Шпора

Диффуры

Содержание

1 Автономное уравнение **2**

2 Разделяющиеся переменные **2**

3 Однородные ДУ **2**

4 Линейное ДУ **2**

5 Уравнения Бернулли **2**

6 Уравнения Риккати **2**

7 ДУ в полных производных **3**

8 ДУ Лагранжа / Клеро **3**

9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами **4**

10 Неднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами **4**

11 Однородное Уравнение Эйлера **4**

12 Бонус ОЛДУ **5**

13 Система ЛДУ **5**
13.1 Варицаия констант 6

14 Разностные уравнения **6**

15 Система разностных уравнений **6**
15.1 "Метод вариации констант"для разностных уравнений 7

16 Устойчивость нулевого решения **7**
16.1 Линейное приближение 7

Внимание

Применяя данные методы не забываем проверять места, где мы потенциально делим на 0.
Можно посмотреть ресурс EqWorld

1 Автономное уравнение

$$y' = f(x)$$

Интегрируем

2 Разделяющиеся переменные

$$y' = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируем

3 Однородные ДУ

$$y' = f(x,y) \text{ и } f(mx,my) = f(x,y)$$

Замена $z = \frac{y}{x},\ y = zx,\ y' = z + z'x$

4 Линейное ДУ

$$y' + p(x)y = g(x)$$

1. Решаем однородную часть $y' + p(x)y = 0$. Это ДУ с разделяющимися
2. Вариация констант $c = c(x)$. Подставляем так, доделываем

5 Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n | : y^n$$
$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Замена $w = y^{1-n}$, $w' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. Получаем

$$\frac{w'}{1-n} + p(x)w = q(x)$$

Это линейное ДУ

6 Уравнения Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Если y_1 - частное решение, то делаем замену $z = y - y_1$. После этого по идее решается.

7 ДУ в полных производных

Предполагаем, что уравнение имеет вид

$$F'_x dx + F'_y dy = 0$$

Проверяем, совпадает ли $F_{xy} = F_{yx}$. Если да, то

1. Интегрируем одну из производных $F(x) = \int F'_x dx = G(x) + C(y)$. Предполагаем, что константа - функция от y.

2. Берем производную от всего, но уже по другой переменной и ищем такое $C(y)$, чтобы выполнялось $(G(x) + C(y))' = F'_y$. Далее уже дособираем ответ

Если $F_{xy} \neq F_{yx}$, то начинаются танцы с интегрирующим множителем. Для этого пробуем выделять и собирать полные дифференциалы, например

$$ydx - (x^3 y + x)dy = 0, \ (ydx - xdy) - x^3 ydy = 0| : x^2$$

Видно, что первой скобки не хватает знаменателя, чтобы свернуться в дифференциал. Поделим, преобразуем.

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - xydy = 0, \ -d(\frac{y}{x}) - xydy = 0$$

Немного сообразительности и вводим замену $z = \frac{y}{x}$. Тогда

$$-d(z) - \frac{y^2}{z}dy = 0, \ -y^2 dy = zdz$$

Получили разделяющиеся переменные.

Да как, блин, искать ваш интегрирующий множитель?

Есть алогритм, который может помочь нам делать это, но он не всегда работает. Для этого надо ввести функцию μ, которая может быть трёх видов: $\mu(x), \ \mu(y), \ \mu(x, y)$. Именно на неё мы будем домножать. Итак, чтобы найти μ, то делаем:

$$F'_y \frac{\partial \mu}{\partial x} - F'_x \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

Соответственно какое-то из слагаемых слева будет нулём (в зависимости от $\mu(x)$ или $\mu(y)$). Если $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{F'_y} \left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

8 ДУ Лагранжа / Клеро

$$y = f(y')x + g(y')$$

ДУ Клеро - когда $f(y') = y'$. Предполагаем, что $y'_x = t, \ t = t(x)$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$y = f(t)x + g(t), \ t = y'_x = f(t) + x f'_t(t) \cdot t'_x + t'_x \cdot g'_t(t)$$

$$(x f'_t(t) + g'_t(t)) t'_x = t - f(t)$$

Если $t - f(t) \equiv 0$, то это как раз ДУ Клеро. Тут понятно. Иначе сводится к линейному ДУ.

Ответ записываем в параметрическом виде, поэтому константы у переменных должны соответствовать.

