnie. □

Dowód Anzelma spotkał się z krytyką i to niemal natychmiast po opublikowaniu Okazuje się bowiem, że wykorzystując powyższą metodę można udowodnić istnienie bardzo wielu bytów, z których część wydaje się nam, jako filozofom, wysoce niepożądana. Pierwsze zarzuty zostały opublikowane jeszcze za życia Anzelma, przez mnicha Gaunilona w księdze *W obronie głupiego*. Gaunilo przytacza przykład idealnej, najdoskonalszej wyspy: zgodnie z rozumowaniem Anzelma, taka wyspa z definicji musi istnieć, ponieważ inaczej nie byłaby najdoskonalsza. Podobnie można dowodzić istnienia nieomal wszystkiego, co stanowi niezaprzeczalną słabość dowodu Anzelma. Został on uznany za niepoprawny jeszcze w średniowieczu i odrzucony ostatecznie w *Sumie teologicznej* Tomasza z Akwinu.

Pomimo tych problemów, należy docenić zalety dowodu Anzelma. Jest on bardzo nowoczesny w formie: na bazie przyjętych aksjomatów i reguł wnioskowania przeprowadza się dowód zadanego twierdzenia. Dzięki takiej konstrukcji, dowód Anzelma jest bliski współczesnym systemom formalnym występującym w logice matematycznej, tzw. systemom Hilberta. Ta cecha sprawia, że daje się on stosunkowo łatwo przełożyć na język nowoczesnej matematyki. Jak wspomniano we wstępie, dokonał tego Kurt Gödel w 1941 roku, jakkolwiek – z przyczyn kulturowych, a mianowicie obaw o reakcję środowiska naukowego – prace na ten temat zostały opublikowane dopiero 9 lat po jego śmierci [1]. W następnym rozdziale przedstawię tę współczesną postać dowodu ontologicznego.

3 Dowód Gödla

Pełna postać dowodu Gödla jest skomplikowana i nie będę jej tutaj szczegółowo przytaczał. Przedstawię jedynie podstawowe aksjomaty, definicje i twierdzenia pośrednie – dla zilustrowania faktu, że treści metafizyczne dają się zapisać w języku dzisiejszej logiki.

Dowód Gödla wykorzystuje logikę modalną, należącą do tzw. logik nieklasycznych i będącą rozszerzeniem klasycznego rachunku zdań o dwa dodatkowe spójniki, tzw. spójniki modalne:

- spójnik możliwości $\Diamond p$, czytany jako „jest możliwe, że p”;
- spójnik konieczności $\Box p$, czytany jako „koniecznie p”.

Za pomocą logiki modalnej można wyrażać stwierdzenia charakteryzujące się różnym stopniem pewności:

- *Jutro nie musi padać.*
- *Możliwe, że ustawa zostanie uchwalona.*
- *Z pewnością poniesie on tego konsekwencje.*

Oba spójniki można przekształcać pomiędzy sobą, za pomocą przekształceń analogicznych do praw de Morgana:

$$\neg\Diamond Z \Leftrightarrow \Box\neg Z$$
$$\neg\Box Z \Leftrightarrow \Diamond\neg Z$$

Gödel wykorzystuje logikę modalną do pokazania, że przy dość ogólnym zbiorze założeń wstępnych prawdziwe jest zdanie: „Bóg istnieje w sposób konieczny".

Przedstawię teraz pokrótce zarys dowodu. Został on opracowany na podstawie [1] i [2].

Założenie 1 *Obiekty matematyczne dają się opisywać za pomocą predykatów:* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, *itd. Każdy predykat daje się sklasyfikować jako „pozytywny"* $P(\varphi)$ *lub „negatywny"* $\neg P(\psi)$.

Aksjomat 1 *Brak dobra jest zły i vice versa:*

$$\neg P(\varphi) \Leftrightarrow P(\neg\varphi)$$
$$P(\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\neg\varphi)$$

Aksjomat 2 *Z dobra nie może wynikać zło:*

$$\big(P(\varphi) \wedge \Box\forall x : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow P(\psi)$$

Aksjomat 3 *Dobro jest absolutne:*

$$P(\varphi) \Rightarrow \Box P(\varphi)$$

Powyższe aksjomaty oddają intuicje dotyczące cech dobrych (pozytywnych) i złych (negatywnych), przyjmowane zazwyczaj mniej lub bardziej świadomie przez większość ludzi. Ich dość ogólny charakter decyduje o sile dowodu ontologicznego, jednak również o jego słabościach, co omawiam dokładniej w rozdziałach 4 i 5.

