

Шпора

Диффуры

Содержание

1 Автономное уравнение	2
2 Разделяющиеся переменные	2
3 Однородные ДУ	2
4 Линейное ДУ	2
5 Уравнения Бернулли	2
6 Уравнения Риккати	2
7 ДУ в полных производных	3
8 ДУ Лагранжа / Клеро	3
9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами	4
10 Неоднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами	4
11 Однородное Уравнение Эйлера	4
12 Бонус ОЛДУ	5
13 Система ЛДУ	5
13.1 Вариация констант	6
14 Разностные уравнения	6
15 Система разностных уравнений	6
15.1 "Метод вариации констант" для разностных уравнений	7
16 Устойчивость нулевого решения	7
16.1 Линейное приближение	7

Внимание

Применяя данные методы не забываем проверять места, где мы потенциально делим на 0.
Можно посмотреть ресурс EqWorld

1 Автономное уравнение

$$y' = f(x)$$

Интегрируем

2 Разделяющиеся переменные

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируем

3 Однородные ДУ

$$y' = f(x, y) \text{ и } f(mx, my) = f(x, y)$$

Замена $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$, $y' = z + z'x$

4 Линейное ДУ

$$y' + p(x)y = g(x)$$

1. Решаем однородную часть $y' + p(x)y = 0$. Это ДУ с разделяющимися
2. Вариация констант $c = c(x)$. Подставляем так, доделываем

5 Уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n : y^n$$

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Замена $w = y^{1-n}$, $w' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. Получаем

$$\frac{w'}{1-n} + p(x)w = q(x)$$

Это линейное ДУ

6 Уравнения Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

Если y_1 - частное решение, то делаем замену $z = y - y_1$. После этого по идее решается.

7 ДУ в полных производных

Предполагаем, что уравнение имеет вид

$$F'_x dx + F'_y dy = 0$$

Проверяем, совпадает ли $F_{xy} = F_{yx}$. Если да, то

1. Интегрируем одну из производных $F(x) = \int F'_x dx = G(x) + C(y)$. Предполагаем, что константа - функция от y .
2. Берем производную от всего, но уже по другой переменной и ищем такое $C(y)$, чтобы выполнялось $(G(x) + C(y))' = F'_y$. Далее уже дособируем ответ

Если $F_{xy} \neq F_{yx}$, то начинаются танцы с интегрирующим множителем. Для этого пробуем выделять и собирать полные дифференциалы, например

$$ydx - (x^3y + x)dy = 0, (ydx - xdy) - x^3ydy = 0 \mid : x^2$$

Видно, что первой скобки не хватает знаменателя, чтобы свернуться в дифференциал. Поделим, преобразуем.

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} - xydy = 0, -d\left(\frac{y}{x}\right) - xydy = 0$$

Немного сообразительности и вводим замену $z = \frac{y}{x}$. Тогда

$$-d(z) - \frac{y^2}{z} dy = 0, -y^2 dy = z dz$$

Получили разделяющиеся переменные.

Да как, блин, искать ваш интегрирующий множитель?

Есть алгоритм, который может помочь нам делать это, но он не всегда работает. Для этого надо ввести функцию μ , которая может быть трёх видов: $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x, y)$. Именно на неё мы будем домножать. Итак, чтобы найти μ , то делаем:

$$F'_y \frac{\partial \mu}{\partial x} - F'_x \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

Соответственно какое-то из слагаемых слева будет нулём (в зависимости от $\mu(x)$ или $\mu(y)$). Если $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{F'_y} \left(\frac{\partial F'_x}{\partial y} - \frac{\partial F'_y}{\partial x} \right)$$

8 ДУ Лагранжа / Клеро

$$y = f(y')x + g(y')$$

ДУ Клеро - когда $f(y') = y'$. Предполагаем, что $y'_x = t$, $t = t(x)$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$y = f(t)x + g(t), t = y'_x = f(t) + x f'_t(t) \cdot t'_x + t'_x \cdot g'_t(t) \\ (x f'_t(t) + g'_t(t)) t'_x = t - f(t)$$

Если $t - f(t) \equiv 0$, то это как раз ДУ Клеро. Тут понятно. Иначе сводится к линейному ДУ.

Ответ записываем в параметрическом виде, поэтому константы у переменных должны соответствовать.

