

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Ковеня, Схемы расщепления в методе конечных объемов,  
*Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 1, 100–113

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 5.59.33.136

15 мая 2024 г., 09:48:58



УДК 519.634

**СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ<sup>1)</sup>**

© 2001 г. В. М. Ковеня

(630090 Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 6, Ин-т вычисл. технологий СО РАН)

Поступила в редакцию 31.03.2000 г.

Изложена методология построения схем расщепления для решения многомерных задач. Предложены схемы, обладающие свойством минимальной диссипации, более экономичные в реализации, чем предлагавшиеся ранее. Рассмотрен вариант схемы расщепления по физическим процессам, позволяющий свести решение системы уравнений к решению уравнений для отдельных компонент. Дано обобщение схем расщепления при аппроксимации исходных уравнений методом конечных объемов.

Численная аппроксимация многомерных уравнений математической физики, уравнений газовой динамики или уравнений Навье–Стокса разностными схемами приводит к системе алгебраических уравнений большой размерности, линейных для явных схем или нелинейных для неявных [1]–[3]. В силу ограничений на устойчивость для явных схем это приводит к большим затратам ресурсов ЭВМ, особенно для уравнений параболического типа. Реализация неявных схем прямыми методами требует обращения матриц большой размерности, что также приводит к большим затратам. Одним из альтернативных подходов к решению больших систем уравнений является применение итерационных методов. Вместе с тем стандартные итерационные алгоритмы не учитывают специфику матриц, полученных при аппроксимации уравнений, что, как следствие, приводит к большим затратам ресурсов ЭВМ.

В последние десятилетия широкое распространение получили методы приближенной факторизации или методы расщепления, которые позволяют свести решение исходной многомерной задачи к последовательному (или параллельному для многопроцессорных ЭВМ) решению их одномерных аналогов или простых задач (см. [1]–[10]). Стандартное применение метода приближенной факторизации или метода расщепления по пространственным направлениям позволяет на дробных шагах получать решение алгебраических уравнений скалярными прогонами для одного уравнения или векторными прогонами для системы уравнений. Для большого числа уравнений (порядка  $m$ ) векторная прогонка требует порядка  $m^3$  операций в каждом узле расчетной сетки, т.е. этот подход также может оказаться неэкономичным. Метод расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям или аналогичный ему класс схем приближенной факторизации свободен от этого недостатка и позволяет получать решение уравнений скалярными прогонами (см., например, [7], [8]). Особенно эффективен этот подход при нахождении стационарного решения на основе метода установления. В качестве недостатка схем приближенной факторизации отметим потерю свойства безусловной устойчивости схем для гиперболических уравнений в трехмерном случае. Однако более существенным недостатком является следующее: введение расщепления или приближенной факторизации приводит к появлению дополнительных членов в стабилизирующем операторе. С увеличением размерности задачи свойства стабилизирующего оператора и исходного оператора начинают все более различаться, что приводит к дисбалансу разностных законов сохранения и, как следствие, к потере точности, а для задач на установление – к замедлению скорости сходимости к стационарному решению. Для уменьшения рассогласования стабилизирующего и исходного операторов в схемах расщепления в работах [11]–[13] были предложены схемы с минимальной диссипацией, свойства которых были близкими к схемам приближенной факторизации, но их реализация сводилась к скалярным прогонам, как и в предложенных ранее схемах расщепления. В разд. 1 настоящей работы излагается общий подход к построению схем с минимальной диссипацией стабилизирующего оператора для решения многомерных уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса. Один из вариантов схем расщепления по физическим процессам с минимальной диссипацией изложен в разд. 2.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00619).

Наряду с разностными схемами решения многомерных задач в последнее время широко применяется метод конечных объемов (МКО), основанный на аппроксимации исходных уравнений в интегральной форме (см., например, [1], [6]). Основное преимущество этого подхода состоит в единообразии аппроксимации уравнений на ячейках достаточно произвольной формы, а следовательно, в упрощении аппроксимации уравнений для сложных расчетных областей. Кроме того, в МКО сеточные законы сохранения выполняются для каждой расчетной ячейки, что приводит к повышению точности расчета. В разд. 3 дается обобщение схем расщепления при аппроксимации уравнений Эйлера методом конечных объемов. Построенные схемы реализуются на дробных шагах скалярными прогонками, они безусловно устойчивы (в линейном приближении) для двумерного случая и требуют минимального числа арифметических операций на один узел расчетной сетки.

### 1. СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Построение схемы начнем с одномерного случая. Рассмотрим уравнения газовой динамики в дивергентной и недивергентной формах:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad p = (\rho, e), \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right), \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}.$$

Для гладких решений справедливо соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = AB \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}.$$

Рассмотренные ниже алгоритмы приведены для уравнения состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho e$ . Для построения экономичных безусловно-устойчивых разностных схем, аппроксимирующих (1.1) и реализуемых скалярными прогонками, в работе [7] было введено расщепление уравнений по физическим процессам, использующее представление

$$B = B_1 + B_2. \quad (1.2)$$

Здесь

$$B_1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Тогда разностная схема

$$(I + \tau \alpha B_1^n \Lambda)(I + \tau \alpha B_2^n \Lambda) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(A^{-1})^n \Lambda \mathbf{W}^n, \quad (1.4)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -(A^{-1})^n \Lambda \mathbf{W}^n, \quad (I + \tau \alpha B_1^n \Lambda) \xi^{n+1/2} = \xi^n, \\ (I + \tau \alpha B_2^n \Lambda) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

