Линейная алгебра, тема 2. Нормы

Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов — произведение их длин на косинус угла между ними.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$
где
$0 \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату длины данного вектора, $|\vec{a}|^2$.

Свойства:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

$(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b});$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$

Для векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$.

На языке Python скалярное произведение можно записать двумя способами:

1) `a.dot(b)` — более старый и потому более распространённый способ.

2) `a @ b` — более современный способ, позволяет сделать код лаконичнее.

Линейная комбинация векторов

Множество всех векторов V, которые можно складывать друг с другом и умножать на любой действительный скаляр, получая результат из того же множества V, называют **векторным пространством**, если выполняются свойства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — коммутативность сложения;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — ассоциативность сложения;

3) $\exists \vec{0}$: $\forall \vec{a} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ — существование нулевого вектора;

4) $\forall\vec{a}\ \ \exists(\overrightarrow{-a}):\ \ \vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}$ — существование противоположного вектора;

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ — умножение на единицу не изменяет вектор;

6) $k\cdot(m\cdot\vec{a})=(k\cdot m)\cdot\vec{a}$ — ассоциативность относительно скаляра;

7) $(k+m)\cdot\vec{a}=k\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{a}$ — дистрибутивность умножения на вектор относительно суммы скаляров;

8) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{b}$ — дистрибутивность умножения на скаляр относительно суммы векторов.

Упорядоченное множество векторов, у которых совпадает количество координат, образует **систему векторов**.

Пусть $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ — конечная система векторов, а $k_1, k_2, ..., k_n$ — произвольные действительные числа. Вектор $\vec{a}=k_1\cdot\vec{a_1}+k_2\cdot\vec{a_2}+...+k_n\cdot\vec{a_n}$ — это **линейная комбинация** системы векторов с заданными коэффициентами.

Также говорят, что вектор $\vec{a}$ **линейно выражается** через систему векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$. Порядковый номер вектора и скаляра в каждом множителе совпадает.

Нормы вектора

Векторные нормы при $p=1, 2, \infty$ — самые употребляемые.

- $|\vec{a}|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$ — L_1 норма;
- $|\vec{a}|_2=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+...+{a_n}^2}$ — L_2 норма;
- $|\vec{a}|_\infty=\max\limits_{i=1...n}|a_i|$ — максимальная норма.

Вычисление этих норм в коде:

```
from numpy import array # Подключение функции array() из nump
from numpy import inf  # Подключение бесконечности из numpy.
from numpy.linalg import norm # Подключение функции norm() из

k = array([25, -41, -31, 66]) # Теперь не нужно писать np.
l1 = norm(k, 1) # L1 норма
l2 = norm(k, 2) # L2 норма
maxnorm = norm(k, inf) # Максимальная норма
```

```
print(l1)
print(l2)
print(maxnorm)
```

Ответ:

```
163.0
87.30979326513149
66.0
```

Чтобы изменить значение L_2 нормы, лучше менять её наибольшие по модулю компоненты. Чтобы изменить значение L_1 нормы, неважно, какие компоненты менять (если у вектора не возникает отрицательных компонент).

Если мы запрещаем себе обнулять компоненты и при этом хотим изменить норму вектора, то лучше оценивать это изменение в L_2 норме.

Связь норм и скалярного произведение

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

💡 $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Косинус угла между двумерными векторами $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ можно найти по формуле:

💡 $$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}.$$

Косинус угла между трёхмерными векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ можно найти по формуле:

💡 $$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

Вычисление косинуса в коде. Пример:

Найдём косинус угла между векторами $\vec{a} = (4, 8, 17)$ и $\vec{b} = (-2, 3, 7)$, выведем на экран косинус и угол в градусах.

```
from numpy import array
from numpy import arccos  # Вызываем арккосинус, чтобы вычисл
from numpy import rad2deg  # И вызываем перевод из радиан в г
from numpy.linalg import norm

a = array([4, 8, 17])
b = array([-2, 3, 7])
cos_angle = a @ b / norm(a) / norm(b)  # Считаем косинус.
angle = arccos(cos_angle)  # Вычисляем арккосинус в радианах.
print("Косинус угла между a и b:", cos_angle)  # Выводим коси
print("Сам угол:", rad2deg(angle))  # Выводим сам угол в град
```

Ответ:

```
Косинус угла между a и b: 0.8925339417277717
Сам угол: 26.80659154352711
```

Расстояние между векторами

Расстояние между векторами $\overline{OA}, \overline{OB}$ определяют как расстояние между точками A и B.

$$r_1(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = |\vec{a} - \vec{b}|_1$$

$$r_2(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2} = |\vec{a} - \vec{b}|_2$$

$$r_\infty(\vec{a}, \vec{b}) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, ..., |a_n - b_n|) = |\vec{a} - \vec{b}|_\infty$$

Вычисления на Python

```
from numpy import array
from numpy import inf
from numpy.linalg import norm

a = array([22, 4, -6, 3.9, 7])
b = array([12, -0.5, 6, 42, 1])
```

```
r_1 = norm(a - b, 1)  # Вычисление L1 расстояния.
r_2 = norm(a - b, 2)  # Вычисление L2 расстояния.
r_max = norm(a - b, inf)  # Вычисление максимального расстоян
print("L1 расстояние между векторами a и b:", r_1)  # Вывод н
print("L2 расстояние между векторами a и b:", r_2)  # Вывод н
print(
    "Максимальное расстояние между векторами a и b:", r_max
)  # Вывод на экран максимального расстояния.
```

Ответ:

```
L1 расстояние между векторами a и b: 70.6
L2 расстояние между векторами a и b: 41.85522667481327
Максимальное расстояние между векторами a и b: 38.1
```

Косинусное сходство между векторами измеряет косинус угла между ними в многомерном пространстве. В отличие от прочих метрик, оно фиксирует угол между векторами, а не их величину. Чем оно больше, тем больше сходство векторов.