Análise de algoritmos

Profª. Rose Yuri Shimizu

Eficácia x Eficiência

```
1   int p1(int n)
2   {
3       if (n == 1 || n == 2)
4           return 1;
5       else
6           return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7   }
8
```

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2) // <- p1(5) verifica
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7  }
8
```

```
1          p1(5)
2            |
3      (n==1||n==2)?
4
5
6
7
8
```

```
1      stack
2
3  |                    |
4  |                    |
5  |                    |
6  |                    |
7  |   p1(5)            |
8
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //     ---------- p1(5) chama p1(4)
8  }
9
```

```
1          _______ p1(5)
2         /
3      p1(4)
4
```

```
1  |                              |
2  |                              |
3  |                              |
4  |   p1(4)                      |
5  |   p1(5) -> p1(4)             |
6
```

Eficácia x Eficiência

```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(4) verifica
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```

```
          _______ p1(5)
         /
      p1(4)
        |
   (n==1||n==2)?

```

```
|                                |
|                                |
|                                |
|   p1(4)                        |
|   p1(5) -> p1(4)               |

```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //     ---------- p1(4) chama (p1(3)
8  }
9
```

```
1          ______ p1(5)
2        /
3     p1(4)
4    /
5  p1(3)
6
```

```
1  |                              |
2  |                              |
3  |   p1(3)                      |
4  |   p1(4) -> p1(3)             |
5  |   p1(5) -> p1(4)             |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2) //<- p1(3) verifica
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7  }
8
```

```
1          _______ p1(5)
2         /
3       p1(4)
4      /
5    p1(3)
6      |
7 (n==1||n==2)?
8
```

```
1 |                                |
2 |                                |
3 |   p1(3)                        |
4 |   p1(4) -> p1(3)               |
5 |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

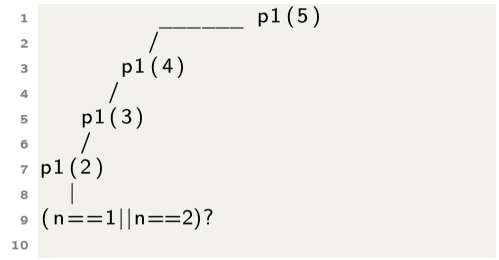
```
1     int p1(int n)
2     {
3         if (n == 1 || n == 2)
4             return 1;
5         else
6             return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7             //      ---------- p1(3) chama p1(2)
8     }
9
```

```
1           _______ p1(5)
2          /
3       p1(4)
4      /
5    p1(3)
6    /
7 p1(2)
8
```

```
1  |                                |
2  |    p1(2)                       |
3  |    p1(3) -> p1(2)              |
4  |    p1(4) -> p1(3)              |
5  |    p1(5) -> p1(4)              |
6
```

Eficácia x Eficiência

```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
        return 1; //<- p1(2) devolve
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

```




```
|                                |
|   p1(2) ->   1                 |
|   p1(3) -> p1(2)               |
|   p1(4) -> p1(3)               |
|   p1(5) -> p1(4)               |

```

Eficácia x Eficiência

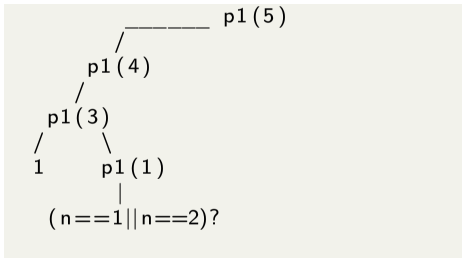
```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //                ---------- p1(3) chama p1(1)
8  }
9
```

```
1          _______ p1(5)
2         /
3       p1(4)
4      /
5    p1(3)
6   /    \
7   1     p1(1)
8
```

```
1  |                                |
2  |   p1(1)                        |
3  |   p1(3) ->   1  +  p1(1)       |
4  |   p1(4) -> p1(3)               |
5  |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p1(int n)
2   {
3       if (n == 1 || n == 2) //<- p1(1) verifica
4           return 1; //<- p1(1) devolve
5       else
6           return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7   }
8
```




```
1  |                                |
2  |   p1(1) ->            1        |
3  |   p1(3) ->   1  +  p1(1)       |
4  |   p1(4) -> p1(3)               |
5  |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(3) devolve
7  }
8
```

```
1          _______ p1(5)
2         /
3       p1(4)
4      /
5    p1(3)
6   /     \
7   1      1
8
```

```
1  |                                |
2  |                                |
3  |   p1(3) ->   1  +    1         |
4  |   p1(4) -> p1(3)               |
5  |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

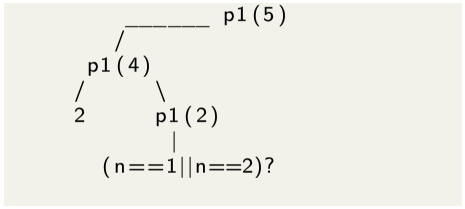
```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //                ---------- p1(4) chama p1(2)
8  }
9
```

