# Линейная алгебра, тема 1. Векторы и тригонометрия

**Вектор** в линейной алгебре — это направленный отрезок, для которого указаны его начало и конец. Обозначение: $\vec{a}$ или $\overline{AC}$.

Главные характеристики вектора: длина и направление. Пока они неизменны, вектор можно как угодно перемещать в пространстве. Если же изменить один из этих параметров, то получится новый вектор.

**Вектор** в линейной алгебре — это упорядоченный набор числовых данных. Запись вектора алгебраически: $\vec{a} = (1, 2, 17)$.

**Длиной вектора** $\overline{AB}$ называют длину отрезка $AB$. Обозначение: $|\overline{AB}|$.

**Нулевой вектор** — вектор, у которого совпадают начало и конец. Длина нулевого вектора равна нулю. $|\vec{0}| = 0$.

С точки зрения геометрии два вектора **равны**, если они одинаково направлены и их длины равны.

С точки зрения линейной алгебры два вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ **равны**, если равны все их соответствующие координаты. То есть $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\ \ \alpha_i = \beta_i$.

## Сложение и вычитание векторов. Геометрический подход

Правило треугольника:

1. Отложить первый вектор от точки $(0, 0)$.
2. Отложить от его конца второй вектор.
3. Суммой будет вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго.

Правило параллелограмма:

1. Отложить оба вектора от точки $(0, 0)$.
2. От конца первого вектора отложить вектор, равный второму.
3. От конца второго вектора отложить вектор, равный первому.
4. Вектором суммы будет диагональ полученного параллелограмма, исходящая из точки $(0, 0)$.

Правило многоугольника:

1. Отложить первый вектор от точки $(0, 0)$.
2. Отложить от его конца второй вектор, от конца второго — третий и так далее.
3. Суммой будет вектор, начало которого в точке $(0, 0)$, а конец — в конце последнего вектора.

Чтобы вычесть вектор, нужно заменить его на противоположно направленный и дальше воспользоваться любым методом сложения.

## Сложение и вычитание векторов. Алгебраический подход

$\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

$\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$

$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$

$\overline{a} - \overline{b} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n)$

## Масштабирование векторов

**Скаляр** — это величина, которая имеет только численное значение.

**Произведение и частное геометрически:**

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на скаляр $k$ называют вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Разделить вектор $\vec{b}$ на число $k$ — это найти такой вектор $\vec{a}$, который в произведении с числом $k$ даст вектор $\vec{b}$.

Вместо деления $\vec{b} : k$ можно выполнить умножение $\vec{b} \cdot \dfrac{1}{k}$.

**Произведение и частное в координатах:**

Скаляр нужно умножить на каждую координату по отдельности. При делении значение каждой координаты нужно разделить на скаляр. Если вектор $\vec{k} = (-6, 5)$, то вектор $\vec{k} : 2 = (-3, 2.5)$, а $-1.5\vec{k} = (9, -7.5)$.

## Условие коллинеарности

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число $k$, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. Число $k$ называют коэффициентом коллинеарности.

Чтобы найти число $k$, надо разделить вектор $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.
Неколлинеарные векторы делить друг на друга нельзя.

Два ненулевых вектора $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ и $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ коллинеарны, если их координаты пропорциональны, то есть $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = ... = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = k$.

Если у векторов есть нулевые координаты, то такие векторы коллинеарны, если у них нулевые координаты стоят на одинаковых местах, а отношения остальных координат одинаковы.

## Основы тригонометрии

**Синус** острого угла — это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

**Косинус** острого угла — это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

**Тангенс** острого угла — это отношение противолежащего катета к прилежащему. Также тангенс определяют как отношение синуса к косинусу.

**Градусы** → **Радианы:** умножить на $\pi$, разделить на $180$.

**Радианы** → **Градусы:** умножить на $180$, разделить на $\pi$.

Для произвольной точки $K = (x, y)$, лежащей на единичной окружности и образующей угол $\alpha$ между радиусом $OK$ и положительным направлением оси $Ox$ :

Синус $\alpha$ — это ордината точки $K$, $\sin\alpha = y$.

Косинус $\alpha$ — это абсцисса точки $K$, $\cos\alpha = x$.

$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1;\ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$

Тангенс $\alpha$ — это отношение ординаты точки к её абсциссе при $x \neq 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

| $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |

**Арксинус** (**$\arcsin x$**) и **арккосинус** (**$\arccos x$**) нужны для того, чтобы по известному синусу или косинусу определить сам угол.

Косинус принимает все возможные значения от $-1$ до $1$ на отрезке $[0, \pi]$. Поэтому арккосинус однозначно возвращает углы только из этого отрезка.

Синус принимает значения от $-1$ до $1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. И арксинус вернёт угол из этого отрезка.

`np.sin(x)` — синус угла $x$ в радианах;

`np.cos(x)` — косинус угла $x$;

`np.tan(x)` — тангенс угла $x$;

`np.arcsin(x)` — арксинус $x$;

`np.arccos(x)` — арккосинус $x$.

`np.rad2deg(x)` — перевод из радиан в градусы;

`np.deg2rad(x)` — перевод из градусов в радианы;

`np.pi/x` — так тоже можно записать значение в радианах.

## Векторы в Python

Для создания именованных переменных подходят все буквы латинского алфавита, подчёркивания и числа. Число не может быть первым символом в имени.

```
bus_number = 11
```

Чтобы сохранить в переменную текстовую строку, заключите текст в двойные или одинарные кавычки.

```
believe_string = 'Мы в вас верим!'
```

Функция работает с данными, написанными внутри её скобок. Эти данные называют аргументом функции. Если данных много, их перечисляют через запятую.

Для вывода на экран используют функцию `print()`.

Комментарий пишут после знака `#`.

Чтобы вызывать функции из определённой библиотеки, её сначала нужно подключить через `import`.

Вывод вектора на экран:

```
import numpy as np

v = np.array([2, 15, 6])
print(v)
```

Для создания нулевого вектора есть специальная функция `np.zeros()`. В качестве аргумента указывают количество координат.

```
import numpy as np
a = np.zeros(4)
print(a)
```

### Сложение и вычитание на языке Python

Десятичные дроби пишут через точку.

Прибавление числа к каждой координате:

```
import numpy as np

a = np.array([2, 3, 7])
print(a + 10)
```

Ответ:

```
[12 13 17]
```

Прибавление вектора:

```
import numpy as np

a = np.array([2, 3, 7])
b = np.array([4, 6, 11])
print(a + b)
```

Ответ:

```
[ 6  9 18]
```

**Произведение и частное в Python:**

В качестве знака умножения на Python используют `*`. Пропускать его нельзя.

Символ деления на языке Python — это `/`.

```
import numpy as np

a = np.array([3.7, 4.8, 4.2, 7.2, 7.6])
c = 1.2 * a
d = a / 2
print(c)
print(d)
```

Ответ:

```
[4.44 5.76 5.04 8.64 9.12]
[1.85 2.4  2.1  3.6  3.8 ]
```