аппроксимирует исходные уравнения (1) с порядком  $O(\tau + h^k)$ , безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0.5$  и реализуется скалярными прогонками (подробнее см. [7], [8]). Здесь  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ , а  $\xi$  – вектор с компонентами  $(\xi_p, \xi_u, \xi_p)$ . В силу приближенной факторизации в стабилизирующем операторе левой части схемы (1.4) возникают дополнительные члены  $Q = \tau^2 \alpha^2 B_1^n \Lambda B_2^n \Lambda$ , влияющие на точность решения и скорость сходимости при получении стационарного решения методом установ-

ления. Для расщепления (1.3) матрица  $Q$  содержит ненулевые элементы в каждой строке. В [11] введены разностные схемы, влияние приближенной факторизации в которых минимально. В частности, для уравнений газовой динамики в переменных  $\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T$  введено расщепление (1.2) в виде

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

при котором разностная схема (1.4) удовлетворяет свойству минимальной диссипации (матрица  $Q$  имеет лишь один ненулевой коэффициент) и сохраняет свойства исходной схемы, т.е. реализуется скалярными прогонками и безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0.5$ . В переменных  $\rho, u, p$  не существует расщепления, при котором матрица  $Q \equiv 0$ , т.е. схема расщепления эквивалентна нефакторизованной схеме, но сохраняются указанные выше свойства. Для других переменных данное утверждение не доказано. Заметим, что для схемы (1.4) с расщеплением (1.6) число операций примерно на 25% меньше, чем у исходной схемы (1.4), (1.3). Как показали численные расчеты [11], [13], по своим свойствам предложенная схема (1.4), (1.6) близка к нефакторизованной схеме [4], [5], но экономичнее ее по числу арифметических операций в 4–5 раз. Расщеплению матрицы  $B$  в форме (1.6) соответствует расщепление вектора  $\mathbf{W}$  в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} up \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \frac{\rho u^3}{2} \end{pmatrix},$$

что следует из соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = A(B_1 + B_2) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}.$$

Для уравнения состояния в общем виде схемы расщепления с минимальной диссипацией могут быть построены аналогично при конкретном задании связи между давлением, плотностью и энергией.

При построении экономичных численных алгоритмов решения многомерных задач будем использовать комбинацию расщепления по пространственным направлениям и расщепление одномерных операторов по физическим процессам с минимальной диссипацией. Рассмотрим систему уравнений Эйлера в дивергентной и недивергентной формах:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.7)$$

где для  $N = 3$  имеем

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p \\ v_j(E + p) \end{pmatrix}, \quad p = p(\rho, e), \quad E = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right), \quad v^2 = \sum_{j=1}^3 v_j^2,$$

$$\tilde{B}_j = \partial \mathbf{W}_j / \partial \mathbf{f}, \quad B_j = A^{-1} \tilde{B}_j, \quad A = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{f}.$$

Аналогично одномерному случаю рассмотрим расщепление матриц  $B_j$  и векторов  $\mathbf{W}_j$  на их сумму:

$$B_j = B_{j1} + B_{j2}, \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_{j1} + \mathbf{W}_{j2}. \quad (1.8)$$

Пусть  $\Lambda_j = \partial/\partial x_j + O(h_j^k)$ . Разностная схема

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \sum_{j=1}^N \Lambda_j [\alpha W_j^{n+1} + (1-\alpha) W_j^n] = 0 \quad (1.9)$$

аппроксимирует уравнения (1.7) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $h = \max(h_j)$ ,  $m = 2$  при  $\alpha = 0.5$ , и  $m = 1$  при  $\alpha \neq 0.5$ . Линеаризуя векторы  $U^{n+1}$  и  $W_j^{n+1}$  относительно вектора искомых функций  $f^{n+1}$  по формулам

$$U^{n+1} = U^n + \tau A^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + O(\tau^2), \quad W_j^{n+1} = W_j^n + \tau \bar{B}_j^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

где  $A$  и  $\bar{B}_j$  определены в (1.7), получаем линейную схему

$$\left( A^n + \tau \alpha \sum_{j=1}^N \Lambda_j \tilde{B}_j^n \right) \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j W_j^n. \quad (1.10)$$

Приближенно факторизуем стабилизирующий оператор схемы (1.8), (1.10) по формуле

$$A^n + \tau \alpha \sum_{j=1}^N \Lambda_j (\tilde{B}_{j1}^n + \tilde{B}_{j2}^n) \approx \prod_{j=1}^N (A^n + \tau \alpha \Lambda_j \tilde{B}_{j1}^n) (A^{-1})^n (A^n + \tau \alpha \Lambda_j \tilde{B}_{j2}^n) = C.$$

Разностная схема

$$C \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j W_j^n \quad (1.11)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$A^n \xi^n = - \sum_{j=1}^N \Lambda_j W_j^n, \\ (A^n + \tau \alpha \Lambda_1 \tilde{B}_{11}^n) \xi^{n+1/(2N)} = A^n \xi^n, \quad (A^n + \tau \alpha \Lambda_1 \tilde{B}_{12}^n) \xi^{n+1/N} = A^n \xi^{n+1/(2N)},$$

$$\dots\dots\dots (A^n + \tau \alpha \Lambda_N \tilde{B}_{N1}^n) \xi^{n+1-1/(2N)} = A^n \xi^{n+1-1/N},$$

$$(A^n + \tau \alpha \Lambda_N \tilde{B}_{N2}^n) \xi^{n+1} = A^n \xi^{n+(2N-1)/(2N)}, \quad f^{n+1} = f^n + \tau \xi^{n+1}$$

аппроксимирует уравнения Эйлера с тем же порядком, что и исходная схема (1.9) для  $f = U$  или с порядком  $O(\tau + h^k)$  для  $f \neq U$ . При аппроксимации уравнений Эйлера в недивергентной форме вводится расщепление матричных операторов  $B_j$  на сумму операторов (1.8). Тогда, подобно одномерному случаю, разностная схема

$$\prod_{j=1}^N (I + \tau \alpha B_{j1}^n \Lambda_j) (I + \tau \alpha B_{j2}^n \Lambda_j) \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j W_j^n \quad (1.12)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\xi^n = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j W_j^n, \\ (I + \tau \alpha B_{11}^n \Lambda_1) \xi^{n+1/(2N)} = \xi^n, \quad (I + \tau \alpha B_{12}^n \Lambda_1) \xi^{n+2/(2N)} = \xi^{n+1/(2N)},$$



приведены результаты тестовых расчетов решения двумерных уравнений Эйлера. На фиг. 1 приведены затраты ресурсов при получении стационарного решения различными схемами: 1 – схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям [7], 2 – ADI-схема приближенной факторизации [5], 3 – рассмотренная выше схема с минимальной диссипацией (1.12).

