

Семинар 8

3 ноября 2020 г.

Задача 1. Тестирование гипотез в множественной регрессии.

Линейная регрессионная модель задаётся в следующем виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + u_i.$$

Предположим, что $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$. Известно, что

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Найдите $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$.
- b) Найдите \hat{y} .
- c) Найдите TSS, ESS, RSS и R^2 .
- d) Найдите $\hat{\sigma}$.
- e) Найдите $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta})$.
- f) Здесь и далее все гипотезы проверяются на уровне значимости 5%. Проверьте гипотезу H_0 против H_1 , если

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 1, \\ H_1 : \beta_1 \neq 1. \end{cases}$$

- g) Проверьте гипотезу H_0 против H_1 , если

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 1, \\ H_1 : \beta_1 > 1. \end{cases}$$

- h) Проверьте регрессию на значимость в целом.

- i) Проверьте гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3, \\ H_1 : \beta_2 \neq \beta_3. \end{cases}$$

- j) Постройте 95%-ый доверительный интервал для β_1 .

- k) Пусть $x_{1,6} = 10, x_{2,6} = 7$. Найдите \hat{y}_6 .

- l) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(y_6 | X_6)$.

Задача 2. Мегаматрица.

Правила работы с многомерными случайными величинами (y, z – случайные векторы, A, B – матрицы констант; считаем, что все размеры подходящие):

1. $\mathbb{E}(Ay) = A \mathbb{E}(y)$.
2. $\text{Var}(Ay) = A \text{Var}(y) A'$.
3. $\text{Var}(y + z) = \text{Var}(y) + \text{Var}(z) + \text{Cov}(y, z) + \text{Cov}(z, y)$.
4. $\text{Cov}(Ay, Bz) = A \text{Cov}(y, z) B'$.

Рассмотрим линейную модель $y = X\beta + u$, оцениваемую при помощи МНК. Пусть $\mathbb{E}(u) = 0$, $\text{Var}(u) = \sigma^2 I$, число наблюдений равно n , число регрессоров, включая константный, равно k .

Заполните матрицу характеристик элементов МНК:

$\text{Var}(\cdot)$	y	\hat{y}	$\hat{\beta}$	\hat{u}	u
y	...				
\hat{y}		...			
$\hat{\beta}$...		
\hat{u}				...	
u					...
$\mathbb{E}(\cdot)$					

Для каждого элемента укажите размеры.

- a) $\mathbb{E}(y)$
- b) $\mathbb{E}(\hat{\beta})$
- c) $\text{Var}(y)$
- d) $\text{Var}(\hat{\beta})$
- e) $\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{u})$
- f) ...