SDM2

DOWÓD SIÓDMY

Artur M. Brodzki

10 kwietnia 2019

1 Wstęp

Spory o możliwość racjonalnego udowodnienia istnienia Boga (lub bogów) toczą się co najmniej od czasów starożytnych, do dnia dzisiejszego nie znalazły zadowalającego wszystkich rozwiązania – i nie zanosi się na to, by udało się je zakończyć w przyszłości. Kontrowersje przynajmniej częściowo wynikają z różnych sposobów rozumienia i definiowania pojęcia Boga w poszczególnych tradycjach filozoficznych. Starożytnym Grekom znane było pojęcie Absolutu, czyli – w dużym uproszczeniu – bytu podstawowego, z którego wszystko inne się wywodzi. Tak rozumiany Absolut bywa utożsamiany z Bogiem kultury chrześcijańskiej, chociaż zachodzą tutaj istotne różnice – Absolut jest bowiem bytem całkowicie bezosobowym, natomiast chrześcijański Bóg posiada własną samoświadomość i wchodzi w osobową relację ze światem stworzonym. Obie tradycje starano się łączyć ze sobą w średniowiecznej scholastyce; z tego okresu pochodzi klasyczny zestaw 5 dowodów na istnienie Boga autorstwa św. Tomasza z Akwinu.

O ile jednak starożytni i średniowieczni autorzy mieli do dyspozycji jedynie siłę swej własnej intuicji i naturalnej inteligencji, to my – ludzie XXI wieku – możemy już wykorzystać do analizy problemu inteligencję sztuczną. Szczególnie interesujące wydają się próby przeprowadzenia dowodu na istnienie Boga (nieważne na tę chwilę, w jakiej konkretnej tradycji) za pomocą komputerowych systemów automatycznego dowodzenia. Aby to było możliwe, należy jednak wpierw uściślić i sformalizować samo pojęcie Boga i jego podstawowych cech (takich jak wszechmoc czy dobro) w języku nowoczesnej matematyki. Okazuje się, że zadanie to zostało wykonane jeszcze w erze przed-komputerowej, przez niemieckiego matematyka i logika Kurta Gödla. Opierając się na znanym, lecz odrzuconym jeszcze w średniowieczu, dowodzie ontologicznym Anzelma z Canterbury, stworzył on własny dowód zapisany w formalizmie współczesnej logiki modalnej, znany powszechnie jako dowód ontologiczny Gödla. Jakkolwiek wykazuje on swoje własne problemy, to jego forma jest na tyle zmatematyzowana, że nadaje się on do komputerowej analizy. Rola i status tego dowodu, jak również jego modyfikacje i możliwość uniknięcia problemów, pozostają nadal problemem otwartym.

W następnych rozdziałach opiszę pokrótce kształt Gödlowskiego dowodu, wychodząc od – prostszego do zrozumienia – dowodu Anzelma. Następnie opiszę próby weryfikacji dowodu za pomocą komputera, a na koniec - możliwe modyfikacje i perspektywy na przyszłość.

2 Dowód Anzelma

Anzelm zaczyna swój dowód przytoczenia własnej definicji Boga. Najpierw jednak czyni pewne założenia wstępne:

Aksjomat 1. *Wszystkim istniejącym bytom można przypisać cechę* doskonałości. *Różne byty posiadają cechę doskonałości w róznym stopniu.*

Aksjomat 2. *Byt istniejący obiektywnie jest bardziej doskonały, niż identyczny byt, ale istniejący tylko w ludzkim umyśle.*

W tak zdefiniowanym aparacie pojęciowym widoczne jest echo średniowiecznego sporu o uniwersalia – tj. o to, czy pojęcia abstrakcyjne istnieją w obiektywnej rzeczywistości, czy też jedynie w ludzkimu umyśle, jako użyteczne kategorie. Natomiast doskonałość można tutaj rozumieć zarówno w sensie moralnym, jak i jako piękno czy użyteczność. Dokładny sposób wartościowania obiektów pod względem tej cechy nie jest jednak dla Anzelma istotny; mając już bowiem ustalone podstawowe założenia, można przystąpić do zdefiniowania centralnego pojęcia – Boga:

Definicja 1. *Bóg jest to byt, od którego nie ma (wręcz nie można sobie wyobrazić) żadnego bytu bardziej doskonałego.*