Из фиг. 1 следует, что ADI-схема требует в 2 раза больше времени, чем схема из [7]. Новая схема экономичней базовой ADI-схемы в 3–4 раза для всех чисел Куранта  $K$  для данной задачи и устойчива в том же диапазоне параметров, что и ADI-схема. Приведенный пример решения стационарных уравнений Эйлера методом установления, как предельного решения нестационарной задачи, дает основание надеяться, что предложенная схема с минимальной диссипацией может оказаться эффективной для решения и других классов многомерных задач.

**Замечание 1.** При построении разностных схем для численного решения уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа вязкие члены уравнений, содержащие повторные производные, аппроксимируются неявно в матричных операторах  $B_{2j}$ , а смешанные производные по явным формулам на нулевом шаге в схемах (1.11) или (1.12) или на этапе корректора в схеме (1.15). Такая аппроксимация вторых производных позволяет сохранить скалярную разрешимость схем на дробных шагах и безусловную устойчивость схем для  $N \leq 2$ , где  $N$  – размерность задачи по пространству. Заметим, что использование в качестве искомых функций давления вместо температуры приводит к некоторому усложнению аппроксимации членов с теплопроводностью

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial p}{\partial x_j \rho} \right),$$

где для определенности взято уравнение состояния идеального газа в виде  $p = \rho T$ . Кроме того, аппроксимация этих членов требует дополнительного задания значений плотности  $\rho$  на границе области.

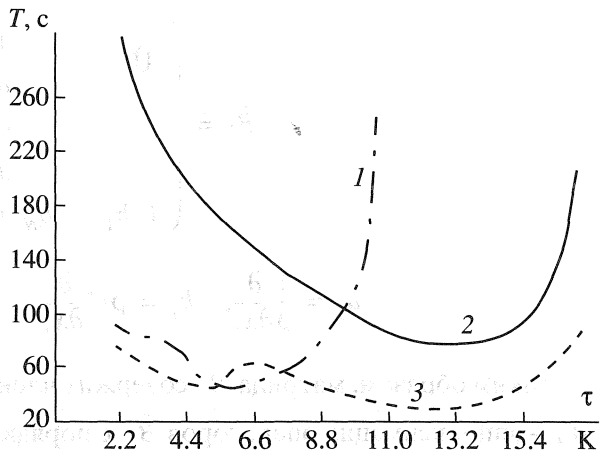
## 2. СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

Приближенная факторизация многомерного оператора приводит к появлению дополнительных членов в разностных схемах, что, как отмечалось выше, может привести к ухудшению их свойств по сравнению с нефакторизованными. Ниже предлагается разностная схема приближенной факторизации с расщеплением по физическим процессам, в которой влияние дополнительных членов минимальное, и можно ожидать, что такая схема по своим свойствам будет близка к нефакторизованной. Представим исходные уравнения газовой динамики (1.7) в виде расщепления по физическим процессам:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{m=1}^2 \tilde{B}_m \mathbf{f} = 0, \quad (2.1)$$

где, согласно (1.7),

$$\sum_{m=1}^2 \tilde{B}_m \mathbf{f} = \sum_{j=1}^N B_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}, \quad \sum_{j=1}^N B_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = A^{-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j},$$



Фиг. 1.

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & a_1 \\ & \vdots \\ & a_N \\ 0 & b_1 \dots b_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ & c \\ & \ddots \\ 0 & & c \end{pmatrix},$$

$$a_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad b_j = \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c = \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c_0 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} v_j.$$

Таким образом, матрица  $\tilde{B}_1$  содержит члены с давлением, а  $\tilde{B}_2$  – конвективные члены. Пусть  $\tilde{B}_m^n$  – аппроксимация операторов  $\tilde{B}_m$  с порядком  $O(h^k)$ . Тогда разностная схема

$$(I + \tau \alpha \tilde{B}_1^n)(I + \tau \alpha \tilde{B}_2^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(A^{-1}) \sum_{j=1}^N \Lambda_j^l \mathbf{W}_j^n \quad (2.2)$$

аппроксимирует исходные уравнения (1.7) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ , а при установлении – стационарные уравнения в консервативной форме – с порядком  $O(h^l)$ . Здесь  $\Lambda_j^l \mathbf{W}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{W}_j + O(h_j^l)$ ,  $h = \max(h_j)$ . Для реализации схемы (2.2) рассмотрим эквивалентную ей схему в дробных шагах:

$$\xi^n = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j^l \mathbf{W}_j^n, \quad (I + \tau \alpha \tilde{B}_1^n) \xi^{n+1/2} = \xi^n, \quad (I + \tau \alpha \tilde{B}_2^n) \xi^{n+1} = \xi^{n+1/2}, \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}. \quad (2.3)$$

