

Полезная информация о контрольной работе

21 октября 2020 г.

Список тем.

1. Метод максимального правдоподобия:
 - Уметь находить ML-оценки.
 - Знать свойства ML-оценок.
 - Уметь строить доверительные интервалы для ML-оценок.
2. Тесты LR , LM , W .
3. KL-дивергенция.
4. EM-алгоритм.
5. Bootstrap.
6. Геометрия МНК.
7. Нормальное и многомерное нормальное распределения.

Примеры задач.

NB! Задачи, приведённые ниже, скорее, отражают уровень сложности заданий контрольной, но не являются конкретными примерами этих заданий.

Задача 1. Степан хочет проверить утверждение организаторов лотереи «Большой-Пребольшой», что почти треть всех билетов являются выигрышными. Для этого он попросил n своих друзей купить по 10 лотерейных билетов. Пусть X_i – число выигрышных билетов друга i , а p – вероятность выигрыша одного билета.

1. Какое распределение имеет величина X_i ?
2. Запишите функцию правдоподобия для выборки X_1, \dots, X_n .
3. Найдите \hat{p}_{ML} .
4. Постройте 95%-ый доверительный интервал для p .
5. Найдите оценку математического ожидания и дисперсии выигранных произвольным другом билетов.
6. Постройте 95%-ый доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии выигранных произвольным другом билетов.
7. Дана реализация случайной выборки пяти друзей. Число выигрышных билетов оказалось равно (3, 4, 0, 2, 6). Найдите значение точечной оценки вероятности выигрыша p . Похоже ли утверждение организаторов на правду?

Задача 2. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_0 + u_i$ оценивается методом МНК.

1. Найдите величины TSS , ESS , RSS , R^2 , $\text{scorr}(y, \hat{y})$, $\text{scov}(y, \hat{y})$.
2. Покажите эти величины на картинке МНК.

Задача 3. Вектор u имеет стандартное нормальное распределение, $u \sim \mathcal{N}(0, I)$. Матрица A такова, что Au тоже имеет стандартное нормальное распределение, $Au \sim \mathcal{N}(0, I)$.

1. Выпишите уравнение, которому подчиняется матрица A .
2. Чему может равняться $\det A$?
3. Пусть c_1 и c_2 – первый и второй столбцы матрицы A . Найдите $c_1' c_2$.
4. Какое распределение имеет $\|u\|^2$?

Задача 4. Случайная величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $(1 - p)$.

1. Постройте график зависимости $H(p)$ от p .
2. При каком p энтропия будет максимальна? Поясните полученный результат.

Задача 5. Выведите формулы для шагов ЕМ-алгоритма для задачи разделения смеси распределений с тремя кластерами.

Задача 6. Случайные величины X и Y независимы и имеют хи-квадрат распределение с 5 и 10 степенями свободы соответственно. Пусть случайная величина Z равна

$$Z = \frac{X + Y}{X}.$$

Найдите такое значение z^* , что $\mathbb{P}(Z > z^*) = 0.05$.

Задача 7. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 и два подпространства в нём, $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ и $V = \text{Lin}(1, 2, 3)^T$.

1. Найдите $\dim V$, $\dim W$, $\dim V \cap W$, $\dim V^\perp$, $\dim W^\perp$.
2. Найдите проекцию произвольного вектора u на V , W , $V \cap W$, V^\perp , W^\perp . Найдите квадрат длины каждой проекции.
3. Как распределён квадрат длины проекции в каждом случае, если дополнительно известно, что вектор u имеет многомерное стандартное нормальное распределение?