```
1          ______ p1(5)
2         /
3      p1(4)
4     /     \
5     2     p1(2)
6
```

```
1  |                              |
2  |                              |
3  |   p1(2)                      |
4  |   p1(4) ->   2  +  p1(2)     |
5  |   p1(5) -> p1(4)             |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
4          return 1; //<- p1(2) devolve
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7  }
8
```




```
1  |                                |
2  |                                |
3  |   p1(2) ->           1         |
4  |   p1(4) ->   2  +  p1(2)       |
5  |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(4) devolve
7  }
8
```

```
1          _______ p1(5)
2         /
3      p1(4)
4     /     \
5     2      1
6
```

```
1  |                                |
2  |                                |
3  |                                |
4  |   p1(4) ->   2  +   1          |
5  |   p1(5) -> p1(4)               |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //                ---------- p1(5) chama p1(3)
8  }
9
```

```
1      _______ p1(5) _______
2     /                     \
3     3                    p1(3)
4
```

```
1  |                              |
2  |                              |
3  |                              |
4  |   p1(3)                      |
5  |   p1(5) ->   3  +  p1(3)     |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2) //<- p1(3) verifica
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7  }
8
```

```
1          _______ p1(5) ______
2         /                    \
3        3                   p1(3)
4                              |
5                        (n==1||n==2)?
6
```

```
1  |                                |
2  |                                |
3  |                                |
4  |   p1(3)                        |
5  |   p1(5) ->   3  +  p1(3)       |
6
```

Eficácia x Eficiência

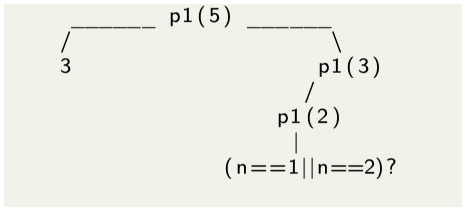
```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //     ---------  p1(3) chama p1(2)
8  }
9
```

```
1          _______ p1(5) ______
2         /                    \
3        3                    p1(3)
4                            /
5                         p1(2)
6
```

```
1  |                                |
2  |                                |
3  |   p1(2)                        |
4  |   p1(3) -> p1(2)               |
5  |   p1(5) ->   3  +  p1(3)       |
6
```

Eficácia x Eficiência

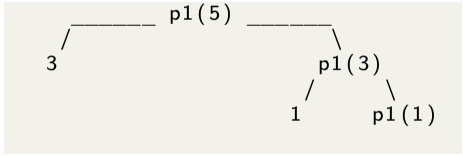
```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(2) verifica
        return 1; //<- p1(2) devolve
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}
```




```
|                                |
|                                |
|   p1(2) ->   1                 |
|   p1(3) -> p1(2)               |
|   p1(5) ->   3  +  p1(3)       |
```

Eficácia x Eficiência

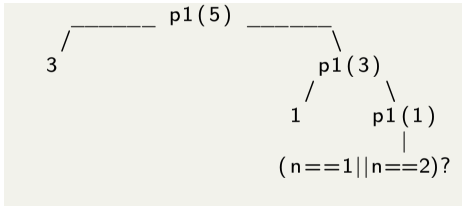
```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2);
7          //                ---------- p1(3) chama p1(1)
8  }
9
```




