Функции и их свойства, тема 1. Функции: начало

Функция и её график

Определение через отображение множеств.

> 💡 **Функция** — это отображение одного множества в другое, где каждому элементу первого множества соответствует только один элемент второго. Обозначается как $f : X \longrightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Определение через зависимость переменных.

> 💡 **Функция** — это зависимость переменной y от переменной x, где каждому значению x соответствует единственное значение y.

Обозначается как $y = f(x)$ или просто $y(x)$, где x — независимая переменная или аргумент, а y — зависимая переменная или значение функции.

График функции — это множество точек с координатами (x, y), где $y = f(x)$. Здесь $x \in X$ и $y \in Y$. График функции — это геометрическая интерпретация функции, изображённая на координатной плоскости.

На графике функции может быть только одна точка с заданной координатой x. Поэтому вертикальная линия, например, не является графиком функции.

Область определения и множество значений функции

Область определения функции — множество значений аргумента, для которых существует значение функции. Обозначается как $D(y)$ или $D(f)$.

На графике это множество координат x всех точек графика.

Множество значений функции — множество всех элементов из Y, в которые отображаются все элементы из области определения.

Обозначается как $E(y)$ или $E(f)$.

На графике это множество координат y всех точек графика.

В функции $f : X \longrightarrow Y$ область определения $D(y)$ всегда совпадает с X. А вот $E(y)$ является подмножеством Y. Всё множество Y целиком называют **областью значений**.

Линейная функция и линейное уравнение

Линейная функция — это функция вида $y = kx + m$, где $k \in \mathbb{R}$ — угловой коэффициент прямой, $m \in \mathbb{R}$ — коэффициент сдвига графика вдоль оси $\mathrm{O}y$.

Для линейной функции $D(y) = E(y) = \mathbb{R}$ при $k \neq 0$. Если $k = 0$, то множество значений состоит из всего одного числа.

При $k > 0$ линейная функция возрастает, при $k < 0$ убывает, а при $k = 0$ — постоянна.

Линейное уравнение — запись вида $ax + by + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Один или два коэффициента могут быть равны нулю, но не все три одновременно.

Линейным уравнением можно называть формулы для всех видов прямых: и функций (когда $b \neq 0$), и не-функций (когда $b = 0$).

Для построения графика прямой достаточно двух точек. Чтобы восстановить формулу для функции, нужно подставить координаты каждой из точек в $y = kx + m$ и решить систему из двух таких уравнений.

Квадратичная функция

Квадратичная функция — это функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

График квадратичной функции называют **параболой**.

- если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх;
- если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Координаты вершины параболы: $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a};\ y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}})$.

Нули функции — это аргументы, при которых функция принимает значение 0.

Точка минимума функции (x_{min}) — это значение x, в котором убывание функции меняется на возрастание. **Минимум функции** (y_{min}) — это значение y, которое достигается в точке минимума.

Точка максимума функции (x_{max}) — это значение x, в котором возрастание функции меняется на убывание. **Максимум функции** (y_{max}) — это значение y, которое достигается в точке максимума.

Не стоит путать максимум и наибольшее значение: максимумов может быть несколько, а вот наибольшее значение (если оно есть) — только одно. То же с минимумами и наименьшим значением.

Полиномиальные функции

Полиномиальная функция степени $n \geqslant 2$ в общем виде:

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0.$

Свойства полиномиальных функций:

- У функции степени n будет $n + 1$ коэффициент, поэтому требуется $n + 1$ точка, чтобы восстановить её уравнение.
- Знак старшего коэффициента функции определяет её правую ветвь (в том числе если эта ветвь единственная): при $a_0 > 0$ она будет возрастать, при $a_0 < 0$ — убывать.
- У функции степени n может быть максимум n ветвей.
- У функции *чётной* степени может быть только *чётное* количество ветвей (не превосходящее её степень).
- У функции *нечётной* степени может быть только *нечётное* количество ветвей (не превосходящее её степень).
- Все функции вида $y = x^{2k}, k \in \mathbb{N}$ имеют график, похожий на параболу.
- Все функции вида $y = x^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$ имеют график, похожий на кубическую параболу.
- Максимальное количество нулей полиномиальной функции совпадает с количеством её ветвей и равно n. Минимальное количество нулей зависит от чётности: у чётных функций нулей может не быть совсем, у нечётных всегда есть хотя бы один.

Описание данных с помощью функций

Набор точек можно описать с помощью интерполяционного решения или решения в среднем.

Интерполяционное решение (интерполянт):

- обязательно проходит через все точки;
- если является многочленом, построенным на $n+1$ точке, то имеет степень n;
- чувствительно к ошибкам входных данных.

Решение в среднем:

- не проходит через все точки (может не проходить ни через одну);
- если является многочленом, может иметь любую заданную степень, но обязательно ниже степени интерполяционного многочлена;
- меньше чувствительно к ошибкам входных данных, чем интерполянт.

Точное решение заданной степени не всегда существует при избыточном количестве точек. Чтобы проверить, есть ли оно, нужно решить систему линейных уравнений с подстановкой координат всех данных точек в уравнение заданной степени. Если система содержит противоречие, то точного решения не будет.

Инструменты для работы с функциями в Python

`np.poly1d()` — создание Python-функции для подсчёта значения многочлена.

`value = data[row, col]` — извлечение данных. В скобках указывают номер строки и столбца.

`from matplotlib import pyplot as plt` — вызов модуля Pyplot из библиотеки Matplotlib.

`plt.scatter(x, y)` — преобразование данных из таблицы в точки.

`plt.plot(x, y)` — преобразование данных из таблицы в график.

`np.arange(start, end, step)` — выбор набора координат в определённом диапазоне.

`np.polyfit(x, y, deg)` — поиск коэффициентов многочлена по данным.

Как построить график известной функции

1. `x = np.arange(start, end, step)` — создать набор значений `x`.

2. `y = f(x)` — рассчитать значения функции `y` для выбранных `x`.
3. `plt.plot(x, y)` — построить график.

Как найти многочлен, который описывает данные, и построить его график

1. `coefs = np.polyfit(x, y, 1)` — рассчитать коэффициенты многочлена.
2. `f = np.poly1d(coefs)` — создать Python-функцию для подсчёта значения многочлена.
3. `x = np.arange(start, end, step)` — создать набор значений `x`.
4. `y = f(x)` — рассчитать значения функции `y` для выбранных `x`.
5. `plt.plot(x, y)` — построить график.

Пример использования двух функций:

```
import numpy as np
data = np.array([
    [54.5, 5, 29.659],
    [85.4, 20, 44.632],
    [34.3, 5, 10.908],
    [43, 18, 20]
])

# Выделяем интересующие столбцы.
area = data[:, 0]
price = data[:, 2]

# Визуализируем точки данных
plt.scatter(area, price)

# Рассчитываем коэффициенты полинома.
# Подставили в функцию степень 1, поэтому полином линейный.
coefs = np.polyfit(area, price, 1)
# Создаём Python-функцию для подсчёта значения полинома.
f = np.poly1d(coefs)

# Рассчитываем координаты точек для графика полинома.
x = np.arange(30, 90, 0.5)
```

```
# Находим значения найденного полинома.
y = f(x)

# Визуализируем полином.
plt.plot(x, y)

# Печатаем коэффициенты.
print("coefs", coefs)

# Печатаем значение полинома для указанного аргумента.
print("f(29) =", f(29))
```