Бонус 1: Рассмотрим ДУ $y = xy' - x^2(y')^3$. Оно не подходит под шаблон ДУ Лагранжа, но если сделать аналогичное предположение $y' = p$, то в процессе получится свести к линейному относительно $x(p)$ и уравнение решится.

Бонус 2: Иногда возможно решить уравнение относительно y' и не надо никаких замен. При этом уравнение может совсем не соответствовать виду ДУ Лагранжа. Например:

$$y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x \mid \text{квадратное уравнение относительно } y' \\ (y')^3 + (x + 2)e^y = 0 \mid y' \text{ просто выражается}$$

9 Однородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Ищем корни в виде $y = C e^{\lambda x}$. Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень λ дает слагаемое $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}) e^{\lambda x}$ в ответ, где n - кратность корня.
2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в $\mathbb{R}[x]$, то пара (всегда пара) комплексных корней $a \pm bi$ дает слагаемое $e^a ((C_{1,1} + C_{1,2} x + C_{1,3} x^2 + \dots + C_{1,n} x^{n-1}) \cos(bx) + (C_{2,1} + C_{2,2} x + C_{2,3} x^2 + \dots + C_{2,n} x^{n-1}) \sin(bx))$ в ответ, где n - кратность корня.
3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

10 Неднородное Линейное ДУ повышенного порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

1. Сначала решаем однородную часть, отбрасывая то, что находится справа.
2. Ищем частное решение. Есть два пути:
 - Если $f(x)$ собрано из функций e^{ax} , $\sin(bx)$, $\cos(mx)$, $P^n(x) \in \mathbb{R}[x]$ - многочлен степени n путем применения операций $+$, $-$, \cdot друг к другу и вещественным константам, то можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов путем применения соответствий

$$P^n(x) \leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$e^{\lambda x} \leftrightarrow a e^{\lambda x}$$

$$\sin(bx), \cos(bx) \leftrightarrow A \sin(bx) + B \cos(bx)$$

Синус и косинус одинаково представляются в общем виде. Не забываем учитывать кратность корня (в том числе и в решении однородной части) и домножать на нужный многочлен. Например если в однородном решении был $(C_1 + x C_2) e^{2x}$ и $f(x) = P_m(x) e^{2x}$, то мы будем искать решение в виде $Q_m(x) x^2 e^{2x}$. Так же e^{0x} считается полиномом, про это тоже не забываем.

- Можно пользоваться стандартным методом вариации констант. Пусть решение однородной части имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. Тогда мы должны решить систему

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-2} & y_2^{n-2} & \dots & y_n^{n-2} \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{pmatrix}$$

Для этого используем правило Крамера. Матрица слева называется матрицей Вронского, а определитель матрицы - Вронскиан

11 Однородное Уравнение Эйлера

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

Сводится к ОЛДУ с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$. Иногда работает и $y = x^k$.

12 Бонус ОЛДУ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0$$

Пусть y_1 - частное решение. Тогда

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

Отсюда находится y_2 и итоговое решение равно $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

Тут можно пытаться подобрать это частное решение как: многочлен в общем виде, либо (если старшие степени при x одинаковые) как экспонента e^{ax} .

13 Система ЛДУ

Section under construction.

Диагонализуя матрицу, мы сводим к случаю ОЛДУ но в векторной форме. Поэтому должно быть очевидно. При решении НСЛДУ вроде должно все получиться при вариации констант. Можно так же ставить соответствия, но это `gip`.

Пусть у нас есть система (напишем для двух переменных) $\dot{X} = AX + f(t)$, или:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0x + b_0y + f_1(t) \\ \dot{y} = a_1x + b_1y + f_2(t) \end{cases}$$

- Сначала решаем однородную часть. Для это запишем матрицу, соответствующей однородной части:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения этой матрицы. Пусть они равны λ_1, λ_2 . Ищем собственные вектора v_1 и v_2 , соответствующие этим собственным значениям, тогда однородное решение будет

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

Если $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ комплексный корень, то берем один любой, например, $a + ib$ и опять ищем собственный вектор $v_1 = (p_0 + iq_0, p_1 + iq_1)^t$.