Остановимся подробнее на ее реализации. Значение  $\xi^n$  из первого уравнения схемы (2.3) определяется по явным формулам, где  $\xi = (\xi_p, \xi_1, \dots, \xi_N, \xi_p)$ . На первом дробном шаге  $(I + \tau \alpha \tilde{B}_1^n) \xi^{n+1/2} = \xi^n$  решение системы разностных уравнений

$$\xi_p^{n+1/2} = \xi_p^n, \quad \xi_j^{n+1/2} + \frac{\tau \alpha}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+1/2} = \xi_j^n, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

$$\xi_p^{n+1/2} + \tau \alpha (\rho c^2)^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j \xi_j^{n+1/2} = \xi_p^n$$

может быть сведено к решению уравнения относительно компоненты вектора  $\xi_p^{n+1/2}$

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 (\rho c^2)^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j \right] \xi_p^{n+1/2} = \xi_p^n - \tau \alpha (\rho c^2)^n \sum_{j=1}^N \Lambda_j \xi_j^n = d^n, \quad (2.5)$$

исключением значений  $\xi_j^{n+1/2}$  из разностного уравнения для  $\xi_p^{n+1/2}$ . В свою очередь решение уравнения (2.5) может быть получено по какой-либо итерационной схеме (например, по схеме верхней релаксации) или по схеме приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^N \left[ I - \tau^2 \alpha^2 (\rho c^2)^n \Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j \right] \xi_p^{n+1/2} = d^n, \quad (2.6)$$

также реализуемой на дробных шагах скалярными прогонками

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 (\rho c^2)^n \Lambda_1 \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_1 \right] \eta_1 = \eta_0 = d^n,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 (\rho c^2)^n \Lambda_N \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_N \right] \eta_N = \eta_{N-1}.$$



Здесь  $\Lambda_j = \Lambda_{\mp j} = \pm \frac{1}{h_j} (I - T_{\mp j})$ ,  $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_{\pm j}$ ,  $I$  – единичный оператор,  $T_{\mp j}$  – оператор сдвига,  $\Lambda_j = \Lambda_{-j}$ ,  $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_{+j}$  выбирается при  $v_j \geq 0$  и  $\Lambda_j = \Lambda_{+j}$ ,  $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_{-j}$  при  $v_j < 0$ , т.е. члены с давлением аппроксимируются сопряженными к скорости операторами, а  $\Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j$  – аппроксимация второй производной на трехточечном шаблоне со вторым порядком. Заметим, что разностная схема (2.5) безусловно устойчива для уравнений любой размерности. После вычисления  $\xi_p^{n+1/2}$  из разностных уравнений (2.4) явно вычисляются значения  $\xi_j^{n+1/2}$ . Таким образом, решение уравнений на первом дробном шаге сводится к  $N$  скалярным прогонкам.

На втором дробном шаге  $(I + \tau \alpha \tilde{B}_2^n) \xi^{n+1} = \xi^n$  система разностных уравнений

$$\left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^N \Lambda_j v_j^n \right) \xi_p^{n+1} = \xi_p^{n+1/2}, \quad (2.7)$$

$$\left( I + \tau \alpha \sum_{j=1}^N v_j^n \Lambda_j \right) \xi_l^{n+1} = \xi_l^{n+1/2}, \quad l = 1, 2, \dots, N+1,$$

где  $\xi_{N+1} = \xi_p$ , может быть решена независимо для каждой компоненты вектора  $\xi^{n+1}$ , так как матрица  $\tilde{B}_2^n$  содержит ненулевые элементы лишь на главной диагонали. Вновь, как и для первого дробного шага (2.5), решение разностных уравнений (2.7) можно получить скалярными прогонками по итерационной схеме или по схеме приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^N (I + \tau \alpha \Lambda_j v_j^n) \xi_p^{n+1} = \xi_p^{n+1/2}, \quad (2.8)$$

$$\prod_{j=1}^N (I + \tau \alpha v_j^n \Lambda_j) \xi_l^{n+1} = \xi_l^{n+1/2}, \quad l = 1, 2, \dots, N+1.$$

Заметим, что разностная схема (2.8) безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0.5$  лишь при  $N \leq 2$  и условно устойчива в трехмерном случае.

Рассмотрим аппроксимационные свойства базовых схем приближенной факторизации [5], схемы с минимальной диссипацией (1.12) и предложенной разностной схемы (2.2) с реализацией (2.6), (2.8) для уравнений Эйлера с постоянными коэффициентами в переменных  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T$ . Стабилизирующие операторы базовых схем  $C_1$  из [5], схемы (1.12) с минимальной диссипацией  $C_2$  и схемы (2.2) с расщеплением по физическим процессам  $C_3$  могут быть представлены в виде

$$C_1 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & r_1 s_2 t_3 & r_1 s_3 t_2 & r_1 t_2 t_3 \\ 0 & 0 & t & r_2 s_3 t_1 & r_2 t_1 t_3 \\ 0 & 0 & 0 & t & r_3 t_1 t_2 \\ 0 & s_1 t_2 t_3 & s_2 t_1 t_3 & s_3 t_1 t_2 & t \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & r_1 s_2 t_2 t_3 & r_1 s_3 t_2 t_3 & r_1 t_2 t_3 \\ 0 & 0 & t & r_1 s_3 t_1 t_3 & r_2 t_1 t_3 \\ 0 & 0 & 0 & t & r_3 t_1 t_2 \\ 0 & s_1 t & s_2 t & s_3 t & t \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & r_1 t \\ 0 & 0 & t & 0 & r_2 t \\ 0 & 0 & 0 & t & r_3 t \\ 0 & s_1 t & s_2 t & s_3 t & t l \end{pmatrix}.$$

Здесь  $d_j = \tau\alpha\Lambda_j$ ,  $t_j = 1 + v_j d_j$ ,  $t = t_1 t_2 t_3$ ,  $r_j = \frac{1}{\rho_j} d_j$ ,  $s_j = \rho c^2 d_j$ ,  $l = 1 + (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) - s_1 s_2 s_3$ . Для сравнения приведем вид стабилизирующего оператора  $C_0$  нефакторизованной схемы (1.10) для этих же уравнений:

$$C_0 = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & t_0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_0 & r_3 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 & t_0 \end{pmatrix},$$