```
1  |                              |
2  |                              |
3  |   p1(1)                      |
4  |   p1(3) ->   1  +  p1(1)     |
5  |   p1(5) ->   3  +  p1(3)     |
6
```

Eficácia x Eficiência

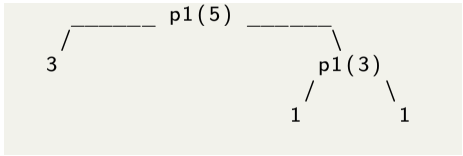
```c
int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2) //<- p1(1) verifica
        return 1; //<- p1(1) devolve
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}
```




```
|                                  |
|                                  |
|   p1(1) ->             1         |
|   p1(3) ->   1  +  p1(1)         |
|   p1(5) ->   3  +  p1(3)         |
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(3) devolve
7  }
8
```




```
1  |                              |
2  |                              |
3  |                              |
4  |   p1(3) ->   1  +    1       |
5  |   p1(5) ->   3  +  p1(3)     |
6
```

Eficácia x Eficiência

```
1  int p1(int n)
2  {
3      if (n == 1 || n == 2)
4          return 1;
5      else
6          return p1(n - 1) + p1(n - 2); //<- p1(5) devolve
7  }
8
```

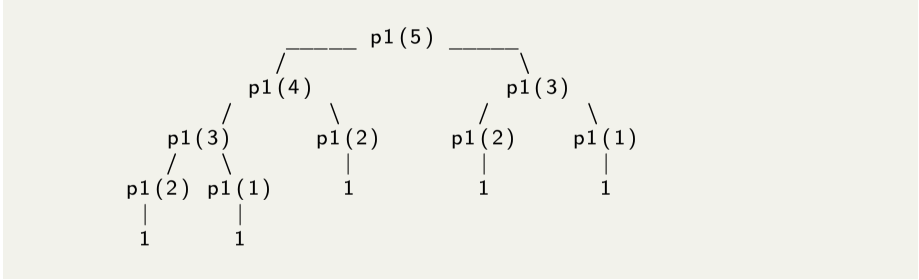
```
1          _______ p1(5) ______
2         /                    \
3        3                      2
4
```

```
1  |                            |
2  |                            |
3  |                            |
4  |                            |
5  |   p1(5) ->   3  +    2     |
6
```

Eficácia x Eficiência

```c
#include <stdio.h>

int p1(int n)
{
    if (n == 1 || n == 2)
        return 1;
    else
        return p1(n - 1) + p1(n - 2);
}

int main(){

    printf("%d\n", p1(5)); //5

    return 0;
}

```

Eficácia x Eficiência



Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n) //<- chamada da funcao
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14
15
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma; //<-
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15
16
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16
17
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16        |   |____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
17        |_____________________________________________|
18
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16        |   |____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
17        |   |____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
18        |_____________________________________________|
19
20
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16        |   |____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
17        |   |____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
18        |   |____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
19        |_____________________________________________|
20
21
```

Eficácia x Eficiência

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16    |     |____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
17    |     |____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
18    |     |____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
19    |____ return 5
20
21
```

Eficácia x Eficiência

Eficácia

Faz o que deveria fazer

Eficiência

Faz bem o que deveria fazer

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m1,301s
user    0m1,297s
sys     0m0,004s
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m18,300s
user    0m1,431s
sys     0m0,000s
```

Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo
- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m1,301s
user    0m1,297s
sys     0m0,004s
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m18,300s
user    0m1,431s
sys     0m0,000s
```

Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo
- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Tempo real de máquina como medida?

```
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m1,301s
user    0m1,297s
sys     0m0,004s
rysh@mundodalua:~/Documents/FGA$ time ./a.out

