Шпора

Диффуры

Содержание

Внимание

Применяя данные методы не забываем проверять места, где мы потенциально делим на 0.
Можно посмотреть ресурс EqWorld

1 Автономное уравнение

$$y' = f(x)$$

Интегрируем

2 Разделяющиеся переменные

$$y' = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируем

3 Однородные ДУ

$$y' = f(x,y) \text{ и } f(mx,my) = f(x,y)$$

Замена $z = \frac{y}{x},\ y = zx,\ y' = z + z'x$

4 Линейное ДУ

$$y' + p(x)y = g(x)$$

1. Решаем однородную часть $y' + p(x)y = 0$. Это ДУ с разделяющимися
2. Вариация констант $c = c(x)$. Подставляем так, доделываем

5 Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n| : y^n$$
$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Замена $w = y^{1-n}$, $w' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. Получаем

$$\frac{w'}{1-n} + p(x)w = q(x)$$

Это линейное ДУ

6 Уравнения Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Если y_1 - частное решение, то делаем замену $z = y - y_1$. После этого по идее решается.

7 ДУ в полных производных

Предполагаем, что уравнение имеет вид

$$F'_x dx + F'_y dy = 0$$

Проверяем, совпадает ли $F_{xy} = F_{yx}$. Если да, то

1. Интегрируем одну из производных $F(x) = \int F'_x dx = G(x) + C(y)$. Предполагаем, что константа - функция от y.
2. Берем производную от всего, но уже по другой переменной и ищем такое $C(y)$, чтобы выполнялось $(G(x) + C(y))' = F'_y$. Далее уже дособираем ответ

Если $F_{xy} \neq F_{yx}$, то начинаются танцы с интегрирующим множителем. Для этого пробуем выделять и собирать полные дифференциалы, например

$$ydx - (x^3y + x)dy = 0,\ (ydx - xdy) - x^3ydy = 0| : x^2$$

Видно, что первой скобки не хватает знаменателя, чтобы свернуться в дифференциал. Поделим, преобразуем.

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - xydy = 0,\ -d(\frac{y}{x}) - xydy = 0$$

Немного сообразительности и вводим замену $z = \frac{y}{x}$. Тогда

$$-d(z) - \frac{y^2}{z}dy = 0,\ -y^2dy = zdz$$

Получили разделяющиеся переменные.

Да как, блин, искать ваш интегрирующий множитель?
Есть алогритм, который может помочь нам делать это, но он не всегда работает. Для этого надо ввести функцию μ, которая может быть трёх видов: $\mu(x),\ \mu(y),\ \mu(x, y)$. Именно на неё мы будем домножать. Итак, чтобы найти μ, то делаем:

$$F'_y\frac{\partial \mu}{\partial x} - F'_x\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x}\right)$$

Соответственно какое-то из слагаемых слева будет нулём (в зависимости от $\mu(x)$ или $\mu(y)$). Если $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{F'_y}\left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x}\right)$$

8 ДУ Лагранжа / Клеро

$$y = f(y')x + g(y')$$

ДУ Клеро - когда $f(y') = y'$. Предполагаем, что $y'_x = t,\ t = t(x)$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$y = f(t)x + g(t),\ t = y'_x = f(t) + xf'_t(t) \cdot t'_x + t'_x \cdot g'_t(t)$$

$$(xf'_t(t) + g'_t(t))t'_x = t - f(t)$$

Если $t - f(t) \equiv 0$, то это как раз ДУ Клеро. Тут понятно. Иначе сводится к линейному ДУ.

Ответ записываем в параметрическом виде, поэтому константы у переменных должны соответствовать.

Бонус 1: Рссмотрим ДУ $y = xy' - x^2(y')^3$. Оно не подходит под шаблон ДУ Лагранжа, но если сделать аналогичное предпложение $y' = p$, то в процессе получится свести к линейному относительно $x(p)$ и уравнение решится.

Бонус 2: Иногда возможно решить уравнение относительно y' и не надо никаких замен. При этом уравнение может совсем не соответствовать вид ДУ Лагранжа. Например:

$$y'(2y - y') = y^2\sin^2 x \mid \text{квадратное уравнение относительно } y'$$

$$(y')^3 + (x + 2)e^y = 0 \mid \text{y' просто выражается}$$

9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

Ищем корни в виде $y = Ce^{\lambda x}$Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень λ дает слагаемое $(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_nx^{n-1})e^{\lambda x}$ в ответ, где n - кратность корня

2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в $\mathbb{R}[x]$, то пара (всегда пара) комплексных корней $a \pm bi$ дает слагаемое $e^a((C_{1,1} + C_{1,2}x + C_{1,3}x^2 + \cdots + C_{1,n}x^{n-1})\cos(bx) + (C_{2,1} + C_{2,2}x + C_{2,3}x^2 + \cdots + C_{2,n}x^{n-1})\sin(bx))$ в ответ, где n - кратность корня.

