Aufgabensammlung zur vollständigen Induktion

erstellt von Artur Sanin.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das vorliegende Dokument enthält Lösungen zu einer Reihe von verschiedenen Induktionsaufgaben. Unter anderem werden Identitäten von endlichen Summen und Produkten, Teilbarkeit, Ungleichungen und vieles mehr behandelt. Da wo es mir möglich war, habe ich zusätzlich versucht, einen direkten Beweis der Aussagen zu geben, entweder durch ein direktes Argument oder durch Anwendung der zuvor bewiesenen Aufgaben.

Bei der Erstellung dieser Aufgabensammlung habe ich mich verschiedener Quellen wie Lehrbüchern und des Internets bedient. Im Zusammenhang mit dem Urheberrecht sei angemerkt, dass mathematische Formeln und Ideen nicht urheberrechtlich geschützt sind und somit als gemeinfrei gelten (das heißt frei verwendbar). Der Inhalt dieses Dokuments wurde von mir komplett selbstständig verfasst und ich habe keine Texte aus den Quellen kopiert oder abgeschrieben. Zur Vollständigkeit habe ich die wesentlichen Quellen, die zur Inspiration der Aufgaben verwendet wurden, im Literaturverzeichnis aufgelistet.

Da dieses Dokument sehr umfangreich ist, könnten sich beim schreiben einige Fehler eingeschlichen haben. Ich gebe deswegen keine Garantie auf die Richtigkeit der in diesem Dokument präsentierten Lösungen und Informationen. Jeder Leser sollte selber die Lösungen, bevor er sie übernimmt, auf ihre Richtigkeit überprüfen.

Ich wünsche allen viel Spaß beim Lösen der Aufgaben.

1 Induktionsaufgaben zu endlichen Summen

Aufgabe 1.1 (Gaußsche Summenformel)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{1.1}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{(1.2)}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n) \\
&= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= (n+1) + ((n-1) + 2) + ((n-2) + 3) + \ldots + (3 + (n-2)) + (2 + (n-1)) + (1 + n) \\
&= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n\text{-mal}} \\
&= n \cdot (n+1).
\end{aligned}
$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.1). □

Bemerkung 1.1.
Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, heißt die Zahl

$$
AM(a_1, a_2, \ldots, a_m) := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \tag{1.3}
$$

das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Aus der Gaußschen Summenformel (1.1) erhalten wir für das arithmetische Mittel der Zahlen $1, 2, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
AM(1, 2, \ldots, n) &= \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2} \\
&= AM(1, n).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.2 (Summe der ersten n ungeraden Zahlen)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2 \tag{1.4}
$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$
\sum_{k=1}^{1} (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 = 1^2.
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2. \tag{1.5}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2 \cdot (n+1) - 1 \\
&\overset{(1.5)}{=} n^2 + 2 \cdot (n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2 .
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= 2 \cdot (1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot (n-1) - 1) + (2n-1)) \\
&= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot (n-1) - 1) + (2n-1) + 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot (n-1) - 1) + (2n-1) \\
&= (2n - 1 + 1) + (2 \cdot (n-1) - 1 + 3) + \ldots + (1 + 2n - 1) + (3 + 2 \cdot (n-1) - 1) \\
&= \underbrace{2n + 2n + \ldots + 2n + 2n}_{n\text{-mal}} \\
&= n \cdot 2n \\
&= 2n^2.
\end{aligned}$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.4).
Zweiter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Zusammen mit Aufgabe 1.1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - n \\
&\overset{(1.1)}{=} 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n \\
&= n \cdot (n+1) - n \\
&= n^2 + n - n
\end{aligned}$$

$$= n^2.$$

□

Aufgabe 1.3 (Summe der ersten n geraden Zahlen)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n \cdot (n+1) \tag{1.6}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} 2k = 2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot (1+1)$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n \cdot (n+1) \tag{1.7}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^{n} 2k + 2 \cdot (n+1) \\ &\overset{(1.7)}{=} n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (n+2). \end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 2k &= 2 \cdot (2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n) \\ &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n \\ &= (2 \cdot n + 2) + (2 \cdot (n-1) + 4) + \ldots + (2 + 2 \cdot n) + (4 + 2 \cdot (n-1)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{(2n+2) + (2n+2) + \ldots + (2n+2) + (2n+2)}_{n\text{-mal}} \\
&= n \cdot (2n+2) \\
&= 2n \cdot (n+1)\,.
\end{aligned}
$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.6).

Zweiter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Wir erhalten (1.6) wie folgt mit der Hilfe von Aufgabe 1.1:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 2k &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.1)}{=} 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
&= n \cdot (n+1)\,.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.4.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n \tag{1.8}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} (4k-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3 = 2 + 1 = 2 \cdot 1^2 + 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n. \tag{1.9}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + (4\cdot(n+1)-1)\\
&\overset{(1.9)}{=} 2n^2+n+(4\cdot(n+1)-1)\\
&= 2n^2+n+4n+4-1\\
&= 2n^2+n+4n+3\\
&= 2n^2+n+4n+2+1\\
&= 2n^2+4n+2+n+1\\
&= 2\cdot\left(n^2+2n+1\right)+n+1\\
&= 2\cdot(n+1)^2+(n+1)\,.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n\in\mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned}
2\cdot\sum_{k=1}^{n}(4k-1) &= 2\cdot(3+7+11+\ldots+(4\cdot(n-1)-1)+(4\cdot n-1))\\
&= 3+7+11+\ldots+(4\cdot(n-1)-1)+(4\cdot n-2)+3+7+11+\ldots+(4\cdot(n-1)-1)+(4\cdot n-1)\\
&= (4\cdot n-1+3)+(4\cdot(n-1)-1+7)+\ldots+(3+4\cdot n-1)+(7+4\cdot(n-1)-1)\\
&= \underbrace{(4n+2)+(4n+2)+\ldots+(4n+2)+(4n+2)}_{n\text{-mal}}\\
&= n\cdot(4n+2)\\
&= 4n^2+2n.
\end{aligned}$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.8).
Zweiter Beweis:
Sei $n\in\mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Dann erhalten wir (1.8) wie folgt aus Aufgabe 1.1:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(4k-1) &= \sum_{k=1}^{n}4k-\sum_{k=1}^{n}1\\
&= 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\
&= 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k-n\\
&\overset{(??)}{=} 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-n\\
&= 2n\cdot(n+1)-n\\
&= 2n^2+2n-n
\end{aligned}$$

$$= 2n^2 + n.$$

□

Aufgabe 1.5.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2} \tag{1.10}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} (3k-2) = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}. \tag{1.11}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (3k-2) &= \sum_{k=1}^{n} (3k-2) + (3 \cdot (n+1) - 2) \\
&\overset{(1.11)}{=} \frac{n \cdot (3n-1)}{2} + (3 \cdot (n+1) - 2) \\
&= \frac{n \cdot (3n-1)}{2} + (3n + 3 - 2) \\
&= \frac{n \cdot (3n-1)}{2} + (3n+1) \\
&= \frac{n \cdot (3n-1) + 2 \cdot (3n+1)}{2} \\
&= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)\cdot(3n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(3n+2+1-1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(3n+3-1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(3\cdot(n+1)-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned}
2\cdot\sum_{k=1}^{n}(3k-2) &= 2\cdot(1+4+7+\ldots+(3\cdot(n-1)-2)+(3\cdot n-2)) \\
&= 1+4+7+\ldots+(3\cdot(n-1)-2)+(3\cdot n-2)+1+4+7+\ldots+(3\cdot(n-1)-2)+(3\cdot n-2) \\
&= (3\cdot n-2+1)+(3\cdot(n-1)-2+4)+\ldots+(1+3\cdot n-2)+(4+3\cdot(n-1)-2) \\
&= \underbrace{(3n-1)+(3n-1)+\ldots+(3n-1)+(3n-1)}_{n\text{-mal}} \\
&= n\cdot(3n-1)\,.
\end{aligned}$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.10).
Zweiter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Mit Aufgabe 1.1 folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(3k-2) &= \sum_{k=1}^{n}3k-\sum_{k=1}^{n}2 \\
&= 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k-2\cdot\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k-2n \\
&\overset{(1.1)}{=} 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-2n \\
&= \frac{3n\cdot(n+1)-4n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(3\cdot(n+1)-4)}{2} \\
&= \frac{n\cdot(3n+3-4)}{2} \\
&= \frac{n\cdot(3n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.6.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) = \frac{n \cdot (a \cdot (n+1) + 2 \cdot b)}{2} \tag{1.12}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1} (a \cdot k + b) &= a \cdot 1 + b \\ &= a + b \\ &= \frac{2 \cdot (a+b)}{2} \\ &= \frac{(2 \cdot a + 2 \cdot b)}{2} \\ &= \frac{1 \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot b)}{2} \\ &= \frac{1 \cdot (a \cdot (1+1) + 2 \cdot b)}{2}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) = \frac{n \cdot (a \cdot (n+1) + 2 \cdot b)}{2}. \tag{1.13}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) &= \sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) + (a \cdot (n+1) + b) \\ &\overset{(1.13)}{=} \frac{n \cdot (a \cdot (n+1) + 2 \cdot b)}{2} + (a \cdot (n+1) + b) \\ &= \frac{n \cdot (a \cdot (n+1) + 2 \cdot b) + 2 \cdot (a \cdot (n+1) + b)}{2} \\ &= \frac{a \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot n \cdot b + 2 \cdot a \cdot (n+1) + 2 \cdot b}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot a \cdot (n+1) + 2 \cdot n \cdot b + 2 \cdot b}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (a \cdot n \cdot +2 \cdot a) + 2 \cdot b \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (a \cdot n \cdot +2 \cdot a + 2 \cdot b))}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (a \cdot (n+2) + 2 \cdot b))}{2}
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) &= 2 \cdot ((a+b) + (2a+b) + \ldots + ((n-1) \cdot a + b) + (n \cdot a + b)) \\
&= (a+b) + (2a+b) + \ldots + (n \cdot a + b) + (a+b) + (2a+b) + \ldots + (n \cdot a + b) \\
&= (n \cdot a + b + a + b) + ((n-1) \cdot a + b + 2a + b) + \ldots + (2a + b + (n-1) \cdot a + b) + (a + b + n \cdot a + b) \\
&= \underbrace{(a \cdot (n+1) + 2b) + (a \cdot (n+1) + 2b) + \ldots + (a \cdot (n+1) + 2b) + (a \cdot (n+1) + 2b)}_{n\text{-mal}} \\
&= n \cdot (a \cdot (n+1) + 2b)\,.
\end{aligned}
$$

Teilt man diese Gleichung durch 2, so folgt die Formel (1.12).
Zweiter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Mit Aufgabe 1.1 folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a \cdot k + b) &= \sum_{k=1}^{n} a \cdot k + \sum_{k=1}^{n} b \\
&= a \cdot \sum_{k=1}^{n} k + b \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= a \cdot \sum_{k=1}^{n} k + b \cdot n \\
&\overset{(1.1)}{=} a \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + b \cdot n \\
&= \frac{a \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot b \cdot n}{2} \\
&= \frac{n \cdot (a \cdot (n+1) + 2 \cdot b)}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 1.2.
Mit Aufgabe 1.6 lassen sich die Formeln aus Aufgabe 1.2 bis Aufgabe 1.5 jetzt mit (1.12) berechnen:

1. Für $a = 2$ und $b = -1$ erhalten wir (1.4):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \frac{n\cdot(2\cdot(n+1)+2\cdot(-1))}{2}\\ &= \frac{n\cdot(2n+2-2)}{2}\\ &= \frac{n\cdot 2\cdot n}{2}\\ &= n\cdot n\\ &= n^2.\end{aligned}$$

2. Für $a = 2$ und $b = 0$ erhalten wir (1.6):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2k &= \frac{n\cdot(2\cdot(n+1)+2\cdot 0)}{2}\\ &= \frac{n\cdot 2\cdot(n+1)}{2}\\ &= n\cdot(n+1).\end{aligned}$$

3. $a = 4$ und $b = -1$ erhalten wir (1.8):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k-1) &= \frac{n\cdot(4\cdot(n+1)+2\cdot(-1))}{2}\\ &= \frac{n\cdot(4n+4-2)}{2}\\ &= \frac{n\cdot(4n+2)}{2}\\ &= \frac{n\cdot 2\cdot(2n+1)}{2}\\ &= n\cdot(2n+1)\\ &= 2n^2+n.\end{aligned}$$

4. $a = 3$ und $b = -2$ erhalten wir (1.10):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(3k-2) &= \frac{n\cdot(3\cdot(n+1)+2\cdot(-2))}{2}\\ &= \frac{n\cdot(3n+3-4)}{2}\\ &= \frac{n\cdot(3n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.7.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) = -a \cdot n \tag{1.14}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) &= (-1)^{1+1} \cdot (a \cdot 1 + b) + (-1)^{2+1} \cdot (a \cdot 2 + b)\\ &= a + b - (2a + b)\\ &= a + b - 2a - b\\ &= -a.\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) = -a \cdot n. \tag{1.15}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) + (-1)^{2n+1+1} \cdot (a \cdot (2n + 1) + b)\\ &\quad + (-1)^{2n+2+1} \cdot (a \cdot (2n + 2) + b)\\ &\overset{(1.15)}{=} -a \cdot n + (-1)^{2n+2} \cdot (a \cdot (2n + 1) + b) + (-1)^{2n+3} \cdot (a \cdot (2n + 2) + b)\\ &= -a \cdot n + a \cdot (2n + 1) + b - (a \cdot (2n + 2) + b)\\ &= -a \cdot n + a \cdot (2n + 1) + b - a \cdot (2n + 2) - b\\ &= -a \cdot n + a \cdot (2n + 1) - a \cdot (2n + 2)\\ &= -a \cdot n + a \cdot (2n + 1) - a \cdot (2n + 1) - a\\ &= -a \cdot n - a\\ &= -a \cdot (n + 1).\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Wir teilen die Summe auf der linken Seite von (1.14) auf in alle ungeraden und geraden Summanden:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (a \cdot k + b) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k-1+1} \cdot (a \cdot (2k-1) + b) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k+1} \cdot (a \cdot 2k + b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a \cdot (2k-1) + b) - \sum_{k=1}^{n} (a \cdot 2k + b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a \cdot 2k - \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} b - \sum_{k=1}^{n} a \cdot 2k - \sum_{k=1}^{n} b \\ &= -a \cdot n.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.3.
Aus der Formel (1.14) lassen sich folgende Spezialfälle berechnen:

1. Für $a = 1$ und $b = 0$ erhalten wir:
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot k = -2n.$$

2. Für $a = 2$ und $b = -1$ erhalten wir:
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (2k-1) = -2n.$$

3. Für $a = -1$ und $b = 0$ erhalten wir:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k} \cdot k &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot k \\ &= -(-1) \cdot n \\ &= n\end{aligned}$$

Aufgabe 1.8 (Summe der ersten n Quadrate)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \tag{1.16}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}. \tag{1.17}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{(1.17)}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [(n+2-2) \cdot (2n+1) + 6n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [(n+2) \cdot (2n+1) - 2 \cdot (2n+1) + 6n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [(n+2) \cdot (2n+1) - 4n - 2 + 6n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [(n+2) \cdot (2n+1) + 2n + 4]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot [(n+2) \cdot (2n+1) + 2 \cdot (n+2)]}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+1+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)}{6}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.9.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)}{6} \tag{1.18}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = (2-1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{(2\cdot 1-1)\cdot 2\cdot 1\cdot(2\cdot 1+1)}{6}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6} \tag{1.19}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2\cdot(n+1)-1)^2 \\
&\overset{(1.19)}{=} \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6} + (2\cdot(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6} + (2n+2-1)^2 \\
&= \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6} + (2n+1)^2 \\
&= (2n+1)\cdot\left[\frac{(2n-1)\cdot 2n}{6} + (2n+1)\right] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2n + 6\cdot(2n+1)] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1-1) + 6\cdot(2n+1)] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1) - 2\cdot(2n-1) + 6\cdot(2n+1)] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1) - 4n + 2 + 12n + 6] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1) + 8n + 8] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1) + 8\cdot(n+1)] \\
&= \frac{(2n+1)}{6}\cdot[(2n-1)\cdot 2\cdot(n+1) + 4\cdot 2\cdot(n+1)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2n+1)\cdot 2\cdot (n+1)\cdot (2n-1+4)}{6} \\
&= \frac{(2n+1)\cdot 2\cdot (n+1)\cdot (2n+3)}{6} \\
&= \frac{(2\cdot (n+1)-1)\cdot 2\cdot (n+1)\cdot (2\cdot (n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Wir beweisen (1.18) direkt unter Anwendung der Formeln aus Aufgabe 1.1 und 1.8:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4k^2 - \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 4\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 4\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\cdot \sum_{k=1}^{n} k + n \\
&\overset{(1.1)}{=} 4\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\cdot \frac{n\cdot (n+1)}{2} + n \\
&\overset{(1.4)}{=} 4\cdot \frac{n\cdot (n+1)\cdot (2n+1)}{6} - 4\cdot \frac{n\cdot (n+1)}{2} + n \\
&= \frac{4n\cdot (n+1)\cdot (2n+1) - 12n\cdot (n+1) + 6n}{6} \\
&= \frac{2n\cdot [2\cdot (n+1)\cdot (2n+1) - 6\cdot (n+1) + 3]}{6} \\
&= \frac{2n\cdot [2\cdot (2n^2+2n+n+1) - 6n - 6 + 3]}{6} \\
&= \frac{2n\cdot [2\cdot (2n^2+3n+1) - 6n - 3]}{6} \\
&= \frac{2n\cdot (4n^2+6n+2-6n-3)}{6} \\
&= \frac{2n\cdot (4n^2-1)}{6} \\
&= \frac{2n\cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{6} \\
&= \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot (2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.10.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} \tag{1.20}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot (k+1) = 1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}{3}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}. \tag{1.21}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) + (n+1) \cdot (n+2) \\ &\overset{(1.21)}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \frac{(n+3)}{3} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{3}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit den Aufgaben 1.1 und 1.8 für den Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.16)}{=} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + \sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2}\right) \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+1+3)}{6} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+4)}{6} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{2\cdot(n+2)}{6} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{(n+2)}{3} \\
&= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.11.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\cdot k^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} \tag{1.22}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1}\cdot k^2 = 1 = (-1)^{1-1}\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\cdot k^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} \tag{1.23}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^n \cdot (n+1)^2 \\
&\overset{(1.23)}{=} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2 \\
&= (-1)^n \cdot \left[(n+1)^2 - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right] \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot [2 \cdot (n+1) - n] \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot (2n + 2 - n) \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.12.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k^2 = n \cdot (2n+1) \tag{1.24}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^k \cdot k^2 = -1^2 + 2^2 = -1 + 4 = 3 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)\,.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k^2 = n \cdot (2n+1)\,. \tag{1.25}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \cdot k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k^2 + (-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2 + (-1)^{2n+2} \cdot (2n+2)^2 \\
&\overset{(1.25)}{=} n \cdot (2n+1) + (-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2 + (-1)^{2n+2} \cdot (2n+2)^2 \\
&= n \cdot (2n+1) - (2n+1)^2 + (2n+2)^2 \\
&= (2n+1) \cdot (n - (2n+1)) + (2n+2)^2 \\
&= (2n+1) \cdot (n - 2n - 1) + (2n+2)^2 \\
&= (2n+1) \cdot (-n-1) + (2n+2)^2 \\
&= -(2n+1) \cdot (n+1) + (2n+2)^2 \\
&= -(2n+1) \cdot (n+1) + 4 \cdot (n+1)^2 \\
&= (n+1) \cdot (-2n - 1 + 4n + 4) \\
&= (n+1) \cdot (2n+3).
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Formel (1.24) ist ein Spezialfall der Formel (1.22) aus Aufgabe 1.11:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot k^2 &= -\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 \\
&\overset{(1.22)}{=} -(-1)^{2n-1} \cdot \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} \\
&= (-1)^{2n+2} \cdot n \cdot (2n+1) \\
&= n \cdot (2n+1).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.13.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (n+1) \cdot (2n+1) \tag{1.26}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 = 1 - 4 + 9 = 6 = 2 \cdot 3 = (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)\,.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (n+1) \cdot (2n+1)\,. \tag{1.27}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k-1} \cdot k^2 &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^{2n+1} \cdot (2n+2)^2 + (-1)^{2n+2} \cdot (2n+3)^2 \\
&\overset{(1.27)}{=} (n+1) \cdot (2n+1) + (-1)^{2n+1} \cdot (2n+2)^2 + (-1)^{2n+2} \cdot (2n+3)^2 \\
&= (n+1) \cdot (2n+1) - (2n+2)^2 + (2n+3)^2 \\
&= (n+1) \cdot (2n+1) - 4 \cdot (n+1)^2 + (2n+3)^2 \\
&= (n+1) \cdot [2n + 1 - 4 \cdot (n+1)] + (2n+3)^2 \\
&= (n+1) \cdot (2n + 1 - 4n - 4) + (2n+3)^2 \\
&= (n+1) \cdot (-2n-3) + (2n+3)^2 \\
&= -(n+1) \cdot (2n+3) + (2n+3)^2 \\
&= (2n+3) \cdot [2n + 3 - (n+1)] \\
&= (2n+3) \cdot (2n + 3 - n - 1) \\
&= (n+2) \cdot (2n+3)\,.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Formel (1.26) ist ein Spezialfall der Formel (1.22) aus Aufgabe 1.11:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 &\overset{(1.27)}{=} (-1)^{2n+1-1} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+1+1)}{2} \\
&= (-1)^{2n} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{2} \\
&= \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{2} \\
&= \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot (n+1)}{2} \\
&= (n+1) \cdot (2n+1)\,.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.14.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \tag{1.28}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}. \tag{1.29}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{(1.29)}{=} \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.15.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \tag{1.30}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 .$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 . \tag{1.31}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{(1.31)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1) \cdot (n+1)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n \cdot (n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot (n+1) + (n+1)^2 \\
&\overset{(1.1)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \cdot (n+1) + (n+1)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 .
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig natürliche Zahl. Für den direkten Beweis von (1.30) nutzen wir die Aufgaben 1.1 und Aufgaben 1.14. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &\overset{(1.28)}{=} \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \\ &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 \\ &\overset{(1.1)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.16.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} \tag{1.32}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = \frac{24}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}. \tag{1.33}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \\ &\overset{(1.33)}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} + (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\left(\frac{n}{4}+1\right) \\
&= (n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\frac{(n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{4}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Für den direkten Beweis von (1.32) verwenden wir die Aufgaben 1.1, 1.8 und 1.14:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\cdot(k+2) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)\cdot(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+2k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.28)}{=} \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.16)}{=} \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{2} + n\cdot(n+1) \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{2} + 1\right) \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(2n+1)+4}{4} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{n^2+n+4n+2+4}{4} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{n^2+5n+6}{4} \\
&= n\cdot(n+1)\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+3)}{4} \\
&= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.17.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = 4n^3 + 12n^3 + 11 \tag{1.34}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \sum_{k=1}^{2} (2k-1)^2 &= 3 \cdot \left[(2 \cdot 1 - 1)^2 + (2 \cdot 2 - 1)^2\right] \\
&= 3 \cdot \left(1^2 + 3^2\right) \\
&= 3 \cdot 10 \\
&= 30 \\
&= 4 + 12 + 11 + 3 \\
&= 4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^3 + 11 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^3.
\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = 4n^3 + 12n^3 + 11. \tag{1.35}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \sum_{k=1}^{n+2} (2k-1)^2 &= 3 \cdot \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 + 3 \cdot (2 \cdot (n+2) - 1)^2 \\
&\overset{(1.35)}{=} 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 3 \cdot (2n+3)^2 \\
&= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 3 \cdot \left(4n^2 + 12n + 9\right) \\
&= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 12n^2 + 36n + 27
\end{aligned}$$