real    0m18,300s
user    0m1,431s
sys     0m0,000s
```

Figura: Máquina com *load* baixo e alto, respectivamente

- real: tempo total para execução (contando todos os processos em execução)
- user: tempo exclusivo do processo executado
- sys: tempo que do sistema dedicado a execução do processo
- Problema: são dependentes de fatores como a linguagem, hardware e/ou processos em execução
- Precisamos de uma medida independente da máquina

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações

Definindo a complexidade dos algoritmos

Complexidade de um algoritmo particular

Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**

Complexidade de um algoritmo particular

Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico

Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta

Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - Complexidade de uma classe de algoritmos

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**

Busca-se o menor custo para resolver um problema particular.

Analisa-se uma família de algoritmos que resolvem um problema específico.

Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números.

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**

      Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico

      Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico

      Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Como calcular a eficiência do algoritmo?

Contar quantas instruções são executadas?

- Analisar somente as operações **relevantes**
- Observando a **tendência do comportamento** a medida que a **entrada cresce**
- Fazendo o **cálculo aproximado** dos custos das operações
  - Definindo a **complexidade dos algoritmos**
  - **Complexidade de um algoritmo particular**
    - Busca-se o custo de um algoritmo para resolver um problema específico
    - Podemos observar quantas repetições cada trecho executa e quanta memória é gasta
  - **Complexidade de uma classe de algoritmos**
    - Busca-se o menor custo para resolver um **problema particular**
    - Analisa-se uma **família de algoritmos** que resolvem um problema específico
    - Exemplo: nos algoritmos de ordenação, qual o número mínimo possível de comparações para ordenar n números

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da Instância do problema *n*

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da instância do problema *n*

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)*

Analisamos

Tendência do comportamento do algoritmo a medida que o tamanho da instância aumenta.

Tamanho da instância do problema *n*

- Problemas em ordenação de vetores: tamanho do vetor
- Problemas de pesquisa em memória: número de registros
- Busca em texto: número de caracteres ou padrão de busca
- etc.

Cenários (dependentes da entrada)

- **Melhor caso**: menor tempo de execução
- **Caso médio**: média dos tempos de execução
- **Pior caso**: maior tempo de execução

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Caso 1:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 23;
3    procura(x, v);
```

Melhor caso $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado

2. **Caso 2:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 97;
3    procura(x, v);
```

Pior caso $f(n) = n$: procurado é o último consultado

3. **Caso 3:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 49;
3    procura(x, v);
```

Caso médio $f(n) = (n + 1)/2$: examina cerca de metade dos registros

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Caso 1:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 23;
3    procura(x, v);
```

   - **Melhor caso $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado**

2. **Caso 2:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3, 456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 97;
3    procura(x, v);
```

   - **Pior caso $f(n) = n$: procurado é o último consultado**

3. **Caso 3:**

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 49;
3    procura(x, v);
```

   - **Caso médio $f(n) = (n + 1)/2$: examina cerca de metade dos registros**

Complexidade ou Função de Custo *f(n)* - Exemplo

Busca sequencial em vetor

1. **Melhor caso** $f(n) = 1$: procurado é o primeiro consultado
2. **Pior caso** $f(n) = n$: procurado é o último consultado
3. **Caso médio** $f(n) = (n+1)/2$: examina aproximadamente metade

```
1    int v[] = {23, 22, 98, 49, 21, 5, 3,456, 16, 83, 50, 97};
2    int x = 49;
3    procura(x, v);
```

- p_i a probabilidade de encontrar o elemento na posição i
- Todos tem o mesmo $p_i = 1/n$, $1 \leq i \leq n$
- f(n) = soma do número de comparações x probabilidade

$$\begin{aligned} f(n) &= 1(\frac{1}{n}) + 2(\frac{1}{n}) + ... + n(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}(1 + 2 + ... + n) \\ &= \frac{1}{n}(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes

```
void
    int
    if
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes

```
void
    int
    if
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes

Atribuições
Comparações (relacionais)
Operações aritmética
Acessos a memória
Comando de decisão

```
}
    void f1(){
        int i = 10;
        if(i==0){
            i++;
        }
    }
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 10;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 10;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 10;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
void f1(){
    int i = 10;
    if(i==0){
        i++;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = 1$

Complexidade constante (tempo constante)

- Independem do tamanho de n
- As instruções são executadas um número fixo de vezes
  - Atribuições
  - Comparações (relacionais)
  - Operações aritmética
  - Acessos a memória
  - Comando de decisão

```
1
2     void f1(){
3         int i = 19;
4         if(i==0){
5             i++;
6         }
7     }
8
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço

```
int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço

```
int pesquisa(int x, int n, int v[])
{
    for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
    return i;
}
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço

(Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```
1
2     int pesquisa(int x, int n, int v[])
3     {
4         for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
5         return i;
6     }
7
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço
  - (Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```
1
2   int pesquisa(int x, int n, int v[])
3   {
4       for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
5       return i;
6   }
7
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

- Realiza-se um pequeno trabalho sobre cada elemento da entrada
- n entradas, n saídas
- Anel ou laço
  - (Tempos comandos internos + avaliação da condição) x número de iterações

```
1
2     int pesquisa(int x, int n, int v[])
3     {
4         for (int i=0; i<n && v[i]!=x; i=i+1);
5         return i;
6     }
7
```

- Outro exemplo: ??

Valores comuns da função de custo $f(n) = n$

Complexidade linear

```
1   int p2(int n)
2   {
3       int i, f1 = 1, f2 = 1, soma;
4       for (i=3; i<=n; i=i+1)
5       {
6           soma = f1 + f2;
7           f1 = f2;
8           f2 = soma;
9       }
10      return f2;
11  }
12
13  p2(5)
14    |____ soma=?, f1=1, f2=1
15    |____ for
16    |     |____ i=3 -> soma = 1+1 = 2, f1 = 1, f2 = 2
17    |     |____ i=4 -> soma = 1+2 = 3, f1 = 2, f2 = 3
18    |     |____ i=5 -> soma = 2+3 = 5, f1 = 3, f2 = 5
19    |____ return 5
20
21
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
1   //versao quadratica de ordenacao, seja quadratica (algoritmo
      de quicksort)
2   void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
3       int i, j, x;
4
5       for (i = 1; i < n; i++) {
6           x = v[i];
7           for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
8               v[j+1] = v[j];
9           v[j+1] = x;
10      }
11  }
12
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
1   //versao quadratica de ordenacao seja quadratica (algoritmo
      de quicksort)
2   void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
3       int i, j, x;
4
5       for (i = 1; i < n; i++) {
6           x = v[i];
7           for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
8               v[j+1] = v[j];
9           v[j+1] = x;
10      }
11  }
12
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
//versao quadratica de ordenacao, seja quadratica (algoritmo
    de quicksort)
void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
    int i, j, x;

    for (i = 1; i < n; i++) {
        x = v[i];
        for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
            v[j+1] = v[j];
        v[j+1] = x;
    }
}
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^2$

Complexidade quadrática

- Caracterizam-se pelo processamento dos dados em pares, muitas vezes com vários aninhamentos
- Se n dobra, o tempo quadruplica
- Úteis para problemas pequenos

```
1   //versao quadradica != ordenacao seja quadratica (algoritmo
     de quicksort)
2   void ordenacao_insercao(int n, int v[]){
3       int i, j, x;
4
5       for (i = 1; i < n; i++) {
6           x = v[i];
7           for (j = i-1; j >=0 && v[j] > x; j--)
8               v[j+1] = v[j];
9           v[j+1] = x;
10      }
11  }
12
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n^3$

Complexidade cúbica

- Eficientes apenas para pequenos problemas.

```
1  //versao cubica != multiplicacao seja cubica (algoritmo de
       Strassen)
2  void multiplica_matrizes(int A[3][2], int B[2][3], int C[3][3])
3  {
4      for (int l = 0; l < 3; l++) {
5          for (int c = 0; c < 3; c++) {
6              C[l][c] = 0;
7              for (int i = 0; i < 2; i++) {
8                  C[l][c] += A[l][i] * B[i][c];
9              }
10         }
11     }
12 }
13
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = 2^n$

Complexidade exponencial

- Resultantes de problemas resolvidos por força bruta (verificar todas as possibilidades)
- Quando n é 20, o tempo é cerca de 1 milhão
- Exemplo: enumerar as linhas de uma tabela verdade
- Complexidade fatorial - $f(n) = n!$: pior que a exponencial
- Exemplo: ???

