Математический анализ, тема 2. Интеграл

Неопределённый интеграл

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если у функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$, то существует ещё бесконечное множество других её первообразных, отличающихся от $F(x)$ лишь на константу:

$F'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ — семейство всех её первообразных, обозначается как $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Операция поиска неопределённого интеграла называется **интегрированием** функции $f(x)$.

В данных обозначениях $f(x)$ — **подынтегральная функция**, а dx — **дифференциал** аргумента. Он пишется в конце и обозначает, что интегрирование будет идти по переменной x.

Таблица неопределённых интегралов:

$$\int dx = x + C \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, n \neq -1 \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}\, x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

В некотором роде таблица неопределённых интегралов — таблица производных, у которой поменяли столбцы «до» и «после».

Свойства интеграла:

- Интеграл суммы/разности равен сумме/разности интегралов:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- Числовой множитель в интеграле можно выносить:

Если $k \in \mathbb{R}$, то $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Можно вычислить интеграл композиции, если внутренняя функция линейна:

Выглядит она так: $\int f(kx+m)dx = \frac{F(kx+m)}{k} + C$ при $k \neq 0.$

Запись длинных сумм

С помощью символа $\sum$ — заглавная греческая буква «сигма» — можно компактно записывать длинные суммы: $\sum\limits_{a=1}^{57} a = 1 + 2 + 3 + \ldots + 56 + 57.$

Внизу под сигмой записана меняющаяся переменная (**индекс суммирования**, или **счётчик**) и число, которое надо подставлять первым. А наверху — значение, которое надо подставить последним. Числа под и над сигмой — **пределы суммирования**, нижний и верхний.

Суммирование может начинаться с любого целого числа.

Чтобы найти количество слагаемых в сумме, нужно из верхнего предела суммирования вычесть число, *предшествующее* нижнему пределу. То есть у суммы $\sum\limits_{k_1}^{k_2}$ будет $k_2 - k_1 + 1$ слагаемое.

Переменных в сумме может быть несколько: $\sum\limits_{k=3}^{5} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{k} = -\frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{4} - \frac{x^9}{5}$.

Определённый интеграл

Определённый интеграл — это предел интегральных сумм: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

Числа a и b называются **пределами интегрирования**.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — это число, равное площади фигуры, образованной графиком $f(x)$, горизонтальной линией $y = 0$ и вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$. Его можно найти по формуле Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Если на промежутке $[a, b]$ график $f(x)$ лежит выше прямой $y = 0$, то число будет положительным. Но если график будет лежать ниже прямой $y = 0$ — интеграл будет отрицательным. В таком случае, чтобы получить **площадь**, необходимо домножить значение интеграла на (-1).

Функция $f(x)$ называется **чётной**, если $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется **нечётной**, если $f(-x) = -f(x)$.

Но большинство функций этими свойствами не обладают.

Для любых чётных функций на симметричном промежутке верно равенство:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Для любых нечётных функций на симметричном промежутке верно равенство:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Как вычислить определённый интеграл в Python

Подключить библиотеку `SciPy`. Использовать метод `quad(f, a, b)`: на вход подать подынтегральную функцию `f`, нижний предел интегрирования `a` и верхний предел `b`.

Метод `quad` возвращает два числа `(res, err)`: приближённое значение интеграла `res` и оценку погрешности `err`. Получить только значение интеграла можно так: `quad(f, a, b)[0]`.

Интегрирование кусочно-заданных функций

Функция называется **непрерывной** на промежутке, если её график на этом промежутке можно построить, не отрывая руки, одним движением.

Формальное определение:

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на некотором промежутке**, если в любой точке x_0 этого промежутка выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если промежуток не уточнён, то имеется в виду вся числовая прямая.

Чтобы проверить, является ли кусочно-заданная функция непрерывной, подставьте координату x граничной точки в оба уравнения (несмотря на то, что по условию она является частью только одного из них):

- если получились одинаковые y, то кусочки склеиваются, и функция непрерывна в этой точке,

- если получились разные координаты y, то функция не будет непрерывной.

Правый (правосторонний) предел функции в точке — это значение L, к которому стремится функция по мере того, как аргумент приближается справа к некоторому x_0. Обозначается как $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = N$ или $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = N$.

Левый (левосторонний) предел функции в точке — это значение L, к которому стремится функция по мере того, как аргумент приближается слева к некоторому x_0. Обозначается как $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = M$ или $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = M$.

Вместе их называют **односторонними** пределами. Для непрерывных функций $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. То есть в каждой выбранной точке односторонние пределы совпадают между собой и равны обычному пределу.

Можно сказать иначе: если в точке существует обычный предел (и он конечен), то односторонние тоже есть и равны тому же значению.

Если в точке нарушено условие непрерывности, то говорят, что в ней она имеет разрыв или терпит разрыв.

Если в точке нарушено условие непрерывности и при этом односторонние пределы существуют и конечны — это **точка разрыва первого рода**. Причём:

- если они одинаковые (и равны обычному пределу в этой точке) — это **точка устранимого разрыва**,
- если они разные — это **скачок**.

Если в точке нарушено условие непрерывности и при этом один или оба односторонних предела бесконечны или не существуют — это **точка разрыва второго рода**.