Бонус 1: Рссмотрим ДУ $y = xy' - x^2(y')^3$. Оно не подходит под шаблон ДУ Лагранжа, но если сделать аналогичное предпложение $y' = p$, то в процессе получится свести к линейному относительно $x(p)$ и уравнение решится.

Бонус 2: Иногда возможно решить уравнение относительно y' и не надо никаких замен. При этом уравнение может совсем не соответствовать вид ДУ Лагранжа. Например:

$$y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x \mid \text{квадратное уравнение относительно } y'$$

$$(y')^3 + (x+2)e^y = 0 \mid \text{y' просто выражается}$$

9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициента

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Ищем корни в виде $y = Ce^{\lambda x}$Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень λ дает слагаемое $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1})e^{\lambda x}$ в ответ, где n - кратность корня

2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в $\mathbb{R}[x]$, то пара (всегда пара) комплексных корней $a \pm bi$ дает слагаемое $e^a((C_{1,1} + C_{1,2}x + C_{1,3}x^2 + \cdots + C_{1,n}x^{n-1})\cos(bx) + (C_{2,1} + C_{2,2}x + C_{2,3}x^2 + \cdots + C_{2,n}x^{n-1})\sin(bx))$ в ответ, где n - кратность корня.

3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

10 Неоднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициен

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

1. Сначала решаем однородную часть, отбрасывая то, что находится справа.

2. Ищем частное решение. Есть два пути:

   - Если $f(x)$ собрано из функций e^{ax}, $\sin(bx)$, $\cos(mx)$, $P^n(x) \in \mathbb{R}[x]$ - многочлен степени n путем применения операций $+,\ -,\ \cdot$ друг к другу и вещественным константам, то можно воспользоваться методом неопределенных кэффициентов путем применения соответствий

     $$P^n(x) \leftrightarrow a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = Q_n(x)$$

     $$e^{\lambda x} \leftrightarrow a e^{\lambda x}$$

     $$\sin(bx),\ \cos(bx) \leftrightarrow A\sin(bx) + B\cos(bx)$$

     Синус и косинус одинаково представляются в общем виде. Не забываем учитывать кратность корня (в том числе и в решении однородной части) и домножать на нужный многочлен. Например если в однородном решении был $(C_1 + xC_2)e^{2x}$ и $f(x) = P_m(x)e^{2x}$, то мы будем искать решение в виде $Q_m(x)x^2e^{2x}$. Так же e^{0x} считается полиномом, про это тоже не забываем.

   - Можно пользоваться стандартным методом вариации констант. Пусть решение однородной части имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$. Тогда мы должны решить систему

     $$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \cdots & y_n^{n-2} \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$

     Для этого используем правило Крамера. Матрица слева называется матрицей Вронского, а определитель матрицы - Вронскиан

11 Однородное Уравнение Эйлера

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Сводится к ОЛДУ с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$. Иногда работает и $y = x^k$.

12 Бонус ОЛДУ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0$$

Пусть y_1 - частное решение. Тогда

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$$

От сюда находится y_2 и итоговое решение равно $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

Тут можно пытаться подобрать это частное решение как: многочлен в общем виде, либо (если старшие степени при иксах одинаковые) как экспонента e^{ax}.

13 Система ЛДУ

Section under construction.

Диагонализуя матрицу, мы сводим к случаю ОЛДУ но в векторной форме. Поэтому должно быть очевидно. При решении НСЛДУ вроде должно все получиться при вариации констант. Можно так же ставить соответствия, но это rip.

Пусть у нас есть система (напишем для двух переменных) $\dot{X} = AX + f(t)$, или:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0x + b_0y + f_1(t) \\ \dot{y} = a_1y + b_1y + f_2(t) \end{cases}$$

- Сначала решаем однородную часть. Для это запишем матрицу, соответствующей однородной части:

  $$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

  Ищем собственные значения этой матрицы. Пусть они равны $\lambda_1,\ \lambda_2$. Ищем собственные вектора v_1 и v_2, соответствующие этим собственным значением, тогда однородное решение будет

  $$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = c_1e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

  Если $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ комплексный корень, то берем один любой, например, $a + ib$ и опять ищем собственный вектор $v_1 = (p_0 + iq_0,\ \ p_1 + iq_1)^t$.

