Функции и их свойства, тема 2. Функции: продолжение

Показательная функция

Отрицательные степени: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ для любых $a \neq 0$ и любых n.

Дробные степени: $a^{m/n} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, и $a > 0$.

Возведение в степень m и извлечение корня степени n можно выполнять в любом порядке.

Показательная функция — это функция вида $y = a^x$, где $a > 0$.

Её свойства:

- $D(y) = \mathbb{R}$;
- $E(y) = (0, +\infty)$;
- функция возрастает для $a > 1$ и убывает для $0 < a < 1$;
- графики функций $y = b^x$ и $y = \left(\dfrac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$ симметричны относительно оси $\mathrm{O}y$;
- функция всегда проходит через точку $(0, 1)$;
- не имеет нулей, то есть не пересекает ось $\mathrm{O}x$;
- не имеет наибольшего или наименьшего значения.

На бесконечности любая возрастающая показательная функция в какой-то момент обгонит любую полиномиальную.

Чтобы решить показательное уравнение, нужно представить обе части как степени с одинаковым основанием, например: $3^x = 3^{-4}$. Если у равных величин равны основания, то должны быть равны и показатели.

Логарифм и логарифмическая функция

Логарифм $x = \log_a b$ — это число, равное показателю степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. То есть это корень уравнения $a^x = b$.

Ограничения:
$a, b > 0, a \neq 1$. Далее рассматриваем только такие a и b.

Читается $\log_a b$ как «логарифм по основанию a числа b».

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Специальные записи логарифмов:

- $\ln a$ — **натуральный** логарифм ($\log_e a = \ln a$),
- $\lg a$ — **десятичный** логарифм ($\log_{10} a = \lg a$).

Свойства:

- сумма логарифмов равна логарифму произведения: $\log_a m + \log_a n = \log_a(m \cdot n)$;
- разность логарифмов равна логарифму частного: $\log_a m - \log_a n = \log_a \dfrac{m}{n}$;
- вынос степеней из логарифма: $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$;
- формула перехода к новому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Логарифмическая функция с основанием a — это функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Она является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$.

Монотонные и обратные функции

Монотонная функция — это функция, которая только возрастает или только убывает на всей своей области определения.

Взаимно обратные функции — это такие функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, для которых одновременно выполнено $f\big(g(x)\big) = x$ и $g\big(f(x)\big) = x$.
В таком случае говорят, что
$f(x)$ является **обратной к** функции $g(x)$, а $g(x)$ — **обратной к** $f(x)$.

Обратную функцию к $f(x)$ обозначают как $f^{-1}(x)$.

Обратная функция «отменяет» действие исходной функции и возвращает всё назад.

Графики обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

У монотонных функций всегда существуют обратные, однако существуют и немонотонные обратимые функции.

Чтобы проверить, являются ли функции взаимно обратными, нужно вычислить $f\big(g(x)\big)$ и $g\big(f(x)\big)$. Если в результате обеих композиций получится x, значит, функции взаимно обратные.

Как найти обратную функцию к данной:

1. Проверить, обратима ли она.
2. Записать правые части исходной функции $y = f(x)$ и функции $y = x$.
3. Последовательными действиями превратить $f(x)$ в x. Те же действия совершать с x.

В результате на месте x будет правая часть обратной функции.

Основные функции и обратные к ним

$y = x$	$y = x$
$y = x^{2n+1}$	$y = \sqrt[2n+1]{x}$
$y = a^x$	$y = \log_a x$

Логарифмическая шкала и её реализация на Python

Линейная (обычная) шкала — это такая шкала, когда один шаг по оси соответствует увеличению координаты **на** 1.

Логарифмическая шкала — это такая шкала, когда один шаг по оси соответствует увеличению координаты **во сколько-то раз** (например, в 10).

При переходе к логарифмической шкале меняются только отметки на оси. Сами данные остаются теми же.

Функции для подсчёта логарифмов в NumPy:

- `np.log2(x)` — логарифм по основанию 2,
- `np.log10(x)` — логарифм по основанию 10,
- `np.log(x)` — натуральный логарифм (по основанию e).

Чтобы сделать шкалу по оси логарифмической, нужно вызвать одну из функций:

- `plt.xscale('log')` — для оси $\mathrm{O}x$,

- `plt.yscale('log')` — для оси Oy.

За цвет в `plt.scatter` отвечает параметр `c`. Часто используемые цвета можно передать названием по-английски.

Чтобы выделить цветом только часть точек, нужно передать в качестве параметра `c` столбец из таблицы — тот, по которому точки нужно разделить.

Модуль

Кусочная функция — функция, которая задана разными формулами на разных промежутках её области определения. Её график «склеен» из разных кусков. Сколько формул в функции, столько этих кусков и будет.

Модуль числа x — это неотрицательная величина, равная расстоянию от данного числа до нуля. Обозначается как $|x|$ и вычисляется по формуле:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Иногда модуль числа ещё называют его **абсолютным значением.**

Функция модуля $y = |x|$ относится к кусочным.

Алгоритм построения графика функций вида $y = |f(x)|$:

1. Строим график функции без модуля, то есть $y = f(x)$.
2. Симметрично отображаем наверх ту часть графика, что оказалась ниже оси Ox.
3. Стираем то, что было ниже оси Ox.

То есть график лишается своей нижней части, перекидывая её наверх. В итоге область значений содержит только неотрицательные значения, а график будет иметь излом в точке на оси Ox.

Алгоритм построения графика функций вида $y = f(|x|)$:

1. Строим график функции без модуля, то есть $y = f(x)$.
2. Стираем то, что было левее оси Oy.
3. Симметрично отображаем налево ту часть графика, что была правее оси Oy.

График будет иметь излом в точке на оси Oy.

Композиция функций

Композиция (суперпозиция) функций — это применение одной функции к результату другой.

Композиция функций f и g обозначается $g \circ f$ — под этим подразумевается применение функции g к результату функции f.

Операция композиции некоммутативна: $g \circ f \neq f \circ g$.

Если $g(x) = a \cdot x$, то композиция $g(f(x))$:

- при $a > 1$ ускорит возрастание и убывание графика на соответствующих промежутках монотонности;
- при $0 < a < 1$ замедлит возрастание и убывание графика на соответствующих промежутках монотонности;
- при $a < 0$ сменит знак функции и тип монотонности графика на каждом из промежутков.

Если $g(x) = x + c$, то композиция $g(f(x))$:

- при $c > 0$ сдвинет график вверх на $|c|$;
- при $c < 0$ сдвинет график вниз на $|c|$.

Если $g(x) = x + b$, то композиция $f(g(x))$:

- при $b > 0$ сдвинет график **влево** на $|b|$;
- при $b < 0$ сдвинет график **вправо** $|b|$.

Можно запомнить это так: по оси $\mathrm{O}x$ сдвиг всегда не туда, куда хочется.