Wir zerlegen

$$36n = 24n + 12n$$

$$27 = 4 + 11 + 12.$$

Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
&4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 12n^2 + 36n + 27 \\
&= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 12n^2 + 24n + 12n + 4 + 11 + 12 \\
&= 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 + 12n^2 + 24n + 12 + 11n + 11 + 3 \\
&= 4 \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 12 \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right) + 11 \cdot (n + 1) + 3 \\
&= 4 \cdot (n + 1)^3 + 12 \cdot (n + 1)^2 + 11 \cdot (n + 1) + 3
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.1.
Es gelten die folgenden Faktorisierungen:

1. $(2n + 3) \cdot \left(12n^2 + 24n + 10\right) = 24n^3 + 84n^2 + 92n + 30.$
2. $(n + 2) \cdot (6n + 6) = 6n^2 + 18n + 12.$

Beweis. Beide Aussagen werden durch ausmultiplizieren der linken Seite gezeigt.

1.

$$\begin{aligned}
(2n + 3) \cdot \left(12n^2 + 24n + 10\right) &= 24n^3 + 48n^2 + 20n + 36n^2 + 72n + 30 \\
&= 24n^3 + 84n^2 + 92n + 30
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(n + 2) \cdot (6n + 6) &= 6n^2 + 6n + 12n + 12 \\
&= 6n^2 + 18n + 12.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.18.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30} \tag{1.36}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} k^4 &= 1^4 \\ &= 1 \\ &= \frac{30}{30} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{30} \\ &= \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdot (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1)}{30}.\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}. \tag{1.37}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^4 &= \sum_{k=1}^{n} k^4 + (n+1)^4 \\ &\overset{(1.37)}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30} + (n+1)^4 \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1) + 30 \cdot (n+1)^4}{30} \\ &= \frac{(n+1)}{30} \cdot \left[n \cdot (2n+1) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30 \cdot (n+1)^3\right].\end{aligned}$$

Wir können den zweiten Faktor wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}&n \cdot (2n+1) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30 \cdot (n+1)^3 \\ &= n \cdot (2n + 1 + 2 - 2) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30 \cdot (n+1)^3 \\ &= n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) - 2n \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30 \cdot (n+1)^3 \\ &= n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) - 2n \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30 \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) \\ &= n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) - 2n \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 30n^3 + 90n^2 + 90n + 30 \\ &= n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) - 6n^3 - 6n^2 + 2n + 30n^3 + 90n^2 + 90n + 30 \\ &= n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + 24n^3 + 84n^2 + 92n + 30 \\ &\overset{\text{Lem. 1.1 1.}}{=} n \cdot (2n+3) \cdot \left(3n^2 + 3n - 1\right) + (2n+3) \cdot \left(12n^2 + 24n + 10\right)\end{aligned}$$

$$= (2n+3) \cdot \Big[n \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10\Big].$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)}{30} \cdot \Big[n \cdot (2n+1) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 30 \cdot (n+1)^3\Big] \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n+3)}{30} \cdot \Big[n \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10\Big].
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor lässt sich noch einmal wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
&n \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10 \\
&= (n+2-2) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10 \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) - 2 \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10 \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) - 6n^2 - 6n + 2 + 12n^2 + 24n + 10 \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 6n^2 + 18n + 12 \\
&\overset{\text{Lem. 1.1 2.}}{=} (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + (n+2) \cdot (6n+6) \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1+6n+6\big) \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+3n-1+6n+3+3\big) \\
&= (n+2) \cdot \big(3n^2+6n+3+3n+3-1\big) \\
&= (n+2) \cdot \big(3 \cdot \big(n^2+2n+1\big) + 3 \cdot (n+1) - 1\big) \\
&= (n+2) \cdot \big(3 \cdot (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1) - 1\big).
\end{aligned}$$

Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)\cdot(2n+3)}{30} \cdot \Big[n \cdot \big(3n^2+3n-1\big) + 12n^2 + 24n + 10\Big] \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n+3)\cdot(n+2)\cdot\big(3\cdot(n+1)^2 + 3\cdot(n+1) - 1\big)}{30} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2\cdot(n+1)+1)\cdot\big(3\cdot(n+1)^2 + 3\cdot(n+1) - 1\big)}{30}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.19.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\cdot(n-k) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} \tag{1.38}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}(1+k)\cdot(1-k) &= (1+0)\cdot(1-0)\\ &= 1\cdot 1\\ &= 1\\ &= \frac{6}{6}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}\\ &= \frac{1\cdot(1+1)\cdot(4\cdot 1-1)}{6}\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\cdot(n-k) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6}. \tag{1.39}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n+1+k)\cdot(n+1-k) &= \sum_{k=0}^{n}(n+1+k)\cdot(n-(k-1))\\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=-1}^{n-1}(n+2+k)\cdot(n-k)\\ &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(n+2+k)\cdot(n-k)\\ &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\cdot(n-k) + 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\\ &\overset{(1.39)}{=} (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\\ &= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}n - 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k\\ &= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2\cdot n\cdot n - 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.1)}{=} (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2n^2 - 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\\
&= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2n^2 - (n-1)\cdot n\\
&= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + 2n^2 - n^2 + n\\
&= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + n^2 + n\\
&= (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(4n-1)}{6} + n\cdot(n+1)\\
&= \frac{6\cdot(n+1)^2 + n\cdot(n+1)\cdot(4n-1) + 6\cdot n\cdot(n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\cdot[6\cdot(n+1) + n\cdot(4n-1) + 6n]}{6}\\
&= \frac{(n+1)\cdot(6n+6+4n^2-n+6n)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\cdot(4n^2+11n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4n+3)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(4\cdot(n+1)-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Für den direkten Beweis von (1.38) verwenden wir die Aufgaben 1.8:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)\cdot(n-k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(n^2-k^2\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= n\cdot n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= n\cdot n^2 + n^2 - n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= (n+1)\cdot n^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\\
&\overset{(1.16)}{=} (n+1)\cdot n^2 - \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{6 \cdot (n+1) \cdot n^2 - n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (6n^2 - n \cdot (2n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (6n - (2n+1))}{6}$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (6n - 2n - 1)}{6}$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n-1)}{6}$$

.

□

Definition 1.1 (Fakultät)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Dann heißt die Zahl

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \tag{1.40}$$

n Fakultät.

Aufgabe 1.20.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \tag{1.41}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1 = 2 - 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1. \tag{1.42}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &\overset{(1.42)}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &= (1+n+1)\cdot(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)\cdot(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned}(n+1)! - 1 &= (n+1)\cdot n! - 1 \\ &= n\cdot n! + n! - 1 \\ &= n\cdot n! + n\cdot(n-1)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1+1)\cdot(n-1)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + (n-1)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + (n-1)\cdot(n-2)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + (n-1-1+1)\cdot(n-2)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + (n-2+1)\cdot(n-2)! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + (n-2)\cdot(n-2)! + (n-2)! - 1 \\ &\vdots \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 2! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 2\cdot 1! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + (1+1)\cdot 1! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + 1\cdot 1! - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + 1 - 1 \\ &= n\cdot n! + (n-1)\cdot(n-1)! + \ldots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.21.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!} \tag{1.43}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{1} \frac{k-1}{k!} = 0 = \frac{1!-1}{1!}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}. \tag{1.44}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} + \frac{n}{(n+1)!} \\
&\overset{(1.44)}{=} \frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n!-1)}{(n+1)\cdot n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n!-1)}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n!-1)+n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n! - (n+1) + n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)! - n - 1 + n}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.22.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \ln(n) - \ln(n!) \tag{1.45}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0 = 1 \cdot \ln(1) - \ln(1!).$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = n \cdot \ln(n) - \ln(n!). \tag{1.46}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&\overset{(1.46)}{=} n \cdot \ln(n) - \ln(n!) + n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= n \cdot \ln(n) - \ln(n!) + n \cdot \ln(n+1) - n \cdot \ln(n) \\
&= n \cdot \ln(n+1) - \ln(n!) \\
&= (n+1-1) \cdot \ln(n+1) - \ln(n!) \\
&= (n+1) \cdot \ln(n+1) - \ln(n+1) - \ln(n!) \\
&= (n+1) \cdot \ln(n+1) - (\ln(n+1) + \ln(n!)) \\
&= (n+1) \cdot \ln(n+1) - \ln\left((n+1) \cdot n!\right) \\
&= (n+1) \cdot \ln(n+1) - \ln\left((n+1)!\right).
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schreiben wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-1) \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} (k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k) - \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \cdot \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \ln(k)}_{\text{Teleskopsumme}} - \ln(n!) \\
&= n \cdot \ln(n) - 1 \cdot \ln(1) - \ln(n!) \\
&= n \cdot \ln(n) - \ln(n!) .
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.23.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \tag{1.47}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{1.48}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \\
&\overset{(1.48)}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k &= 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&= 1 \cdot \left(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n\right) \\
&= (2-1) \cdot \left(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n\right) - \left(1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n\right) \\
&= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} - 1 - 2^1 - 2^2 - \ldots - 2^{n-1} - 2^n \\
&= 2^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.24.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \tag{1.49}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{0+1}}\right)$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \tag{1.50}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&\overset{(1.50)}{=} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right).
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right)\right] \\
&= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 1.4.
Aus Aufgabe 1.24 ergibt sich der folgende Grenzwert:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&\overset{(1.49)}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.25 (Geometrische Summenformel)**.**
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eine reelle Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{1.51}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{1.52}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\
&\overset{(1.52)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{n+1} + (1-x)\cdot x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x\cdot x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k &= (1-x)\cdot\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n\right) \\
&= 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n - x\cdot\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n\right) \\
&= 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - x^{n+1} \\
&= 1 - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Teilt man die Gleichung durch $1-x$ so folgt (1.51). □

Bemerkung 1.5 (Geometrische Reihe)**.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl mit $|x| < 1$. Dann folgt aus Aufgabe 1.25 der folgende Grenzwert:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} x^k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &\overset{(1.51)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.26.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \tag{1.53}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$1 + \sum_{k=1}^{0} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n. \tag{1.54}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} + \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} \\ &\overset{(1.54)}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3 \cdot 4^n + 2^{2n}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3 \cdot 4^n + 4^n}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4 \cdot 4^n}{3^{n+1}} \\
&= \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebig natürliche Zahl. Dann folgt mit Aufgabe 1.25 für $x = \frac{4}{3}$

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-2}}{3^k} \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{3^k} \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{3^k} \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^k \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[-1 + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^k\right] \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[-1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{3}\right)^k\right] \\
&\overset{(1.51)}{=} 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[-1 + \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{3}}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[-1 + \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{3}}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[-1 - 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^n.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.27.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \tag{1.55}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} k \cdot 2^k = 1 = -2 + 2 = (0-1) \cdot 2^{0+1} + 2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2. \tag{1.56}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&\overset{(1.56)}{=} (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&= (n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= 2 \cdot n \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= n \cdot 2^{n+2} + 2.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \\
&= 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&\quad + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&\qquad 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2^{n-1} + 2^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2^n \\
&= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 1 \\
&\quad 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 1 - 2^1 \\
&\quad 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 1 - 2^1 - 2^2 - 2^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 1 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^{n-2} \\
&\quad 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 1 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^{n-2} - 2^{n-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{i=0}^{j} 2^i \right) \\
&\overset{(1.51)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - \frac{1 - 2^{j+1}}{1-2} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(2^{n+1} - 1 \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - 2^{j+1} \right) \\
&= n \cdot \left(2^{n+1} - 1 \right) + n - 2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\
&= n \cdot \left(2^{n+1} - 1 \right) + n - 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1-2} \\
&= n \cdot \left(2^{n+1} - 1 \right) + n + 2 - 2^{n+1} \\
&= n \cdot 2^{n+1} - n + n + 2 - 2^{n+1} \\
&= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.28.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{1.57}
$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$
\sum_{k=1}^{0} \frac{k}{2^k} = 0 = 2 - 2 = 2 - \frac{0+2}{2^0}.
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \tag{1.58}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{(1.58)}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2 \cdot (n+2) - (n+1)) \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2n + 4 - n - 1) \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\qquad\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \\
&\quad 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&\vdots \\
&1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \ldots - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \ldots - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) \\
&\overset{(1.51)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right) \\
&= n \cdot \left(2 - \frac{2}{2^{n+1}}\right) - 2n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2}{2^{j+1}} \\
&= 2n - \frac{2n}{2^{n+1}} - 2n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\
&= -\frac{n}{2^n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\
&\overset{(1.51)}{=} -\frac{n}{2^n} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= -\frac{n}{2^n} + 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= -\frac{n}{2^n} + 2 - \frac{2}{2^n} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.29.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{1.59}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 0 = \frac{0}{0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{1.60}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&\overset{(1.60)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.6.
Aus Aufgabe 1.29 erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k+1)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}\\&\overset{(1.59)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\\&=1.\end{aligned}$$

Lemma 1.2.
Es gilt die folgende Faktorisierung:

$$(n+1)^2\cdot(3n+8)=3n^3+14n^2+19n+8 \tag{1.61}$$

Beweis.
Wir berechnen die linke Seite von (1.61):

$$\begin{aligned}(n+1)^2\cdot(3n+8)&=\left(n^2+2n+1\right)\cdot(3n+8)\\&=3n^3+6n^2+3n+8n^2+16n+8\\&=3n^3+14n^2+19n+8.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.30.
Man zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k\cdot(k+2)}=\frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)} \tag{1.62}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n=0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0}\frac{4}{k\cdot(k+2)}=0=\frac{0\cdot(3\cdot 0+5)}{(0+1)\cdot(0+2)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k\cdot(k+2)}=\frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)}. \tag{1.63}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{k\cdot(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k\cdot(k+2)} + \frac{4}{(n+1)\cdot(n+3)} \\
&\overset{(1.63)}{=} \frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{4}{(n+1)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n\cdot(3n+5)}{n+2} + \frac{4}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n\cdot(3n+5)\cdot(n+3)+4\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(3n^2+5n)\cdot(n+3)+4\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{3n^3+5n^2+9n^2+15n+4n+8}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{3n^3+14n^2+19n+8}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&\overset{(1.61)}{=} \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2\cdot(3n+8)}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(3n+8)}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(3(n+1)+5)}{(n+2)\cdot(n+3)}
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 1.7.
Aus Aufgabe 1.30 erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\cdot(k+2)} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k\cdot(k+2)} \\
&\overset{(1.62)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt hieraus der Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+2)} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 1.31.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3) \cdot (k+4)} = \frac{n}{4 \cdot (n+4)} \tag{1.64}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{(k+3) \cdot (k+4)} = 0 = \frac{0}{4 \cdot (0+4)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3) \cdot (k+4)} = \frac{n}{4 \cdot (n+4)}. \tag{1.65}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+3) \cdot (k+4)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3) \cdot (k+4)} + \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5)} \\
&\overset{(1.65)}{=} \frac{n}{4 \cdot (n+4)} + \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5)} \\
&= \frac{1}{n+4} \cdot \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{n+5} \right) \\
&= \frac{1}{n+4} \cdot \frac{n^2 + 5n + 4}{4 \cdot (n+5)} \\
&= \frac{1}{n+4} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+4)}{4 \cdot (n+5)} \\
&= \frac{n+1}{4 \cdot (n+5)}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.8.
Aus Aufgabe 1.31 erhalten wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)\cdot(k+4)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)\cdot(k+4)} \\ &\overset{(1.64)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4\cdot(n+4)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4\cdot n\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Lemma 1.3.
Es gilt die folgende Faktorisierung:

$$(n+2)^2\cdot(n+5) = n^3+9n^2+24n+20. \tag{1.66}$$

Beweis.
Wir berechnen die linke Seite von (1.66):

$$\begin{aligned}(n+2)^2\cdot(n+5) &= \left(n^2+4n+4\right)\cdot(n+5) \\ &= n^3+4n^2+4n+5n^2+20n+20 \\ &= n^3+9n^2+24n+20.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.32.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)} \tag{1.67}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n=0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{4}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{4}{(0+1)\cdot(0+2)\cdot(0+3)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
&= \frac{4}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{(0+1) \cdot (0+4)}{(0+2) \cdot (0+3)}.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} = \frac{(n+1) \cdot (n+4)}{(n+2) \cdot (n+3)}. \tag{1.68}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{4}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} + \frac{4}{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} \\
&\overset{(1.68)}{=} \frac{(n+1) \cdot (n+4)}{(n+2) \cdot (n+3)} + \frac{4}{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} \\
&= \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \left((n+1) \cdot (n+4) + \frac{4}{n+4} \right) \\
&= \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+4)^2 + 4}{(n+4)} \\
&= \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \frac{(n+1) \cdot (n^2 + 8n + 16) + 4}{(n+4)} \\
&= \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \frac{n^3 + n^2 + 8n^2 + 8n + 16n + 16 + 4}{(n+4)} \\
&= \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \frac{n^3 + 9n^2 + 24n + 20}{(n+4)} \\
&\overset{(1.66)}{=} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot \frac{(n+2)^2 \cdot (n+5)}{(n+4)} \\
&= \frac{(n+2) \cdot (n+5)}{(n+3) \cdot (n+4)}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 1.9.
Aus Aufgabe 1.32 erhalten wir den Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.67)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Insbesondere folgt hieraus:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 1.33.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \tag{1.69}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}. \tag{1.70}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} + (-1)^{2n+1-1} \cdot \frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+2-1} \cdot \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.70)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.34.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \tag{1.71}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = 0 = \frac{0}{2\cdot 0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{1.72}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&\overset{(1.72)}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{1}{2n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{2n+3}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{2n+3} \\
&= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{2n+3} \\
&= \frac{n+1}{2n+3} \\
&= \frac{n+1}{2\cdot(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.10.
Aus Aufgabe 1.34 erhalten wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} \\
&\overset{(1.71)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.35.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)} \tag{1.73}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2\cdot(2\cdot 0+1)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}. \tag{1.74}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&\overset{(1.74)}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{n}{2} + \frac{(n+1)}{(2n+3)}\right) \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{n\cdot(2n+3)+2\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n^2+3n+2n+2)}{2\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n^2+5n+2)}{2\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot(2n+3)} \\
&= (n+1)\cdot\frac{(n+2)}{2\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot(2n+3)}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.11.
Aus Aufgabe 1.35 folgt, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$$

divergent ist.