  Посмотрим на решение, соответствующее этому корню

  $$f = e^{(a+ib)t}\begin{pmatrix} p_0 + iq_0 \\ p_1 + iq_1 \end{pmatrix}$$

  Тогда распишем $Re(f),\ Im(f)$ через косинусы и синусы:

  $$Re(f) = c_1e^{at}\begin{pmatrix} p_0\cos bt - q_0\sin bt \\ p_1\cos bt - q_1\sin bt \end{pmatrix}$$

  $$Im(f) = c_2e^{at}\begin{pmatrix} q_0\cos bt + p_0\sin bt \\ q_1\cos bt + p_1\sin bt \end{pmatrix}$$

  Тогда в ответ пойдёт решение $Re(f) + Im(f)$

  Если $\lambda_1 = \lambda_2$, это означает, что у нас будет не диагональна матрица, а жорданова клетка размера два. Тогда нам надо найти присоединенный вектор u, то есть вектор, являющийся собственным для матрицы $(A - \lambda E)^2$ и при этом $(A - \lambda E)u = v_1$. Тогда ответ запишется в виде

  $$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot (c_1u + c_2t \cdot v_1)$$

- Теперь разбираемся с неоднородной частью. При этом $f(t) = e^{\alpha t}(P_m(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)$. Тогда мы допускаем, что частное решение $(x_1,\ y_1)^t$ будет примерно в таком же виде, при этом учитываем кратность корня α, β. Я тут подразумеваю $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}^t$

  Допустим $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$ и в однородном решении был $e^{\alpha t}$, тогда ищем частное решение в виде $P_{m+k}(t)e^{\alpha t}$, где k- размер жордановой клетки для корня α (в нашем примере $k = 1$). Далее подставляем это решение и ищем методом неопр. коэффициентов.

  Допустим $f(t) = C\cos\alpha t$, то ищем в виде $(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)$, где A, B, C – вектора коэффициентов.

- Ответ – сумма однородного решения и частного решения.

13.1 Варицаия констант

Систему так же можно решать методом вариации констант. Пусть мы получили решение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Тогда надо решить систему

$$H \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Замечание: Что в системах, что в одиночных линейных уравнениях есть метод вариации констант, который всегда работает. Но в конце придется брать интегралы когда будем решать уравнения $C_i' = g(t)$, и иногда их долго и трудно брать, и к тому же их много. Поэтому стоит использовать метод неопределенных коэффициентов.

14 Разностные уравнения

Абсолютная аналогия линейным ДУ повышеного порядка.

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

Ищем корни в виде $y = \lambda^n$. Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень λ дает слагаемое $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_k n^{k-1})\lambda^n$ в ответ, где k - кратность корня

2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в $\mathbb{R}[x]$, то пара (всегда пара) комплексных корней $a \pm bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ дает слагаемое $r^n((C_{1,1} + C_{1,2}n + C_{1,3}n^2 + \cdots + C_{1,k}n^{k-1})\cos(\varphi) + (C_{2,1} + C_{2,2}n + C_{2,3}n^2 + \cdots + C_{2,k}n^{k-1})\sin(\varphi))$ в ответ, где k - кратность корня.

3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

15 Система разностных уравнений

Абсолютно аналогично. Используем методы решения Систем ЛДУ, применяя метод неопределенных коэффициентов, делая замену в зависимости от того, какой вид имеет правая часть $f(n)$.

$$a^n P_m(n) \leftrightarrow n^s a^n Q_m(n)$$

s - кратность a в решении

$$a^n(P_h(n)\cos(\varphi n) + P_t(n)\sin(\varphi n)) \leftrightarrow n^s a^n(Q_h(n)\cos(\varphi n) + Q_t(n)\sin(\varphi n))$$

s - кратность $a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в решении

15.1 "Метод вариации констант"для разностных уравнений

Он как бы есть, но сложно. Там что-то типа Laplace transform.

16 Устойчивость нулевого решения

16.1 Линейное приближение

Для каждого нулевого решения проверим его устойчивость. Для начала разложим до линейного приближения систему в нулевом решении. Если при этом функции раскладываются не в нуле, а в какой-то другой точке, то необходимо сделать линейную замену, чтобы нулевое решение было нулем для разложения функции в ряд Маклорена. После этого у получившейся матрицы находим с.з. и применяем следующую теорему:

(на этом радостном моменте мне прилетел автомат! ПП, спасибо за курс! ответ на этот и остальные вопросы есть в учебнике Филиппова "Введение в теорию дифференциальных уравнений")