Definicja 1 *Bóg to obiekt posiadający każdą cechę pozytywną:*

$$G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi\big(P(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x)\big)$$

Mogłoby wydawać się oczywiste, że zachodzi $P(G)$, jednak – zaskakująco – nie wynika to z aksjomatów 1 – 3. Jest tak dlatego, że G definiuje się poprzez kwantyfikator po predykatach, a zatem G jest predykatem rzędu wyższego o 1 od pozytywnych cech, które w sobie zawiera. Wprowadzamy zatem dodatkowy aksjomat:

Aksjomat 4 *P(G)*

Z tak zdefiniowanych założeń można już wyprowadzić kilka interesujących wyników. Przede wszystkim okazuje się, że dla dla każdego pozytywnego predykatu φ daje się znaleźć przynajmniej jeden obiekt, który posiada ten predykat. Mówimy, że każda pozytywna właściwość jest „potencjalnie egzemplifikowana" (ang. *possibly exemplified*):

Twierdzenie 1 $P(\varphi) \Rightarrow \Diamond \exists x : \varphi(x)$

Z twierdzenia 1 daje się już wykazać, że istnienie Boga jest faktem możliwym:

Twierdzenie 2 $\Diamond \exists x : G(x)$

Zależy nam jednak na pokazaniu, że istnienie Boga jest faktem koniecznym. Wprowadzamy kolejne definicje:

Definicja 2 *Predykat φ jest* esencją *obiektu x, gdy wynikają z niego wszystkie pozostałe predykaty prawdziwe dla x*[1]*:*

$$\begin{aligned}&\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall \psi : \\ &\psi(x) \Rightarrow \Box \forall y : \big(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)\big)\end{aligned}$$

Czytelnik mający nieco wprawy może się już domyślać zachodzenia następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3 $G(x) \Rightarrow G \text{ ess } x$

Pozostaje sformalizować kluczową części dowodu Anzelma, czyli założenie, że obiekt istniejący realnie jest bardziej doskonały od identycznego obiektu, ale istniejącego tylko w ludzkim umyśle:

Definicja 3 *Obiekt x istnieje w sposób konieczny $E(x)$, jeśli dla każdej esencji ψ ess x istnieje obiekt posiadający cechę ψ:*

$$E(x) \Leftrightarrow \forall \psi : \big(\psi \text{ ess } x \Rightarrow \Box\, \exists x : \psi(x)\big)$$

Zgodnie z rozumowaniem Anzelma, wprowadzamy następujący aksjomat:

Aksjomat 5 *P(E)*

Ponieważ $E(x)$ jest cechą pozytywną, a G jest esencją Boga, to – w połączeniu z twierdzeniem 1 – uzyskujemy natychmiastowy wniosek:

Twierdzenie 4 $\Box\, \exists x : G(x)$

Udowodniliśmy, że istnienie Boga jest faktem koniecznym.

[1] Oryginalna wersja przedstawiona przez Gödla w [3] nie zawiera pierwszej części koniunkcji $\varphi(x)$. Tak zdefiniowana esencja czyni jednak zbiór aksjomatów 1 - 5 niespójnym; ten dość zaskakujący wniosek został potwierdzony analizą komputerową [4]. Dodanie warunku $\varphi(x)$ nie zmienia zasadniczo semantyki dowodu, a pozwala zachować spójność aksjomatów, dlatego w niniejszym opracowaniu podaję już tylko i wyłącznie tę drugą wersję.

4 Komputerowa analiza dowodu

Dowód Gödla korzysta z nieklasycznej logiki modalnej, i to logiki modalnej wyższego rzędu – wykorzystuje predykaty drugiego rzędu i kwantyfikatory po predykatach. Logiki wyższego rzędu są trudne do komputerowej analizy, ponieważ problemy wyrażone w takich logikach są w ogólności nieobliczalne w sensie Turinga; dodatkową trudność stanowi reprezentacja spójników modalnych $\Diamond$ i $\Box$. Niemniej okazuje się, że logiki HOML (ang. *Higher-Order Modal Logic*) dają się sprowadzić do zwykłej, niemodalnej logiki wyższego rzędu poprzez ominięcie spójnika $\Box$ i kilka innych operacji [4]. Tak uproszczona postać dowodu okazuje się być matematycznie równoważna, a co więcej - nadaje się już do zautomatyzowanej analizy.

