Rachunek prawdopodobieństwa MAP1064

Wydział Elektroniki, rok akad. 2008/09, sem. letni

Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Wykład 2: Szeregi Fouriera

Definicja.

Niech $f(t)$ będzie funkcją określoną na $\mathbb{R}$, okresową o okresie $2T$ (tzn. $f(t+2T) = f(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$) oraz całkowalną na przedziale $[-T, T]$.
Definiujemy ciągi (a_n), (b_n):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt, \\ b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt, \\ & \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Szereg postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right)$$

nazywamy **szeregiem Fouriera funkcji** $f(t)$.

Uwaga.

- Jeżeli $f(t)$ jest funkcją parzystą na przedziale $[-T, T]$, to $b_n = 0$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ i w szeregu Fouriera tej funkcji nie występują sinusy.
- Jeżeli $f(t)$ jest funkcją nieparzystą na przedziale $[-T, T]$, to $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$ i w szeregu Fouriera tej funkcji nie występują cosinusy i wyraz początkowy.

TWIERDZENIE:

Załóżmy, że $f(t)$ określona na $\mathbb{R}$, ograniczona, okresowa o okresie $2T$ spełnia warunki Dirichleta tzn.

(1) przedział $[-T, T]$ można podzielić na skończoną ilość przedziałów takich, że $f(t)$ jest ciągła i monotoniczna na wnętrzu każdego z nich;

(2) dla każdego t mamy

$$f(t) = \frac{f(t-) + f(t+)}{2},$$

gdzie granice $f(t\pm) = \lim\limits_{x \to t\pm} f(x)$ są właściwe.

Wtedy dla każdego t mamy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right)$$

gdzie po prawej stronie równości znajduje się szereg Fouriera funkcji f.

UWAGA.

- Warunek (2) jest spełniony w każdym punkcie ciągłości funkcji f. W punktach nieciągłości oznacza on, że zakładamy występowanie jedynie nieciągłości pierwszego rodzaju i że jako wartość funkcji w takim punkcie przyjmujemy średnią arytmetyczną granic jednostronnych.
- Teza twierdzenia zachodzi także, gdy przyjmiemy inne założenia o funkcji f, np. zamiast (1) założyc można, że f jest kawałkami klasy C^1 (ciągła lub nieciągła).

Zespolony szereg Fouriera:

Inna postać szeregu Fouriera to

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi t}{T}},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{-in\frac{\pi t}{T}}\, dt.$$

(Symbol e^{ix} oznacza liczbę zespoloną $\cos x + i \sin x$ w tzw. postaci wykładniczej.)

Zauważmy, że $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ oraz $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ dla $n \geqslant 1$.

Interpretacja:

t - czas
$f(t)$ - sygnał okresowy
(c_n) - widmo sygnału f

$\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$ to funkcje okresowe o okresie $\frac{2T}{n}$. Mają $\nu = \frac{n}{2T}$ okresów w odcinku $[0, 1]$, czyli częstotliwość ν Hz (ν okresów na sekundę).

Przykład 1:

Sygnał o przebiegu prostokątnym, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 < t < T \\ -1 & \text{dla} \quad -T < t < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t = -T, 0, T. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
  Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$.

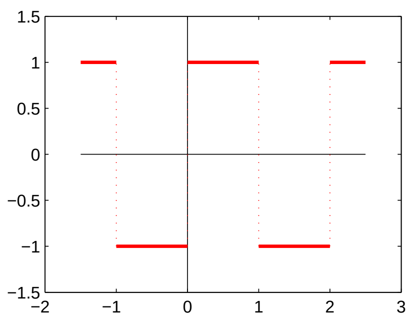
  Obliczamy b_n:

  $$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left(-\frac{T}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T =$$

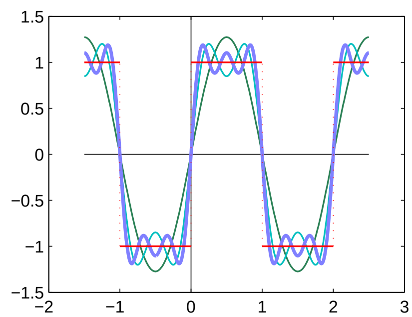
  $$= \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla} \quad n = 2k - 1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}, \; k = 1, 2, \ldots$$

- Zatem sygnał prostokątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

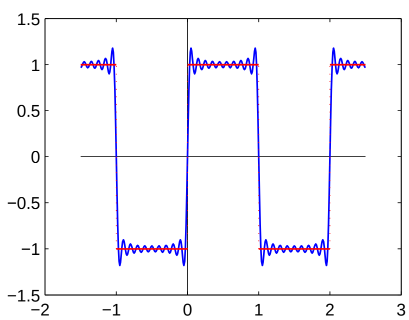
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k - 1} \sin\left(\frac{(2k - 1)\pi t}{T}\right)$$