3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

10 Неоднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

1. Сначала решаем однородную часть, отбрасывая то, что находится справа.

2. Ищем частное решение. Есть два пути:

- Если $f(x)$ собрано из функций e^{ax}, $\sin(bx)$, $\cos(mx)$, $P^n(x) \in \mathbb{R}[x]$ - многочлен степени n путем применения операций $+,\ -,\ \cdot$ друг к другу и вещественным константам, то можно воспользоваться методом неопределенных кэффициентов путем применения соответствий

$$P^n(x) \leftrightarrow a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$e^{\lambda x} \leftrightarrow a e^{\lambda x}$$

$$\sin(bx),\ \cos(bx) \leftrightarrow A\sin(bx) + B\cos(bx)$$

Синус и косинус одинаково представляются в общем виде. Не забываем учитывать кратность корня (в том числе и в решении однородной части) и домножать на нужный многочлен. Например если в однородном решении был $(C_1 + xC_2)e^{2x}$ и $f(x) = P_m(x)e^{2x}$, то мы будем искать решение в виде $Q_m(x)x^2e^{2x}$. Так же e^{0x} считается полиномом, про это тоже не забываем.

- Можно пользоваться стандартным методом вариации констант. Пусть решение однородной части имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. Тогда мы должны решить систему

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \dots & y_n^{n-2} \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$

Для этого используем правило Крамера. Матрица слева называется матрицей Вронского, а определитель матрицы - Вронскиан

11 Однородное Уравнение Эйлера

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Сводится к ОЛДУ с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$. Иногда работает и $y = x^k$.

12 Бонус ОЛДУ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0 y = 0$$

Пусть y_1 - частное решение. Тогда

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$$

От сюда находится y_2 и итоговое решение равно $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Тут можно пытаться подобрать это частное решение как: многочлен в общем виде, либо (если старшие степени при иксах одинаковые) как экспонента e^{ax}.

13 Система ЛДУ

Section under construction.

Диагонализуя матрицу, мы сводим к случаю ОЛДУ но в векторной форме. Поэтому должно быть очевидно. При решении НСЛДУ вроде должно все получиться при вариации констант. Можно так же ставить соответствия, но это rip.

Пусть у нас есть система (напишем для двух переменных)

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0x + b_0y + f_1(t) \\ \dot{y} = a_1y + b_1y + f_2(t) \end{cases}$$

- Сначала решаем однородную часть. Для это запишем матрицу, соответствующей однородной части:

  $$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

  Ищем собственные значения этой матрицы. Пусть они равны $\lambda_1,\ \lambda_2$. Ищем собственные вектора v_1 и v_2, соответствующие этим собственным значением, тогда однородное решение будет

  $$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = c_1e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

  Если $\lambda_1 = \lambda_2$, это означает, что у нас будет не диагональна матрица, а жорданова клетка размера два. Тогда нам надо найти присоединенный вектор u, то есть вектор, являющийся собственным для матрицы $(A - \lambda E)^2$ и при этом $(A - \lambda E)u = v_1$. Тогда ответ запишется в виде

  $$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = c_1e^{\lambda t} \cdot v_1 + c_2e^{\lambda t} \cdot (u + t \cdot v_1)$$

- Теперь разбираемся с неоднородной частью. При этом $f(t) = e^{\alpha t}(P_m(t)\cos\beta t + Q_m(t)\sin\beta t)$. Тогда мы допускаем, что частное решение $(x_1,\ y_1)^t$ будет примерно в таком же виде, при этом учитываем кратность корня α, β. Я тут подразумеваю $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}^t$

  Допустим $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$ и в однородном решении был $e^{\alpha t}$, тогда ищем частное решение в виде $P_{m+k}(t)e^{\alpha t}$, где k- размер жордановой клетки для корня α (в нашем примере $k = 1$). Далее подставляем это решение и ищем методом неопр. коэффициентов.

  Допустим $f(t) = \cos\alpha t$, то ищем в виде $(a\cos\alpha t + b\sin\alpha t)$.

- Ответ – сумма однородного решения и частного решения.