Aufgabe 1.36.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = \frac{n}{3n+1} \tag{1.75}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = 0 = \frac{0}{3\cdot 0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}. \tag{1.76}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} + \frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} \\
&\overset{(1.76)}{=} \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} \\
&= \frac{1}{3n+1}\cdot\left(n + \frac{1}{3n+4}\right) \\
&= \frac{1}{3n+1}\cdot\frac{3n^2+4n+1}{3n+4} \\
&= \frac{1}{3n+1}\cdot\frac{(n+1)\cdot(3n+1)}{3n+4} \\
&= \frac{n+1}{3n+4} \\
&= \frac{n+1}{3\cdot(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 1.12.
Aus Aufgabe 1.36 erhalten wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)} \\ &\overset{(1.75)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.37.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} = \frac{n}{4n+1} \tag{1.77}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} = 0 = \frac{0}{4\cdot 0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}. \tag{1.78}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} \\ &\overset{(1.78)}{=} \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{4n+5}\right) \\
&= \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{4n^2+5n+1}{4n+5} \\
&= \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{(n+1)\cdot(4n+1)}{4n+5} \\
&= \frac{n+1}{4n+5} \\
&= \frac{n+1}{4\cdot(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.13.
Aus Aufgabe 1.37 erhalten wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} \\
&\overset{(1.77)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.38.
Sei $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r\cdot k-(r-1))\cdot(r\cdot k+1)} = \frac{n}{r\cdot n+1} \tag{1.79}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n=0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{(r\cdot k-(r-1))\cdot(r\cdot k+1)} = 0 = \frac{0}{r\cdot 0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r \cdot k - (r-1)) \cdot (r \cdot k + 1)} = \frac{n}{r \cdot n + 1}. \tag{1.80}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(r \cdot k - (r-1)) \cdot (r \cdot k + 1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r \cdot k - (r-1)) \cdot (r \cdot k + 1)} + \frac{1}{(r \cdot n + 1) \cdot (r \cdot n + r + 1)} \\
&\overset{(1.80)}{=} \frac{n}{r \cdot n + 1} + \frac{1}{(r \cdot n + 1) \cdot (r \cdot n + r + 1)} \\
&= \frac{1}{r \cdot n + 1} \cdot \left(n + \frac{1}{r \cdot n + r + 1} \right) \\
&= \frac{1}{r \cdot n + 1} \cdot \frac{r \cdot n^2 + r \cdot n + n + 1}{r \cdot n + r + 1} \\
&= \frac{1}{r \cdot n + 1} \cdot \frac{(n+1) \cdot (r \cdot n + 1)}{r \cdot n + r + 1} \\
&= \frac{r \cdot n + 1}{r \cdot n + r + 1} \\
&= \frac{r \cdot n + 1}{r \cdot (n+1) + 1}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.14.
Sei $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Aus Aufgabe 1.38 erhalten wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(r \cdot k - (r-1)) \cdot (r \cdot k + 1)} &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r \cdot k - (r-1)) \cdot (r \cdot k + 1)} \\
&\overset{(1.79)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{r \cdot n + 1} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n \cdot \left(r + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{r + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir die folgenden Reihen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{2} \cdot k - \left(\sqrt{2} - 1\right)\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot k + 1\right)} = \frac{n}{\sqrt{2} \cdot n + 1} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\pi \cdot k - (\pi - 1)) \cdot (\pi \cdot k + 1)} = \frac{n}{\pi \cdot n + 1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\pi};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(e \cdot k - (e - 1)) \cdot (e \cdot k + 1)} = \frac{n}{e \cdot n + 1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 1.39 (Verallgemeinerte geometrische Summenformel)**.**
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahl mit $x \neq y$. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} \tag{1.81}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k \cdot y^{n-k} = x^0 \cdot y^{0-0} = 1 = \frac{x-y}{x-y} = \frac{x^{0+1} - y^{0+1}}{x - y}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}. \tag{1.82}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k \cdot y^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n+1-k} + x^{n+1} \cdot y^{n+1-(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n+1-k} + x^{n+1} \\
&= y \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot y^{n-k} + x^{n+1} \\
&\overset{(1.82)}{=} y \cdot \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} + x^{n+1} \\
&= \frac{y \cdot \left(x^{n+1} - y^{n+1}\right) + (x - y) \cdot x^{n+1}}{x - y} \\
&= \frac{x^{n+1} \cdot y - y^{n+2} + x^{n+2} - x^{n+1} \cdot y}{x - y} \\
&= \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x - y}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahl mit $x \neq y$ und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(y-x)\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k\cdot y^{n-k} &= (y-x)\cdot\left(y^n + y^{n-1}\cdot x + y^{n-2}\cdot x^2 + \ldots + y\cdot x^{n-1} + x^n\right)\\
&= y\cdot\left(y^n + y^{n-1}\cdot x + \ldots + y\cdot x^{n-1} + x^n\right) - x\cdot\left(y^n + y^{n-1}\cdot x + \ldots + y\cdot x^{n-1} + x^n\right)\\
&= y^{n+1} + y^n\cdot x + \ldots + y^2\cdot x^{n-1} + y\cdot x^n - x\cdot y^n - y^{n-1}\cdot x^2 - \ldots - y\cdot x^n - x^{n+1}\\
&= y^{n+1} - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Teilt man die Gleichung durch $y - x$ so folgt (1.81).
Zweiter Beweis:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahl mit $x \neq y$ und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche. Wir verwenden für den Beweis die geometrische Summenformel (1.51):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x^k\cdot y^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} x^k\cdot y^n\cdot y^{-k}\\
&= y^n\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k\cdot y^{-k}\\
&= y^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{y}\right)^k\\
&= y^n\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}\\
&= y^n\cdot\frac{\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y^{n+1}}}{\frac{y-x}{y}}\\
&= y^n\cdot\frac{y\cdot\left(y^{n+1}-x^{n+1}\right)}{y^{n+1}\cdot(y-x)}\\
&= y^n\cdot\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y^n\cdot(y-x)}\\
&= \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x}\\
&= \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.40.
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eine reelle Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k = \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} \right) \tag{1.83}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} k \cdot x^k &= 1 \cdot x^1 \\ &= x \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot (x-1) \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot \left(1 \cdot x - \frac{x^1 - 1}{x-1} \right).\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k = \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} \right). \tag{1.84}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot x^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k + (n+1) \cdot x^{n+1} \\ &\overset{(1.84)}{=} \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} \right) + (n+1) \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} + (n+1) \cdot \frac{x-1}{x} \cdot x^{n+1} \right) \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} + (n+1) \cdot (x-1) \cdot x^n \right) \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^{n+1} + n \cdot x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} - (n+1) \cdot x^n \right) \\ &= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^{n+1} - \frac{x^n - 1}{x-1} - x^n \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^{n+1} - \frac{x^n - 1 + (x-1) \cdot x^n}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^{n+1} - \frac{x^n - 1 + x^{n+1} - x^n}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \right).
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Erster Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k &= 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \ldots + (n-1) \cdot x^{n-1} + n \cdot x^n \\
&= x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n \\
&\quad + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n \\
&\quad\quad x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n \\
&\quad\quad\quad \vdots \\
&\quad\quad\quad + x^{n-1} + x^n \\
&\quad\quad\quad\quad + x^n \\
&= 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n - 1 \\
&\quad 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n - 1 - x^1 \\
&\quad 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n - 1 - x^1 - x^2 - x^3 \\
&\quad\quad\quad \vdots \\
&\quad 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n - 1 - x^1 - x^2 - x^3 - \ldots - x^{n-2} \\
&\quad 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + x^n - 1 - x^1 - x^2 - x^3 - \ldots - x^{n-2} - x^{n-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{i=0}^{j} x^i \right) \\
&\overset{(1.51)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1 - x^{j+1}}{1-x} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \right) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - x^{j+1}}{1-x} \right) \\
&= n \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - x^{j+1} \right) \\
&= n \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^{j+1} \\
&= n \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{n}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j \\
&= n \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{n}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1 - x^n}{1-x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n - n \cdot x^{n+1} - n}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \\
&= -\frac{n \cdot x^{n+1}}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x} \\
&= -\frac{x}{1-x} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{1-x^n}{1-x} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n-1}{x-1} \right).
\end{aligned}
$$

Zweiter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Offensichtlich ist (1.83) erfüllt für $x = 0$. Sei also von nun an $x \neq 0$. Mit Hilfe der Differentialrechnung schreiben wir:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k &= x \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} \\
&= x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{k=0}^{n} x^k \right] \\
&\overset{(1.51)}{=} x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right] \\
&= x \cdot \frac{-(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\
&= -x \cdot \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
&= -\frac{x}{1-x} \cdot \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1})}{1-x} \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x) - (1-x^{n+1})}{1-x} \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left((n+1) \cdot x^n - \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n + x^n - \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n + \frac{x^n \cdot (x-1) - x^{n+1} + 1}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n + \frac{x^{n+1} - x^n - x^{n+1} + 1}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n + \frac{1-x^n}{x-1} \right) \\
&= \frac{x}{x-1} \cdot \left(n \cdot x^n - \frac{x^n-1}{x-1} \right).
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 1.41.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)! - 2 \cdot ((2k-2)!)}{2^k} = \frac{(2n)!}{2^n} - 1 \tag{1.85}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{0} \frac{(2k)! - 2 \cdot ((2k-2)!)}{2^k} &= 0 \\ &= 1 - 1 \\ &= \frac{(2 \cdot 0)!}{2^0} - 1.\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)! - 2 \cdot ((2k-2)!)}{2^k} = \frac{(2n)!}{2^n} - 1. \tag{1.86}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k)! - 2 \cdot ((2k-2)!)}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)! - 2 \cdot ((2k-2)!)}{2^k} + \frac{(2n+2)! - 2 \cdot ((2n)!)}{2^{n+1}} \\ &\overset{(1.86)}{=} \frac{(2n)!}{2^n} - 1 + \frac{(2n+2)! - 2 \cdot ((2n)!)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n} - 1 + \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}} - \frac{2 \cdot ((2n)!)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n} - 1 + \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}} - \frac{(2n)!}{2^n} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}} - 1 \\ &= \frac{(2 \cdot (n+1))!}{2^{n+1}} - 1.\end{aligned}$$

□

2 Induktionsaufgaben zu Binomialkoeffizienten

Definition 2.1 (Binomialkoeffizient)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Der Binomialkoeffizient ist definiert, wobei $0 \leq k \leq n$ eine natürliche Zahl ist, als:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & \text{, falls } k = 0 \\ \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} & \text{, falls } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{, falls } k > n \end{cases} \tag{2.1}$$

Lemma 2.1.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{2.2}$$

Beweis.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &\overset{(2.1)}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n+1-k)!} \cdot \left(\frac{(n+1-k)!}{(n-k)!} + \frac{k!}{(k-1)!} \right) \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n+1-k)!} \cdot (n+1-k+k) \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n+1-k)!} \cdot (n+1) \\ &= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.1 (Binomischer Lehrsatz)**.**
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \tag{2.3}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot x^{0-0} \cdot y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^{0-k} \cdot y^k.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k. \tag{2.4}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y) \cdot (x+y)^n \\
&\overset{(2.4)}{=} (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^{n-(k-1)} \cdot y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + y^{n+1} \\
&\overset{(2.2)}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} \cdot x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + \binom{n+1}{n+1} \cdot y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.2.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.5}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&\overset{(2.2)}{=} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&\overset{\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}}{=} \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&\overset{(2.6)}{=} 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Gleichung (2.5) folgt direkt aus dem binomischen Lehrsatz (2.3) für $x = y = 1$:

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n \\
&\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 2.3.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \tag{2.7}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} = \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{2.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} \\
&\overset{(2.2)}{=} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&\overset{\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}}{=} \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&\overset{(2.8)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \\
&\overset{(2.8)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Gleichung (2.7) folgt direkt aus dem binomischen Lehrsatz (2.3) für $x = 1$ und $y = -1$:

$$\begin{aligned}
0 &= 0^n \\
&= (1-1)^n \\
&\overset{(2.3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

3 Induktionsaufgaben zu endlichen Produkten

Aufgabe 3.1.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k - 2) = \prod_{k=1}^{n} (n + k) \tag{3.1}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{1} (4k - 2) = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2 = (1 + 1) = \prod_{k=1}^{1} (1 + k)\,.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n} (4k - 2) = \prod_{k=1}^{n} (n + k)\,. \tag{3.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} (4k - 2) &= \left[\prod_{k=1}^{n} (4k - 2)\right] \cdot (4 \cdot (n + 1) - 2) \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n} (4k - 2)\right] \cdot (4n + 4 - 2) \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n} (4k - 2)\right] \cdot (4n + 2) \\
&= (4n + 2) \cdot \prod_{k=1}^{n} (4k - 2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.2)}{=} (4n+2) \cdot \prod_{k=1}^{n} (n+k) \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} (4n+2) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (n+k+1) \\
&= (4n+2) \cdot (n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n+1+k) \\
&= 2 \cdot (2n+1) \cdot (n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n+1+k) \\
&= (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n+1+k) \\
&= [(n+1)+n] \cdot [(n+1)+(n+1)] \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n+1+k) \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) \,.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.2.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right) = \frac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^{n+1}-1}} \tag{3.3}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{0} \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^{2^0}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{2^2 - 1}{2^1} = \frac{2^{2^{0+1}} - 1}{2^{2^{0+1}-1}}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right) = \frac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^{n+1}-1}}. \tag{3.4}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) &= \left[\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\\
&\overset{(3.4)}{=} \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\\
&= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}\cdot\frac{2^{2^{n+1}}+1}{2^{2^{n+1}}}\\
&= \frac{\left(2^{2^{n+1}}-1\right)\cdot\left(2^{2^{n+1}}+1\right)}{2^{2^{n+1}-1}\cdot 2^{2^{n+1}}}\\
&= \frac{\left(2^{2^{n+1}}\right)^2-1}{2^{2^{n+1}-1+2^{n+1}}}\\
&= \frac{2^{2\cdot 2^{n+1}}-1}{2^{2\cdot 2^{n+1}-1}}\\
&= \frac{2^{2^{n+1+1}}-1}{2^{2^{n+1+1}-1}}\\
&= \frac{2^{2^{n+2}}-1}{2^{2^{n+2}-1}}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n\in\mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Der direkte Beweis der Formel (3.3) verwendet die Eins-Erweiterung und die dritte binomische Formel:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) &= \left(1+\frac{1}{2^1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2^4}\right)^2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&\vdots\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)^2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\\
&= \frac{1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{2\cdot\left(2^{2^{n+1}}-1\right)}{2^{2^{n+1}}}\\
&= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.1.
Aus Formel (3.3) erhalten wir das folgende unendliche Produkt:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}\\
&= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}}}\\
&= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Die nächste Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der Formel aus Aufgabe 3.2.

Aufgabe 3.3.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ eine komplexe Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right) = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z} \tag{3.5}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{0} \left(1 + z^{2^k}\right) &= \left(1 + z^{2^0}\right) \\ &= (1 + z) \\ &= \frac{(1 + z) \cdot (1 - z)}{1 - z} \\ &= \frac{1 - z^2}{1 - z} \\ &= \frac{1 - z^{2^{0+1}}}{1 - z}.\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right) = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z}. \tag{3.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + z^{2^k}\right) &= \left[\prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)\right] \cdot \left(1 + z^{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z} \cdot \left(1 + z^{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\left(1 - z^{2^{n+1}}\right) \cdot \left(1 + z^{2^{n+1}}\right)}{1 - z} \\ &= \frac{1 - \left(z^{2^{n+1}}\right)^2}{1 - z} \\ &= \frac{1 - z^{2 \cdot 2^{n+1}}}{1 - z} \\ &= \frac{1 - z^{2^{n+2}}}{1 - z}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir verwenden das selbe Vorgehen wie in Aufgabe 3.2 und beweisen (3.5) mittels einer Eins-Erweiterung und der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) &= \left(1+z^{2^0}\right)\cdot\left(1+z^{2^1}\right)\cdot\left(1+z^{2^2}\right)\cdot\left(1+z^{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+z^{2^n}\right)\\
&= (1+z)\cdot\left(1+z^2\right)\cdot\left(1+z^4\right)\cdot\left(1+z^8\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+z^{2^n}\right)\\
&= \frac{(1-z)(1+z)\cdot(1+z^2)\cdot(1+z^4)\cdot(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{(1-z^2)\cdot(1+z^2)\cdot(1+z^4)\cdot(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{(1-z^4)\cdot(1+z^4)\cdot(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{(1-z^8)\cdot(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{(1-z^{16})\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&\vdots\\
&= \frac{\left(1-z^{2^{n-1}}\right)\cdot\left(1+z^{2^{n-1}}\right)\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{\left(1-\left(z^{2^{n-1}}\right)^2\right)\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{\left(1-z^{2\cdot 2^{n-1}}\right)\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{(1-z^{2^n})\cdot(1+z^{2^n})}{1-z}\\
&= \frac{1-(z^{2^n})^2}{1-z}\\
&= \frac{1-z^{2\cdot 2^n}}{1-z}\\
&= \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.
Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Ist nun speziell $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$ dann folgt:

$$\left|\lim_{n\to\infty} z^{2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|z^{2^{n+1}}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} (|z|)^{2^{n+1}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (|z|)^{n+1} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

woraus $\lim_{n\to\infty} z^{2^{n+1}} = 0$ folgt. Damit erhalten wir mit (3.5) das Unendliche Produkt:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + z^{2^k}\right) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z} \\
&= \frac{1}{1 - z}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.4.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n\cdot(n+1)} \tag{3.7}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{1} 4^k = 4 = 2^2 = 2^{1\cdot 2} = 2^{1\cdot(1+1)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n\cdot(n+1)}. \tag{3.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} 4^k &= \left[\prod_{k=1}^{n} 4^k\right] \cdot 4^{n+1} \\
&\overset{(3.8)}{=} 2^{n\cdot(n+1)} \cdot 4^{n+1} \\
&= 2^{n\cdot(n+1)} \cdot \left(2^2\right)^{n+1} \\
&= 2^{n\cdot(n+1)} \cdot 2^{2\cdot(n+1)} \\
&= 2^{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)} \\
&= 2^{(n+1)\cdot(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir zeigen (3.7) direkt mit Hilfe der Gaußschen Summenformel (1.1):

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} 4^k &= 4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n \\ &= 4^{1+2+3+\ldots+n} \\ &= 4^{\sum_{k=1}^{n} k} \\ &\overset{(1.1)}{=} 4^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \\ &= \left(2^2\right)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \\ &= 2^{2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \\ &= 2^{n\cdot(n+1)}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.5.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{n!} \tag{3.9}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{0}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=1=\frac{1}{1}=\frac{1}{0!}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=\frac{1}{n!}. \tag{3.10}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)=\left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(3.10)}{=} \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n+1) - n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n! \cdot (n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - 1 + \frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k} \\
&= \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.6.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \tag{3.11}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 = \frac{1}{1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}. \tag{3.12}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &\overset{(3.12)}{=} \frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1-1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\ &= \frac{(n-1)!}{n!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot n}\\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.7.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{n+1}{2} \tag{3.13}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{n+1}{2}. \tag{3.14}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&\overset{(3.14)}{=} \frac{n+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1+1}{n+1}\\
&= \frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\
&= \frac{1}{2}\cdot(n+2)\\
&= \frac{n+2}{2}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\\
&= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\\
&= \frac{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{2 \cdot n!} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.8.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \tag{3.15}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2 \cdot 1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}. \tag{3.16}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left[\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\overset{(3.16)}{=} \frac{n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n + 1} \\
&= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n^2 + 2n}{n + 1} \\
&= \frac{1}{2n} \cdot \frac{n \cdot (n + 2)}{n + 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{n + 2}{n + 1} \\
&= \frac{n + 2}{2 \cdot (n + 1)}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Die Formel (3.15) folgt direkt aus den Formeln (3.11) und (3.13):