Посмотрим на решение, соответствующее этому корню

$$f = e^{(a+ib)t} \begin{pmatrix} p_0 + iq_0 \\ p_1 + iq_1 \end{pmatrix}$$

Тогда распишем $Re(f)$, $Im(f)$ через косинусы и синусы:

$$Re(f) = c_1 e^{at} \begin{pmatrix} p_0 \cos bt - q_0 \sin bt \\ p_1 \cos bt - q_1 \sin bt \end{pmatrix}$$

$$Im(f) = c_2 e^{at} \begin{pmatrix} q_0 \cos bt + p_0 \sin bt \\ q_1 \cos bt + p_1 \sin bt \end{pmatrix}$$

Тогда в ответ пойдёт решение $Re(f) + Im(f)$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, это означает, что у нас будет не диагональна матрица, а жорданова клетка размера два. Тогда нам надо найти присоединенный вектор u , то есть вектор, являющийся собственным для матрицы $(A - \lambda E)^2$ и при этом $(A - \lambda E)u = v_1$. Тогда ответ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \cdot (c_1 u + c_2 t \cdot v_1)$$

- Теперь разбираемся с неоднородной частью. При этом $f(t) = e^{\alpha t}(P_m(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t)$. Тогда мы допускаем, что частное решение $(x_1, y_1)^t$ будет примерно в таком же виде, при этом учитываем кратность корня α, β . Я тут подразумеваю $f(t) = (f_1(t) \ f_2(t))^t$

Допустим $f(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$ и в однородном решении был $e^{\alpha t}$, тогда ищем частное решение в виде $P_{m+k}(t)e^{\alpha t}$, где k - размер жордановой клетки для корня α (в нашем примере $k = 1$). Далее подставляем это решение и ищем методом неопр. коэффициентов.

Допустим $f(t) = C \cos \alpha t$, то ищем в виде $(A \cos \alpha t + B \sin \alpha t)$, где A, B, C – вектора коэффициентов.

- Ответ – сумма однородного решения и частного решения.

13.1 Вариация констант

Систему так же можно решать методом вариации констант. Пусть мы получили решение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Тогда надо решить систему

$$H \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Замечание: Что в системах, что в одиночных линейных уравнениях есть метод вариации констант, который всегда работает. Но в конце придется брать интегралы когда будем решать уравнения $C_i' = g(t)$, и иногда их долго и трудно брать, и к тому же их много. Поэтому стоит использовать метод неопределенных коэффициентов.

14 Разностные уравнения

Абсолютная аналогия линейным ДУ повышенного порядка.

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

Ищем корни в виде $y = \lambda^n$. Составляем характеристическое уравнение, решаем.

1. Вещественный корень λ дает слагаемое $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_k n^{k-1}) \lambda^n$ в ответ, где k - кратность корня
2. Т.к. мы рассматриваем многочлен в $\mathbb{R}[x]$, то пара (всегда пара) комплексных корней $a \pm bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ дает слагаемое $r^n ((C_{1,1} + C_{1,2} n + C_{1,3} n^2 + \dots + C_{1,k} n^{k-1}) \cos(\varphi) + (C_{2,1} + C_{2,2} n + C_{2,3} n^2 + \dots + C_{2,k} n^{k-1}) \sin(\varphi))$ в ответ, где k - кратность корня.
3. Ответ - сумма (линейная комбинация) написанных выше слагаемых.

15 Система разностных уравнений

Абсолютно аналогично. Используем методы решения Систем ЛДУ, применяя метод неопределенных коэффициентов, делая замену в зависимости от того, какой вид имеет правая часть $f(n)$.

$$a^n P_m(n) \leftrightarrow n^s a^n Q_m(n)$$

s - кратность a в решении

$$a^n (P_h(n) \cos(\varphi n) + P_t(n) \sin(\varphi n)) \leftrightarrow n^s a^n (Q_h(n) \cos(\varphi n) + Q_t(n) \sin(\varphi n))$$

s - кратность $a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в решении

15.1 "Метод вариации констант" для разностных уравнений

Он как бы есть, но сложно. Там что-то типа Laplace transform.

16 Устойчивость нулевого решения

16.1 Линейное приближение

Для каждого нулевого решения проверим его устойчивость. Для начала разложим до линейного приближения систему в нулевом решении. Если при этом функции раскладываются не в нуле, а в какой-то другой точке, то необходимо сделать линейную замену, чтобы нулевое решение было нулем для разложения функции в ряд Маклорена. После этого у получившейся матрицы находим с.з. и применяем следующую теорему:

(на этом радостном моменте мне прилетел автомат! ПП, спасибо за курс! ответ на этот и остальные вопросы есть в учебнике Филиппова "Введение в теорию дифференциальных уравнений")