Na bazie tak sformułowanej definicji, daje się już udowodnić twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Bóg jest bytem istniejącym realnie, poza ludzkim umysłem.*

Dowód. Dowód twierdzenia odbywa się przez zaprzeczenie. Załóżmy, że Bóg istnieje tylko jako wytwór myśli człowieka. Wynika z tego, że nie jest to idea najdoskonalsza ze wszystkich, można bowiem wyobrazić sobie Boga bardziej doskonałego: takiego, który istnieje w rzeczywistości realnej. Wniosek ten jest jednak sprzeczny z przyjętą Definicją 1. Uznając założenie początkowe za prawdziwe, otrzymujemy sprzeczność – a zatem Bóg musi być bytem istniejącym realnie. □

Dowód Anzelma spotkał się z krytyką i to niemal natychmiast po opublikowaniu; powrócimy do tego w następnych rozdziałach. Przede wszystkim jednak jest to dowód bardzo nowoczesny w formie i okazuje się, że można go łatwo przełożyć na język współczesnej matematyki. Dokonał tego Kurt Gödel w 1941 roku, jakkolwiek – z przyczyn kulturowych, a mianowicie obaw Gödla o reakcję środowiska naukowego – prace na ten temat zostały opublikowane dopiero 9 lat po jego śmierci [Gödel, 1995].

3 Dowód Gödla

Pełna postać dowodu Gödla jest skomplikowana i nie będę jej tutaj szczegółowo przytaczał. Przedstawię jedynie podstawowe aksjomaty, definicje i twierdzenia pośrednie – dla zobrazowania ogólnej komcepcji i zilustrowania faktu, że treści metafizyczne dają się zapisać w języku dzisiejszej logiki.

Dowód Gödla wykorzystuje formalizm logiki modalnej, należącej do tzw. logik nieklasycznych i będącej w zasadzie rozszerzeniem klasycznego rachunku zdań o dwa dodatkowe spójniki, tzw. spójniki modalne: spójnik możliwości $\Diamond p$, czytany jako „jest możliwe, że p" oraz spójnik konieczności $\Box p$, czytany jako „koniecznie p". Za pomocą logiki modalnej można wyrażać stwierdzenia charakteryzujące się różnym stopniem pewności: *Jutro nie musi padać. Możliwe, że ustawa zostanie uchwalona. Z pewnością poniesie on tego konsekwencje.* Oba spójniki modalne można przekształcać pomiędzy sobą, za pomocą przekształceń analogicznych do praw de Morgana:

$$\neg\Diamond Z \Leftrightarrow \Box\neg Z$$
$$\neg\Box Z \Leftrightarrow \Diamond\neg Z$$

Gödel wykorzystuje logikę modalną do pokazania, że przy dość ogólnym zbiorze założeń wstępnych prawdziwe jest stwierdzenie: „Bóg istnieje w sposób konieczny".

Przedstawię teraz pokrótce zarys dowodu. Zakładamy najpierw – podobnie jak Anzelm – że obiekty (x) posiadają różne cechy, tj., w sensie logicznym, predykaty: $\varphi(x), \psi(x), \xi(x)$ – i że te cechy dają się opisać jako „pozytywne" $P(\varphi)$ lub „negatywne" $\neg P(\psi)$. Wprowadzamy również symboliczne oznaczenie cechy boskości G. $G(x)$ oznacza zatem, że x jest Bogiem. Na początek przyjmujemy kilka podstawowych aksjomatów dotyczących cech pozytywnych i negatywnych.

Aksjomat 1. *Brak dobra jest zły i vice versa:*

$$\neg P(\varphi) \Leftrightarrow P(\neg\varphi)$$
$$P(\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\neg\varphi)$$

Aksjomat 2. *Z dobra nie może wynikać zło (dobro zawsze implikuje dobro):*

$$\big(P(\varphi) \wedge \Box\forall x : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big) \Rightarrow P(\psi)$$