Valores comuns da função de custo $f(n) = 2^n$

Complexidade exponencial

```
1   int p1(int n){
2       if (n == 1 || n == 2)
3           return 1;
4       else
5           return p1(n - 1) + p1(n - 2);
6   }
```

```
1
2   2^0                    _____ p1(5) _____
3                         /                \
4   2^1                 p1(4)                p1(3)
5                     /       \            /      \
6   2^2             p1(3)      p1(2)     p1(2)    p1(1)
7                   /   \        |         |        |
8   2^3           p1(2) p1(1)    1         1        1
9                 |     |
10                1     1
11
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

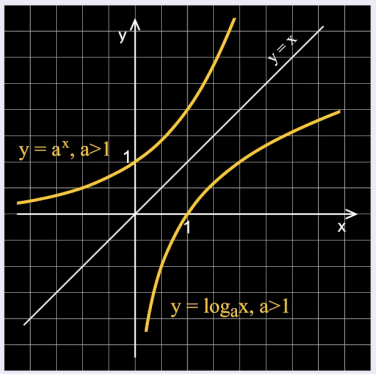
- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

```
int          int    int     int     int
    int

    if                 return
    if               return
    else if
       return
    else
       return
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial



- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas

Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)

Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
//vetor ordenado
int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
    int meio = (esq + dir)/2;

    if (v[meio] == x) return meio;
    if (esq >= dir) return -1;
    else if (v[meio] < x)
        return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
    else
        return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas
  - Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)
  - Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
//vetor ordenado
int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
    int meio = (esq + dir)/2;

    if (v[meio] == x) return meio;
    if (esq >= dir) return -1;
    else if (v[meio] < x)
        return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
    else
        return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
}
```

Valores comuns da função de custo: $f(n) = \log n$

Complexidade logarítmica

- Função logarítmica é a inversa da função exponencial
- Um pouco mais lento a medida que n cresce
- Tempo típico de algoritmos que divide o problema em problemas menores
- Não importa a base de log pois a grandeza do resultado não tem alterações significativas
  - Sendo $n = 1000$, $\log_2 n \approx 10$ ($\log_{10} n = 3$)
  - Sendo $n = 1000000$, $\log_2 n \approx 20$ ($\log_{10} n = 6$)

```
1   //vetor ordenado
2   int pesquisa (int x, int v[], int esq, int dir){
3       int meio = (esq + dir)/2;
4
5       if (v[meio] == x) return meio;
6       if (esq >= dir) return -1;
7       else if (v[meio] < x)
8           return pesquisa(x, v, meio+1, dir);
9       else
10          return pesquisa(x, v, esq, meio-1);
11  }
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em problemas menores, resolvendo cada um deles independentemente e depois juntando as soluções.
- Divisão e conquista

```
1  divisao_conquista(d) {
2      se simples
3          calculo_direto(d)
4      senao
5          combina(divisao_conquista(decompoe(d)))
6  }
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
1  divisao_conquista(d) {
2      se simples
3          calculo_direto(d)
4      senao
5          combina(divisao_conquista(decompoe(d)))
6  }
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
1  divisao_conquista(d) {
2      se simples
3          calculo_direto(d)
4      senao
5          combina(divisao_conquista(decompoe(d))
6  }
```

Valores comuns da função de custo $f(n) = n \log n$

Complexidade "linearítmica(?)"

- Caracterizam-se por resolver um problema quebrando em **problemas menores**, resolvendo cada um deles independentemente e **depois juntando as soluções**.
- Divisão e conquista

```
1   void intercala (int p, int q, int r, int v[]) {...}
2
3   void mergesort (int p, int r, int v[])
4   {
5      if (p < r-1) {
6         int q = (p + r)/2;
7         mergesort (p, q, v);
8         mergesort (q, r, v);
9         intercala (p, q, r, v);
10     }
11  }
```

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Como calcular formalmente?
Análise Assintótica

- É uma medição formal (matematicamente consistente) de se **calcular aproximadamente** a eficiência de algoritmos
- Descreve o **crescimento de funções**
- A ideia é achar uma **função** $g(n)$ que represente algum **limite** de $f(n)$
- E como representamos esse comportamento assintótico?