где  $t_0 = 1 + \sum_{j=1}^3 v_j d_j$ . Диссипативная матрица  $D_j = C_j - C_0$ , возникшая из-за приближенной факторизации разностных схем, и является показателем отличия факторизованных схем от нефакторизованных. Как следует из вида матричных операторов  $C_j$ , минимальное число ненулевых элементов имеет матрица  $D_3$  и, следовательно, влияние расщепления в ней минимально. Матрицы  $D_1$  и  $D_2$  имеют примерно одинаковое число ненулевых элементов. Напомним, что нефакторизованная схема (1.10) реализуется матричными прогонками, схема приближенной факторизации [5] – векторными прогонками, а схема с минимальной диссипацией (1.12) и схема расщепления по физическим процессам (2.2) – скалярными прогонками, что делает их применение более предпочтительным в силу существенно меньших затрат ресурсов ЭВМ. При решении разностных уравнений (2.5) и (2.7) по итерационным схемам стабилизирующий оператор  $\tilde{C}_3$  имеет вид

$$\tilde{C}_3 = (I + \tau\alpha\bar{B}_1^n)(I + \tau\alpha\bar{B}_2^n) = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 & 0 & t_0 r_1 \\ 0 & 0 & t_0 & 0 & t_0 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_0 & t_0 r_3 \\ 0 & t_0 s_1 & t_0 s_2 & t_0 s_3 & t_0 \end{pmatrix}$$

и диссипативная матрица  $\tilde{D}_3 = \tilde{C}_3 - C_0$  имеет отличные от нуля элементы лишь в последней строке и в последнем столбце члены порядка  $O(\tau^2)$ . При оценке эффективности предложенных алгоритмов следует иметь в виду, что затраты ресурсов ЭВМ в итерационных схемах возрастают за счет роста числа арифметических операций для достижения сходимости итераций на каждом временном шаге.

**Замечание 2.** При построении разностной схемы расщепления по физическим процессам (2.2), (2.3) с минимальной диссипацией матричные операторы  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_2$  представляются в виде

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & a_1 \\ & \vdots \\ & a_N \\ 0 & b_1 \dots b_N & c \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} c_0 & & 0 \\ & c & \\ & & \ddots \\ 0 & & c & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Реализация разностной схемы на первом дробном шаге (2.4) сводится после исключения  $\xi_1^{n+1/2}$  и  $\xi_2^{n+1/2}$  из уравнения энергии в (2.4) к решению уравнения

$$\left\{ I + \tau\alpha \sum_{j=1}^N \left[ v_j^n \Lambda_j - \tau\alpha(\rho c^2)^n \Lambda_j \frac{1}{\rho^n} \bar{\Lambda}_j \right] \right\} \xi_p^{n+1/2} = d^n, \quad (2.10)$$

которое, в свою очередь, может быть реализовано подобно (2.6) скалярными прогонками. Отметим, что из-за наличия конвективных членов в уравнении (2.10) разностная схема (2.3) на первом дробном шаге будет условно устойчивой в трехмерном случае. На втором дробном шаге решается система разностных уравнений вида (2.7), где  $l$  изменяется от 1 до  $N$ , так как, в силу расщепления (2.9), для уравнения энергии тождественно выполняется соотношение  $\xi_p^{n+1} = \xi_p^{n+1/2}$ . Рассмотренный вариант разностной схемы (2.2), (2.3) с расщеплением (2.9) реализуется также скалярными прогонками, но является более экономичным по числу операций.

Дадим оценку затрат ресурсов ЭВМ для различных вариантов схем. Пусть  $q$  – число уравнений системы (размерность вектора  $f$ ),  $N$  – размерность задачи по пространству,  $L$  – число узлов по каждому направлению ( $L^N$  – общее число узлов в расчетной области). Реализация схемы (2.2) с расщеплением (2.1) сводится к одномерным скалярным прогонкам, число которых равно  $Q_1 = N(q+1)L^{N-1}$ , а с расщеплением (2.9) – соответственно,  $Q_2 = NqL^{N-1}$ . В частности, при  $N=2$ ,  $q=4$  значения  $Q_1 = 10L$  и  $Q_2 = 8L$  для расщепления (2.1) и (2.9), для  $N=3$ ,  $q=5$  – соответственно,  $Q_1 = 18L^2$  и  $Q_2 = 15L^2$ , т.е. сокращение числа операций составляет от 20% до 25%. Стабилизирующий оператор схемы для этого варианта расщепления (2.9) имеет вид

$$C_4 = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & t & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & t & r_3 \\ 0 & s_1 t & s_2 t & s_3 t & t l \end{pmatrix}$$

и диссипативная матрица  $D_4 = C_4 - C_0$  имеет ненулевые элементы лишь в последней строке. При решении разностных уравнений (2.5) и (2.7) по итерационным схемам (2.9) стабилизирующий оператор  $\tilde{C}_4$  равен

$$\tilde{C}_4 = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & t_0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_0 & r_3 \\ 0 & s_1 t_0 & s_2 t_0 & s_3 t_0 & t_0 \end{pmatrix},$$

т.е. диссипативная матрица  $\tilde{D}_4 = \tilde{C}_4 - C_0$  имеет лишь три ненулевых элемента в последней строке вида  $\tau^2 \alpha^2 \gamma p^n \Lambda_j v_j^n \Lambda_j$ .

Таким образом, предложенные схемы расщепления по физическим процессам позволяют свести решение многомерной системы уравнений Эйлера или Навье–Стокса к решению отдельных многомерных уравнений (неразрывности, движения и энергии), каждое из которых может быть эффективно разрешено по итерационным схемам или по схеме приближенной факторизации типа (2.6) или (2.8).

