Линейная алгебра, тема 4. Обратная матрица и определитель

Обратной для матрицы A называют матрицу A^{-1}, которая удовлетворяет условию
$AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Обратные существуют только для квадратных матриц.

Формула для вычисления обратной матрицы в общем случае:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {A_{ij}}^T,$$

где $|A|$ — определитель матрицы A,

${A_{ij}}^T$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Свойства обратной матрицы

1) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ — коммутативность произведения матрицы и обратной ей.

2) Обратная матрица определяется единственным образом.

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ — расчёт матрицы, обратной произведению.

4) Если A обратима, то A^{-1} также обратима, причём $(A^{-1})^{-1} = A$.

5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

6) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} = A^{-1}\alpha^{-1}, \alpha \neq 0$.

Определитель матрицы

Определитель — это число, которое характеризует преобразование векторного пространства квадратной матрицей линейного преобразования. Определитель матрицы A обозначают как $\det(A)$, $|A|$, $\triangle(A)$.

Определитель матрицы 1×1 равен её единственному элементу:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}.$$

Чтобы вычислить определитель $2\times 2,$ нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определитель матрицы 1×1 по модулю равен длине отрезка, матрицы 2×2 — площади параллелограмма, образованного векторами матрицы.

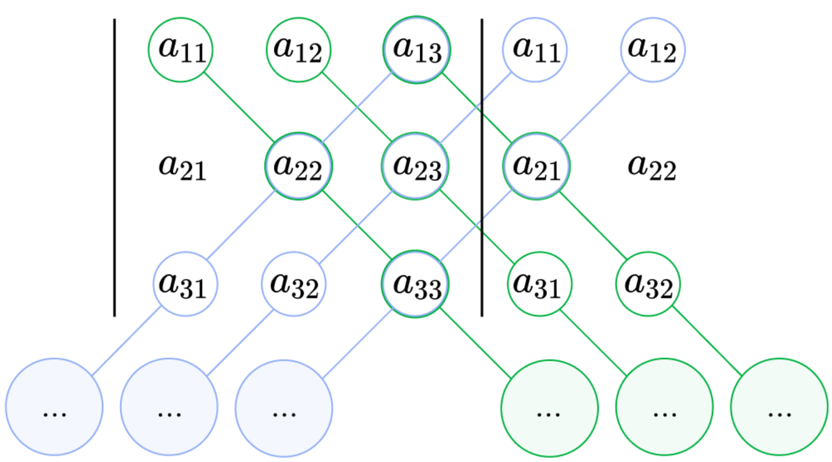
Если ориентация системы векторов изменилась, то и определитель поменял знак.

Определитель 3x3

Модуль определителя матрицы 3×3 равен объёму параллелепипеда, образованного её векторами.

Правило Саррюса для вычисления определителя:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$



Метод разложения

Дополнительный минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$ — это определитель матрицы, полученной из матрицы $A_{n\times n}$ вычёркиванием i-той строки и j-того столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} к элементу a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$ — это число
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,
где M_{ij} — дополнительный минор элемента a_{ij}.

Для матрицы 3×3 знаки алгебраических дополнений выглядят так:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Алгоритм разложения по строке или столбцу

1. Найти алгебраические дополнения элементов строки или столбца.
2. Умножить элементы строки или столбца на их алгебраические дополнения.
3. Сложить получившиеся произведения.

Разложение по строке или столбцу в общем виде

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{iq} A_{iq} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} A_{pj}$$

где p, q — номера произвольной строки и столбца матрицы A.

Свойства определителя

1) $|A| = |A^T|$;

2) Если две строки или два столбца матрицы поменять местами, то определитель поменяет знак;

3) Из строки или столбца определителя можно вынести общий множитель (и внести тоже можно);

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где n — размерность матрицы;

4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

5) $|A| \cdot |B| = |AB|$.

Вырожденная матрица

Вырожденной (или сингулярной) называют квадратную матрицу, у которой нет обратной.

Определитель вырожденной матрицы равен 0.

Условия вырожденности

- Определитель матрицы равен нулю, если:

1. две строки или два столбца матрицы линейно зависимы;
2. какая-то строка или столбец матрицы состоит из нулей;
3. в матрице есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца;
4. одна из строк или один из столбов матрицы — линейная комбинация остальных.

- Если существует ненулевой вектор x, такой что система $Ax = 0$, то матрица A вырожденная.

Свойства вырожденности

1. Вырожденная матрица остаётся вырожденной после транспонирования.
2. Вырожденная матрица остаётся вырожденной после умножения на скаляр.
3. Произведение вырожденной матрицы и любой матрицы того же размера даёт вырожденную матрицу.
4. Если матрица вырождена, то система $Ax = 0$ имеет ненулевые решения.

A вырождена $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ строки\столбцы A линейно зависимы $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

Упрощение матричных выражений

Чтобы подчеркнуть, что было до линейного преобразования, а что получилось после, точку W называют **образом** точки Z, а точку Z — **прообразом** точки W.

Прообраз → образ: $y = Ax$;
Образ → прообраз: $x = A^{-1}y$, где

x — радиус-вектор точки Z, y — радиус-вектор точки W.

Линейные преобразования в разных базисах

Матрица линейного преобразования в новом базисе

$A_1 = T^{-1}AT,$

где T — матрица перехода, A — исходная матрица.

Операции с матрицами в Python

Вычисление обратной матрицы

```
import numpy as np

a = np.array([
    [9, -7, 15],
    [6, 3, 29],
    [0, 3, 7]
])
b = np.linalg.inv(a) # Вычисление обратной
print("Матрица:")
print(a)
print("Обратная матрица:")
print(b)
print("Проверка единичной матрицей:")
print((a @ b).round()) # Проверка произведением и его округление
```

Определитель

```
import numpy as np

a = np.array([
    [14, -8],
    [2, 3]
])
det = np.linalg.det(a) # Вычисление определителя.
print("Матрица:")
print(a)
print("Определитель:")
print(det)
```

Вычисление образа и прообраза точки

```
import numpy as np

t = np.array([8, -4, 1, 15])
a = np.array([
    [0, 17, -2, 6],
```

```
    [7, 2, 15, 4],
    [5, -8, 3, 6],
    [0, -12, 4, 7]
])
b = np.linalg.inv(a)
t_column = t.reshape(4, 1)
k = b @ t_column # Вычисление прообраза.
print("Прообраз")
print(k)
print("Проверка")
print(a @ k) # Вычисление образа.
```

Перевод матрицы линейного преобразования из одного базиса в другой

```
import numpy as np

a = np.array([
    [7, 0, 0],
    [0, 1, 0],
    [0, 0, 1]
])
t = np.array([
    [2, -1, 0],
    [1, 4, 2],
    [-3, -1, -5] # Невырожденная матрица перехода.
])
s = np.linalg.inv(t) # Обратная матрица матрицы перехода.
print((s @ a @ t).round()) # Матрица нового линейного преобразования с округлением.
```