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&\overset{(3.11)}{=} \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&\overset{(3.13)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{n + 1}{2} \\
&= \frac{n + 1}{2n}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.9.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} k \tag{3.17}
$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$
\prod_{k=1}^{0} \left(1 + \frac{2}{k}\right) = 1 = \sum_{k=1}^{1} k.
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n+1} k. \tag{3.18}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit 1.1:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{2}{k}\right) &= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\\
&\overset{(3.18)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k+\frac{2}{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)\\
&\overset{(1.1)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} k+\frac{2}{n+1}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k+(n+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n+2} k.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit Formel (1.1) folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+2)}{\prod_{k=1}^{n} k}\\
&= \frac{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\
&= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\
&= \frac{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot n!}\\
&= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\\
&\overset{(1.1)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} k.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.10.
Wir bezeichnen mit $\zeta_{n,k} := e^{2\pi ik/n}$, $0 \le k \le n-1$, die n-ten Einheitswurzeln. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} = (-1)^{n-1} \tag{3.19}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{0} \zeta_{1,k} = 1 = (-1)^0 = (-1)^{1-1} .$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} = (-1)^{n-1} . \tag{3.20}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \zeta_{n+1,k} &= \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i\cdot k}{n+1}} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi i\cdot k}{n+1}}\right] \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2\pi i\cdot k}{n}}\right] \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n-1} e^{\cdot\frac{2\pi i\cdot k}{n}}\right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&\overset{(3.20)}{=} \left((-1)^{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= (-1)^{\frac{(n-1)\cdot n}{n+1}} \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= \left(e^{i\pi}\right)^{\frac{(n-1)\cdot n}{n+1}} \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= e^{\frac{i\pi\cdot(n-1)\cdot n}{n+1}} \cdot e^{\frac{2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= e^{\frac{i\pi\cdot(n-1)\cdot n+2\pi i\cdot n}{n+1}} \\
&= e^{\frac{i\pi\cdot((n-1)\cdot n+2n)}{n+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\frac{i\pi\cdot\left(n^2-n+2n\right)}{n+1}} \\
&= e^{\frac{i\pi\cdot\left(n^2+n\right)}{n+1}} \\
&= e^{\frac{i\pi\cdot n\cdot(n+1)}{n+1}} \\
&= e^{i\pi\cdot n} \\
&= \left(e^{i\pi}\right)^n \\
&= (-1)^n .
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Für den direkten Beweis der Formel (3.19) werden zwei Ansätze vorgestellt.
Erster Ansatz:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Der erste Ansatz verwendet die Gaußsche Summenformel (1.1). Damit folgt direkt:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi ik}{n}} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{4\pi ik}{n}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}+\frac{4\pi i}{n}+\ldots+\frac{2\pi i\cdot(n-2)}{n}+\frac{2\pi i\cdot(n-1)}{n}} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot(1+2+\ldots+(n-2)+(n-1))} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}} \\
&= e^{\pi i\cdot(n-1)} \\
&= \left(e^{\pi i}\right)^{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} .
\end{aligned}
$$

Zweiter Ansatz:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man kann die Formel auch mittels eines Koeffizientenvergleichs beweisen. Die komplexen Zahlen $\zeta_{n,k}$, $0 \le k \le n-1$, sind alle Nullstellen des Polynoms $p(z) := z^n - 1$. Es folgt die Linearfaktorzerlegung:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \zeta_{n,k}\right) = z^n - 1. \tag{3.21}$$

Wenn man die linke Seite in (3.21) ausklammert, erhält man

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \zeta_{n,k}\right) &= q_n(z) + \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\zeta_{n,k}\right) \\
&= q_n(z) + (-1)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_{n,k}
\end{aligned}
$$

$$= q_n(z) + (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k},$$

mit dem Polynom

$$q_n(z) := \prod_{k=0}^{n-1} (z - \zeta_{n,k}) - \prod_{k=0}^{n-1} (-\zeta_{n,k}).$$

Das Polynom $q_n(z)$ hat keinen konstanten Koeffizienten und es folgt mittels Koeffizientenvergleich

$$(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} = -1. \tag{3.22}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} &= 1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} \\
&= (-1)^{2n-2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} \\
&= (-1)^{n-2} \cdot (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \zeta_{n,k} \\
&= (-1)^{n-2} \cdot (-1) \\
&= (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.11.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1} \tag{3.23}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{0} \left(1 + \frac{1}{1+k}\right) = 1 = 2 - 1 = 2 - \frac{1}{1} = 2 - \frac{1}{0+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 2-\frac{1}{n+1}. \tag{3.24}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{(n+1)+k}\right) &= \left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\\
&\qquad\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\\
&\qquad\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\\
&= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right]\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\\
&\overset{(3.24)}{=} \left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\\
&= \left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{(2n+2)}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n+3)}{(2n+2)}\cdot\frac{(n+1)}{(n+2)}\\
&= \left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{(2n+3)}{(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)}{(n+2)}\\
&= \frac{(2n+2-1)}{(n+1)}\cdot\frac{(2n+3)}{(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)}{(n+2)}\\
&= \frac{(2n+1)}{(n+1)}\cdot\frac{(2n+3)}{(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)}{(n+2)}\\
&= \frac{2n+3}{n+2}\\
&= \frac{n+2+n+1}{n+2}\\
&= 1+\frac{n+1}{n+2}\\
&= 2-1+\frac{n+1}{n+2}\\
&= 2-\frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.12.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \tag{3.25}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{1} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = 1 = 1^3 = \sum_{k=1}^{1} k^3.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{3.26}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit Aufgabe 1.14 aus dem letzen Kapitel:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 &= \left[\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}\right)^2 \\
&= \left[\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 \\
&\overset{(3.26)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \cdot \frac{(n^2+4n+4)}{n^2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{4}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) \\
&\overset{(1.28)}{=} \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{4}{n} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + n \cdot (n+1)^2 + (n+1)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2 \cdot (n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^3.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Für den direkten Beweis von (3.25) verwenden wir die Aufgabe 1.28 aus dem letzten Kapitel:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 &= \left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{4+1}{4-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{5+1}{5-1}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{3}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{3^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{2^2} \cdot \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{6^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-3)^2} \cdot \frac{n^2}{(n-2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} \\
&= \frac{\cancel{3^2}}{1^2} \cdot \frac{\cancel{4^2}}{2^2} \cdot \frac{\cancel{5^2}}{\cancel{3^2}} \cdot \frac{\cancel{6^2}}{\cancel{4^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(n-1)^2}}{\cancel{(n-3)^2}} \cdot \frac{n^2}{\cancel{(n-2)^2}} \cdot \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n-1)^2}} \\
&= \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n^2}{1} \cdot \frac{(n+1)^2}{1} \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \\
&\overset{(??)}{=} \sum_{k=1}^{n} k^3.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.13.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \tag{3.27}
$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$
\prod_{k=2}^{1} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot (1+2) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right).
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\cdot(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right). \tag{3.28}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k\cdot(k+1)}\right) &= \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\cdot(k+1)}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)\\
&\overset{(3.28)}{=} \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+2)}{n}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)-2}{(n+1)\cdot(n+2)}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+2)-2}{(n+1)}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+3n+2-2}{(n+1)}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+3n}{(n+1)}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n\cdot(n+3)}{(n+1)}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.14.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2-1\right) \tag{3.29}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(2 \cdot 0 + 1) \cdot \prod_{k=1}^{0} (2k-1)^2 = 1 = \prod_{k=1}^{0} \left(4k^2 - 1\right).$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right). \tag{3.30}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(2n+3) \cdot \prod_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= (2n+3) \cdot (2n+1)^2 \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \\
&= (2n+3) \cdot (2n+1) \cdot (2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \\
&\overset{(3.30)}{=} (2n+3) \cdot (2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right) \\
&= \left(4n^2 + 8n + 3\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right) \\
&= \left(4n^2 + 8n + 4 - 1\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right) \\
&= \left(4 \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right) - 1\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right) \\
&= \left(4 \cdot (n+1)^2 - 1\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} \left(4k^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)^2 &= (2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[(2k-1) \cdot (2k-1)\right] \\
&= (2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} (2n+1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (2 \cdot (k+1) - 1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2n+1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&= (2n+1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left[(2k+1) \cdot (2k-1) \right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 1 \right).
\end{aligned}
$$

□

4 Induktionsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Das folgende Kapitel enthält eine Reihe von Induktionsaufgaben die mit trigonometrischen Funktionen zu tun haben. Unter anderem werden endliche Summen, endliche Produkte und Integralidentitäten von Sinus und Kosinus Funktionen behandelt.

Definition 4.1 (Sinus, Kosinus, Tangens)**.**
Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den komplexen Sinus, Kosinus und Tangens wie folgt:

$$\sin(z) := \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{iz} - e^{-iz}\right); \tag{4.1}$$

$$\cos(z) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{iz} + e^{-iz}\right); \tag{4.2}$$

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}. \tag{4.3}$$

Insbesondere ist für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ der reelle Sinus, Kosinus und Tangens gegeben durch:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right); \tag{4.4}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right); \tag{4.5}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{4.6}$$

Bemerkung 4.1 (Eulersche Identität)**.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt aus der Definition der Sinus- und Kosinusfunktion die Eulersche Identität:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \frac{1}{2} \cdot e^{ix} + \frac{1}{2} \cdot e^{ix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{ix} + \frac{1}{2} \cdot e^{-ix} + \frac{1}{2} \cdot e^{ix} - \frac{1}{2} \cdot e^{-ix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ &\overset{(4.5)}{=} \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}$$

$$= \cos(x) + i \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$
$$\overset{(4.4)}{=} \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

Das nachfolgende Lemma enthält einige für dieses Kapitel nützliche trigonometrische Formeln:

Lemma 4.1.

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt folgendes Additionstheorem:
$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \tag{4.7}$$
$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \tag{4.8}$$
2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahl. Dann gilt:
$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x - y) + \sin(x + y)). \tag{4.9}$$
3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahl. Dann gilt:
$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x - y) - \cos(x + y)). \tag{4.10}$$
4. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:
$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x). \tag{4.11}$$
5. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x). \tag{4.12}$$
6. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1. \tag{4.13}$$

Beweis.
Wir beweisen die Aussagen nacheinander.

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt:
$$\begin{aligned}
\cos(x + y) + i \cdot \sin(x + y) &= e^{i \cdot (x+y)} \\
&= e^{ix+iy} \\
&= e^{ix} \cdot e^{iy} \\
&= (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \\
&= \cos(x) \cdot \cos(y) + i \cdot \cos(x) \cdot \sin(y) + i \cdot \sin(x) \cdot \cos(y) + i^2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&= \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) + i \cdot (\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)).
\end{aligned}$$

   Vergleich von Realteil und Imaginärteil ergibt die gewünschten Additionstheoreme.

2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt mit dem Additionstheorem der Sinusfunktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot (\sin(x-y) + \sin(x+y)) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(x-y) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x+y) \\
&\overset{(4.7)}{=} \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(-y) + \cos(x) \cdot \sin(-y)) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(y) - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(y) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(y) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \sin(y) \\
&= \sin(x) \cdot \cos(y) .
\end{aligned}$$

3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt mit dem Additionstheorem der Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y)) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cdot \cos(x+y) \\
&\overset{(4.8)}{=} \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \cos(-y) - \sin(x) \cdot \sin(-y)) \\
&\qquad - \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)) \\
&\qquad - \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&\qquad - \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&= \sin(x) \cdot \sin(y) .
\end{aligned}$$

4. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \sin(x+x) \\
&= \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x) \\
&= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) .
\end{aligned}$$

5. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit dem Additionstheorem für die Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &\overset{(4.8)}{=} \cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\sin(x)\\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x).\end{aligned}$$

6. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &\overset{(4.4)}{=} \left(\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^2 + \cos^2(x)\\ &\overset{(4.5)}{=} \left(\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^2\\ &= -\frac{1}{4}\cdot\left(e^{2ix} - 2\cdot e^{ix}\cdot e^{-ix} + e^{-2ix}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(e^{2ix} + 2\cdot e^{ix}\cdot e^{-ix} + e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\cdot\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\cdot e^{2ix} + \frac{2}{4} - -\frac{1}{4}\cdot e^{-2ix} + \frac{1}{4}\cdot e^{2ix} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot e^{-2ix}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.1.
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{4.14}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{0} \cos(kx) = \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{4.15}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + \cos((n+1)\cdot x)\\ &\overset{(4.15)}{=} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos((n+1)\cdot x)\\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos((n+1)\cdot x)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Mit (4.9) folgt:

$$\begin{aligned}2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos((n+1)\cdot x) &\overset{(4.9)}{=} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}-(n+1)\cdot x\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+(n+1)\cdot x\right)\right)\\ &= \sin\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)+\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdot x\right)\\ &= -\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)+\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdot x\right).\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos((n+1)\cdot x)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right) + -\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)+\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdot x\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2.
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Setzen wir in (4.14) $x = \frac{2\pi}{n}$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\ &\overset{(4.9)}{=} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{n}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{2} \\
&\overset{(4.7)}{=} \frac{\sin(2\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos(2\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.2 (Produkt von Euler)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \tag{4.16}
$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$
\prod_{k=1}^{0} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = 1 = \frac{\sin(x)}{2^0 \sin\left(\frac{x}{2^0}\right)}.
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$
\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}. \tag{4.17}
$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \left[\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\
&\overset{(4.17)}{=} \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin(x)}{2^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n.}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\\
&\overset{(4.11)}{=} \frac{\sin(x)}{2^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n.}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{x}{2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{\sin(x)}{2^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n.}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\\
&= \frac{\sin(x)}{2^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt zusammen mit (4.11):

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \frac{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\sin\left(2\cdot\frac{x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{4\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{4\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{4\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)}\\
&\vdots\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(x\right)\cdot\sin\left(2\cdot\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\\
&= \frac{\sin(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\\
&= \frac{\sin(x)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{n-1}\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\sin(x)\cdot\sin\left(2\cdot\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\sin(x)}{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 4.3.
Man kann den Grenzwert von (4.16) mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

berechnen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n} = 0$$

eine Nullfolge. Damit ist

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \lim_{n\to\infty} x\cdot\frac{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\\
&= x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\\
&= x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\\
&= x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&= x
\end{aligned}
$$

Damit folgt der Grenzwert

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.16)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\sin(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.4 (Vietasche Produktformel)**.**
Setzt man $x = \pi/2$ in das unendliche Produkt in Bemerkung 4.3 ein, so folgt das unendliche Produkt:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\pi/2^n \in [-\pi, \pi]$ somit folgt aus der Halbwinkelformel:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}.$$

Setzt man $c_1 := \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1/2}$ und definiert rekursiv die Folge:

$$c_{n+1} := \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot c_n},$$

so gilt $\cos\left(\pi/2^{n+1}\right) = c_n$. Damit erhalten wir schließlich die Produktdarstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} c_n \\
&= c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 (Kosinus Integral-Identität I)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \tag{4.18}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot 0}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{0}\frac{2k-1}{2k}\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}. \tag{4.19}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\cdot\cos^{2n+1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cdot\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2(x)\right)\cdot\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x - (2n+1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(4.19)}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.4 (Kosinus Integral-Identität II).
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \tag{4.20}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot 0+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \\ &= \prod_{k=1}^{0} \frac{2k}{2k+1}\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \tag{4.21}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\cos^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\cdot\cos^{2n+2}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(x)\right)\cdot\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x - (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&\overset{(4.21)}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.5 (Formel von de Moivre)**.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx) \tag{4.22}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^0 = 1 = \cos(0 \cdot x) + i \cdot \sin(0 \cdot x).$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx). \tag{4.23}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^{n+1} &= (\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(x))\\ &\overset{(4.23)}{=} (\cos(nx) + i \cdot \sin(nx)) \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(x))\\ &= \cos(nx) \cdot \cos(x) + i \cdot \sin(nx) \cdot \cos(x)\\ &\qquad + i \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x) + i^2 \cdot \sin(nx) \cdot \sin(x)\\ &= \cos(nx) \cdot \cos(x) - \sin(nx) \cdot \sin(x)\\ &\qquad + i \cdot (\sin(nx) \cdot \cos(x) + \cos(nx) \cdot \sin(x))\\ &\overset{(4.8)}{=} \cos((n+1) \cdot x) + i \cdot (\sin(nx) \cdot \cos(x) + \cos(nx) \cdot \sin(x))\\ &\overset{(4.8)}{=} \cos((n+1) \cdot x) + i \cdot \sin((n+1) \cdot x).\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige relle Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann zusammen mit der eulerschen Identität:

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n &= \left(e^{ix}\right)^n \\ &= \underbrace{e^{ix} \cdot e^{ix} \cdot \ldots \cdot e^{ix}}_{n\text{-mal}} \\ &= e^{\overbrace{ix + ix + \ldots + ix}^{n\text{-mal}}} \\ &= e^{inx} \\ &= \cos(nx) + i \cdot \sin(nx).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.5 (Folgerung aus der Formel von de Moivre)**.**
Mit dem binomischen Lehrsatz (für komplexe Zahlen) erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cos^{n-k}(x) \cdot i^k \cdot \sin^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k}(x) \cdot i^{2k} \cdot \sin^{2k}(x) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \binom{n}{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1}(x) \cdot i^{2k+1} \cdot \sin^{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k}(x) \cdot \sin^{2k}(x) \\ &\qquad + i \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1}(x) \cdot \sin^{2k+1}(x).\end{aligned}$$

Mit der Formel von de Moivre (4.22) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k}(x) \cdot \sin^{2k}(x) \\ &\qquad + i \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1}(x) \cdot \sin^{2k+1}(x).\end{aligned}$$

Durch den Vergleich von den Real- und Imaginärteil folgen schließlich die Formeln:

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k} \cdot \cos^{n-2k}(x) \cdot \sin^{2k}(x), \tag{4.24}$$

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k+1} \cdot \cos^{n-2k-1}(x) \cdot \sin^{2k+1}(x). \tag{4.25}$$

Bemerkung 4.6 (n-te Potenz von Sinus und Kosinus)**.**
Durch den Vergleich von Real- und Imaginärteil lassen sich mit den Definitionen (4.4) und (4.5), sowie dem (komplexen) binomischen Lehrsatz Formeln für die n-ten Potenzen der Sinus- und Kosinusfunktionen herleiten. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned}
\cos^n(x) &\overset{(4.5)}{=} \frac{1}{2^n} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-k)\cdot x} \cdot e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-2k)\cdot x} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (\cos((n-2k)\cdot x) + i \cdot \sin((n-2k)\cdot x)) \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cos((n-2k)\cdot x) + \frac{i}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sin((n-2k)\cdot x).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir die beiden Formeln:

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cos((n-2k)\cdot x), \tag{4.26}$$

$$0 = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sin((n-2k)\cdot x). \tag{4.27}$$

Mit dem selben vorgehen und der Tatsache, dass $i = e^{i\pi/2}$ ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sin^n(x) &\overset{(4.5)}{=} \frac{1}{2^n \cdot i^n} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n \cdot i^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-k)\cdot x} \cdot e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n} \sum_{k=0}^{n} e^{i\pi k} \cdot \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-2k)\cdot x} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} e^{i\pi k - i\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n} \cdot \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-2k)\cdot x} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(n-2k)} \cdot \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-2k)\cdot x} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot e^{i\cdot(n-2k)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\cos\left((n-2k)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i \cdot \sin\left((n-2k)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cos\left((n-2k) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{i}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sin\left((n-2k) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Nach Vergleich von Real- und Imaginärteil folgen die Formeln:

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \cos\left((n-2k) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right), \tag{4.28}$$

$$0 = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sin\left((n-2k) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{4.29}$$

Bemerkung 4.7 (Arkustangens Additionstheorem)**.**
Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|xy| < 1$ gilt:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \tag{4.30}$$

