

# Шпора

## Диффуры

### Содержание

|  |   |
|--|---|
| 1 Автономное уравнение   | 1 |
| 2 Разделяющиеся переменные   | 1 |
| 3 Однородные ДУ  | 2 |
| 4 Линейное ДУ  | 2 |
| 5 Уравнения Бернулли   | 2 |
| 6 Уравнения Риккати  | 2 |
| 7 ДУ в полных производных  | 2 |
| 8 ДУ Лагранжа / Клеро  | 3 |
| 9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами    | 3 |
| 10 Неоднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами | 4 |
| 11 Однородное Уравнение Эйлера   | 4 |
| 12 Бонус ОЛДУ  | 4 |
| 13 Система ЛДУ   | 5 |

### Внимание

Применяя данные методы не забываем проверять места, где мы потенциально делим на 0.  
Можно посмотреть ресурс EqWorld

## 1 Автономное уравнение

$$y' = f(x)$$

Интегрируем

## 2 Разделяющиеся переменные

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируем

### 3 Однородные ДУ

$$y' = f(x, y) \text{ и } f(mx, my) = f(x, y)$$

Замена  $z = \frac{y}{x}$ ,  $y = zx$ ,  $y' = z + z'x$

### 4 Линейное ДУ

$$y' + p(x)y = g(x)$$

1. Решаем однородную часть  $y' + p(x)y = 0$ . Это ДУ с разделяющимися
2. Вариация констант  $c = c(x)$ . Подставляем так, доделываем

### 5 Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n | : y^n$$
$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Замена  $w = y^{1-n}$ ,  $w' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$ . Получаем

$$\frac{w'}{1-n} + p(x)w = q(x)$$

Это линейное ДУ

### 6 Уравнения Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Если  $y_1$  - частное решение, то делаем замену  $z = y - y_1$ . После этого по идее решается.

### 7 ДУ в полных производных

Предполагаем, что уравнение имеет вид

$$F'_x dx + F'_y dy = 0$$

Проверяем, совпадает ли  $F_{xy} = F_{yx}$ . Если да, то

1. Интегрируем одну из производных  $F(x) = \int F'_x dx = G(x) + C(y)$ . Предполагаем, что константа - функция от  $y$ .
2. Берем производную от всего, но уже по другой переменной и ищем такое  $C(y)$ , чтобы выполнялось  $(G(x) + C(y))' = F'_y$ . Далее уже дособируем ответ

Если  $F_{xy} \neq F_{yx}$ , то начинаются танцы с интегрирующим множителем. Для этого пробуем выделять и собирать полные дифференциалы, например

$$ydx - (x^3y + x)dy = 0, (ydx - xdy) - x^3ydy = 0 | : x^2$$

Видно, что первой скобки не хватает знаменателя, чтобы свернуться в дифференциал. Поделим, преобразуем.

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - xydy = 0, -d\left(\frac{y}{x}\right) - xydy = 0$$

Немного сообразительности и вводим замену  $z = \frac{y}{x}$ . Тогда

$$-d(z) - \frac{y^2}{z} dy = 0, \quad -y^2 dy = z dz$$

Получили разделяющиеся переменные.

*Да как, блять, искать ваш интегрирующий множитель?*

Есть алгоритм, который может помочь нам делать это, но он не всегда работает. Для этого надо ввести функцию  $\mu$ , которая может быть трёх видов:  $\mu(x)$ ,  $\mu(y)$ ,  $\mu(x, y)$ . Именно на неё мы будем домножать. Итак, чтобы найти  $\mu$ , то делаем:

$$F'_y \frac{\partial \mu}{\partial x} - F'_x \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

Соответственно какое-то из слагаемых слева будет нулём (в зависимости от  $\mu(x)$  или  $\mu(y)$ ). Если  $\mu = \mu(x)$ :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{F'_y} \left( \frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

## 8 ДУ Лагранжа / Клеро

$$y = f(y')x + g(y')$$

ДУ Клеро - когда  $f(y') = y'$ . Предполагаем, что  $y'_x = t$ ,  $t = t(x)$ . Тогда исходное уравнение имеет вид

$$y = f(t)x + g(t), \quad t = y'_x = f(t) + x f'_t(t) \cdot t'_x + t'_x \cdot g'_t(t)$$

$$(x f'_t(t) + g'_t(t)) t'_x = t - f(t)$$

Если  $t - f(t) \equiv 0$ , то это как раз ДУ Клеро. Тут понятно. Иначе сводится к линейному ДУ.

