Repositório de Cálculo Numérico

UFSC Joinville - EMB5016
Artur Gemaque

24 de novembro de 2024

Resumo

Este documento tem a finalidade de repositório atuando como material de reforço para os alunos da disciplina de Cal. Numérico do professor Alexandre Zabot. Nesse sentido, devo informar que os sequintes conteúdos são nada mais do que anotações dos alunos no decorrer das aulas. Agradecimentos ao Maicon que me deu essa ideia!

1 Aproximações de raizes

1.1 Bissecção

O método divide repetidamente pela metade (bisseção) subintervalos de [a, b] e, em cada passo, localiza a metade que contém p, sendo p a raiz da equação.

O método consiste em:

1. Chute um valor para "a" e outro para "b", de maneira que $f(x)$ seja continua no intervalo [a,b].
2. Atribua o valor médio de "a" e "b" a uma variável chamanda de "q".
3. Certifique-se que "q"não é uma raiz.
4. Verifique o sinal de $f(a)$ e $f(q)$.
5. Caso I. $f(a)$ e $f(q)$ contém mesmo sinal $\Longrightarrow$ A raiz está entre "q" e "b".
6. Substitua "a"pelo valor de "q"
7. Retorne para o 2
8. Caso II. $f(a)$ e $f(q)$ contém sinais opostos $\Longrightarrow$ A raiz está entre "a" e "q".
9. Substitua "b"pelo valor de "q"
10. Retorne para o item 7

1.2 Iteração de Ponto Fixo

Observamos que sempre podemos reescrever uma equação da forma $f(x) = 0$, de modo que obtamos a função equivalente $g(x) = x^*$. Por exemplo:

1. $e^x = x + 2$, podemos reescrever como $f(x) = 0$ ou $f(x) = e^x - x - 2$
2. Reescrevemos a função que representa todos os "0"da equação como x = x da sequinte forma $g(x) = x$ e $g(x) = e^x - 2$
3. Dada uma função $g(x)$, a iteração do ponto fixo consiste em computar a seguinte sequência recursiva:
   $x^{(n+1)} = g(x^{(n)}),\ n >= 1,$

1.3 Método de Newton

if you have a equation named by $f(x) = cos(x) + 1$ and want to apply the Newton's Method, follow the steps

1. Find the $f'(x) = \frac{d(f(x))}{dx} \rightarrow f'(x) = -sen(x)$
2. Utilize the equation $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
3. Enter an approximate value for x_0, nesse caso
4. $x_1 = 2 - \frac{cos(2)+1}{-sen(2)} \rightarrow x_1 = 2,64209$
5. $x_1 = 2,64209 - \frac{cos(2,64209)+1}{-sen(2,64209)} \rightarrow x_1 = 2,89716$
6. $x_1 = 2,89716 - \frac{cos(2,89716)+1}{-sen(2,89716)} \rightarrow x_1 = 3,01999$

7. $x_1 = 3,01999 - \frac{cos(3,01999)+1}{-sen(3,01999)} \rightarrow x_1 = 3,08086$
8. $x_1 = 3,08086 - \frac{cos(3,08086)+1}{-sen(3,08086)} \rightarrow x_1 = 3,12641$
9. The result tends to π

2 Resolução de Matrizes

2.1 Método Gaussiano, ou método de escalonamento

Este método consiste em aplicar sucessivas operações elementares num sistema linear, para o transformar num sistema de mais fácil

Algorítimo de 3 Etapas

1. Etapa 1: Gerar uma matriz aumentada apartir de um sistema de equações:
2. Etapa 2:

   1° Fase Deseja-se zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal

   Agora, devem-se zerar todos os elementos da segunda coluna abaixo da diagonal principal
3. Etapa 3: Resolve o sistema facilitado

2.2 Método de Gauss-Seidel

Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando a matriz estendida do sistema em uma matriz triangular

Critérios que garantem a convergência das soluções

1. Critério de Sassenfeld
2. Critério das linhas
3. Diagonal Principal Dominante

Por Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}y^{(k-1)} - a_{13}z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x^{(k)} - a_{23}z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x^{(k)} - a_{32}y^{(k)}) \end{cases}$$

2.3 Decomposição Lu

O método LU consiste em dividir a matriz em questão em duas partes

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

1. Triangular inferir com linha diagonal completa (L)
2. Triangular superiror com diagonal zerada (U)

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} l_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{10} & l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & \cdots & l_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & u_{01} & \cdots & u_{0,n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

exemplo

$$AB = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Depois determinamos $\vec{y}$ resolvendo $L\vec{y} = \vec{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{y} = (4, 7, 4.333, 1)$$

E por fim $\vec{x}$, resolvendo $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 4.333 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = (-1, 2, 0, 1)$$