Aufgabe 4.6.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) \tag{4.31}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = 0 = \arctan\left(\frac{0}{0+2}\right).$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right). \tag{4.32}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{(n+1)^2+n+1+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.32)}{=} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{(n+1)^2+n+2}\right) \\
&\overset{(4.30)}{=} \arctan\left(\frac{\frac{n}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2+n+2}}{1 - \frac{n}{n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2+n+2}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{n\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)+n+2}{(n+2)\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{n\cdot(n+1)^2+n\cdot(n+2)+n+2}{(n+2)\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{n\cdot(n+1)^2+(n+1)\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n\cdot(n+1)+n+2)}{(n+2)\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+2)\cdot\left((n+1)^2+n+2\right)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+2)\cdot(n^2+3n+3)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+3)\cdot(n^2+3n+3)-(n^2+3n+3)-n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+3)\cdot(n^2+3n+3)-(n^2+4n+3)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+3)\cdot(n^2+3n+3)-(n+3)\cdot(n+1)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+3)\cdot(n^2+3n+3-n-1)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot(n^2+2n+2)}{(n+3)\cdot(n^2+2n+2)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{n+1}{n+3}\right).
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 4.8.
Der Arkustangens ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion. Daher gilt mit Aufgabe 4.6:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.31)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) \\
&= \arctan\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}\right) \\
&= \arctan(1) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.7.
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot k \cdot (k+1) + 1}\right) = \arctan\left((n+1)\cdot x\right) - \arctan(x) \tag{4.33}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot k \cdot (k+1) + 1}\right) = 0 = \arctan(x) - \arctan(x) = \arctan\left((0+1)\cdot x\right) - \arctan(x)$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot k \cdot (k+1) + 1}\right) = \arctan\left((n+1)\cdot x\right) - \arctan(x). \tag{4.34}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot k \cdot (k+1) + 1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot k \cdot (k+1) + 1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot (n+1)\cdot(n+2) + 1}\right) \\
&\overset{(4.34)}{=} \arctan\left((n+1)\cdot x\right) - \arctan(x) + \arctan\left(\frac{x}{x^2 \cdot (n+1)\cdot(n+2) + 1}\right) \\
&\overset{(4.30)}{=} \arctan\left(\frac{(n+1)\cdot x + \frac{x}{x^2\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1}}{1 - (n+1)\cdot x \cdot \frac{x}{x^2\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1}}\right) - \arctan(x) \\
&= \arctan\left(\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)\cdot x^3 + (n+1)\cdot x + x}{x^2\cdot(n+1)\cdot(n+2) + 1 - (n+1)\cdot x^2}\right) - \arctan(x)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \arctan\left(\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)\cdot x^3+(n+2)\cdot x}{x^2\cdot(n+1)\cdot(n+1)+1}\right)-\arctan(x)\\
&= \arctan\left(\frac{(n+2)\cdot x\cdot\left((n+1)^2\cdot x^2+1\right)}{x^2\cdot(n+1)^2+1}\right)-\arctan(x)\\
&= \arctan((n+2)\cdot x)-\arctan(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.9.
Der Arkustangens hat im unendlichen den Grenzwert:

$$\lim_{y\to\infty}\arctan(y)=\frac{\pi}{2}.$$

Sei $x\in\mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt mit Aufgabe 4.7:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{x}{x^2\cdot k\cdot(k+1)+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{x}{x^2\cdot k\cdot(k+1)+1}\right)\\
&\overset{(4.33)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\arctan((n+1)\cdot x)-\arctan(x)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\arctan((n+1)\cdot x)-\arctan(x)\\
&= \frac{\pi}{2}-\arctan(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.8.
Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi m\mid m\in\mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{4.35}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n=0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0}\sin(kx)=0=\frac{\sin\left(\frac{(0+1)\cdot x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{0\cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{4.36}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) + \sin((n+1)\cdot x)\\
&\overset{(4.36)}{=} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin((n+1)\cdot x)\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \sin((n+1)\cdot x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \sin\left(2\cdot\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&\overset{(4.11)}{=} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&\overset{(4.9)}{=} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(-\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(\frac{(n+2)\cdot x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right) - \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin\left(\frac{(n+2)\cdot x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{(n+2)\cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.10.
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Setzen wir in (4.35) $x = \frac{2\pi}{n}$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) &\overset{(4.35)}{=} \frac{\sin\left(\frac{2\pi\cdot(n+1)}{2n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi n}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi\cdot(n+1)}{n}\right)\cdot\sin(\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Bemerkung 4.11 (Summe der n-ten Einheitswurzeln)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $\zeta_{n,k} = e^{2\pi i k/n}$, $0 \leq k \leq n-1$, die n-ten Einheitswurzeln. Zusammen mit den Bemerkungen 4.2 und 4.10 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k/n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \cos(2\pi) - \cos(2\pi) + i\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \sin(2\pi) - \sin(2\pi)\right) \\ &= 1 - \cos(2\pi) + \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \sin(2\pi)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.9 (Sinus Integral-Identität I)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \tag{4.37}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot 0}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{0} \frac{2k-1}{2k}\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}. \tag{4.38}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x) \cdot \sin^{2n+1}(x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \cdot \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(x)\right) \cdot \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x - (2n+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(4.38)}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.10 (Sinus Integral-Identität II).
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \tag{4.39}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot 0+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \\ &= \prod_{k=1}^{0} \frac{2k}{2k+1}\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \tag{4.40}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\cdot\sin^{2n+2}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot\cos(x)\cdot\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\cdot\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(x)\right)\cdot\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x - (2n+2)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(4.40)}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$
$$= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1}.$$

□

Aufgabe 4.11.
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left((2k-1) \cdot x\right) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)} \tag{4.41}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \sin\left((2k-1) \cdot x\right) = 0 = \frac{\sin^2(0 \cdot x)}{\sin(x)}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left((2k-1) \cdot x\right) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)} \tag{4.42}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus (4.13) folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sin^2(nx) + \cos^2(nx) \overset{(4.13)}{=} 1 \overset{(4.13)}{=} \sin^2\left((n+1) \cdot x\right) + \cos^2\left((n+1) \cdot x\right). \tag{4.43}$$

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin\left((2k-1) \cdot x\right) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left((2k-1) \cdot x\right) + \sin\left((2n+1) \cdot x\right)$$
$$\overset{(4.42)}{=} \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)} + \sin\left((2n+1) \cdot x\right)$$
$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(x) \cdot \sin\left((2n+1) \cdot x\right)}{\sin(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.10)}{=} \frac{\sin^2(nx) + \frac{1}{2}\cdot(\cos(-2nx) - \cos(2\cdot(n+1)\cdot x))}{\sin(x)}\\
&= \frac{\sin^2(nx) + \frac{1}{2}\cdot(\cos(2nx) - \cos(2\cdot(n+1)\cdot x))}{\sin(x)}\\
&\overset{(4.12)}{=} \frac{\sin^2(nx) + \frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2(nx) - \sin^2(nx) - \cos(2\cdot(n+1)\cdot x)\right)}{\sin(x)}\\
&= \frac{\sin^2(nx) + \frac{1}{2}\cdot\cos^2(nx) - \frac{1}{2}\cdot\sin^2(nx) - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(n+1)\cdot x)}{\sin(x)}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\sin^2(nx) + \frac{1}{2}\cdot\cos^2(nx) - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(n+1)\cdot x)}{\sin(x)}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2(nx) + \cos^2(nx)\right) - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(n+1)\cdot x)}{\sin(x)}\\
&\overset{(4.43)}{=} \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2((n+1)\cdot x) + \cos^2((n+1)\cdot x)\right) - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot(n+1)\cdot x)}{\sin(x)}\\
&\overset{(4.12)}{=} \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\sin^2((n+1)\cdot x) + \cos^2((n+1)\cdot x)\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\cos^2((n+1)\cdot x) - \sin^2((n+1)\cdot x)\right)}{\sin(x)}\\
&= \frac{\sin^2((n+1)\cdot x)}{\sin(x)}.
\end{aligned}
$$

□

5 Induktionsaufgaben zu Ungleichungen und Abschätzungen

Aufgabe 5.1 (Bernoulli Ungleichung)**.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $x \geq -1$. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x. \tag{5.1}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x. \tag{5.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\overset{(5.2)}{\geq} (1 + n \cdot x) \cdot (1+x) \\
&= 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 \\
&= 1 + (n+1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + (n+1) \cdot x.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1 (Zur Bernoulli Ungleichung)**.**
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x.$$

Aufgabe 5.2.
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $0 \leq x \leq 1$. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x. \tag{5.3}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x = 1 + \left(2^0 - 1\right) \cdot x.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x. \tag{5.4}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\overset{(5.4)}{\leq} (1 + (2^n - 1) \cdot x) \cdot (1+x) \\
&= 1 + (2^n - 1) \cdot x + x + (2^n - 1) \cdot x^2 \\
&= 1 + (2^n - 1 + 1) \cdot x + (2^n - 1) \cdot x^2 \\
&= 1 + 2^n \cdot x + (2^n - 1) \cdot x^2 \\
&\leq 1 + 2^n \cdot x + (2^n - 1) \cdot x \\
&= 1 + (2^n + 2^n - 1) \cdot x \\
&= 1 + (2 \cdot 2^n - 1) \cdot x \\
&= 1 + \left(2^{n+1} - 1\right) \cdot x.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl mit $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \\
&= 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{k-1} \\
&= 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 1 + x \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + 1 - 1 \right) \\
&= 1 + x \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} - 1 \right) \\
&= 1 + x \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 \right) \\
&= 1 + x \cdot (2^n - 1) \\
&= 1 + (2^n - 1) \cdot x.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.3.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{5.5}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1}} = 1 = 3 - 2 = 3 - \frac{2}{\sqrt{1}}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} \geq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{5.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot \sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.6)}{\leq} 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}} \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&< 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}\right)} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&< 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&< 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\cdot(n+1)} - \frac{1}{2\cdot(n+1)} \right) \\
&= 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 5.2.
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt in (5.5):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot\sqrt{k}} < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 5.4.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \tag{5.7}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{0} \frac{2k-1}{2k} = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 0 + 1}}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \tag{5.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right] \cdot \frac{2 \cdot (n+1) - 1}{2 \cdot (n+1)} \\ &\overset{(5.8)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}\end{aligned} \tag{5.9}$$

Können wir die Ungleichung

$$\sqrt{3n+4} \cdot (2n+1) \leq \sqrt{3n+1} \cdot (2n+2) \tag{5.10}$$

zeigen, dann folgt in (5.9)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} &\leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \cdot \frac{2n+1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (n+1) + 1}}.\end{aligned}$$

Damit wäre die Aussage für $n+1$ erfüllt. Wir zeigen also, dass (5.10) erfüllt ist. Dafür zeigen wir die Gültigkeit der folgenden Ungleichung:

$$(3n+4) \cdot (2n+1)^2 \leq (3n+1) \cdot (2n+2)^2. \tag{5.11}$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}(3n+4) \cdot (2n+1)^2 &= (3n+4) \cdot \left(4n^2 + 4n + 1\right) \\ &= 12n^3 + 12n^2 + 3n + 16n^2 + 16n + 4 \\ &= 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(3n+1)\cdot(2n+2)^2 &= (3n+1)\cdot\left(4n^2+8n+4\right)\\ &= 12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4\\ &= 12n^3+28n^2+20n+4.\end{aligned}$$

Damit ist (5.11) Äquivalent zur Ungleichung

$$\begin{aligned}12n^3+28n^2+19n+4 &\leq 12n^3+28n^2+20n+4\\ \Leftrightarrow \quad 1 &\leq n.\end{aligned}$$

Damit gilt die Ungleichung (5.11). Mit der Monotonie der Wurzelfunktion folgt:

$$\begin{aligned}\sqrt{3n+4}\cdot(2n+1) &= \sqrt{(3n+4)\cdot(2n+1)^2}\\ &\leq \sqrt{(3n+1)\cdot(2n+2)^2}\\ &= \sqrt{(3n+4)}\cdot(2n+2)\,.\end{aligned}$$

Damit gilt (5.10) und somit auch (5.9).

□

Aufgabe 5.5.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}. \tag{5.12}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 = \sqrt{1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}. \tag{5.13}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &\overset{(5.13)}{\geq} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}\\ &> \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{n}\right)^2+1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\\ &= \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{5.14}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &\overset{(5.14)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{n}{\sqrt{n}}\\ &= \sqrt{n}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.3.
Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ so gilt in (5.12):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Aufgabe 5.6.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$2^n \geq n + 1. \tag{5.15}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$2^0 = 1 = 0 + 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$2^n \geq n + 1. \tag{5.16}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\overset{(5.16)}{\geq} 2 \cdot (n + 1) \\ &= 2n + 2 \\ &\geq n + 2 \\ &= (n + 1) + 1. \end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit der Bernoulli Ungleichung (5.1) für $x = 1$ folgt:

$$2^n = (1 + 1)^n \overset{(5.1)}{\geq} 1 + n \cdot 1 = n + 1.$$

□

Bemerkung 5.4.
Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ so gilt in (5.15):

$$2^n > n + 1.$$

Aufgabe 5.7.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n^2 - 2n - 1 > 0. \tag{5.17}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 3$ gilt:

$$3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2 > 0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gelte:

$$n^2 - 2n - 1 > 0. \tag{5.18}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - 2 \cdot (n+1) - 1 &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 1\\ &= n^2 - 2n - 1 + 2n - 2\\ &= n^2 - 2n - 1 + 2 \cdot (n-1)\\ &\overset{(5.18)}{>} 2 \cdot (n-1)\\ &\overset{\text{für } n \geq 3}{>} 0.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := x^2 - 2x - 1.$$

Die Funktion f ist als Polynom eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung

$$f' = 2x - 2 = 2 \cdot (x-1).$$

Für alle reellen Zahlen x mit $x > 1$ ist $f'(x) > 0$. Somit ist die Funktion f auf dem Intervall $(1, \infty]$ streng monoton steigend. Sei nun $n \in \mathbb{N}_3$. Dann gilt aufgrund der Monotonie von f.

$$n^2 - 2n - 1 = f(n) \geq f(3) = 2 > 0.$$

□

Aufgabe 5.8.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$2^n \geq n^2. \tag{5.19}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 4$ gilt:

$$2^4 = 16 = 4^2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gelte:

$$2^n \geq n^2. \tag{5.20}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\overset{(5.20)}{\geq} 2 \cdot n^2 \\ &= n^2 + n^2 \\ &\overset{(5.17)}{>} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ beliebig. Für $n = 4$ gilt in (5.19) die Gleichheit. Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\ &> \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} \\ &= n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \\ &= n + n \cdot (n-1) \\ &= n + n^2 - n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 5.5.
Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ so gilt in (5.19):

$$2^n > n^2.$$

Aufgabe 5.9.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$2^n > n^3. \tag{5.21}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 10$ gilt:

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 10}$ gelte:

$$2^n > n^3. \tag{5.22}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&\overset{(5.22)}{>} 2n^3 \\
&= n^3 + n^3 \\
&= n^3 + n^3 - 1 + 1 \\
&= n^3 + (n-1) \cdot \left(n^2 + n + 1\right) + 1 \\
&> n^3 + (n-1) \cdot \left(n^2 + n\right) + 1 \\
&> n^3 + 3 \cdot \left(n^2 + n\right) + 1 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)^3 .
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.10.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n! > 2^n. \tag{5.23}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 4$ gilt:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gelte:

$$n! > 2^n. \tag{5.24}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\overset{(5.24)}{>} (n+1) \cdot 2^n \\ &= n \cdot 2^n + 2^n \\ &> 2^n + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ beliebig. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &> 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^{n-2} \cdot 4 \\ &= 2^{n-2} \cdot 2^2 \\ &= 2^{n-2+2} \\ &= 2^n.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.11.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}. \tag{5.25}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 3$ gilt:

$$3 \cdot \sqrt{3} > 3 + \sqrt{3}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gelte:

$$n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}. \tag{5.26}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sqrt{n+1} &= n \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \\ &> n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &\overset{(5.26)}{>} n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &> n + 1 + \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ beliebig. Für $n = 3$ gilt die Abschätzung (5.25). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Zunächst folgt aus:

$$2xy < x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq y,$$

die Abschätzung:

$$\begin{aligned}2 &= 2 \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \\ &< \left(\sqrt[4]{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 \\ &= \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$:

$$-\frac{2}{\sqrt{n}} \geq -1. \tag{5.28}$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}n \cdot \sqrt{n} &= (n - 1 + 1) \cdot \sqrt{n} \\ &= (n-1) \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} \\ &= \frac{(n-1)}{\sqrt{n}} \cdot n + \sqrt{n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot n + \sqrt{n} \\
&= \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot n + \sqrt{n} \\
&= \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot n + \sqrt{n} \\
&\overset{(5.27)}{>} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot n + \sqrt{n} \\
&\overset{(5.28)}{\geq} (2-1) \cdot n + \sqrt{n} \\
&= 1 \cdot n + \sqrt{n} \\
&= n + \sqrt{n}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.12.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \tag{5.29}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\frac{4^1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 = \frac{2}{1} = \frac{(2 \cdot 1)!}{(1!)^2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \tag{5.30}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{4^{n+1}}{n+2} &= \frac{4 \cdot 4^n}{n+2} \\
&= \frac{4 \cdot 4^n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{4 \cdot (n+1)}{(n+2)} \\
&\overset{(5.30)}{<} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{4 \cdot (n+1)}{(n+2)} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2 \cdot (2n+2)}{(n+2)} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2 \cdot (2n+2) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}{(n+2) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+2) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{n^2 + 2n + \frac{1}{2}n + 1} \\
&< \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{n^2 + 2n + 1} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(2n)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2} \\
&= \frac{(2 \cdot (n+1))!}{((n+1)!)^2}
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.13.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}. \tag{5.31}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 = 1 + \frac{0}{2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}. \tag{5.32}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \\
&\overset{(5.32)}{\geq} 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&> 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5.14.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}. \tag{5.33}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{1} k^k = 1^1 = 1 = 1^{\frac{1\cdot 2}{2}} = 1^{\frac{1\cdot(1+1)}{2}}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}. \tag{5.34}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} k^k &= \left[\prod_{k=1}^{n} k^k\right] \cdot (n+1)^{n+1} \\
&\overset{(5.34)}{\leq} n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+1} \\
&< (n+1)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n+1} \\
&= (n+1)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)} \\
&= (n+1)^{\frac{n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)}{2}} \\
&= (n+1)^{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}}
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Für alle k mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$k^k \leq n^k. \tag{5.35}$$

Zusammen mit der Gaußschen Summenformel (1.1) folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} k^k &= 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \\
&\overset{(5.35)}{\leq} n^1 \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot \ldots \cdot n^n \\
&= n^{1+2+3+\ldots+n} \\
&\overset{(1.1)}{=} n^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.15.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 6}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} > (n+1) \cdot n^2. \tag{5.36}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 6$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{5} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^{1-1} + 2 \cdot 2^{2-1} + 3 \cdot 2^{3-1} + 4 \cdot 2^{4-1} + 5 \cdot 2^{5-1} + 6 \cdot 2^{6-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^5 \\
&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 32 \\
&= 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 \\
&= 321 \\
&> 252 \\
&= (6+1) \cdot 6^2.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 6}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} > (n+1) \cdot n^2. \tag{5.37}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} + (n+1) \cdot 2^n \\
&\overset{(??)}{>} (n+1) \cdot n^2 + (n+1) \cdot 2^n \\
&= (n+1) \cdot \left(n^2 + 2^n\right) \\
&> (n+1) \cdot \left(n^2 + 3n + 2\right) \\
&= (n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\
&= (n+2) \cdot (n+1)^2.
\end{aligned}
$$

Es gilt im übrigen für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 6}$:

$$2^n > 3n + 2.$$

□

Aufgabe 5.16.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!. \tag{5.38}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(0+1)! = 1! = 1 = \sum_{k=1}^{0} k!.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!. \tag{5.39}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
((n+1)+1)! &= (n+2)! \\
&= (n+2) \cdot (n+1)! \\
&\overset{(??)}{\geq} (n+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} k! + \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (n+1) \cdot \left(n! + \sum_{k=1}^{n-1} k! \right) + \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (n+1) \cdot n! + (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k! + \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (n+1)! + (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k! + \sum_{k=1}^{n} k! \\
&> (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k!.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\
&> n \cdot n! \\
&= n! + n! + \ldots + n! \\
&= \sum_{k=1}^{n} n!
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} k!.$$

□

Aufgabe 5.17.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \tag{5.40}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 = 2 - 1 = 2 - \frac{1}{1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \tag{5.41}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&< 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= 2 - \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&< 2 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

da

$$\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{>0} > 1$$

gilt.

