Математический анализ, тема 1. Производная

Предел функции в точке и на бесконечности

Предел (предельное значение) функции в точке — это значение L, к которому стремится функция по мере приближения аргумента к некоторому значению x_0.

Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Для непрерывной функции предел в любой точке $x_0 \in D(y)$ совпадает со значением функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Рациональная (дробно-рациональная) функция — это числовая функция, которая может быть представлена в виде дроби, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Асимптота — прямая, к которой график стремится, но никогда не достигнет. Бывает вертикальная или горизонтальная.

Чтобы найти предел рациональной функции в точке x_0, нужно просто подставить её в функцию.

- Если сразу получается конечный ответ, то он и будет пределом.
- Если получается $\dfrac{0}{0}$, то надо сократить дробь и уже после этого подставлять координату точки. Полученное значение и будет пределом в этой точке. Графиком является линия с выколотой точкой (точкой устранимого разрыва).
- Если получается $\dfrac{m}{0}$, где $m \neq 0$, значит, предел в точке равен бесконечности. На графике прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота.

График функции вида $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ называется **гиперболой.** Он имеет вертикальную асимптоту $x = -a$ и горизонтальную асимптоту $y = b$.

Предел функции на бесконечности — это значение L, к которому стремится функция по мере приближения аргумента к бесконечности (правой, левой или обеим).

Если L — конечное число, то прямая $y = L$ является горизонтальной асимптотой графика функции.

Обозначаются: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L, \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L.$

Основные пределы на бесконечности, $a \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = 0;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1;$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ при $a > 1;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ при $a > 1;$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ при $n > 1.$

Прибавление числа к аргументу функции не влияет на значение предела на бесконечности.

Прибавление числа к функции целиком:

- не влияет на значение предела на бесконечности, если он бесконечный,
- изменяет предел на бесконечности на это число, если предел конечный.

Если в числителе и в знаменателе функции стоят многочлены, то предел на бесконечности считается так:

- Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел при $x \to \infty$ равен бесконечности.
- Если степень знаменателя больше степени числителя, то предел при $x \to \infty$ равен нулю.
- Если степени числителя и знаменателя совпадают, то предел при $x \to \infty$ равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Производная

Производная функции в точке x_0 — число, характеризующее скорость роста функции в этой точке. Обозначается $f'(x_0)$.

- Если $f'(x_0) > 0$, то функция возрастает.

- Если $f'(x_0) < 0$, то функция убывает.
- Если $f'(x_0) = 0$, то функция постоянна либо в точке происходит смена типа монотонности.

Чем больше модуль значения производной — тем быстрее растёт или убывает функция.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это прямая, значение которой в точке x_0 совпадает с $f(x_0)$, а её угловой коэффициент равен значению $f'(x_0)$.

Приращение аргумента — разница между правым (следующим) и левым (текущим) значением аргумента. Обозначается Δx. Мы рассматриваем только положительные приращения аргумента.

Приращение функции — разница между значениями функции в правой и левой точках. Обозначается Δy или Δf. То есть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

https://code.s3.yandex.net/math-adult/explanations/matan/2/interactive-derivative/ru.html?fixedX0=0&draggable=0&x1=2&x2=5&params=0.8,1.2&showValuesY=1

Формальное определение производной функции в точке: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Чем меньше приращение, тем больше кривая в точке похожа на свою касательную и тем ближе её мгновенная скорость к скорости роста прямой. При бесконечно малом приращении аргумента они становятся неразличимы.

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где k — угловой коэффициент касательной в данной точке.

Численное значение производной в точке x_0 зависит от x_0, поэтому производная функции тоже является функцией.

У кусочных функций нет производной в точке склейки (только в ней).

Взятие производной также называется **дифференцированием.**

Таблица для вычисления производных:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

А также формулы:

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Чтобы найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 численным дифференцированием в Python, надо:

1) выбрать маленькое значение приращения $\mathtt{dx}$, оптимально использовать $\mathtt{dx} = 10^{-8}$,

2) найти $f(x_0)$,

3) найти $f(x_0 + \mathtt{dx})$,

4) вычислить значение производной в точке по определению:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \mathtt{dx}) - f(x_0)}{\mathtt{dx}}.$$

Монотонность и экстремумы

Если функция возрастает на промежутке, то производная на нём положительна.

Если функция убывает на промежутке, то производная на нём отрицательна.

Точка минимума функции — это значение x, в котором убывание функции меняется на возрастание.

Минимум функции — это значение y, которое достигается в точке минимума.

Точка максимума функции — это значение x, в котором возрастание функции меняется на убывание.