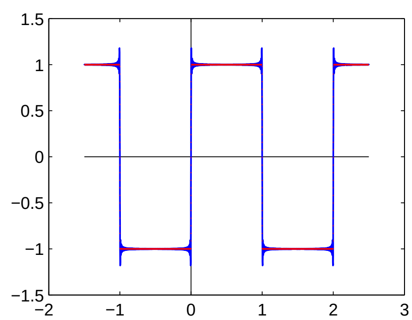
sygnal o przebiegu prostokatnym



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=1, 2, 3



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=10



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=100

Przykład 2:

Sygnał trójkątny, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant T \\ -t & \text{dla} \quad -T \leqslant t < 0. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja parzysta.
  Zatem $b_n = 0$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$.

  Obliczamy a_n:

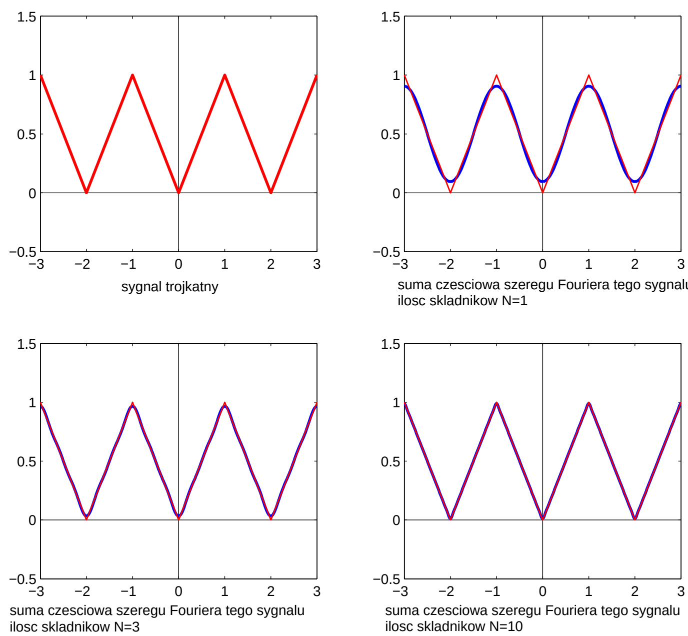
  $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T t dt = T$$

  $$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\left(t\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T - \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt\right) =$$

  $$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T = \frac{2T((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{4T}{n^2\pi^2} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}, \; k = 1, 2, \ldots$$

- Zatem sygnał trójkątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

  $$f(t) = \frac{T}{2} + \frac{2T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{T}\right)$$



sygnal trojkatny

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=1

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=3

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=10

Przykład 3:

Sygnał o przebiegu piłowym, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{dla} \quad t = -T, T. \end{cases}$$

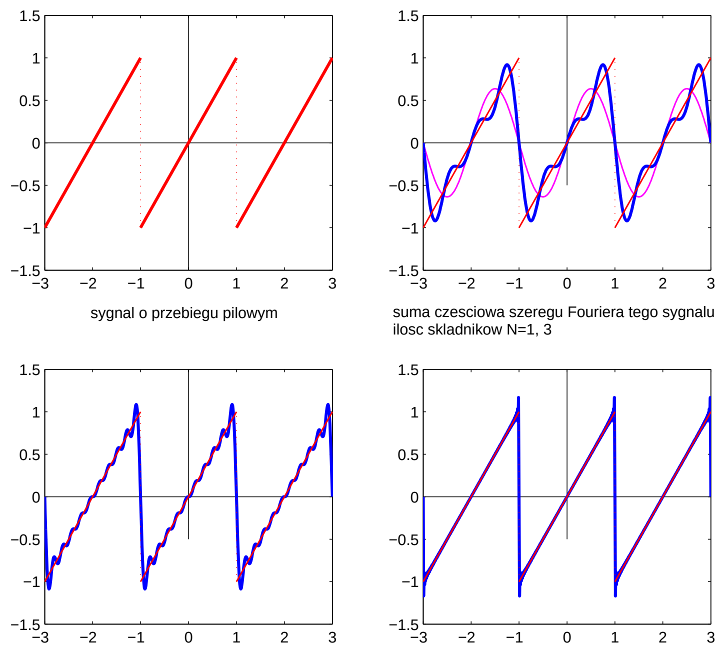
- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
  Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$.

  Obliczamy b_n:

  $$b_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} t\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\left(-t\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T + \int\limits_0^T \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt\right) =$$
  $$= \frac{2}{n\pi}\left(-(-1)^n T + \frac{T}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T\right) = \frac{2T(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

- Zatem sygnał piłowy rozwija się w następujący szereg Fouriera:

$$f(t) = \frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$



sygnal o przebiegu pilowym

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=1, 3

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=10

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=100