

Задачи для подготовки к квизу #3

12 ноября 2020 г.

Пояснение

Квиз будет состоять из трёх заданий: одно на проверку гипотез (первые две задачи ниже), одно на расчёт характеристик элементов МНК (задача 3), одно на гетероскедастичность (последние две задачи). В каждое задание войдут какие-то из пунктов приведённых ниже задач с учётом времени написания в 30 минут. Обратные матрицы и прочие вещи, которые долго считать, а также критические значения для проверки гипотез, будут даны (в задачах ниже они приведены не всегда, но на квизе будут). Пользоваться ничем нельзя.

Задача 1.

Рассмотрим модель $y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + u_i$, которая оценивается по 3 тысячам наблюдений при помощи МНК. Оценённая модель имеет следующий вид:

$$\hat{y}_i = 3.04 + \underset{(1.2)}{17.1} X_{1i} - \underset{(2.7)}{8} X_{2i} + \underset{(0.24)}{0.25} X_{3i} + \underset{(0.12)}{2.99} X_{4i}.$$

В скобках указаны стандартные ошибки оценок коэффициентов. Будем считать, что все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, и $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$.

а) Проверьте каждый коэффициент на значимость на 5% уровне.

б) Проверьте гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 15, \\ H_1 : \beta_1 \neq 15 \end{cases}$$

на уровне значимости 5%.

с) Проверьте гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = -10, \\ H_1 : \beta_2 > -10 \end{cases}$$

на уровне значимости 5%.

д) Постройте 95%-ый доверительный интервал для β_4 .

е) Найдите $\hat{y}_{3001} | X_1 = X_2 = X_4 = 0, X_3 = 4$.

ф) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(y_{3001} | X_1 = X_2 = X_4 = 0, X_3 = 4)$.

Задача 2.

Рассмотрим модель $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i$, оцениваемую при помощи МНК. Предположим, что все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, и $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$. Модель оценили на следующих данных:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 30 \\ 1 & 5 & 20 \\ 1 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & 30 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Оказалось, что $\hat{\beta} = (9.25 \quad -1.5 \quad 0.05)'$.

а) Проверьте регрессию на значимость в целом на уровне значимости 5%.

б) Проверьте гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2, \\ H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

на уровне значимости 5%.

Задача 3.

Рассмотрим линейную модель $y = X\beta + u$, оцениваемую при помощи МНК. Пусть $\mathbb{E}(u) = 0$, $\text{Var}(u) = \sigma^2 I$, число наблюдений равно n , число регрессоров, включая константный, равно k .

На семинаре мы начали заполнять матрицу характеристик элементов МНК:

$\text{Var}(\cdot)$	y	\hat{y}	$\hat{\beta}$	\hat{u}	u
y	$\sigma^2 I_{n \times n}$				
\hat{y}		\dots			
$\hat{\beta}$			$(X'X)^{-1} \sigma^2$ $k \times k$	0 $k \times n$	
\hat{u}				\dots	
u					\dots
$\mathbb{E}(\cdot)$	$X\beta$ $n \times 1$		β $k \times 1$		

Закончите заполнение матрицы. На квизе может быть любой элемент этой матрицы. Для каждого элемента укажите размеры.

Задача 4.

Рассмотрим модель $y = X\beta + u$, оцениваемую при помощи МНК по 150 наблюдениям. Известно, что

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X'X = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 5 \\ 14 & 98 & 32 \\ 5 & 32 & 11 \end{bmatrix}, (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.17 & -1.17 \\ 0.17 & 0.22 & -0.72 \\ -1.16 & -0.72 & 2.72 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Также известно, что $\text{Var}(u) = \sigma^2 A$, где $A = \text{diag}(3, 4, 5)$. Все остальные предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены.

Замечание: можно оставить выражения в матрицах, цель задания – разобраться где какая формула, как она получается и что куда подставлять.

а) Скорректируйте гетероскедастичность в модели и выпишите формулу для оценок скорректированной модели.

б) Выведите выражение для оценки ковариационной матрицы оценок МНК и найдите её в числах.

- с) Выведите выражение для оценки ковариационной матрицы оценок в скорректированной модели и найдите её в числах.

Задача 5.

Рассмотрим модель парной регрессии

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i,$$

оцениваемую при помощи МНК. Пусть известно, что

y_i	x_i
1	1
2	1
1	4
3	2

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.33 \\ -0.33 & 0.17 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите $\hat{\beta}_{OLS}$.
- б) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\hat{\beta}_0$, используя стандартные ошибки HC_0 .
- с) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\hat{\beta}_1$, используя стандартные ошибки HC_3 .