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$
  - Para dizer também que $f(n)$ é $O(g(n))$
  - Informalmente, $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é a função superior para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Dizer que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: cresce de forma proporcional ao tamanho

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$
  - Para pode concluir que $f(n) \in O(g(n))$
  - Informalmente, $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é a função superior para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Dizer que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: custo cresce no máximo, conforme o crescimento

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - Comparação da tendência de crescimento de f(n) e g(n)
  - Para pode concluir que $f(n) \in O(g(n))$
    - Informalmente, $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
    - $g(n)$ é o limite superior para a taxa de crescimento de $f(n)$
    - Dizer que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: custo cresce no máximo, linearmente ao tamanho

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: tempo cresce no máximo, linearmente ao tamanho

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de $f(n)$ e $g(n)$**
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$, pois cresce no máximo, tão rápido quanto n

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
    - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
    - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
    - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: tempo cresce no máximo, conforme o tamanho

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$ - pode crescer no máximo, linearmente o tempo

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$: cresce, no máximo, tão rápido quanto o tamanho

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$, custo cresce, no máximo, conforme n cresce

Notação O

- Para representar a relação assintótica surgiram diversas notações
- A mais utilizada é a **notação O**
- Para $f(n) = n^2 + 2n + 1$, sua complexidade em $O(n^2)$
- A relação assintótica entre duas funções distintas f(n) e g(n) é:
  - **Comparação da tendência de crescimento de** $f(n)$ **e** $g(n)$
  - Para poder concluir que $f(n) = O(g(n))$
  - Informalmente: $f(n)$ cresce, no máximo, tão rapidamente quanto $g(n)$
  - $g(n)$ é o **limite superior** para a taxa de crescimento de $f(n)$
  - Diz-se que $g(n)$ **domina assintoticamente** $f(n)$
- Exemplo: busca sequencial
  - $O(n)$, custo cresce, no máximo, conforme n cresce

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O

- Supondo em um programa
  - Com tempo de execução $f(n) = 4n^2 + 4n + 1$
  - A medida que n aumenta, o termo quadrático começa a dominar
  - Para n muito grandes, diminui-se o impacto da constante que multiplica o termo quadrático
  - Assim, temos que $f(n) = O(n^2)$

Notação O - observações

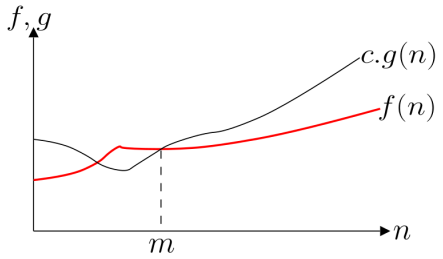
- A dominação assintótica revela a **equivalência** entre os algoritmos
  - Sendo F e G algoritmos da mesma classe
  - Com $f(n) = 3.g(n)$, mesmo F sendo 3 vezes mais lento que G
  - Possuem a mesma complexidade $O(f(n)) = O(g(n))$
  - Nestes casos, o comportamento assintótico não é indicado na comparação dos algoritmos F e G
    - Pois são avaliados pela comparação das funções (tendência)
    - Ignorando as constantes de proporcionalidade

Notação O - observações

- Outro aspecto a ser considerado é o **tamanho do problema** a ser executado
  - Uma complexidade $O(n)$ em geral representa um programa mais eficiente que um $O(n^2)$
  - Porém dependendo do valor de n, um algoritmo $O(n^2)$ poder ser mais indicado do que o $O(n)$
  - Por exemplo, com $f(n) = 100.n$ e $g(n) = 2.n^2$
    - Problemas com $n < 50$
    - $g(n) = 2.n^2$ é mais eficiente do que um $f(n) = 100.n$
- Ressalta-se que **algoritmos de complexidade polinomial** e os de **complexidade exponencial** tem significativa distinção quando o tamanho de n cresce:
  - Um **problema** é considerado **bem resolvido** quando existe um **algoritmo polinomial** para resolvê-lo
  - Polinomial: $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n)$, $O(\log n)$, $O(n \log n)$
  - Exponencial: $f(n) = 2^n$, $f(n) = n!$

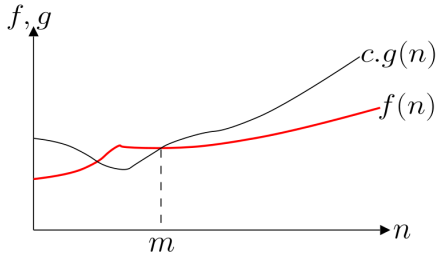
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que $\forall n \geq m, f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (para os valores de tamanho de caso o suficientemente grandes)



