

Лабораторная работа №1

Задача 1. Варианты:

Задача 2. Варианты:

1. На части параболы $y = x^2$, $x \in (0, 2)$ случайно выбирается точка. Как можно интерпретировать "случайность" в данной задаче? С какой вероятностью угол, образованный радиус-вектором выбранной точки с положительным направлением оси абсцисс, не превосходит $\pi/3$?
2. Три товарища договорились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем условились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что они приходят в случайные моменты времени, найти вероятность того, что хотя бы двое встретятся.
3. Случайная точка A имеет равномерное распределение в правильном n -угольнике. Найти вероятность P_n , что точка A находится ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям. Найти числа C , a , что

$$P_n = Cn^a(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

4. В квадрат наудачу брошены точки A , B . Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB , целиком содержится в квадрате.

Задача 3. Варианты:

1. Пусть имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов в каждой с вероятностью успеха p , S_i – количество успехов в n испытаниях в i -ой серии. Найти вероятность $P(S_1 = k | S_1 + S_2 = m)$.
2. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geq 0$. Известно, что для любых $i \geq 0$ и $j \geq 0$ события A_i и B_j – независимы, при этом

$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad \lambda > 0, \quad i \geq 0,$$

$$P(Y = j) = e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!}, \quad \mu > 0, \quad j \geq 0.$$

Найти $P(X = i | X + Y = j)$.

3. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geq 0$. Известно, что для любых $i \geq 0$ и $j \geq 0$ события A_i и B_i – независимы, при этом

$$P(X = i) = P(Y = i) = (1 - p)^i p \quad i \geq 0,$$

где $p \in (0, 1)$. Найти $P(X = i | X + Y = j)$.

Задача 4. Рассмотрите схемы Бернулли при $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$ и $p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$ и рассчитайте точные вероятности (где это возможно) $P(S_n \in [n/2 - \sqrt{npq}, n/2 + \sqrt{npq}])$, S_n – количество успехов в n испытаниях, и приближенную с помощью одной из предельных теорем. Сравните точные и приближенные вероятности. Объясните результаты.