Aksjomat 3. *Dobro jest absolutne (cechy dobre są zawsze dobre w każdym możliwym stanie rzeczy):*

$$P(\varphi) \Rightarrow \Box P(\varphi)$$

Powyższe aksjomaty oddają intuicje dotyczące cech dobrych (pozytywnych) i złych (negatywnych), przyjmowane zazwyczaj mniej lub bardziej świadomie przez większość ludzi. Ich dość ogólny charakter decyduje o sile dowodu ontologicznego, jednak również o jego słabościach, o czym szczegółowo opowiem w następnych rozdziałach. Następnie Gödel definiuje pojęcie Boga $G(x)$:

Definicja 1. *Bóg to obiekt posiadający wszystkie istniejące cechy pozytywne:*

$$G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi \big(P(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x)\big)$$

Mogłoby się wydawać oczywiste, że predykat G jest sam w sobie pozytywny, jednak – zaskakująco – $P(G)$ nie wynika z aksjomatów 1 – 3. Jest tak dlatego, że G definiuje się poprzez kwantyfikator po predykatach, a zatem G jest predykatem rzędu wyższego o 1 od pozytywnych cech, które z sobie zawiera. Wprowadzamy zatem dodatkowy aksjomat:

Aksjomat 4. *P(G)*

Z tak zdefiniowanych założeń możemy już wyprowadzić kilka interesujących wyników. Przede wszystkim okazuje się, że dla każdej pozytywnej własności φ możemy znaleźć przynajmniej jeden obiekt, który tę własność posiada. Mówimy, że każda pozytywna właściwość jest „egzemplifikowana" (ang. *possibly exemplified*):

Twierdzenie 1. $P(\varphi) \Rightarrow \Diamond\exists x : \varphi(x)$

Na podstawie Twierdzenia 1 możemy wykazać, że istnienie Boga jest faktem możliwym:

Twierdzenie 2. $\Diamond\exists x : G(x)$

Zależy nam jednak na pokazaniu, że istnienie Boga jest faktem koniecznym. Potrzebujemy do tego kolejnej definicji. Gödel był pod wielkim wrażeniem filozofii Leibniza i uwidacznia się to w jego dowodzie ontologicznym. Definiuje on formalnie relację esencji:

Definicja 2. *Predykat φ jest* esencją *x, gdy wynikają z niego wszystkie własności obiektu x:*

$$\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi :$$
$$\psi(x) \Rightarrow \Box\forall y : \big(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)\big)$$

Czytelnik mający nieco praktyki w logice formalnej może się już domyślać zachodzenia następującego faktu:

Twierdzenie 3. $G(x) \Rightarrow G \text{ ess } x$

Należy teraz sformalizować kluczową części dowodu Anzelma, czyli założenie, że obiekt istniejący realnie jest bardziej doskonały od identycznego obiektu, ale istniejącego tylko w ludzkim umyśle:

Definicja 3. *Obiekt x istnieje w sposób konieczny $E(x)$, jeśli dla każdej esencji ψ obiektu x istnieje co najmniej jeden obiekt posiadający cechę ψ:*

$$E(x) \Leftrightarrow \forall\psi : \big(\psi \text{ ess } x \Rightarrow \Box\, \exists x : \psi(x)\big)$$

Zgodnie z rozumowaniem Anzelma, wprowadzamy aksjomat, że E jest cechą pozytywną:

Aksjomat 5. *P(E)*

Ponieważ $E(x)$ jest cechą pozytywną, a G jest jedyną esencją Boga, to – w połączeniu z twierdzeniem 1 – uzyskujemy natychmiastowy wniosek:

Twierdzenie 4. $\Box\, \exists x : G(x)$

Udowodniliśmy, że Bóg istnieje w świecie w sposób konieczny.

4 Komputerowa analiza dowodu

Dowód Gödla korzysta z nieklasycznej logiki modalnej, i to logiki modalnej wyższego rzędu – ponieważ wykorzystuje predykaty drugiego rzędu i kwantyfikatory po predykatach (m.in. aksjomat 1, 3, 4). Logiki wyższego rzędu są trudne do komputerowej analizy, ponieważ problemy wyrażone w takich logikach są w ogólności nieobliczalne w sensie Turinga; dodatkową trudność stanowi reprezentacja spójników modalnych $\Diamond$ i $\Box$. Niemniej okazuje się, że logiki HOML (ang. *Higher-Order Modal Logic*) dają się sprowadzić do zwykłej, niemodalnej logiki wyższego rzędu poprzez ominięcie spójnika $\Box$ i kilka innych operacji dot. semantyki [Benzmüller, 2014]. Tak uproszczona postać dowodu okazuje się być matematycznie równoważna, a co więcej - nadaje się już do zautomatyzowanej analizy. Pierwsze interesujące rezultaty udało się otrzymać w 2014 roku, przy użyciu znanych od dawna programów wspomagających dowodzenie: Isabelle, LEO-II, Satallax i Coq. Udało się potwierdzić następujące fakty:

- Zbiór aksjomatów 1 – 4 jest niesprzeczny.
- Twierdzenie 4 jest dowodliwe na bazie przyjętych założeń[1], tym samym dowód Gödla jest – formalnie rzecz biorąc – poprawny.
- Istnieje tylko jeden Bóg spełniający przyjęte założenia – na gruncie zadanych aksjomatów można więc udowodnić prawdziwość monoteizmu.

[1] Wymienionym programom nie udało się jednak wytworzyć kompletnego dowodu w formie jawnej, a jedynie stwierdzić, że jest to możliwe.

Dowód Gödla cierpi jednak na swoje własne problemy, częściowo odziedziczone po dowodzie Anzelma. Zarzut podniesiony jeszcze w średniowieczu sprowadza się do tego, że wykorzystując zaproponowaną przez Anzelma konstrukcję myślową można udowodnić istnienie bardzo wielu bytów, np. idealnej wyspy (taka wyspa musiałaby wszak istnieć w rzeczywistości, inaczej nie byłaby idealna), jak również licznych pół-bogów, czy – odwracając wartościowanie – demonów i innych, niekoniecznie pożądanych przez nas jako filozofów, bytów. Gödel znał te zarzuty i projektując swój dowód starał się uniknąć podobnej pułapki – jednak występuje tu podobne, choć bardziej wyrafinowane zjawisko modalnego kolapsu: wszystko, co jest możliwe, jest również konieczne. Istnienie tego problemu było podnoszone już w latach 80-tych [Sobel, 1987], a całkiem niedawno jego występowanie zostało potwierdzone analizą komputerową [Benzmüller, 2014].

Podejmowano próby modyfikacji dowodu w celu uniknięcia modalnego kolapsu poprzez osłabienie aksjomatu 1 [Anderson, 1990]. W jego oryginalnej postaci, „pozytywność" i „negatywność" są swoimi wzajemnymi zaprzeczeniami i niemożliwe są predykaty klasyfikowane jako „neutralne". Zamiana równoważności na implikację:

$$P(\varphi) \Rightarrow \neg P(\neg\varphi)$$

dopuszcza istnienie predykatów neutralnych i pozwala na uniknięcie kolapsu [Anderson, 1996]. Tak zmodyfikowany zestaw aksjomatów po jego weryfikacji przez oprogramowanie okazał się jednak niespójny [Benzmüller, 2014], [Benzmüller, 2016], co było nowym i dosyć zaskakującym rezultatem. Poszukiwania takiej postaci dowodu, która pozwoliłaby uniknąć powyższych problemów, pozostają zatem nadal problemem otwartym.

5 Podsumowanie

Spór o istnienie Boga i możliwość udowodnienia tego faktu toczy się w filozofii od czasów starożytnych. Nowoczesnym dowodem tego rodzaju jest dowód ontologiczny Gödla, oparty na klasycznym dowodzie ontologicznym Anzelma, i sformalizowany w języku współczesnej logiki. Dzięki wykorzystaniu nowoczesnego oprogramowania, istnieje możliwość analizy tego rodzaju dowodów w sposób zautomatyzowany. Pozwala to rozwiązać niektóre znane problemy, jednocześnie stawia przez nami nowe wyzwania i pytania, na które wciąż nie znamy odpowiedzi.

Literaura

[Anderson, 1990] Anderson, C. A. (1990). Some emendations of Gödel's ontological proof. *Faith and Philosophy*, str. 291–303. Dostęp zdalny (PDF): `https://somewebsite.com/ontological-proof22`.

pdf

[Anderson, 1996] Anderson, C. A.; Geettings, M. (1996). Gödel's ontological proof revisited. *Lecture Notes in Logic*, str. 167–172. Dostęp zdalny (PDF): https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.lnl/1235417020