□

Bemerkung 5.6.
Aufgabe 5.17 impliziert für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Damit ist die Folge $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ streng monoton wachsend und beschränkt durch 2 und daher konvergent. Aufgabe 5.17 impliziert weiter die folgende Abschätzung für den Grenzwert der Folge S_n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\overset{(5.40)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.18.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n! > n^2. \tag{5.42}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 4$ gilt:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 4^2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gelte:

$$n! > n^2. \tag{5.43}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\overset{(5.43)}{>} (n+1) \cdot n^2 \\ &= (n+1) \cdot (1 + n - 1)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.1)}{\geq} (n+1)\cdot(1+2\cdot(n-1)) \\
&= (n+1)\cdot(1+2n-2) \\
&> (n+1)\cdot(1+2n-n) \\
&= (n+1)\cdot(n+1) \\
&= (n+1)^2\,.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ beliebig. Mit Hilfe der Aufgabe 5.10 und Aufgabe 5.8 schätzen wir ab:

$$n! \overset{(5.23)}{>} 2^n \overset{(5.19)}{\geq} n^2.$$

□

Aufgabe 5.19.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n^3 > 2n+1. \tag{5.44}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 2$ gilt:

$$2^3 = 8 > 5 = 2\cdot 2 + 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gelte:

$$n^3 > 2n+1. \tag{5.45}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&\overset{(5.45)}{>} 2n + 1 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&> 2n + 1 + 3n + 1 \\
&= 2n + 1 + 2n + n + 1 \\
&> 2n + 1 + n + 1 \\
&> 2n + 1 + 1 + 1 \\
&= 2n + 1 + 2 \\
&= 2\cdot(n+1) + 1.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig. Im Induktionsschritt der Aufgabe 5.18 wurde die Abschätzung

$$n^2 > n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \tag{5.46}$$

hergeleitet. Damit schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
n^3 &= n^3 + n^2 - n^2 \\
&= n^2 \cdot (n+1) - n^2 \\
&\overset{(5.46)}{>} (n+1) \cdot (n+1) - n^2 \\
&= (n+1)^2 - n^2 \\
&= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\
&= 2n + 1.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.20.
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $0 \geq x \geq 1$. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}. \tag{5.47}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$(1-x)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1 + 0 \cdot x}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}. \tag{5.48}$$

III. **Induktionsschritt:**

Zunächst sei bemerkt, dass für $0 < x < 1$ gilt:

$$1 < \frac{1}{1-x}. \tag{5.49}$$

Dann folgt für $(n+1)$:

$$(1-x)^{n+1} = (1-x)^n \cdot (1-x)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.48)}{\leq} \frac{1}{1+nx} \cdot (1-x) \\
&= \frac{1-x}{1+(n+1-1)\cdot x} \\
&= \frac{1-x}{1+(n+1)\cdot x - x} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{1-x}\cdot (1-x+(n+1)\cdot x)} \\
&= \frac{1}{1+(n+1)\cdot \frac{x}{1-x}} \\
&\overset{(5.49)}{<} \frac{1}{1+(n+1)\cdot x}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:

Es sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebig natürliche Zahl. Zusammen mit der Bernoulli Ungleichung (5.1) schätzen wir ab:

$$
\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{1-x}-1\right)^n} \\
&\overset{(5.1)}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot\left(\frac{1}{1-x}-1\right)} \\
&= \frac{1}{1+n\cdot\frac{(1-(1-x))}{1-x}} \\
&= \frac{1}{1+n\cdot\frac{x}{1-x}} \\
&\overset{(5.49)}{<} \frac{1}{1+nx}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.21.

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n. \tag{5.50}$$

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{2^1-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n. \tag{5.51}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zunächst:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}.\end{aligned}$$

Damit schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1} &\overset{(5.51)}{>} \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\\ &> \frac{n}{2} + \frac{1}{2^{n+1}-1} + \frac{1}{2^{n+1}-1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\\ &= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}-1}\\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}\\ &> \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Weiter können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1} &\overset{(5.51)}{\geq} n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\\ &< n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\\ &= n + \frac{2^n}{2^n}\\ &= n + 1.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.7 (Divergenz der harmonischen Reihe)**.**
Die Abschätzung

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}$$

impliziert die Divergenz der (harmonischen) Reihe $h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Aufgabe 5.22.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$3^n \cdot (2n+1) \geq n^2 + 3n + 1. \tag{5.52}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$3^0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1 = 0^2 + 3 \cdot 0 + 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$3^n \cdot (2n+1) \geq n^2 + 3n + 1. \tag{5.53}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
3^{n+1} \cdot (2 \cdot (n+1) + 1) &= 3^{n+1} \cdot (2n + 2 + 1) \\
&= 3^{n+1} \cdot (2n+1) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&= 3 \cdot 3^n \cdot (2n+1) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&\overset{(5.53)}{\geq} 3 \cdot \left(n^2 + 3n + 1\right) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&= 3n^2 + 9n + 3 + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&= 3n^2 + 6n + 3n + 3 + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&= 3n^2 + 6n + 3 \cdot (n+1) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&> n^2 + 6n + 3 \cdot (n+1) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&> n^2 + 2n + 3 \cdot (n+1) + 2 \cdot 3^{n+1} \\
&> n^2 + 2n + 3 \cdot (n+1) + 2 \\
&= n^2 + 2n + 3 \cdot (n+1) + 1 + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 + 3 \cdot (n+1) + 1 \\
&= (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1) + 1.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung (5.1) schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} 3^n \cdot (2n+1) &= (1+2)^n \cdot (2n+1) \\ &\overset{(5.1)}{\geq} (1+2n) \cdot (2n+1) \\ &= (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &\geq n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.23.
Wir betrachten die folgende rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = 2; \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{a_n}\right). \tag{5.54}$$

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$1 < a_n \leq 2. \tag{5.55}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$1 < a_1 = 2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$1 < a_n \leq 2. \tag{5.56}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(5.54)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{a_n}\right) \\ &\overset{(5.56)}{\geq} \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{4} \\
&> 1
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{(5.54)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{a_n}\right) \\
&\overset{(5.56)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 + 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3 \\
&= \frac{3}{2} \\
&< 2.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.24.
Wir betrachten die folgende rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = \sqrt{2}; \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}. \tag{5.57}$$

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$a_n \leq 2. \tag{5.58}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$a_1 = \sqrt{2} < 2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$a_n \leq 2. \tag{5.59}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Monotonie der Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{(5.57)}{=} \sqrt{2+a_n} \\ &\overset{(5.59)}{\leq} \sqrt{2+2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5.25.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}. \tag{5.60}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{0+k} = 1 > \frac{13}{24}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}. \tag{5.61}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{>0} \\
&> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&\overset{(5.61)}{>} \frac{13}{24}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.26.
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$x^n - x \cdot n + n - 1 \geq 0. \tag{5.62}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$x^0 - x \cdot 0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$x^n - x \cdot n + n - 1 \geq 0. \tag{5.63}$$

III. **Induktionsschritt:**

Zunächst sei angemerkt, dass folgendes gilt:

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k. \tag{5.64}$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (5.64) ist wegen $x > 0$ ebenfalls größer Null ist. Damit folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} - x \cdot (n+1) + n + 1 - 1 &= x^{n+1} - x \cdot n - x + n + 1 - 1 \\
&= x^{n+1} - x^n + x^n - x \cdot n - x + n + 1 - 1 \\
&= x^{n+1} - x^n - x + 1 + x^n - x \cdot n + n - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.63)}{\geq} x^{n+1} - x^n - x + 1 \\
&= x \cdot (x^n - 1) - (x^n - 1) \\
&= (x-1) \cdot (x^n - 1) \\
&\overset{(5.64)}{=} (x-1) \cdot (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\
&= (x-1)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:

Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Für den direkten Beweis von (5.62) nutzen wir die Bernoulli-Ungleichung (5.1):

$$
\begin{aligned}
x^n - x \cdot n + n - 1 &= (1 + x - 1)^n - x \cdot n + n - 1 \\
&\overset{(5.1)}{\geq} 1 + n \cdot (x-1) - x \cdot n + n - 1 \\
&= 1 + n \cdot x - n - x \cdot n + n - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 5.27 (Verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung)**.**

Wir betrachten reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die entweder $x_i > 0$ oder $-1 \leq x_i \leq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{5.65}$$

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) = 1 = 1 + \sum_{k=1}^{0} x_k.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{5.66}$$

III. **Induktionsschritt:**

Für $(n+1)$ sei zunächst folgendes angemerkt: Sind $x_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq n+1$, dann ist:

$$x_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k > 0.$$

Sind hingegen $-1 \leq x_i \leq 0$ für alle $1 \leq i \leq n+1$, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \leq 0$$

und deswegen

$$x_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k \geq 0.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) &= \left[\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right] \cdot (1+x_{n+1}) \\
&\overset{(5.66)}{\geq} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\right) \cdot (1+x_{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + x_{n+1} + x_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x^k + x_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x^k \\
&\geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x^k.
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 5.8.
Zur Aufgabe 5.27 sei folgendes angemerkt:

1. Setzt man in (5.65) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, für $x \geq -1$, so erhält man die Bernoulli-Ungleichung (5.1). Damit ist die Bernoulli-Ungleichung ein Spezialfall von (5.65).

2. Sind $x_i > 0$ oder $-1 < x_i < 0$, für alle $1 \leq i \leq n$, und ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dann gilt die strikte Abschätzung:

$$\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

3. Betrachtet man speziell $-1 \leq x_i \leq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$, und setzt $z_i = -x_i$ so folgt die Weierstraß-Produkt-Ungleichung:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - z_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} z_k,$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} (1 - z_k) &= \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \\ &\overset{(5.65)}{\geq} 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \\ &= 1 - \left(- \sum_{k=1}^{n} x_k \right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-x_k) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} z_k.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.28.
Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$3^n > n^2. \tag{5.67}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$3^1 = 3 > 1 = 1^2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$3^n > n^2. \tag{5.68}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned}3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &= 3^n + 2 \cdot 3^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(5.68)}{>} n^2 + 2 \cdot 3^n \\
&= n^2 + 2 \cdot (1+2)^n \\
&\overset{(5.1)}{\geq} n^2 + 2 \cdot (1+2n) \\
&= n^2 + 4n + 2 \\
&> n^2 + 2n + 2 \\
&> n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2 .
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
3^n &= (1+2)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k \\
&> \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 \\
&> 2n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^2 \\
&= 2n + 2 \cdot n \cdot (n-1) \\
&= 2n + 2n^2 - 2n \\
&> n^2.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.29.
Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zwei beliebige nicht negative reelle Zahlen. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$(x+y)^n \geq x^n + y^n. \tag{5.69}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$(x+y)^1 = x + y = x^1 + y^1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$(x+y)^n \geq x^n + y^n. \tag{5.70}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) \\
&\overset{(5.70)}{\geq} (x^n + y^n) \cdot (x+y) \\
&= x^{n+1} + y^n \cdot x + x^n \cdot y + y^{n+1} \\
&\geq x^{n+1} + x^n \cdot y + y^{n+1} \\
&\geq x^{n+1} + y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zwei beliebige nicht negative reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt zusammen mit dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
&= x^n + y^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k}_{\geq 0} \\
&\geq x^n + y^n.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.30.

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=0}^{n} k^p \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}. \tag{5.71}$$

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} k^p = 0 < \frac{1}{p+1}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} k^p \leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}. \tag{5.72}$$

III. **Induktionsschritt:**

Zunächst sei angemerkt, dass aus der Bernoulli-Ungleichung (5.1)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{p+1}{n+1} &= 1 + (p+1) \cdot \frac{1}{n+1} \\ &\overset{(5.1)}{\leq} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{p+1} \\ &= \frac{(n+2)^{p+1}}{(n+1)^{p+1}} \end{aligned}$$

folgt. Dann erhalten wir für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^p &= \sum_{k=0}^{n} k^p + (n+1)^p \\ &\overset{(5.72)}{\leq} \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p \\ &= (n+1)^{p+1} \cdot \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} \cdot \left(1 + \frac{p+1}{n+1}\right) \\ &\leq \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} \cdot \frac{(n+2)^{p+1}}{(n+1)^{p+1}} \\ &= \frac{(n+2)^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5.31.

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!. \tag{5.73}$$

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\left(\frac{0+1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 = 0!.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!. \tag{5.74}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus der Bernoulli-Ungleichung (5.1) folgt zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\overset{(5.1)}{\geq} 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Abschätzung:

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{2 \cdot (n+1)^n} > n + 1. \tag{5.75}$$

Dann erhalten wir für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} &= \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{2 \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{(n+1)^n}{2^n} \\
&\overset{(5.74)}{\geq} \frac{(n+2)^{n+1}}{2 \cdot (n+1)^n} \cdot n! \\
&\overset{(5.74)}{\geq} (n+1) \cdot n! \\
&= (n+1)!.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Für alle positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ gilt die Abschätzung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{5.76}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n!} &= \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \\
&\overset{(5.76)}{\leq} \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + \ldots + (n-1) + n) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Aus der Monotonie der n-ten Wurzel folgt:

$$\begin{aligned}
n! &= \left(\sqrt[n]{n!}\right)^n \\
&\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.32.

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$e^n \geq 1 + \frac{3}{2} n. \tag{5.77}$$

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$e^0 = 1 = 1 + \frac{3}{2} \cdot 0.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$e^n \geq 1 + \frac{3}{2} n. \tag{5.78}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= e \cdot e^n \\ &\overset{(5.78)}{\geq} e + \frac{3}{2}en \\ &> 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}en \\ &> 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \\ &= 1 + \frac{3}{2} \cdot (n+1)\,. \end{aligned}$$

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit der Abschätzung $e - 1 > \frac{3}{2}$ und der Bernoulli-Ungleichung (5.1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} e^n &= (1 + e - 1)^n \\ &\overset{(5.1)}{\geq} 1 + (e-1) \cdot n \\ &> 1 + \frac{3}{2}n. \end{aligned}$$

$\square$

6 Induktionsaufgaben zu Matrizen

Für $m \in \mathbb{N}$ bezeichne in diesem Abschnitt $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die $m \times m$ Einheitsmatrix. Weiter schreiben wir:

$$M^n := \underbrace{M \cdot M \cdot \ldots \cdot M \cdot M}_{m\text{-mal}}$$

Aufgabe 6.1.
Wir betrachten die folgende 2×2 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$M^{n+1} = M^n \cdot M$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(6.2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.2.
Wir betrachten die folgende 2×2 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$M^{n+1} = M^n \cdot M$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(6.4)}{=} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-n) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-n) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 - n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.3.
Wir betrachten die folgende 3×3 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
M^0 &= I_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \\ 0 & \frac{0}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+1}{2} & \frac{1-1}{2} \\ 0 & \frac{1-1}{2} & \frac{1+1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^0}{2} & \frac{1-(-1)^0}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^0}{2} & \frac{1+(-1)^0}{2} \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&\overset{(6.6)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 1 & 0 \cdot 0 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 1 - \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 0 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 0 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 1 & 0 \cdot 0 + \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot 1 + \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)\cdot(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)\cdot(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.4.
Wir betrachten die folgende 3×3 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$M^n = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&\overset{(6.8)}{=} 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.5.
Wir betrachten die folgende 3×3 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0^2-0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \cdot M \\ &\overset{(6.10)}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 + \frac{n^2-n}{2} \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 + \frac{n^2-n}{2} \cdot 0 & 1 \cdot 0 + n \cdot 1 + \frac{n^2-n}{2} \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + n \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n+\frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{2n+n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n^2+2n+1-1-n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 6.6.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende 3×3 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot x \\ 0 & 1 & n \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdot x \\ 0 & 1 & 0 \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot x \\ 0 & 1 & n \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&\overset{(6.12)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot x \\ 0 & 1 & n \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + n \cdot x \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + n \cdot x \cdot 0 & 1 \cdot x + 0 \cdot y + n \cdot x \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + n \cdot y \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + n \cdot y \cdot 0 & 0 \cdot x + 1 \cdot y + n \cdot y \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x + n \cdot x \\ 0 & 1 & y + n \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1) \cdot x \\ 0 & 1 & (n+1) \cdot y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.7.
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende 3×3 Diagonalmatrix:

$$M := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & y^n & 0 \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$M^1 = M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \\ 0 & y^1 & 0 \\ 0 & 0 & z^1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & y^n & 0 \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \cdot M \\ &\overset{(6.14)}{=} \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & y^n & 0 \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^n \cdot x + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & x^n \cdot 0 + 0 \cdot y + 0 \cdot 0 & x^n \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x + y^n \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + y^n \cdot y + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + y^n \cdot 0 + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x + 0 \cdot 0 + z^n \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot y + z^n \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + z^n \cdot z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{n+1}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.1.
Seien $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende $m \times m$ Diagonalmatrix:

$$M := \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$M^n = \begin{pmatrix} x_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.8.
Seien $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ drei reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende 3×3 Diagonalmatrix:

$$M := \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} M^k = \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} M^k &= M^0 \\ &= I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-x}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z}{1-z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{0+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{0+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{0+1}}{1-z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} M^k = \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} M^k &= \sum_{k=0}^{n} M^k + M^{n+1} \\ &\overset{(6.16)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\overset{(6.13)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} + y^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} + z^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}+(1-x)\cdot x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}+(1-y)\cdot y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}+(1-z)\cdot z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}+y^{n+1}-y^{n+2}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}+z^{n+1}-z^{n+2}}{1-z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+2}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+2}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+2}}{1-z} \end{pmatrix}.$$

Direkter Beweis:
Seien $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ drei reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} M^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^k$$

$$\overset{(6.13)}{=} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} x^k & 0 & 0 \\ 0 & y^k & 0 \\ 0 & 0 & z^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} x^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} y^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} z^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-y^{n+1}}{1-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Bemerkung 6.2.
Seien $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen. Wir betrachten die folgende

$m \times m$ Diagonalmatrix:

$$M := \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{pmatrix}.$$

Dann folgt zusammen mit der geometrischen Reihe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} M^k &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{pmatrix}^k \\
&\overset{(6.13)}{=} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} x_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} x_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} x_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{n} x_m^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-x_1^{n+1}}{1-x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1-x_2^{n+1}}{1-x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1-x_m^{n+1}}{1-x_m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.9.
Seien $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten die folgende 3×3 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot x & \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & n \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

gilt.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdot x & \frac{0\cdot(0+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & 0 \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot x & \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & n \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&\overset{(6.18)}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \cdot x & \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & n \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot x \cdot 0 + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \cdot 0 & 1 \cdot x + n \cdot x \cdot 1 + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \cdot 0 & 1 \cdot x^2 + n \cdot x \cdot x + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + n \cdot x \cdot 0 & 0 \cdot x + 1 \cdot 1 + n \cdot x \cdot 0 & 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + n \cdot x \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot x + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & x + n \cdot x & x^2 + n \cdot x^2 + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & x + n \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot x & (n+1) \cdot x^2 + \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & (n+1) \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot x & \frac{2\cdot(n+1)+n\cdot(n+1)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & (n+1) \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot x & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot x^2 \\ 0 & 1 & (n+1) \cdot x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

7 Induktionsaufgaben zur Teilbarkeit

Definition 7.1 (Definition Teilbarkeit)**.**
Eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ teilt eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn es eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $b = m \cdot a$ ist.

Das Folgende Lemma werden wir durchgängig in diesem Abschnitt verwenden.

Lemma 7.1 (Teilbarkeit einer Summe von Zahlen)**.**
Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ drei ganze Zahlen. Angenommen a und b sind durch m teilbar. Dann ist auch die Summe $a + b$ durch m teilbar.

Beweis.
Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ drei ganze Zahlen, wobei a und b durch m teilbar sind. Dann existieren ganze Zahlen $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = m \cdot \tilde{a}$$
$$b = m \cdot \tilde{b}.$$

Es ist $\tilde{a} + \tilde{b} \in \mathbb{Z}$ wieder eine ganze Zahl und für die Summe erhalten wir

$$a + b = m \cdot \tilde{a} + m \cdot \tilde{b} = m \cdot \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right).$$

Damit ist $a + b$ durch m teilbar. □

Bemerkung 7.1 (Teilbarkeit einer endlichen Summe von Zahlen)**.**
Aus Lemma 7.1 folgt, dass falls $m \in \mathbb{Z}$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ teilt, dass dann m auch $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ teilt.

Aufgabe 7.1.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$3^n - 3$$

durch 6 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ ist

$$3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$$

durch 6 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$3^n - 3$$

durch 6 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 3 &= 3 \cdot 3^n - 3 \\ &= (2+1) \cdot 3^n - 3 \\ &= 2 \cdot 3^n + 1 \cdot 3^n - 3 \\ &= \underbrace{2 \cdot 3^n}_{\text{Durch 6 teilbar}} + \underbrace{3^n - 3}_{\text{Durch 6 teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen, wieder durch 6 teilbar. Damit ist

$$3^{n+1} - 3$$

durch 6 teilbar.

Direkter Beweis:

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist 3^m eine ungerade Zahl. Damit ist $3^m - 1$ eine gerade Zahl und es existiert ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, so dass $3^m - 1 = 2\tilde{m}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 3^n - 3 &= 3 \cdot \left(3^{n-1} - 1\right) \\ &= 3 \cdot 2\tilde{n} \\ &= 6\tilde{n}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7.2.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$3^{2n} + 7$$

durch 8 teilbar ist.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$3^{2 \cdot 0} + 7 = 1 + 7 = 8$$

durch 8 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$3^{2n} + 7$$

durch 8 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 3^{2\cdot(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\ &= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7 \\ &= 9 \cdot 3^{2n} + 7 \\ &= 8 \cdot 3^{2n} + 1 \cdot 3^{2n} + 7 \\ &= \underbrace{8 \cdot 3^{2n}}_{\text{Durch 8 teilbar}} + \underbrace{3^{2n} + 7}_{\text{Durch 8 teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 8 teilbarer Zahlen, wieder durch 8 teilbar. Damit ist

$$3^{2\cdot(n+1)} + 7$$

durch 8 teilbar.