Komputerowa weryfikacja dowodu Gödla została przeprowadzona przez niemieckich logików Christopha Benzmüllera i Bruno Paleo [4], [5] przy pomocy znanych programów służących do komputerowego wspomagania dowodzenia twierdzeń: Isabelle, LEO-II, Satallax i Coq. Wnioski okazały się być następujące:

- Zbiór aksjomatów 1 – 5 jest niesprzeczny.
- Twierdzenie 4 jest dowodliwe na bazie przyjętych założeń[2], tym samym dowód Gödla jest – formalnie rzecz biorąc – poprawny.
- Istnieje tylko jeden Bóg spełniający aksjomaty 1 – 5; na bazie przyjętych założeń można zatem udowodnić prawdziwość monoteizmu.

Dowód Gödla nie jest jednak wolny od własnych problemów. Przede wszystkim, oryginalny dowód ontologiczny Anzelma projektowany był z myślą o odrzuceniu zarzutu Boga istniejącego jedynie w ludzkim umyśle; w dowodzie Gödla predykat istnienia (definicja 3) można interpretować jedynie jako istnienie idei matematycznej i nie jest już tak jasne, czy jest to samo „istnienie" co istnienie obiektów materialnych. Do dowodu Gödla można też odnieść – choć w nieco bardziej wyrafinowanej formie – tradycyjną krytykę Gaunilona. Aksjomaty 1 – 5 implikują bowiem zjawisko tzw. modalnego kolapsu: wszystko, co jest możliwe, jest również konieczne:

$$\Diamond\psi \Rightarrow \Box\psi$$

Istnienie tego problemu było podnoszone już w latach 80-tych [6]. Wspomniane badania Benzmüllera i Paleo potwierdziły jego istnienie za pomocą analizy komputerowej [4]. Występowanie modalnego kolapsu pozostaje najpoważniejszym zarzutem podnoszonym wobec dowodu Gödla.

5 Modyfikacje

Podejmowano próby modyfikacji dowodu Gödla, zwykle mające na celu uniknięcie zjawiska modalnego kolapsu. Najbardziej znaną propozycją tego typu jest propozycja Andersona [7], która osiąga ten cel poprzez osłabienie aksjomatu 1.

[2] Wymienionym programom nie udało się jednak wytworzyć kompletnego dowodu w formie jawnej, a jedynie stwierdzić, że jest to możliwe.

Według aksjomatyki przedstawionej przez Gödla, „pozytywność" i „negatywność" są swoimi wzajemnymi zaprzeczeniami i niemożliwe są predykaty klasyfikowane jako „neutralne":

Aksjomat 1 *Brak dobra jest zły i vice versa.*

$$\neg P(\varphi) \Leftrightarrow P(\neg\varphi)$$
$$P(\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\neg\varphi)$$

Brak cech neutralnych jest wyraźnie sprzeczny z intuicją, co stanowi dość istotną słabość aksjomatu 1. Aby tego uniknąć, Anderson zamienia równoważność na implikację w prawo:

Aksjomat 1* *Brak dobra jest zły. Brak zła nie musi być dobry.*

$$P(\varphi) \Rightarrow \neg P(\neg\varphi)$$
$$P(\neg\varphi) \Rightarrow \neg P(\varphi)$$

Tak zmodyfikowany zestaw aksjomatów nie prowadzi już do zjawiska modalnego kolapsu. Co więcej okazuje się, że traci moc również krytyka Gaunilona. Na bazie nowego zestawu aksjomatów daje się udowodnić jedynie istnienie obiektu posiadającego *wszystkie możliwe* pozytywne dechy (Boga), tymczasem idealna wyspa posiada jedynie cechy dobre dla wysp i jej istnienie nie daje się wyprowadzić w nowej aksjomatyce. Dowód Andersona ma jednak swoje własne słabości; analiza komputerowa [5] sugeruje, że pominięta w tej wersji implikacja w lewo może być konieczna do udowodnienia twierdzenia 3; nie jest jasne, czy do udowodnienia ostatecznego wniosku wystarcza jedynie implikacja w prawo. Również w mocy pozostają wątpliwości związane z interpretacją Boga jedynie jako idei matematycznej. Poszukiwania takiej postaci dowodu, która pozwoliłaby uniknąć powyższych problemów, wciąż trwają i stanowią aktywny obszar badań.