Максимум функции — это значение y, которое достигается в точке максимума.

У точек минимума и максимума есть общее название — **точки (локального) экстремума.** Здесь речь идёт про иксы.

Значения минимума и максимума, которые в них достигаются, называются **(локальными) экстремумами** функции. Здесь речь про игреки.

- Если точка x_0 экстремальная, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.
- Если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует — это ещё ничего не гарантирует. Но такие точки будут кандидатами — если у функции и есть экстремумы, то в них.

Как найти точки экстремума и сами экстремумы функции:

1. Вычислить производную функции.
2. Найти точки из области определения исходной функции, в которых производная равна нулю или не существует.
3. Нанести их на координатную прямую и определить знаки производной на промежутках.
4. Подписать ниже тип монотонности исходной функции.
5. Точки, в которых будет меняться тип монотонности, — и есть точки экстремума.
6. Чтобы найти сами экстремумы, нужно подставить точки экстремума в исходную функцию.

Если функция задана на ограниченных промежутках, то и знаки производной тоже определяют только на них.

Экстремальные точки всегда принадлежат области определения функции. Если точка не входит в область определения, то и экстремальной она быть не может.

О композиции:

1) Если к функции f применяется монотонная возрастающая функция g, то композиция $g \circ f$ имеет те же точки экстремума, что и исходная функция f. При этом сохраняется и их тип.

2) Если к функции f применяется монотонная убывающая функция p, то композиция $p \circ f$ имеет точки экстремума при тех же аргументах, что и исходная функция f, но меняется их тип.

Если к f применяется немонотонная функция, то сделать быстрый вывод о точках экстремума их композиции нельзя.

Важно! Сами значения функций в этих точках разные, так как $f(x) \neq g \circ f(x)$.

Наибольшее или наименьшее значение (глобальный экстремум) функции — самое большое или маленькое значение, которое она достигает на всей области определения.

Точки глобального экстремума не обязательно являются точками локального экстремума.

- Экстремумов у функции может быть сколько угодно, а вот наибольшего и наименьшего значения — всегда по одной штуке (если они есть, конечно).
- Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, нужно найти её экстремумы и значения в концах промежутка, на котором она задана. Затем из этих значений выбрать самое большое и самое маленькое.

Выпуклость и полный анализ функции

Как определить тип выпуклости функции на промежутке:

1) Соединить любые две точки графика на этом промежутке отрезком.
2) Если часть графика, соединяющая данные точки, лежит **выше** полученного отрезка — функция выпукла **вверх**.

Если часть графика, соединяющая точки, лежит **ниже** отрезка — функция выпукла **вниз**.

Функция может иметь несколько промежутков выпуклости разного типа, а может обладать одним типом на всей области определения.

Иметь разные типы выпуклости могут полиномиальные функции от третьей степени и выше. Квадратичная функция имеет один тип выпуклости на всей области определения, а линейная функция не является ни выпуклой вверх, ни выпуклой вниз.

Определять типы выпуклости можно у полиномиальных, кусочных, показательных, логарифмических, тригонометрических и других непрерывных функций.

Вторая производная функции — это производная, взятая от производной исходной функции. Обозначается как $f''(x)$.

Она связана с типом выпуклости функции так:

- если $f''(x_0) > 0$, то точка лежит на **выпуклом вниз** участке графика;
- если $f''(x_0) < 0$, то точка лежит на **выпуклом вверх** участке графика.

Верны и обратные утверждения.

Мнемоническое правило: если вторая производная положительна, то функция «улыбается», а если вторая производная отрицательна, то функция «грустит».

Точка перегиба — это значение $x \in D(y)$, в котором меняется тип выпуклости функции (выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот).

- если точка x_0 является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.
- если $f''(x_0) = 0$, то точка будет кандидатом на звание точки перегиба, но нет гарантий, что она таковой окажется.

Чтобы проверить наверняка, есть ли в точке перегиб, нужно найти вторую производную функции, приравнять её к нулю и определить знаки на полученных промежутках. Точками перегиба будут являться только те точки из области определения, при переходе через которые меняется тип выпуклости.

Если нужно проанализировать функцию и построить эскиз её графика, то пользуемся списком:

1) Область определения функции.

2) Асимптоты: вертикальные и горизонтальные.

3) Промежутки монотонности и экстремумы.

4) Наибольшее и наименьшее значения.

5) Выпуклость и точки перегиба.

Иногда эскиз графика можно построить на этом этапе. Если данных не хватает, проводят дополнительный анализ:

6) Точки пересечения с осями координат.

7) Множество значений функции.

8) Если данных всё ещё недостаточно, дополнительно составляют таблицу значений.