### 3. СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

При численном решении уравнений Эйлера или Навье–Стокса в сложных геометрических областях возникает необходимость либо введения преобразования координат, переводящих расчетную область в стандартную, либо применения декомпозиции областей, для каждой из которых может быть введена своя система координат. В первом случае за счет преобразования исходные уравнения усложняются и появляются дополнительные члены, что приводит к усложнению алгоритма и к увеличению затрат на проведение вычислений. Во втором случае возникает проблема согласования расчетных сеток на границах подобластей и необходимость дополнительного задания на них граничных условий, отсутствующих в исходной постановке задачи. Решение всех этих проблем приводит к усложнению алгоритмов и, как следствие, ведет к увеличению затрат ресурсов ЭВМ на решение задачи.

В качестве одной из альтернатив решения задач аэрогидродинамики может оказаться предпочтительной аппроксимация исходной задачи в интегральной форме методом конечных объемов (МКО). В методе МКО расчетная область разбивается на элементы (ячейки) достаточно произвольной формы, границы (ребра) которых могут выбираться как отрезки прямых (плоскостей в трехмерном случае) или как криволинейные грани, совпадающие, например, на границах расчетной области с ее криволинейными границами. Исходные уравнения аппроксимируются в каждой ячейке при выполнении разностных законов сохранения. Как правило, преобразование координат не вводится и уравнения аппроксимируются в исходных газодинамических переменных.

В настоящем разделе работы рассмотрены модификации МКО для решения уравнений газовой динамики с использованием идеологии расщепления, описанной в разд. 1. Для простоты изложения построение схемы расщепления в МКО проведено для двумерного случая. Представим уравнения Эйлера в виде интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема  $\Omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{W} ds = 0, \quad (3.1)$$

где  $\partial\Omega$  – замкнутая поверхность объема,  $ds = \mathbf{n} ds$  – элемент поверхности, умноженный на единичную внешнюю нормаль к ней (для двумерного случая  $\Omega$  – площадь,  $\partial\Omega$  – длина дуги):

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho v_1 \mathbf{v} + p \mathbf{e}_1 \\ \rho v_2 \mathbf{v} + p \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{v^2}{2}, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_1, v_2)$  – составляющие вектора скорости в декартовых координатах,  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  – базис декартовой системы координат. Уравнение состояния взято в виде  $p = (\gamma - 1)\rho e$ . Введем в рассмотрение четырехугольную ячейку (см. фиг. 2).

Среднее значение сеточных функций в ячейке определим в ее центре  $i, j$ :

$$U_{ij}^n = \left( \int_{\Omega_{ij}} U^n d\Omega \right) \frac{1}{\Omega_{ij}},$$

а значения на гранях будем определять в узлах  $i \pm 1/2, j$  и  $i, j \pm 1/2$ , площадь грани обозначим  $S_{m \pm 1/2}$ . Аппроксимируем уравнения Эйлера (3.1) разностной схемой

$$\Omega \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \alpha \mathbf{R}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{R}^n = 0, \quad (3.2)$$

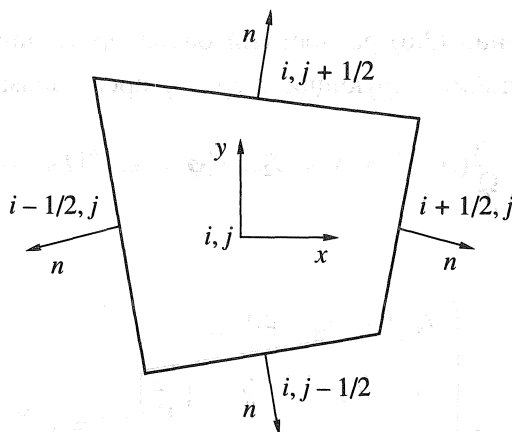
где  $\mathbf{R} = (S\mathbf{W})_{i+1/2} - (S\mathbf{W})_{i-1/2} + (S\mathbf{W})_{j+1/2} - (S\mathbf{W})_{j-1/2}$ . Линеаризуем векторы  $\mathbf{U}^{n+1}$  и  $\mathbf{R}^{n+1}$  относительно вектора искомых функций  $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \mathbf{A}^n \Delta \mathbf{f}^n + \dots, \\ (\mathbf{W})^{n+1} &= (\mathbf{W})^n + \bar{\mathbf{B}}^n \Delta \mathbf{f}^n + \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\mathbf{A} = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{f}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \partial \mathbf{W} / \partial \mathbf{f}$ ,  $\Delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$ . Разностная схема

$$\{\Omega \mathbf{A}^n + \tau \alpha [(\bar{S}\bar{\mathbf{B}})_{i+1/2} - (\bar{S}\bar{\mathbf{B}})_{i-1/2} + (\bar{S}\bar{\mathbf{B}})_{j+1/2} - (\bar{S}\bar{\mathbf{B}})_{j-1/2}]\} \Delta \mathbf{f}^n = -\tau \mathbf{R}^n \quad (3.4)$$

линейна и аппроксимирует систему (3.1) с тем же порядком  $O(\tau^m + h^2)$ , что и исходная схема (3.2). Здесь  $m = 2$  при  $\alpha = 0.5$  и  $m = 1$  при  $\alpha \neq 0.5$ ,  $h = \max(\Omega/S)$ ,  $\Omega$  и  $\mathbf{A}$  взяты в центре ячейки  $i, j$ , а мат-



Фиг. 2.

