

Текст к презентации

Основные понятия

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное:

1. Наибольший общий делитель целых a, b — это такой их общий делитель, который делится на любой общий делитель этих чисел.
2. Наименьшее общее кратное целых a, b — это такое наименьшее натуральное число, которое делится на a и b .

Для вычисления НОД двух чисел существуют следующие алгоритмы:

1. Античный алгоритм Евклида (через разности);
2. Алгоритм Евклида (через остатки);
3. Нахождение НОД методом перебора;
4. Бинарный алгоритм Стейна.

НОК можно вычислить при помощи следующей формулы

$$\text{НОК} = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}.$$

Античный алгоритм Евклида

Суть алгоритма заключается в том, что если даны два числа, и одно из них равно нулю, то в ответ записывается большее из них. Если ни одно из них не равно нулю, тогда вычитаем из большего числа меньшее, а потом снова проверяем условие равенства одного из них нулю.

Алгоритм Евклида

В алгоритме Евклида, если одно из чисел равно нулю, то в ответ записывается наибольшее из них. Иначе большему числу присваиваем остаток от деления его на меньшее, а потом снова проверяем условие равенства одного из них нулю.

Алгоритм нахождения НОД методом перебора

В данном случае мы выбираем $\max(a, b)$ и уменьшаем это число на единицу до тех пор, пока a и b не станут одновременно кратны ему.

Бинарный алгоритм Стейна В 1961 году израильский физик и программист Джозеф Стейн (Josef Stein) представил совершенно иной алгоритм нахождения наибольшего общего делителя, использующий, прежде всего, на бинарную арифметику. Этому новому алгоритму совершенно не нужны команды, совершающие операции деления. Основанный исключительно на операциях вычитания, он проверяет, является ли число четным, и делит пополам четные числа (что соответствует в бинарной арифметике сдвигу вправо). Бинарный алгоритм поиска наибольшего общего делителя основан прежде всего на четырех простых фактах относительно положительных целых чисел a и b :

1. Если оба числа четны, то

$$\text{НОД}(2a, 2b) = 2 \text{НОД}(a, b).$$

2. Если первое число четно, а второе нечетно, то

$$\text{НОД}(2a, 2b + 1) = \text{НОД}(a, 2b + 1).$$

3. Также как и в алгоритме Евклида,

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b).$$

4. Если оба числа нечетные, то $a - b$ - четно и

$$|a - b| < \max(a, b).$$