Семинар 8.

<u>Задача</u> "Тестирование гипотез в линейной регрессии"

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i$$

$$u \sim N(0, \sigma^2 I)$$

a) $$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}.$$

в) $$\hat{y} = X\hat{\beta} = X \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) $\bar{y} = 3$

$$TSS = (1-3)^2 + (2-3)^2 + \ldots + (5-3)^2 = 10.$$

$$ESS = (2-3)^2 + (2-3)^2 + \ldots + (5-3)^2 = 8.$$

$$RSS = (1-2)^2 + (2-2)^2 + \ldots + (5-5)^2 = 2.$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 0.8$$

d) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS}{n-k} = \dfrac{2}{5-3} = 1.$

n — число набл.

k — число регрессоров

e) $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$

Теория: $\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \sim N(0,1)$

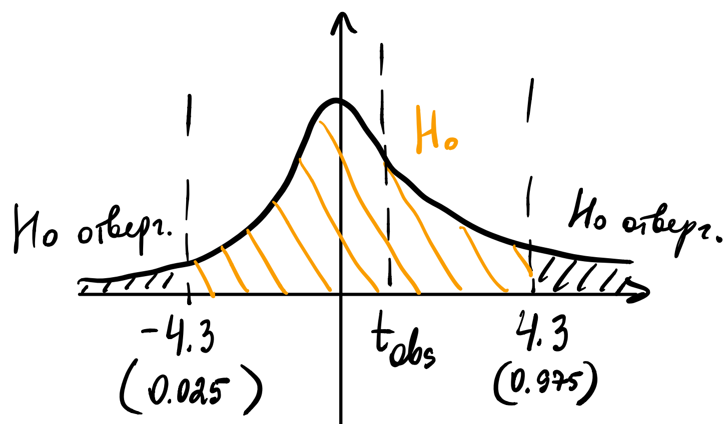
Жизнь: $\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \sim t_{n-k}$ ← число регрессоров

n — число набл.

$$\hat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

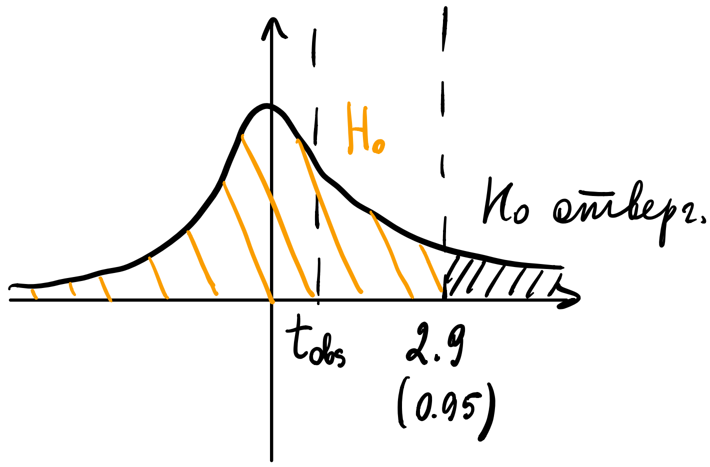
f) $t_{obs} = \dfrac{2-1}{\sqrt{4/3}} \approx 0.866$

$t_{obs} \overset{H_0}{\sim} t_2$, $t_{cr} = 4.3$



$\Rightarrow H_0$ не отверг.

g) $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 1 \\ H_1: \beta_1 > 1 \end{cases}$ $t_{obs} = 0.866$



$\Rightarrow$ H_0 не отверг.

h) t-тест : одно огранич.
F-тест : одно и более огранич.

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR}) / (k_{UR} - k_R)}{RSS_{UR} / (n - k_{UR})} \sim F_{(k_{UR} - k_R,\, n - k_{UR})}$$

число регрессоров в соотв. модели

число набл.

"Значимость в целом" = протестировать на незнач.

$$\begin{cases} H_0: \begin{pmatrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{pmatrix} \\ H_A: \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \end{cases}$$

UR - модель: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i$

R - модель:

$y_i = \beta_0 + u_i$

$\hat{\beta}_{0_R} = \bar{y} = 3$, $\hat{y}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $RSS_R = (1-3)^2 + (2-3)^2 + \ldots + (5-3)^2 =$

