Семинар 3

Напоминание:

Y	"1"	"2"	...
$\mathbb{P}\{Y=y_i\}$	p_1	p_2	...

$$H_p = \sum_i \mathbb{P}\{Y=y_i\}\cdot \log_{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\{Y=y_i\}$$

	Y	"1"	"2"	...
A:	$\mathbb{P}_A\{Y=y_i\}$ (истина)	p_1	p_2	...
B:	$\mathbb{P}_B\{Y=y_i\}$ (думаем)	q_1	q_2	...

$$CE(a\,\|\,b) = \sum_i \mathbb{P}_A\{Y=y_i\}\cdot \log_{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_B\{Y=y_i\}$$

Очевидно: $H(a) = CE(a\,\|\,a)$

$D_{KL} = CE(a\,\|\,b) - H(a)$

$D_{KL} \geq 0$

Пример 1

Найдите энтропию X, если

а) X равновер-о принимает знач-я $1, 5, 7$

X	1	5	7
$\mathbb{P}\{X=x_i\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$H(p) = \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}.$$

б) X равновер-о принимает $k \geq 2$ знач-й.

X	1	2	3	...	k
$\mathbb{P}\{X=x_i\}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	...		$\frac{1}{k}$

$$H(p) = k\cdot\frac{1}{k}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{k} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{k}.$$

в) X равномерно распределена на отрезке $[0; a]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0;a], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$H(p) = \int_0^a \frac{1}{a}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}\,dx = \left[\log_{\frac{1}{2}} a = -1\cdot\log_2\frac{1}{a} = \log_2 a\right] = \int_0^a \frac{1}{a}\log_2 a\,dx = \frac{1}{a}\log_2 a\cdot x\Big|_0^a = \log_2 a.$$

Заметим, что, например, при $a = \frac{1}{2}$: $H(p) = \log_2\frac{1}{2} = -1 < 0$!

г) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$H(p) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left[+\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx =$$

$$= +\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\mathbb{E}(x-\mu)^2}_{\sigma^2} = \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2).$$

Пример 2

Найдите KL-дивергенцию

а) из $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{Bin}}(2, \frac{1}{3})$ в $\underset{B}{\underset{\shortparallel}{\text{равновероятное}}}$ на $0, 1, 2$.

X	0	1	2
A	$C_2^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$C_2^1\,\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0$
	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$CE(A\|B) = \frac{4}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} \approx 1.58$$

$$H(A) = \frac{4}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9} + \frac{4}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{9} \approx 1.04$$

$$KL(A\|B) = 1.58 - 1.04 = 0.54$$

б) Из равновероятного на $0, 1, 2$ в $Bin(2, \frac{1}{3})$.

X	0	1	2
A	$1/3$	$1/3$	$1/3$
B	$4/9$	$4/9$	$1/9$

$$CE(A\|B) = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{9} \approx 1.84$$

$$H(A) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} \approx 1.58$$

$$KL(A\|B) = 1.84 - 1.58 = 0.26.$$