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned} 3^{2n} + 7 &= 9^n + 7 \\ &= (1+8)^n + 7 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 8^k + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 8^k + \binom{n}{0} \cdot 8^0 + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 8^k + 1 + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 8^k + 8 \\ &= 8 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 8^{k-1} + 1 \right). \end{aligned}$$

$3^{2n} + 7$ lässt sich als Produkt von 8 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar. $\square$

Aufgabe 7.3.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

durch 133 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} 11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} &= 11^2 + 12^{2-1} \\ &= 11^2 + 12^1 \\ &= 121 + 12 \\ &= 133 \end{aligned}$$

durch 133 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$11^{n+1} + 12^{2n-1}$$

durch 133 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 11^{(n+1)+1} + 12^{2\cdot(n+1)-1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^{2n+2-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 11 \cdot 12^{2n-1} + 133 \cdot 12^{2n-1} \\ &= \underbrace{11^{n+1} + 12^{2n-1}}_{\text{Durch 133 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{133 \cdot 12^{2n-1}}_{\text{Durch 133 teilbar}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 133 teilbarer Zahlen, wieder durch 133 teilbar. Damit ist

$$11^{(n+1)+1} + 12^{2\cdot(n+1)-1}$$

durch 133 teilbar.

□

Aufgabe 7.4.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$
$$2^{3n} + 13$$
durch 7 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist
$$2^{3\cdot 0} + 13 = 2^0 + 13 = 1 + 13 = 14$$
durch 7 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist
$$2^{3n} + 13$$
durch 7 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:
$$\begin{aligned} 2^{3\cdot(n+1)} + 13 &= 2^{3n+3} + 13 \\ &= 2^3 \cdot 2^{3n} + 13 \\ &= 8 \cdot 2^{3n} + 13 \\ &= (7+1) \cdot 2^{3n} + 13 \\ &= 7 \cdot 2^{3n} + 1 \cdot 2^{3n} + 13 \\ &= \underbrace{7 \cdot 2^{3n}}_{\text{Durch 7 teilbar}} + \underbrace{2^{3n} + 13}_{\text{Durch 7 teilbar nach (II.)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen, wieder durch 7 teilbar. Damit ist
$$2^{3\cdot(n+1)} + 13$$
durch 7 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
2^{3n} + 13 &= 8^n + 13 \\
&= (1+7)^n + 13 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + 13 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + \binom{n}{0} \cdot 7^0 + 13 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + 1 + 13 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + 14 \\
&= 7 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^{k-1} + 2 \right).
\end{aligned}$$

$2^{3n} + 13$ lässt sich als Produkt von 7 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar. □

Aufgabe 7.5.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$7^{2n} - 2^n$$

durch 47 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$7^{2\cdot 0} - 2^0 = 7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

durch 47 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$7^{2n} - 2^n$$

durch 47 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
7^{2\cdot(n+1)} - 2^{n+1} &= 7^{2n+2} - 2^{n+1} \\
&= 7^2 \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n \\
&= 49 \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n \\
&= (47+2) \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n \\
&= 47 \cdot 7^{2n} + 2 \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n \\
&= \underbrace{47 \cdot 7^{2n}}_{\text{Durch 47 teilbar}} + 2 \cdot \underbrace{\left(7^{2n} - 2^n\right)}_{\text{Durch 47 teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 47 teilbarer Zahlen, wieder durch 47 teilbar. Damit ist

$$7^{2\cdot(n+1)} - 2^{n+1}$$

durch 47 teilbar.

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
7^{2n} - 2^n &= 49^n - 2^n \\
&= (2+47)^n - 2^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 47^k - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 47^k + \binom{n}{0} \cdot 2^{n-0} \cdot 47^0 - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 47^k + 2^n - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 47^k \\
&= 47 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 47^{k-1}.
\end{aligned}$$

$7^{2n} - 2^n$ lässt sich als Produkt von 47 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar. □

Aufgabe 7.6.

Sei $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine natürliche Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^n - 1$$

durch $(x-1)$ teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$x^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

durch $(x-1)$ teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$x^n - 1$$

durch $(x-1)$ teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - 1 &= x \cdot x^n - 1 \\ &= x \cdot x^n - 1 \\ &= (x - 1 + 1) \cdot x^n - 1 \\ &= (x-1) \cdot x^n + x^n - 1 \\ &= \underbrace{(x-1) \cdot x^n}_{\text{Durch } (x-1) \text{ teilbar}} + \underbrace{x^n - 1}_{\text{Durch } (x-1) \text{ teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch $(x-1)$ teilbarer Zahlen, wieder durch $(x-1)$ teilbar. Damit ist

$$x^{n+1} - 1$$

durch $(x-1)$ teilbar.

Direkter Beweis:
Seien $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ zwei natürliche Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) &= x \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) - \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) \\ &= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - 1 - x - x^2 - \ldots - x^{n-1} \\ &= x^n - 1. \end{aligned}$$

Somit ist $x^n - 1$ das Produkt von $x-1$ und $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \tilde{n} \in \mathbb{N}$ und deswegen durch $x-1$ teilbar. $\square$

Bemerkung 7.2.
Mit Aufgabe 7.6 ergeben sich folgenden Aussagen:

1. Für $x = 5$ erhalten wir die Aussage, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $5^n - 1$ durch 4 teilbar ist.
2. Für $x = 6$ erhalten wir die Aussage, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $6^n - 1$ durch 5 teilbar ist.
3. Für $x = 7$ erhalten wir die Aussage, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $7^n - 1$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 7.7.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$$

durch 9 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 1 + 3 \cdot 16 + 5 = 54$$

durch 9 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$$

durch 9 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
10^{n+1} + 3 \cdot 4^{(n+1)+2} + 5 &= 10 \cdot 10^{n+1} + 3 \cdot 4 \cdot 4^{n+2} + 5 \\
&= 10 \cdot 10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 \\
&= (1 + 9) \cdot 10^{n+1} + (3 + 9) \cdot 4^{n+2} + 5 \\
&= 1 \cdot 10^{n+1} + 9 \cdot 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+2} + 9 \cdot 4^{n+2} + 5 \\
&= \underbrace{10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5}_{\text{Durch 9 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{9 \cdot \left(10^n + 4^{n+2}\right)}_{\text{Durch 9 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 9 teilbarer Zahlen, wieder durch 9 teilbar. Damit ist

$$10^{n+1} + 3 \cdot 4^{(n+1)+2} + 5$$

durch 9 teilbar.

$\square$

Aufgabe 7.8.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$3^{n+1} + 2^{3n+1}$$

durch 5 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$3^{0+1} + 2^{3 \cdot 0+1} = 3^1 + 2^{0+1} = 3 + 2 = 5$$

durch 5 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$3^{n+1} + 2^{3n+1}$$

durch 5 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
3^{(n+1)+1} + 2^{3\cdot(n+1)+1} &= 3^{n+1+1} + 2^{3n+3+1} \\
&= 3 \cdot 3^{n+1} + 2^3 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 3 \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 3 \cdot 3^{n+1} + (3+5) \cdot 2^{3n+1} \\
&= 3 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 2^{3n+1} + 5 \cdot 2^{3n+1} \\
&= \quad 3 \cdot \underbrace{\left(3^{n+1} + 2^{3n+1}\right)}_{\text{Durch 5 teilbar nach (IV)}} \quad + \quad \underbrace{5 \cdot 2^{3n+1}}_{\text{Durch 5 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 5 teilbarer Zahlen, wieder durch 5 teilbar. Damit ist

$$3^{(n+1)+1} + 2^{3\cdot(n+1)+1}$$

durch 5 teilbar.

□

Aufgabe 7.9.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$2^{3n} - 1$$

durch 7 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$2^{3 \cdot 0} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

durch 7 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$2^{3n} - 1$$

durch 7 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 2^{3 \cdot (n+1)} - 1 &= 2^{3n+3} - 1 \\ &= 2^3 \cdot 2^{3n} - 1 \\ &= 8 \cdot 2^{3n} - 1 \\ &= (7+1) \cdot 2^{3n} - 1 \\ &= 7 \cdot 2^{3n} + 1 \cdot 2^{3n} - 1 \\ &= \underbrace{7 \cdot 2^{3n}}_{\text{Durch 7 teilbar}} + \underbrace{2^{3n} - 1}_{\text{Durch 7 teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen, wieder durch 7 teilbar. Damit ist

$$2^{3 \cdot (n+1)} - 1$$

durch 7 teilbar.

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
2^{3n} - 1 &= 8^n - 1 \\
&= (1+7)^n - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + \binom{n}{0} \cdot 7^0 - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k + 1 - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^k \\
&= 7 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 7^{k-1}.
\end{aligned}$$

$2^{3n} - 1$ lässt sich als Produkt von 7 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $2^{3n} - 1$ durch 7 teilbar. □

Aufgabe 7.10.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$5^n + 7$$

durch 4 teilbar ist.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$$

durch 4 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$5^n + 7$$

durch 4 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= (4+1) \cdot 5^n + 7 \\ &= 4 \cdot 5^n + 1 \cdot 5^n + 7 \\ &= \underbrace{4 \cdot 5^n}_{\text{Durch 4 teilbar}} + \underbrace{5^n + 7}_{\text{Durch 4 teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 4 teilbarer Zahlen, wieder durch 4 teilbar. Damit ist

$$5^{n+1} + 7$$

durch 4 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned} 5^n + 7 &= (1+4)^n + 7 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 4^k + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 4^k + \binom{n}{0} \cdot 4^0 + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 4^k + 1 + 7 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 4^k + 8 \\ &= 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 4^{k-1} + 2 \right). \end{aligned}$$

$5^n + 7$ lässt sich als Produkt von 4 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $5^n + 7$ durch 4 teilbar. □

Aufgabe 7.11.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$4^n + 15n - 1$$

durch 9 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$4^0 + 15 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

durch 9 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$4^n + 15n - 1$$

durch 9 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung und dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
4^{n+1} + 15 \cdot (n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 15 \cdot (n+1) - 1 \\
&= 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\
&= (1+3) \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\
&= 1 \cdot 4^n + 3 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot 4^n + 15 \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot (4^n + 5) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot ((1+3)^n + 5) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + 5 \right) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + \binom{n}{0} \cdot 3^0 + 5 \right) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + 1 + 5 \right) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + 6 \right) \\
&= 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot 3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^{k-1} + 2 \right) \\
&= \underbrace{4^n + 15n - 1}_{\text{Durch 9 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{9 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^{k-1} + 2 \right)}_{\text{Durch 9 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 9 teilbarer Zahlen, wieder durch 9 teilbar. Damit ist

$$4^{n+1} + 15 \cdot (n+1) - 1$$

durch 9 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
4^n + 15n - 1 &= (1+3)^n + 15n - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + +15n - 1 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + \binom{n}{0} \cdot 3^0 + \binom{n}{1} \cdot 3^1 + 15n - 1 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + 1 + 3n + 15n - 1 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k + 18n \\
&= 9 \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^{k-2} + 2n \right).
\end{aligned}$$

$4^n + 15n - 1$ lässt sich als Produkt von 9 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar. □

Aufgabe 7.12.
Sei $x \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(2x-1)^n - 1$$

durch 2 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$(2x-1)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

durch 2 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(2x-1)^n - 1$$

durch 2 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung und dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}(2x-1)^{n+1}-1 &= (2x-1)\cdot(2x-1)^n-1\\ &= 2x\cdot(2x-1)^n-(2x-1)^n-1\\ &= 2x\cdot(2x-1)^n-(2x-1)^n+1-1-1\\ &= 2x\cdot(2x-1)^n-(2x-1)^n+1-2\\ &= 2x\cdot(2x-1)^n-2-(2x-1)^n+1\\ &= 2x\cdot(2x-1)^n-2-((2x-1)^n-1)\\ &= \underbrace{2\cdot(x\cdot(2x-1)^n-1)}_{\text{Durch 2 teilbar}}-\underbrace{((2x-1)^n-1)}_{\text{Durch 2 teilbar nach (IV)}}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 2 teilbarer Zahlen, wieder durch 2 teilbar. Damit ist

$$(2x-1)^n-1$$

durch 2 teilbar.

Direkter Beweis:

Seien $x\in\mathbb{N}_0$ und $n\in\mathbb{N}_0$ zwei beliebige natürliche Zahlen. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}(2x-1)^n-1 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(2x)^{n-k}\cdot(-1)^k-1\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(2x)^{n-k}\cdot(-1)^k+\binom{n}{n}\cdot(2x)^{n-n}\cdot(-1)^n-1\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(2x)^{n-k}\cdot(-1)^k+(-1)^n-1\end{aligned}$$

Es ist

$$(-1)^n-1=\begin{cases}0 & \text{n gerade}\\ -2 & \text{n ungerade}\end{cases}$$

für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ eine gerade Zahl. Damit existiert ein $\tilde{n}\in\mathbb{Z}$ mit $(-1)^n-1=2\tilde{n}$. Damit ergibt sich schließlich:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(2x)^{n-k}\cdot(-1)^k+(-1)^n-1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot(2x)^{n-k}\cdot(-1)^k+2\tilde{n}$$

$$= 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot (2x)^{n-1-k} \cdot (-1)^k + \tilde{n} \right)$$

$(2x-1)^n - 1$ lässt sich als Produkt von 2 und einer ganzen Zahl schreiben. Damit ist $(2x-1)^n - 1$ durch 2 teilbar. □

Aufgabe 7.13.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$5^{2n} - 3^{2n}$$

durch 8 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$5^{2\cdot 0} - 3^{2\cdot 0} = 5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$

durch 8 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$5^{2n} - 3^{2n}$$

durch 8 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 5^{2\cdot(n+1)} - 3^{2\cdot(n+1)} &= 5^{2n+2} - 3^{2n+2} \\ &= 5^2 \cdot 5^{2n} - 3^2 \cdot 3^{2n} \\ &= 25 \cdot 5^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} \\ &= (16+9) \cdot 5^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} \\ &= 16 \cdot 5^{2n} + 9 \cdot 5^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} \\ &= \underbrace{16 \cdot 5^{2n}}_{\text{Durch 8 teilbar}} - 9 \cdot \underbrace{\left(5^{2n} - 3^{2n}\right)}_{\text{Durch 8 teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 8 teilbarer Zahlen, wieder durch 8 teilbar. Damit ist

$$5^{2\cdot(n+1)} - 3^{2\cdot(n+1)}$$

durch 8 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
5^{2n} - 3^{2n} &= 25^n - 9^n \\
&= (9+16)^n - 9^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^k - 9^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^k + \binom{n}{0} \cdot 9^{n-0} \cdot 16^0 - 9^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^k + 9^n - 9^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^k \\
&= 16 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^{k-1} \\
&= 8 \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 9^{n-k} \cdot 16^{k-1}.
\end{aligned}$$

$5^{2n} - 3^{2n}$ lässt sich als Produkt von 8 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $5^{2n} - 3^{2n}$ durch 8 teilbar. □

Bemerkung 7.3.
Aus dem direkten Beweis von Aufgabe 7.13 folgt, dass $5^{2n} - 3^{2n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch 16 teilbar ist.

Aufgabe 7.14.
Sei $x \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^{2n+1} - x$$

durch 6 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$x^{2 \cdot 0+1} - x = x - x = 0$$

durch 6 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$x^{2n+1} - x$$

durch 6 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} x^{2\cdot(n+1)+1} - x &= x^{2n+2+1} - x \\ &= x^2 \cdot x^{2n+1} - x \\ &= x^2 \cdot x^{2n+1} - x^3 + x^3 - x \\ &= \underbrace{x^2 \cdot \left(x^{2n+1} - x^3\right)}_{\text{Durch 6 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{x^3 - x}_{\text{Durch 6 teilbar}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen, wieder durch 6 teilbar. Damit ist

$$x^{2\cdot(n+1)+1} - x$$

durch 6 teilbar. Das $x^3 - x$ tatsächlich durch 6 teilbar ist, wird in Aufgabe 7.20 gezeigt.

□

Aufgabe 7.15.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$7^n - 2^n$$

durch 5 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

durch 5 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$7^n - 2^n$$

durch 5 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n \\
&= (2+5) \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n \\
&= 2 \cdot 7^n + 5 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n \\
&= \underbrace{2 \cdot (7^n - 2^n)}_{\text{Durch 5 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{5 \cdot 7^n}_{\text{Durch 5 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 5 teilbarer Zahlen, wieder durch 5 teilbar. Damit ist

$$7^{n+1} - 2^{n+1}$$

durch 5 teilbar.

Direkter Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned}
7^n - 2^n &= (2+5)^n - 2^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 5^k - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 5^k + \binom{n}{0} \cdot 2^{n-0} \cdot 5^0 - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 5^k + 2^n - 2^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 5^k \\
&= 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot 5^{k-1}.
\end{aligned}$$

$7^n - 2^n$ lässt sich als Produkt von 5 und einer natürlichen Zahl schreiben. Damit ist $7^n - 2^n$ durch 5 teilbar. □

Aufgabe 7.16.

Seien $x, y \in \mathbb{N}$ zwei beliebige natürliche Zahlen mit $x \neq y$. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^n - y^n$$

durch $x - y$ teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0$$

durch $x - y$ teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$x^n - y^n$$

durch $x - y$ teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x \cdot x^n - y \cdot y^n \\ &= (x - y + y) \cdot x^n - y \cdot y^n \\ &= (x - y) \cdot x^n + y \cdot x^n - y \cdot y^n \\ &= \underbrace{(x-y) \cdot x^n}_{\text{Durch } x-y \text{ teilbar}} + y \cdot \underbrace{(x^n - y^n)}_{\text{Durch } x-y \text{ teilbar nach (IV)}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch $x - y$ teilbarer Zahlen, wieder durch $x - y$ teilbar. Damit ist

$$x^{n+1} - y^{n+1}$$

durch $x - y$ teilbar.

Direkter Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$, und $n \in \mathbb{N}_0$ drei natürliche Zahl. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes schreiben wir:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (y + x - y)^n - y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot (x-y)^k - y^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot (x-y)^k + \binom{n}{0} \cdot y^{n-0} \cdot (x-y)^k - y^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot (x-y)^k + y^n - y^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot (x-y)^k \\
&= (x-y) \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{n-k} \cdot (x-y)^{k-1} .
\end{aligned}$$

$x^n - y^n$ lässt sich als Produkt von $x - y$ und einer ganzen Zahl schreiben. Damit ist $x^n - y^n$ durch $x - y$ teilbar. □

Bemerkung 7.4.
Mit Aufgabe 7.16 folgen die vorher bewiesenen Aussagen:

1. Für $x = 7^2$ und $y = 2$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.5 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $7^{2n} - 2^n$ durch 47 teilbar ist.

2. Für $x = m$ und $y = 1$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.6 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $m^n - 1$ durch $m - 1$ teilbar ist.

3. Für $x = 2^3$ und $y = 1$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.9 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $2^{3n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

4. Für $x = 2m - 1$ und $y = 1$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.12 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $(2m-1)^n - 1$ durch $2m - 2$ teilbar und somit insbesondere durch 2 teilbar ist.

5. Für $x = 5^2$ und $y = 3^2$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.13 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $5^{2n} - 3^{2n}$ durch 16 teilbar und somit insbesondere durch 8 teilbar ist.

6. Für $x = 7$ und $y = 2$ erhalten wir die Aussage aus Aufgabe 7.15 und zwar, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $7^n - 2^n$ durch 5 teilbar ist.

7. Für $x = 25$ und $y = 2$ erhalten wir die Aussage, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $5^{2n} - 2^n$ durch 23 teilbar ist.

8. Für $x = 5$ und $y = 2$ erhalten wir die Aussage, dass, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $5^n - 2^n$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 7.17.
Sei $x \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahlen. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x^{n+1} + (x+1)^{2n-1}$$

durch $x^2 + x + 1$ teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ ist

$$x^{1+1} + (x+1)^{2\cdot 1-1} = x^2 + x + 1$$

durch $x^2 + x + 1$ teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x^{n+1} + (x+1)^{2n-1}$$

durch $x^2 + x + 1$ teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
x^{(n+1)+1} + (x+1)^{2\cdot(n+1)-1} &= x \cdot x^{n+1} + (x+1)^{2n+2-1} \\
&= x \cdot x^{n+1} + (x+1)^2 \cdot (x+1)^{2n-1} \\
&= x \cdot x^{n+1} + \left(x^2 + 2x + 1\right) \cdot (x+1)^{2n-1} \\
&= x \cdot x^{n+1} + \left(x^2 + x + x + 1\right) \cdot (x+1)^{2n-1} \\
&= x \cdot x^{n+1} + \left(x^2 + x + 1\right) \cdot (x+1)^{2n-1} + x \cdot (x+1)^{2n-1} \\
&= \underbrace{\left(x^2 + x + 1\right) \cdot (x+1)^{2n-1}}_{\text{Durch } x^2+x+1 \text{ teilbar}} + \ x \cdot \underbrace{\left(x^{n+1} + (x+1)^{2n-1}\right)}_{\text{Durch } x^2+x+1 \text{ teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch x^2+x+1 teilbarer Zahlen, wieder durch $x^2 + x + 1$ teilbar. Damit ist

$$x^{(n+1)+1} + (x+1)^{2\cdot(n+1)-1}$$

durch $x^2 + x + 1$ teilbar.