$= 10$

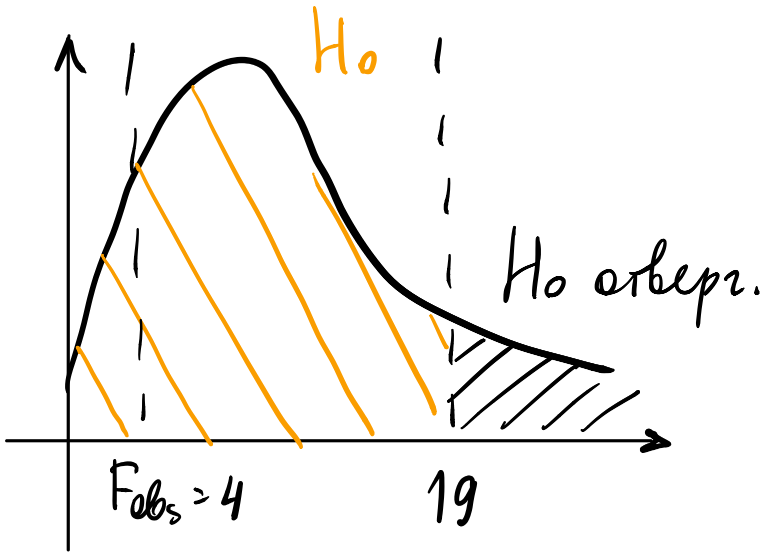
$$F_{obs} = \frac{(10-2)/(3-1)}{2/(5-3)} = \frac{8/2}{2/2} = 4$$

$$F_{obs} \overset{H_0}{\sim} F_{2,2}$$

$$F_{crit(2,2)} = 19$$

$\Rightarrow$ H_0 не отверг.

$\Rightarrow$ регрессия не значима.



i) $\begin{cases} H_0: & \beta_2 = \beta_3 \\ H_1: & \beta_2 \neq \beta_3 \end{cases}$

$$R: \; y_i = \beta_0 + \beta_1(x_{1i} + x_{2i}) + u_i$$

$$X^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_R = (X^{TR} X^R)^{-1} X^{TR} y = \begin{pmatrix} 2.0625 \\ 1.5625 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_R = \begin{pmatrix} 2.0625 \\ 2.0625 \\ 2.0625 \\ 3.625 \\ 5.1875 \end{pmatrix} \qquad RSS^R = 2.1875$$

$$F = \frac{(2.1875 - 2)/(3-2)}{2/2} = 0.1875$$

$F \overset{H_0}{\sim} F_{1,2}$

$F_{cr} = 18.51$

$\Rightarrow H_0$ не отверг.

j) $\left[2 - 4.3\sqrt{\frac{4}{3}} \; ; \; 2 + 4.3\sqrt{\frac{4}{3}} \right]$

k) $\hat{y}_6 = 2 + 2\cdot 10 + 1\cdot 7 = 29.$

l) $\mathbb{E}(y_6 \mid X_6) = \beta_0 + \beta_1 \cdot 10 + \beta_2 \cdot 7$

$\hat{\mathbb{E}}(y_6 \mid X_6) = 2 + 2\cdot 10 + 1\cdot 7 = \hat{y}_6 = 29.$

(дов. интервал для индив. прогноза).

$$\left.\begin{aligned}\hat{Var}(\hat{\mathbb{E}}(y_6 \mid X_6)) &= \hat{Var}(\hat{\beta}_0) + \hat{Var}(\hat{\beta}_1)\cdot 100 + \\ &+ \hat{Var}(\hat{\beta}_2)\cdot 49 + 2\cdot 10\cdot \hat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) + \\ &+ 2\cdot 7\cdot \hat{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) + 2\cdot 70\cdot \hat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2).\end{aligned}\right\} \text{Берём из } \hat{Var}(\hat{\beta}).$$

$$\mathbb{E}(y_6 \mid X_6) \in \left[29 - 4.3\sqrt{\hat{Var}(\hat{\mathbb{E}}(y_6 \mid X_6))} \; ; \; -\text{"}- \oplus -\text{"}- \right].$$

Задача "Мегаматрица"

a) $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}(X\beta + u) = \underset{n\times 1}{X\beta}$

б) $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \mathbb{E}((X^T X)^{-1} X^T y) = (X^T X)^{-1} X^T X\beta = \underset{k\times 1}{\beta} \Rightarrow$ оц. МНК несмещ.

c) $Var(y) = Var(X\beta + u) = Var(u) = \underset{n\times n}{\sigma^2 I}.$

d) $Var(\hat{\beta}) = Var((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I X (X'X)^{-1} = \underset{k\times k}{(X'X)^{-1}\sigma^2}$

e) $cov(\hat{\beta}, \hat{u}) = cov(\hat{\beta}, y - \hat{y}) = cov((X^T X)^{-1}X^T y, y) - cov(\hat{\beta}, X\hat{\beta}) =$

$= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 - (X^T X)^{-1}\sigma^2 X' = \underset{k\times n}{0}.$