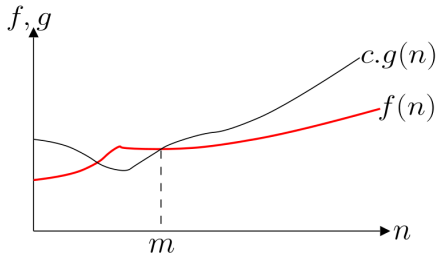
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



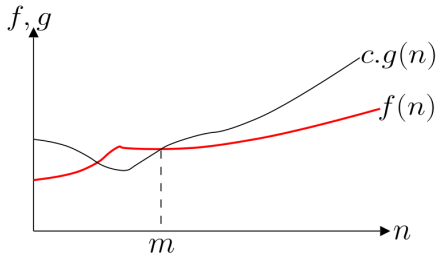
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



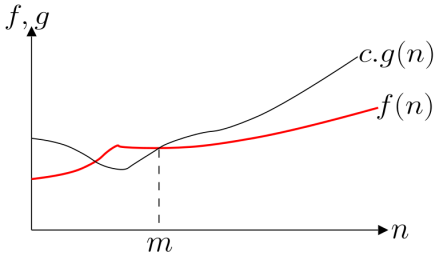
Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



Notação O

- Formalmente, define-se:
  - Uma função $f(n) = O(g(n))$
  - Se $f(n) \leq c.g(n)$, para algum c positivo e para todo n suficiente grande, ou seja,
    - Existem duas constantes positivas c e m
    - Tais que, $f(n) \leq c.g(n)$
    - Para todo $n \geq m$ (ponto inicial do tendência para o comportamento)



Notação O - exemplo

- Com tempo de execução $f(n) = (n+1)^2$
  - Temos que $f(n) = O(n^2)$
  - Existem as constantes $m = 1$ e $c = 4$
  - E para todo $n \geq 1$, temos a relação $n^2 + 2n + 1 \leq 4.n^2$
- Com o tempo de execução $f(n) = 2n^2 + 4$
  - Temos que $f(n) = O(n^2)$
  - Pois $2n^2 + 4 \leq 3n^2$ para $n \geq 2 (c = 3, m = 2)$

Notação O - equivalência na tendência ao infinito

- Temos que:
  - $f(n) = O(g(n))$ se $\frac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)}$ for constante
- Demonstração:
  - $f(n) = a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + ... + a_1 n^1 + a_0 n^0$
  - $f(n) = O(n^i)$
    Como:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} (a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + ... + a_1 n^1 + a_0 n^0) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^i (a_i + \frac{a_{i-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{i-1}} + \frac{a_0}{n^i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_i n^i
\end{aligned}$$

De forma análoga para $g(n) = n^i$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_i n^i}{n^i} = \lim_{n\to\infty} a_i = a_i$$

Outras Notações

- Ω (omega)
  - Representa o **limite inferior** para função $f(n)$
  - $f(n)$ cresce, no mínimo, tão lento quanto $g(n)$
  - $f(n)$ é $\Omega(g(n))$
    - Se existirem duas constantes c e m
    - Tais que $|f(n)| \geq c.|g(n)|$
    - Para todo $n \geq m$
- θ (theta)
  - Função $f(n)$ é **limitada superiormente e inferiormente** à $g(n)$
  - $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$
  - Com uma diferença de apenas uma constante, ou seja
    - $0 \leq c1.|g(n)| \leq f(n) \leq c2.|g(n)|$
  - Notação para representar maior precisão

- Similares as notações O e Ω
  - Notações 'o' e ω (omegazinho)
    - $f(n) = o(g(n))$: $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$
    - $f(n) = \omega(g(n))$: $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$
  - A diferença entre o O e 'o' é que
    - O 'o' condiciona $0 \leq f(n) \leq c.g(n)$ para todo $c > 0$
    - O O condiciona $0 \leq f(n) \leq c.g(n)$ para algum $c > 0$
  - A diferença entre o Ω e ω é que
    - O ω condiciona o $0 \leq c.g(n) \leq f(n)$ para todo $c > 0$
    - O Ω condiciona o $0 \leq c.g(n) \leq f(n)$ para algum $c > 0$