Ответ записываем в параметрическом виде, поэтому константы у переменных должны соответствовать.

**Бонус 1:** Рассмотрим ДУ  $y = xy' - x^2(y')^3$ . Оно не подходит под шаблон ДУ Лагранжа, но если сделать аналогичное предположение  $y' = p$ , то в процессе получится свести к линейному относительно  $x(p)$  и уравнение решится.

**Бонус 2:** Иногда возможно решить уравнение относительно  $y'$  и не надо никаких замен. При этом уравнение может совсем не соответствовать виду ДУ Лагранжа. Например:

$$y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x \mid \text{квадратное уравнение относительно } y'$$

$$(y')^3 + (x + 2)e^y = 0 \mid y' \text{ просто выражается}$$

## 9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Ищем корни в виде  $y = C e^{\lambda x}$  Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень  $\lambda$  дает слагаемое  $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}) e^{\lambda x}$  в ответ, где  $n$  - кратность корня
2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в  $\mathbb{R}[x]$ , то пара (всегда пара) комплексных корней  $a \pm bi$  дает слагаемое  $e^a ((C_{1,1} + C_{1,2}x + C_{1,3}x^2 + \dots + C_{1,n}x^{n-1}) \cos(bx) + (C_{2,1} + C_{2,2}x + C_{2,3}x^2 + \dots + C_{2,n}x^{n-1}) \sin(bx))$  в ответ, где  $n$  - кратность корня.
3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

## 10 Неоднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

1. Сначала решаем однородную часть, отбрасывая то, что находится справа.
2. Ищем частное решение. Есть два пути:

- Если  $f(x)$  собрано из функций  $e^{ax}$ ,  $\sin(bx)$ ,  $\cos(mx)$ ,  $P^n(x) \in \mathbb{R}[x]$  - многочлен степени  $n$  путем применения операций  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  друг к другу и вещественным константам, то можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов путем применения соответствий

$$P^n(x) \leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$e^{\lambda x} \leftrightarrow a e^{\lambda x}$$

$$\sin(bx), \cos(bx) \leftrightarrow A \sin(bx) + B \cos(bx)$$

Синус и косинус одинаково представляются в общем виде. Не забываем учитывать кратность корня (в том числе и в решении однородной части) и домножать на нужный многочлен. Например если в однородном решении был  $(C_1 + xC_2)e^{2x}$  и  $f(x) = P_m(x)e^{2x}$ , то мы будем искать решение в виде  $Q_m(x)x^2 e^{2x}$ . Так же  $e^{0x}$  считается полиномом, про это тоже не забываем.

- Можно пользоваться стандартным методом вариации констант. Пусть решение однородной части имеет вид  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ . Тогда мы должны решить систему

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \dots & y_n^{n-2} \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$

Для этого используем правило Крамера. Матрица слева называется матрицей Вронского, а определитель матрицы - Вронскиан

## 11 Однородное Уравнение Эйлера

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Сводится к ОЛДУ с постоянными коэффициентами заменой  $x = e^t$ . Иногда работает и  $y = x^k$ .

## 12 Бонус ОЛДУ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0 y = 0$$

Пусть  $y_1$  - частное решение. Тогда

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

Отсюда находится  $y_2$  и итоговое решение равно  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ .

Тут можно пытаться подобрать это частное решение как: многочлен в общем виде, либо (если старшие степени при  $x$  одинаковые) как экспонента  $e^{ax}$ .

## 13 Система ЛДУ

Section under construction.

Диагонализуя матрицу, мы сводим к случаю ОЛДУ но в векторной форме. Поэтому должно быть очевидно.

При решении НСЛДУ вроде должно все получиться при вариации констант. Можно так же ставить соответствия, но это `rip`.