Интегрирование по частям

Пусть даны две функции, зависящие от одной и той же переменной: $u(x)$ и $v(x)$, или просто u и v. Тогда: $\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$.

Это формула и называется **формулой интегрирования по частям**. Она позволяет интегрировать произведение такого вида, где вторая функция является чьей-то «хорошей» производной.

Рецепт: если под интегралом стоит произведение линейной и показательной/тригонометрической функции, принимайте линейную за u, а показательную или тригонометрическую — за v'.

Ещё один рецепт: Если под интегралом стоит произведение, в котором один множитель — полиномиальная функция, а другой — показательная, синус или косинус, принимайте полиномиальную за u, а вторую — за v'. Повторяйте, пока не вычислите интеграл до конца.

С помощью формулы интегрирования по частям была получена формула $\displaystyle\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$, ей можно пользоваться.

Дифференциал функции

Выражение $f'(x)dx$, состоящее из производной $f'(x)$ функции аргумента x и дифференциала dx этого аргумента, называют **дифференциалом функции** $f(x)$ в точке x. Его записывают как $df(x)$ или просто df.

То есть:

$$df(x) = f'(x)dx,$$
$$df = f'dx.$$

С помощью дифференциала формулу интегрирования по частям можно переписать в виде:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du.$$

Когда кусочек функции и dx как бы переписывают в виде дифференциала другой функции, называют **внесением функции под знак дифференциала**.

Определённые интегралы тоже можно вычислять, используя формулу интегрирования по частям. Пределы интегрирования в этом случае сохраняются:

$$\int\limits_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int\limits_a^b v \, du.$$

Замена переменных

Функции со сложным аргументом можно интегрировать как простые, если дифференциал совпадает с аргументом функции.

Например: $\int \cos\left(x^2\right) d\left(x^2\right) = \sin\left(x^2\right) + C$. Это неявная замена переменных.

Здесь можно совершить замену переменных в явном виде $\int \cos\left(x^2\right) d\left(x^2\right) = \int \cos t \, dt$ и вычислять уже этот интеграл. В конце нужно будет вернуться к исходной переменной.

Если явная замена переменных (то есть замена со сменой буквы) происходит в определённом интеграле, то нужно менять и пределы интегрирования. Для простоты рекомендуем для определённых интегралов делать замену переменных неявной.

Несобственный интеграл

Несобственный интеграл (первого рода) — это определённый интеграл, который берётся на бесконечном промежутке.

Другими словами, какой-то из пределов интегрирования равен бесконечности (а может и оба сразу): $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Важно: функция $f(x)$ должна быть непрерывна на интегрируемом промежутке или иметь только точки разрыва первого рода.

Чтобы вычислить несобственный интеграл, нужно вычислить предел:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \to +\infty} \big(F(b) - F(a)\big).$$

Ответ может получится и конечный, и бесконечный. В первом случае говорят, что несобственный интеграл **сходится**, а во втором — что **расходится.**

Аналогично с бесконечностью в нижнем пределе:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{a \to -\infty} \big(F(b) - F(a)\big).$$

Если оба предела бесконечны, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} F(b) - \lim\limits_{a \to -\infty} F(a).$

Необходимое условие сходимости несобственного интеграла: подынтегральная функция $f(x)$ должна стремиться к нулю на выбранной бесконечности.

Применяем это условие так: если оно выполняется, то у несобственного интеграла от $f(x)$ **есть шанс** сойтись. Если условие не выполняется, то интеграл точно будет расходящимся.

Для функции вида $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ существует два случая:

- если $n \leqslant 1,$ то несобственный интеграл от $f(x)$ расходится,
- если $n > 1,$ то несобственный интеграл от $f(x)$ сходится.

Несобственный интеграл от показательной функции a^x будет сходящимся:

- если $a > 1$ и бесконечным является только нижний предел интегрирования,
- если $0 < a < 1$ и бесконечным является только верхний предел интегрирования.

Неформально: сходится будет только интеграл от «низкой» части функции. У возрастающей показательной функции «низкая» часть слева, а у убывающей — справа.

Не важно, чему конкретно равен конечный предел. В данном случае он равен $1,$ но мог бы быть и каким-то числом, на ответ это не влияет.

Если для вычисления несобственного интеграла требуется замена переменных, её стоит сделать неявной, то есть не вводить новую переменную. Можно обойтись внесением под дифференциал.

Несобственные интегралы имеют в качестве геометрической интерпретации площадь между кривой (графиком подынтегральной функции) и осью $\mathrm{O}x$ в заданных границах. При этом одна из границ бесконечная (иногда обе). Это означает, что если интеграл сходящийся, то у полученной бесконечной фигуры будет конечная площадь (равная значению этого интеграла с плюсом или минусом).

Как и раньше, значение интеграла может быть любым, в том числе отрицательным, но площадь — величина обязательно неотрицательная. Отталкивайтесь от формулировки задания.

Табличные несобственные интегралы от экспоненциальных функций:

1. $$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \qquad a \neq 0$$

2. $$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0$$

4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2}\,dx = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0$$

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}, \qquad a > 0$$

Здесь если $f(x)$ — чётная, то $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$