ричные операторы  $\bar{B}_{m+1/2}$  равны

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} t & \rho n_x & \rho n_y & 0 \\ v_1 t & \rho(t + v_1 n_x) & \rho v_1 n_y & n_x \\ v_2 t & \rho v_2 n_x & \rho(t + v_2 n_y) & n_y \\ \frac{v^2}{2} t & b_{42} & b_{43} & \frac{\gamma}{\gamma - 1} t \end{pmatrix},$$

$t = v_1 n_x + v_2 n_y$ ,  $n_x, n_y$  — проекции вектора нормали к поверхности на координатные оси  $x, y$ ,

$$b_{42} = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{3}{2} v_1^2 + \rho v_1 v_2 \right) n_x + \rho v_1 v_2 n_y, \quad b_{43} = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \frac{3}{2} v_2^2 + \rho v_1 v_2 \right) n_y + \rho v_1 v_2 n_x.$$

Разностные потоки  $\mathbf{R} = \sum_{l=1}^4 (SW)_l$  получены на основе симметричной аппроксимации контурного интеграла в (3.1), что приводит к немонотонным схемам. Для получения монотонных схем второго или третьего порядка аппроксимации в [14]–[18] предложены несимметричные аппроксимации с применением принципа невозрастания полной вариации. Тогда разностные потоки могут быть представлены в виде

$$(SW)_{m+1/2} = \frac{1}{2} S_{m+1/2} (\mathbf{W}_m + \mathbf{W}_{m+1}) - \frac{1}{2} |\bar{B}|_{m+1/2} \Delta_{m+1/2} \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{W}}_{m+1/2}. \quad (3.5)$$

Вектор  $\tilde{\mathbf{W}}$  отвечает за второй или третий порядок аппроксимации в зависимости от выбранной TVD-схемы (см., например, [18]). С целью упрощения реализации схемы (3.3) аппроксимацию стабилизирующего оператора в схеме (3.4) заменим таким образом, чтобы получить несимметричную противопотоковую схему. Пусть  $\Phi = \Delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$ . Тогда

$$S_{i+1/2} \bar{B}_{i+1/2} \Phi_{i+1/2} - S_{i-1/2} \bar{B}_{i-1/2} \Phi_{i-1/2} + S_{j+1/2} \bar{B}_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} - S_{j-1/2} \bar{B}_{j-1/2} \Phi_{j-1/2} \approx \\ \approx \bar{B}_1 (S_{i+1/2} \Phi_{i+1/2} - S_{i-1/2} \Phi_{i-1/2}) + \bar{B}_2 (S_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} - S_{j-1/2} \Phi_{j-1/2}) = \bar{B}_1 \Delta_1 \Phi + \bar{B}_2 \Delta_2 \Phi = \bar{\mathbf{R}}. \quad (3.6)$$

Здесь

$$\bar{B}_m \Delta_m = \bar{B}_m \begin{cases} S_{j_m-1/2} \Delta_{-m}, & \text{если } t_m \geq 0, \\ S_{j_m+1/2} \Delta_{+m}, & \text{если } t_m < 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$j_1 = i, \quad j_2 = j, \quad \bar{B}_m = (\bar{B}_{j_m+1/2} + \bar{B}_{j_m-1/2})/2, \quad \Delta_{\mp m} \Phi_{j_m} = \pm (\Phi_{j_m} - \Phi_{j_m \mp 1}),$$

$$t_m = (v_n)_{j_m} = (t_{m+1/2} - t_{m-1/2})/2, \quad t_{m+1/2} = (v_1 n_x + v_2 n_y)_{j_m \pm 1/2}.$$

С учетом введенных упрощений (3.6) разностный оператор  $\bar{\mathbf{R}}$  аппроксимирует интеграл  $\oint_{d\Omega}$  лишь с первым порядком, а стабилизирующий оператор представим в виде

$$\Omega A^n \Phi + \tau \alpha \bar{\mathbf{R}} \approx \Omega A^n \left[ I + \frac{\tau \alpha}{\Omega} (A^{-1})^n (\bar{B}_1^n \Delta_1 + \bar{B}_2^n \Delta_2) \right] \Phi = \Omega A^n [I + \tau \alpha (B_1^n \Delta_1 + B_2^n \Delta_2)] \Phi. \quad (3.8)$$

Здесь

$$B_m = A^{-1} \bar{B}_m = \begin{pmatrix} t_m (\rho n_x)_m & (\rho n_x)_m & 0 \\ 0 & t_m & 0 & \left(\frac{n_x}{\rho}\right)_m \\ 0 & 0 & t_m & \left(\frac{n_y}{\rho}\right)_m \\ 0 & (\gamma \rho n_x)_m & (\gamma \rho n_y)_m & t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & q_1 & q_2 & 0 \\ 0 & t & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & t & r_2 \\ 0 & l_1 & l_2 & t \end{pmatrix}.$$

Представим операторы  $B_m$  в виде расщепления по физическим процессам:

$$B_m \Delta_m = B_m^1 \Delta_m + B_m^2 \Delta_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_1 \Delta_{\pm m} \\ & r_2 \Delta_{\pm m} \\ 0 & l_1 \Delta_{\mp m} & l_2 \Delta_{\mp m} & t_m \Delta_{\mp m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_m \Delta_{\mp m} & q_1 \Delta_{\mp m} & q_2 \Delta_{\mp m} & 0 \\ & t_m \Delta_{\mp m} & 0 & 0 \\ & 0 & t_m \Delta_{\mp m} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид  $\Delta_{\pm m}$ ,  $t = v_n$  приведен в (3.7). Приблизительно факторизуя оператор (3.8) в схеме (3.4), рассмотрим разностную схему

