# Математическая постановка задачи

Представленная задача моделирует идеальную электрическую цепь, состоящую из конденсатора емкости *C* и катушки индуктивности с индуктивностью *L*. Элементы соединены параллельно. Следовательно, на них поддерживается одинаковое напряжение. В такой цепи происходит превращение энергии *EC* электрического поля конденсатора в энергию *EL* магнитного поля катушки

.

Для энергии отдельных элементов справедливы следующие соотношения

.

Изменение *EC* и *EL* связано с изменением заряда *q*(*t*) конденсатора и силы тока через катушку



со временем *t*.

Дифференцированием по времени соотношения с учетом формул получаем

.

В общем случае ток через катушку не равен тождественно нулю. Поэтому с учетом поделим уравнение на *I*

.

Соотношения и определяют закон изменения состояния электрической цепи во времени. Соответствующие уравнения удобно записать в следующем виде

.

Начальные условия запишем следующим образом

,

Где согласно условию *I*0 = 0 и *U*0 = 1 В.

Начальные значения позволяют определить константу, полную энергию системы, в уравнении

.

Уравнения и образуют *автономную* задачу Коши, имеющую единственное решение.

## Аналитическое решение задачи

Задача и допускает аналитическое решение. Система уравнений эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка относительно заряда *q*

.

Собственные числа уравнения чисто мнимые, , что отвечает собственным функциям sin и cos. С учетом начальных условий запишем аналитическую зависимость *q* и *I* от времени *t*

,

.

# Численное решение задачи Коши

## Каноническая форма записи задачи Коши

Определим вектор *y* = (*q*, *I*) неизвестных и вектор начальных значений *y*0 = (*q*0, *I*0), который отнесем к начальному моменту времени *t* = 0. Также определим вектор правых частей *f* = (*I*, –*ω*2*q*). В этих формальных обозначениях задача и примет следующий вид

.

## Метод Рунге-Кутты IV порядка

Численное решение задачи Коши предполагает итерационный переход от одного состояния системы через промежуточные к конечному состоянию системы. Каждый элементарный переход выполняются согласно определенному правилу. Наиболее распространенный метод перехода – метод Рунге-Кутты IV порядка.

Допустим решение *yi* = *y*(*ti*) (состояние *y* динамической системы) в момент времени *t* = *ti* уже известно. Тогда решение *yi*+1 = *y*(*ti*+1) в следующий момент времени *t* = *ti*+1 = *ti* + *hi* будет найдено по следующим формулам. Сначала необходимо вычислить вспомогательные коэффициенты

.

Тогда

.

## Метод Рунге-Кутты II порядка

Аналогично выпишем формулы для перехода согласно формулам Рунге-Кутты II порядка

,

.

# Алгоритмическая реализация численной схемы на языке С++

Построение численного решения реализовано в виде программы для ЭВМ, написанной на языке программирования C++ в среде Visual Studio 2022 с использованием стандарта языка C++17.

В результате работы функции main(), описанной в файле RITM\_Task.cpp генерируется два выходных файла output2.txt и output4.txt. Файлы содержат в табличном виде значения заряда, тока и энергии в каждый момент времени. В таблице представлены рассчитанные значения и вычисленные аналитически. Также представлены абсолютная и относительная погрешности расчета энергии динамической системы.

Числовой суффикс в названии файла, 2 и 4, обозначает порядок метода Рунге-Кутты, использованного при численном решении.

# Обсуждение результатов

На Рисунок 1 представлены результаты решения задачи на основе разных методов численного интегрирования. Зависимость силы тока через катушку и заряда на обкладках конденсатора является периодической функцией времени. С физической точки зрения это объясняется тем, что в рассматриваемом контуре происходит превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно. С математической точки зрения колебания постоянной амплитуды получаются из-за чисто мнимых собственных значений дифференциального уравнения .

 

Рисунок 1. Графики аналитического (сплошные линии) и численного (пунктирные линии) решения задачи и при постоянном шаге *h* = 0.2 с в безразмерных переменных. Черный цвет – изменение заряда, синий цвет – изменение силы тока. (Слева) Решение по методу Рунге-Кутты 2 порядка на отрезке 0 ≤ *tω* ≤ 30 (Справа) Решение по методу Рунге-Кутты 4 порядка на отрезке 70 ≤ *tω* ≤ 100.

Из визуального сравнения видно, что схема 2го порядка плохо сходится с точным решением уже на временах *tω* > 30, в то время как схема 4го порядка позволяет интегрировать систему уравнений с тем же шагом, *h* = 0.2 с, вплоть до момента времени *tω* = 100.