6 Podsumowanie

Dla czytelnika wychowanego w duchu scjentystycznego empiryzmu, dowód Gödla może wydawać się naiwny, a nawet budzić uśmiech politowania. Bóg rozważany jako koncepcja matematyczna wydaje się mieć co najmniej niejasny związek z materialną, obserwowalną rzeczywistością. Moim zdaniem należy jednak z przychylnością spojrzeć na tego rodzaju konstrukcje. Wbrew oczekiwaniom logicznych pozytywistów, nie da się uciec od wszelkiej metafizyki; przykładając pozytywistyczne kryterium prawdy do samego pozytywizmu okazuje się, że pozytywizm jest sam w sobie niedowodliwy [8] [9]. Jego podstawowe założenia: logiczna struktura świata i empiryczna weryfikowalność wszelkiej wiedzy mają bowiem czysto metafizyczny, nieweryfikowalny charakter. Scjentystyczny empiryzm nie może zatem stanowić odpowiedzi na pytanie o zasadę świata, a raczej jest odsunięciem tego pytania o jeden krok dalej. Poznanie rozumowe jest więc niezbędnym uzupełnieniem tego, co postrzegalne zmysłowo. Co więcej, rozum jawi się w tym kontekście jako samodzielny zmysł, pozwalający nam obserwować rzeczywistość co prawda innego rodzaju, ale nie mniej prawdziwą niż ta materialna. W takim świetle klasyczny platoński idealizm, zakładający realne istnienie niematerialnych idei, wydaje się znacznie bardziej uzasadniony, niż współczesnemu czytelnikowi mogłoby się zdawać na pierwszy rzut oka.

Spór o istnienie Boga toczy się w filozofii od czasów starożytnych. Nowoczesnym dowodem tego rodzaju jest dowód ontologiczny Gödla, oparty na klasycznym dowodzie ontologicznym Anzelma, i sformalizowany w języku współczesnej logiki. Dzięki wykorzystaniu nowoczesnego oprogramowania istnieje możliwość analizy tego rodzaju dowodów w sposób zautomatyzowany. Pozwala to rozwiązać niektóre wcześniejsze problemy, jednocześnie stawia przez nami nowe wyzwania i pytania, na które wciąż nie znamy odpowiedzi.

Literatura

1. K. Gödel, "Texts relating to the ontological proof," in *Unpublished Essays and Lectures*, pp. 429–437, Oxford University Press, 1995.
2. J. H. Sobel, *Logic and Theism: Arguments for and Against Beliefs in God*. Cambridge University Press, 2004.
3. K. Gödel, "Notes in kurt gödel's hand," in *Logic and Theism: Arguments for and Against Beliefs in God*, pp. 144–145, Cambridge University Press, 2004.
4. C. Benzmuller and B. W. Paleo, "Automating Gödel's Ontological Proof of God's Existence with Higher-order Automated Theorem Provers," in *European Conference on Artificial Intelligence*, IOS Press, 2014. Dostęp zdalny (10.04.2019): `http://page.mi.fu-berlin.de/cbenzmueller/papers/C40.pdf`.
5. C. Benzmüller and B. W. Paleo, "The Inconsistency in Gödel's Ontological Argument: A Success Story for AI in Metaphysics," in *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, AAAI Press, 2016. Dostęp zdalny (10.04.2019): `https://www.ijcai.org/Proceedings/16/Papers/137.pdf`.
6. J. H. Sobel, "Gödel's ontological proof," in *On Being and Saying: Essays for Richard Catwright*, pp. 241–261, MIT Press, 1987.
7. C. A. Anderson, "Some emendations of Gödel's ontological proof," *Faith and Philosophy*, pp. 291–303, 1990. Dostęp zdalny (10.04.2019): `https://appearedtoblogly.files.wordpress.com/2011/05/anderson-anthony-c-22some-emendations-of-gc3b6dels-ontological-proof22.pdf`.
8. H. Putnam, *Philosophical Papers: Volume 3, Realism and Reason*. Cambridge University Press, 1985.
9. S. Sarkar and J. Pfeifer, *The Philosophy of Science: An Encyclopedia*. Taylor & Francis, 2005.