$$\prod_{m=1}^2 (I + \tau \alpha B_m^1 \Delta_m) (I + \tau \alpha B_m^2 \Delta_m) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\frac{1}{\Omega} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n \quad (3.9)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{1}{\Omega} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n, \quad (I + \tau \alpha B_1^1 \Delta_1) \xi^{n+1/4} = \xi^n, \quad (I + \tau \alpha B_1^2 \Delta_1) \xi^{n+1/2} = \xi^{n+1/4}, \\ (I + \tau \alpha B_2^1 \Delta_2) \xi^{n+3/4} &= \xi^{n+1/2}, \quad (I + \tau \alpha B_2^2 \Delta_2) \xi^{n+1} = \xi^{n+3/4}, \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Схема (3.10) аппроксимирует исходные уравнения (3.1) с порядком  $O(\tau^m + \tau h + h^2)$  и реализуется на дробных шагах скалярными прогонками. Действительно,  $\xi^n$  вычисляется по явным формулам из первого уравнения схемы (3.10). На первом дробном шаге  $n + 1/4$  разностные уравнения

$$\begin{aligned} \xi_p^{n+1/4} &= \xi_p^n, \quad \xi_1^{n+1/4} + \tau \alpha r_1 \Delta_{\pm 1} \xi_p^{n+1/4} = \xi_1^n, \quad \xi_2^{n+1/4} + \tau \alpha r_2 \Delta_{\pm 1} \xi_p^{n+1/4} = \xi_2^n, \\ \xi_p^{n+1/4} + \tau \alpha t_1 \Delta_{\mp 1} \xi_p^{n+1/4} + \tau \alpha (l_1 \Delta_{\mp 1} \xi_1^{n+1/4} + l_2 \Delta_{\mp 1} \xi_2^{n+1/4}) &= \xi_p^n \end{aligned} \quad (3.11)$$

решаются в следующей последовательности: исключая  $\xi_1^{n+1/4}$  и  $\xi_2^{n+1/4}$  в последнем уравнении схемы (3.11), приходим к уравнению относительно  $\xi_p^{n+1/4}$ :

$$[1 + \alpha \tau t_1 \Delta_{\mp 1} - \tau^2 \alpha^2 (l_1 \Delta_{\mp 1} r_1 \Delta_{\pm 1} + l_2 \Delta_{\mp 1} r_2 \Delta_{\pm 1})] \xi_p^{n+1/4} = \xi_p^n - \tau \alpha (l_1 \Delta_{\mp 1} \xi_1^n + l_2 \Delta_{\mp 1} \xi_2^n).$$

Его решение может быть получено скалярной прогонкой, так как оператор  $\Delta_{\mp 1} r \Delta_{\pm 1}$  есть аппроксимация второй производной на трехточечном шаблоне. Затем явно вычисляются значения

$\xi_1^{n+1/4}$  и  $\xi_2^{n+1/4}$  из второго и третьего уравнений схемы (3.11). На втором дробном шаге

$$\begin{aligned} \xi_p^{n+1/2} + \tau\alpha(q_1\Delta_{\mp 1}\xi_1^{n+1/2} + q_2\Delta_{\mp 1}\xi_2^{n+1/2}) &= \xi_p^{n+1/4}, \\ \xi_1^{n+1/2} + \tau\alpha t_1\Delta_{\mp 1}\xi_1^{n+1/2} &= \xi_1^{n+1/4}, \quad \xi_2^{n+1/2} + \tau\alpha t_2\Delta_{\mp 1}\xi_2^{n+1/2} = \xi_2^{n+1/4}, \quad \xi_p^{n+1/2} = \xi_p^{n+1/4}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

разностные уравнения (3.12) могут быть решены независимо друг от друга по неявной схеме будущего счета или скалярными прогонками. Действительно, вначале вычисляются значения  $\xi_1^{n+1/2}$  и  $\xi_2^{n+1/2}$  по неявной схеме, а затем явно определяются  $\xi_p^{n+1/2}$  и  $\xi_p^{n+1/2}$  из первого и последнего уравнений системы (3.12).

Реализация третьего и четвертого дробных шагов подобна рассмотренным выше. Наконец, из последнего уравнения (3.10) явно определяется новое значение  $f^{n+1}$ . В линейном приближении схема безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0.5$ . Таким образом, реализация разностной схемы в МКО сводится к скалярным прогонкам, что делает этот подход экономичным. Аналогично строится разностная схема расщепления МКО по физическим процессам, рассмотренная в разд. 2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics. Berlin etc.: Springer, 1988. Vol. I, II.
2. Андерсон Д., Таннехил Дж., Флетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1991. Т. 1, 2.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Beam R.M., Warming R.F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation law form // J. Comput. Phys. 1976. V. 22. P. 87–108.
5. Briley W.R., McDonald H. Solution of the 3D compressible Navier–Stokes equations by an implicit technique: Lect Notes Phys. 1975. Vol. 35.
6. Proceedings of 1th–7th international symposium in computational fluid dynamics. 1985, 1987, 1991, 1993, 1995, 1997.
7. Ковеня В.М., Яненко Н.М. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
8. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990.
9. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэродинамики. М.: Наука, 1990.
10. Оран Э., Борис Дж. Численные моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990.
11. Ковеня В.М., Лебедев А.С. Модификации метода расщепления для построения экономичных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 6. С. 886–897.
12. Kovenya V.M. Splitting method in the problems of CFD // J. Comput. Fluid. Dynamics. 1999. V. 8. № 2. P. 186–194.
13. Ковеня В.М., Грибанов С.В. Об одной схеме расщепления для численного решения уравнений газовой динамики // Вычисл. технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1993. Т. 2. № 5. С. 87–94.
14. Harten A. END schemes with subcell resolution // J. Comput. Phys. 1989. № 83. P. 148–184.
15. Coacley T.I. Implicit upwing method for compressible Navier–Stokes equations // AIAA J. 1985. V. 23. № 3. P. 374–381.
16. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. 1 // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.
17. Roe P.L. Generalized formulation of TVD Lax–Wendroff schemes: ICASE Rept. № 84–53, 1984.
18. Карамышев В.Б. Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.