□

Bemerkung 7.5.
Aus Aufgabe 7.17 folgt die Aussage aus Aufgabe 7.3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch $11^2 + 11 + 1 = 133$ teilbar.

Aufgabe 7.18.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^2 + n$$

durch 2 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**
   Für $n = 0$ ist
   $$0^2 + 0 = 0$$
   durch 2 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**
   Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist
   $$n^2 + n$$
   durch 2 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**
   Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:
   $$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= n^2 + n + 2n + 2 \\ &= \underbrace{2 \cdot (n+1)}_{\text{Durch 2 teilbar}} + \underbrace{n^2 + n}_{\text{Durch 2 teilbar nach (IV)}}.\end{aligned}$$
   Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 2 teilbarer Zahlen, wieder durch 2 teilbar. Damit ist
   $$(n+1)^2 + (n+1)$$
   durch 2 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Wir schreiben:
$$n^2 + n = n \cdot (n+1).$$
Jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade. Ist n gerade, so existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2m$. Damit ist
$$\begin{aligned}n^2 + n &= n \cdot (n+1) \\ &= 2m \cdot (n+1)\end{aligned}$$
eine gerade Zahl. Ist n ungerade, so existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2m + 1$. Damit ist
$$\begin{aligned}n^2 + n &= n \cdot (2m + 1 + 1) \\ &= n \cdot (2m + 2) \\ &= 2n \cdot (m + 1)\end{aligned}$$
wieder eine gerade Zahl. Somit ist $n^2 - n$ immer durch 2 teilbar. □

Aufgabe 7.19.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^2 - n$$

durch 2 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^2 - 0 = 0$$

durch 2 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^2 - n$$

durch 2 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n+1) &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 \\ &= 2n + 1 - 1 + n^2 - n \\ &= \underbrace{2 \cdot n}_{\text{Durch 2 teilbar}} + \underbrace{n^2 - n}_{\text{Durch 2 teilbar nach (IV)}}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 2 teilbarer Zahlen, wieder durch 2 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^2 - (n+1)$$

durch 2 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. In Aufgabe 7.18 wurde gezeigt, dass $n^2 + n$ durch 2 teilbar ist. Damit existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n^2 + n = 2m$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}n^2 - n &= n^2 + n - n - n \\ &= n^2 + n - 2n \\ &= 2m - 2n \\ &= 2 \cdot (m - n).\end{aligned}$$

Damit ist $n^2 - n$ durch 2 teilbar. □

Aufgabe 7.20.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$
$$n^3 - n$$
durch 6 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist
$$0^3 - 0 = 0$$
durch 6 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist
$$n^3 - n$$
durch 6 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung und Aufgabe 7.18:
$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= 3n^2 + 3n + 1 - 1 + n^3 - n \\ &= \underbrace{3 \cdot \overbrace{\left(n^2 + n\right)}^{\text{Durch 2 teilbar}}}_{\text{Durch 6 teilbar}} + \underbrace{n^3 - n}_{\text{Durch 6 teilbar nach (IV)}}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen, wieder durch 6 teilbar. Damit ist
$$(n+1)^3 - (n+1)$$
durch 6 teilbar.

□

Aufgabe 7.21.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$
$$n^5 - n$$
durch 5 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^5 - 0 = 0$$

durch 5 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^5 - n$$

durch 5 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot n^k - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} \cdot n^k + \binom{5}{0} \cdot n^0 + \binom{5}{5} \cdot n^5 - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} \cdot n^k + 1 + n^5 - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} \cdot n^k + n^5 - n \\
&= \sum_{k=1}^{4} \frac{5!}{k! \cdot (5-k)!} \cdot n^k + n^5 - n \\
&= \underbrace{5 \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{4!}{k! \cdot (5-k)!}}_{\text{Durch 5 teilbar}} + \underbrace{n^5 - n}_{\text{Durch 5 teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 5 teilbarer Zahlen, wieder durch 5 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^5 - (n+1)$$

durch 5 teilbar.

□

Aufgabe 7.22.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^7 - n$$

durch 7 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^7 - 0 = 0$$

durch 7 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^7 - n$$

durch 7 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^7 - (n+1) &= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot n^k - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} \cdot n^k + \binom{7}{0} \cdot n^0 + \binom{7}{7} \cdot n^7 - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} \cdot n^k + 1 + n^7 - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} \cdot n^k + n^7 - n \\
&= \sum_{k=1}^{6} \frac{7!}{k! \cdot (7-k)!} \cdot n^k + n^7 - n \\
&= \underbrace{7 \cdot \sum_{k=1}^{6} \frac{6!}{k! \cdot (7-k)!}}_{\text{Durch 7 teilbar}} + \underbrace{n^7 - n}_{\text{Durch 7 teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen, wieder durch 7 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^7 - (n+1)$$

durch 7 teilbar.

□

Aufgabe 7.23.
Sei p eine Primzahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^p - n$$

durch p teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^p - 0 = 0$$

durch p teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^p - n$$

durch p teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^p - (n+1) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot n^k - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \cdot n^k + \binom{p}{0} \cdot n^0 + \binom{p}{p} \cdot n^p - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \cdot n^k + 1 + n^p - n - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \cdot n^k + n^p - n \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} \cdot n^k + n^p - n \\
&= \underbrace{p \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!}}_{\text{Durch } p \text{ teilbar}} + \underbrace{n^p - n}_{\text{Durch } p \text{ teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch p teilbarer Zahlen, wieder durch p teilbar. Damit ist

$$(n+1)^p - (n+1)$$

durch p teilbar.

□

Aufgabe 7.24.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^3 + 2n$$

durch 3 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0$$

durch 3 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^3 + 2n$$

durch 3 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 2 \cdot (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3 \\
&= \underbrace{3 \cdot \left(n^2 + n + 1\right)}_{\text{Durch 3 teilbar}} + \underbrace{n^3 + 3n}_{\text{Durch 3 teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 3 teilbarer Zahlen, wieder durch 3 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^3 + 2 \cdot (n+1)$$

durch 3 teilbar.

□

Aufgabe 7.25.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^3 + 5 \cdot 0 = 0$$

durch 6 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5 \cdot (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 5n + 6 \\
&= 3 \cdot \underbrace{\left(n^2 + n\right)}_{\text{Durch 2 teilbar nach Aufgabe 7.18}} + 6 + n^3 + 5n \\
&= 3 \cdot 2\tilde{n} + 6 + n^3 + 5n \\
&= 6\tilde{n} + 6 + n^3 + 5n \\
&= \underbrace{6 \cdot (\tilde{n} + 1)}_{\text{Durch 6 teilbar}} + \underbrace{n^3 + 5n}_{\text{Durch 6 teilbar nach (IV)}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen, wieder durch 6 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^3 + 5 \cdot (n+1)$$

durch 6 teilbar.

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Nach Aufgabe 7.20 ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar. Also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n^3 - n = 6m$. Damit folgt

$$\begin{aligned} n^3 + 5n &= n^3 - n + n + 5n \\ &= n^3 - n + 6n \\ &= 6m + 6n \\ &= 6 \cdot (m + n)\,. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7.26.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

durch 9 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

durch 9 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

durch 9 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{\text{Durch 9 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{9 \cdot \left(n^2 + 3n + 3\right)}_{\text{Durch 9 teilbar}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 9 teilbarer Zahlen, wieder durch 9 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$$

durch 9 teilbar.

□

Aufgabe 7.27.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$4n^3 - n$$

durch 3 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$4 \cdot 0^3 - 0 = 4 \cdot 0 = 0$$

durch 3 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$4n^3 - n$$

durch 3 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (n+1)^3 - (n+1) &= 4 \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) - n - 1 \\ &= 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - n - 1 \\ &= 4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3 \\ &= \underbrace{4n^3 - n}_{\text{Durch 3 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{3 \cdot \left(4n^2 + 4n + 1\right)}_{\text{Durch 3 teilbar}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 3 teilbarer Zahlen, wieder durch 3 teilbar. Damit ist

$$4 \cdot (n+1)^3 - (n+1)$$

durch 3 teilbar.

□

Aufgabe 7.28.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^3 - 6n^2 + 14n$$

durch 3 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^3 - 6 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 = 0$$

durch 3 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^3 - 6n^2 + 14n$$

durch 3 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 6 \cdot (n+1)^2 + 14 \cdot (n+1) &= \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) - 6 \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right) + 14 \cdot (n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6n^2 - 12n - 6 + 14n + 14 \\ &= n^3 - 6n^2 + 14n + 3n^2 - 9n + 9 \\ &= \underbrace{n^3 - 6n^2 + 14n}_{\text{Durch 3 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{3 \cdot \left(n^2 - 3n + 3\right)}_{\text{Durch 3 teilbar}}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 3 teilbarer Zahlen, wieder durch 3 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^3 - 6 \cdot (n+1)^2 + 14 \cdot (n+1)$$

durch 3 teilbar.

□

Aufgabe 7.29.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$2n^3 + 3n^2 + n$$

durch 6 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

durch 6 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$2n^3 + 3n^2 + n$$

durch 6 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (n+1)^3 + 3 \cdot (n+1)^2 + (n+1) &= 2\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 3\left(n^2 + 2n + 1\right) + n + 1 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 \\ &= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 6n + 6 \\ &= \underbrace{2n^3 + 3n^2 + n}_{\text{Durch 6 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{6 \cdot \left(n^2 + n + 1\right)}_{\text{Durch 6 teilbar}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen, wieder durch 6 teilbar. Damit ist

$$2 \cdot (n+1)^3 + 3 \cdot (n+1)^2 + (n+1)$$

durch 6 teilbar.

□

Aufgabe 7.30.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$n^4 - 4n^2$$

durch 3 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$0^4 - 4 \cdot 0^2 = 0$$

durch 3 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n^4 - 4n^2$$

durch 3 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 4 \cdot (n+1)^2 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 4\left(n^2 + 2n + 1\right) \\
&= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 8n - 4 \\
&= n^4 - 4n^2 + 4n^3 - 4n + 6n^2 - 3 \\
&= \underbrace{n^4 - 4n^2}_{\text{Durch 3 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{4 \cdot \left(n^3 - n\right)}_{\text{Durch 3 teilbar}} + \underbrace{3 \cdot \left(2n^2 - 1\right)}_{\text{Durch 3 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 3 teilbarer Zahlen, wieder durch 3 teilbar. Damit ist

$$(n+1)^4 - 4 \cdot (n+1)^2$$

durch 3 teilbar.

□

Aufgabe 7.31.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$3n^5 + 5n^3 + 7n$$

durch 15 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$3 \cdot 0^5 + 5 \cdot 0^3 + 7 \cdot 0 = 0$$

durch 15 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$3n^5 + 5n^3 + 7n$$

durch 15 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**
Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
3\cdot(n+1)^5 + 5\cdot(n+1)^3 + 7\cdot(n+1) &= 3\cdot\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot n^k\right) + 5\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right) + 7n + 7\\
&= 3\cdot\left(\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k}\cdot n^k + \binom{5}{0}\cdot n^0 + \binom{5}{5}\cdot n^5\right)\\
&\qquad + 5\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right) + 7n + 7\\
&= 3\cdot\left(\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k}\cdot n^k + 1 + n^5\right) + 5\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1\right) + 7n + 7\\
&= 3n^5 + 5n^3 + 7n + 3\cdot\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k}\cdot n^k + 15n^2 + 15n + 15\\
&= 3n^5 + 5n^3 + 7n + 3\cdot\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k}\cdot n^k + 15\cdot\left(n^2+n+1\right)\\
&= 3n^5 + 5n^3 + 7n + 3\cdot\sum_{k=1}^{4}\frac{5!}{k!\cdot(5-k)!}\cdot n^k + 15\cdot\left(n^2+n+1\right)\\
&= \underbrace{3n^5 + 5n^3 + 7n}_{\text{Durch 15 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{15\cdot\sum_{k=1}^{4}\frac{4!}{k!\cdot(5-k)!}\cdot n^k}_{\text{Durch 15 teilbar}}\\
&\qquad + \underbrace{15\cdot\left(n^2+n+1\right)}_{\text{Durch 15 teilbar}}.
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 7.1 ist die Summe dreier durch 15 teilbarer Zahlen, wieder durch 15 teilbar. Damit ist

$$3\cdot(n+1)^5 + 5\cdot(n+1)^3 + 7\cdot(n+1)$$

durch 15 teilbar.

□

Aufgabe 7.32.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$3^{2^n} - 1$$

durch 2^{n+2} teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ ist

$$3^{2^1} - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

durch 8 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$3^{2^n} - 1$$

durch 2^{n+2} teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
3^{2^{n+1}} - 1 &= 3^{2 \cdot 2^n} - 1 \\
&= \left(3^{2^n}\right)^2 - 1 \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(3^{2^n} + 1\right) \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left((1+2)^{2^n} + 1\right) \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^k + 1\right) \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^k + \binom{2^n}{0} \cdot 2^0 + 1\right) \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^k + 1 + 1\right) \\
&= \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^k + 2\right) \\
&= 2 \cdot \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^{k-1} + 1\right).
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar und somit ist $2 \cdot (3^{2^n} - 1)$ durch 2^{n+3} teilbar. Damit ist

$$3^{2^{n+1}} - 1$$

ein Produkt aus einer durch 2^{n+3} teilbaren Zahl und einer natürlichen Zahl und somit selbst durch 2^{n+3} teilbar.

□

Aufgabe 7.33.
Sei $x \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(2x+1)^{2^n} - 1$$

durch 2^{n+2} teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 - 1 &= 4x^2 + 4x + 1 - 1\\ &= 4x^2 + 4x\\ &= 4 \cdot \underbrace{\left(x^2 + x\right)}_{\text{Durch 2 teilbar nach Aufgabe 7.18}}\\ &= 4 \cdot 2\tilde{n}\\ &= 8\tilde{n}\end{aligned}$$

durch 8 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(2x+1)^{2^n} - 1$$

durch 2^{n+2} teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}(2x+1)^{2^{n+1}} - 1 &= (2x+1)^{2 \cdot 2^n} - 1\\ &= \left((2x+1)^{2^n}\right)^2 - 1\\ &= \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left((2x+1)^{2^n} + 1\right)\\ &= \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot (2x)^k + 1\right)\\ &= \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot (2x)^k + \binom{2^n}{0} \cdot (2x)^0 + 1\right)\end{aligned}$$

$$= \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot (2x)^k + 1 + 1\right)$$
$$= \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot (2x)^k + 2\right)$$
$$= 2 \cdot \left((2x+1)^{2^n} - 1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} \cdot 2^{k-1} \cdot x^k + 1\right).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(2x+1)^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar und somit ist $2 \cdot \left((2x+1)^{2^n} - 1\right)$ durch 2^{n+3} teilbar. Damit ist

$$(2x+1)^{2^{n+1}} - 1$$

ein Produkt aus einer durch 2^{n+3} teilbaren Zahl und einer natürlichen Zahl und somit selbst durch 2^{n+3} teilbar.

□

Aufgabe 7.34.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

durch 43 teilbar ist.

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ ist

$$6^{0+2} + 7^{2\cdot 0+1} = 6^2 + 7^1 = 36 + 7 = 43$$

durch 43 teilbar.

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

durch 43 teilbar.

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung:

$$6^{n+1+2} + 7^{2\cdot(n+1)+1} = 6 \cdot 6^{n+2} + 7^{2n+2+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 6 \cdot 6^{n+2} + 49 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43) \cdot 7^{2n+1} \\
&= 6 \cdot 6^{n+2} + 6 \cdot 7^{2n+1} + 43 \cdot 7^{2n+1} \\
&= \underbrace{6 \cdot \left(6^{n+2} + 7^{2n+1}\right)}_{\text{Durch 43 teilbar nach (IV)}} + \underbrace{43 \cdot 7^{2n+1}}_{\text{Durch 43 teilbar}}.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 7.1 ist die Summe zweier durch 43 teilbarer Zahlen, wieder durch 43 teilbar. Damit ist

$$6^{n+1+2} + 7^{2\cdot(n+1)+1}$$

durch 43 teilbar.

$\square$

8 Induktionsaufgaben zu Ableitungen

Aufgabe 8.1.
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f_n(x) := x^n.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f_n, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f_n^{(n)}(x) = n!. \tag{8.1}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f_1\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\right] = 1 = 1!.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f_n:

$$f_n^{(n)}(x) = n!. \tag{8.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f_{n+1}(x)\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{n+1}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x \cdot x^n\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^n + n \cdot x \cdot x^{n-1}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^n + n \cdot x^n\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(n+1) \cdot x^n\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1) \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[x^n \right] \\
&\overset{(8.2)}{=} (n+1) \cdot n! \\
&= (n+1)!.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.2.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f_n(x) := (a \cdot x + b)^n .$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f_n, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f_n^{(n)}(x) = a^n \cdot n!. \tag{8.3}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$f_1'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[f_1 \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[a \cdot x + b \right] = a = a \cdot 1!.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f_n:

$$f_n^{(n)}(x) = n!. \tag{8.4}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[f_{n+1}(x) \right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(a \cdot x + b)^{n+1} \right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(a \cdot x + b) \cdot (a \cdot x + b)^n \right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[a \cdot (a \cdot x + b)^n + a \cdot n \cdot (a \cdot x + b) \cdot (a \cdot x + b)^{n-1} \right] \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[a \cdot (a \cdot x + b)^n + a \cdot n \cdot (a \cdot x + b)^n \right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[a\cdot(n+1)\cdot(a\cdot x+b)^n\right]\\
&= a\cdot(n+1)\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(a\cdot x+b)^n\right]\\
&\overset{(8.4)}{=} a\cdot(n+1)\cdot a^n\cdot n!\\
&= a^{n+1}\cdot(n+1)!.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.3.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := e^{a\cdot x+b}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = a^n\cdot e^{a\cdot x+b}. \tag{8.5}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e^{a\cdot x+b} = a^0\cdot e^{a\cdot x+b}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = a^n\cdot e^{a\cdot x+b}. \tag{8.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right]\\
&\overset{(8.6)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a^n\cdot e^{a\cdot x+b}\right]\\
&= a^n\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{a\cdot x+b}\right]\\
&= a^n\cdot a\cdot e^{a\cdot x+b}\\
&= a^{n+1}\cdot e^{a\cdot x+b}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.4.
Wir betrachten die Funktion
$$f(x) := x \cdot e^x.$$
Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:
$$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x. \tag{8.7}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:
$$f^{(0)}(x) = f(x) = x \cdot e^x = (x+0) \cdot e^x.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:
$$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x. \tag{8.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.8)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x+n) \cdot e^x\right] \\ &= e^x + (x+n) \cdot e^x \\ &= (x+n+1) \cdot e^x. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.5.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion
$$f(x) := (a \cdot x + b) \cdot e^x.$$
Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:
$$f^{(n)}(x) = (a \cdot (x+n) + b) \cdot e^x. \tag{8.9}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^x = (a \cdot (x + 0) + b) \cdot e^x.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (a \cdot (x + n) + b) \cdot e^x. \tag{8.10}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.10)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(a \cdot (x + n) + b) \cdot e^x\right] \\ &= a \cdot e^x + (a \cdot (x + n) + b) \cdot e^x \\ &= (a + a \cdot (x + n) + b) \cdot e^x \\ &= (a \cdot (x + n + 1) + b) \cdot e^x. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.6.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := x \cdot e^{-x}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n - x) \cdot e^{-x}. \tag{8.11}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) \\ &= x \cdot e^{-x} \\ &= (-1)^{0+1} \cdot (0 - x) \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n - x) \cdot e^{-x}. \tag{8.12}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.12)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^{n+1} \cdot (n-x) \cdot e^{-x}\right] \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(n-x) \cdot e^{-x}\right] \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \left(-e^{-x} - (n-x) \cdot e^{-x}\right) \\ &= (-1)^{n+2} \cdot \left(e^{-x} + (n-x) \cdot e^{-x}\right) \\ &= (-1)^{n+2} \cdot (n+1-x) \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.7.
Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := x^2 \cdot e^{a \cdot x + b}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = \left(a^n \cdot x^2 + 2n \cdot a^{n-1} \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\right) \cdot e^{a \cdot x + b}. \tag{8.13}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) \\ &= x^2 \cdot e^{a \cdot x + b} \\ &= \left(a^0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot a^{0-1} \cdot x + 0 \cdot (0-1) \cdot a^{0-2}\right) \cdot e^{a \cdot x + b}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = \left(a^n \cdot x^2 + 2n \cdot a^{n-1} \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\right) \cdot e^{a \cdot x + b}. \tag{8.14}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.14)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(a^n \cdot x^2 + 2n \cdot a^{n-1} \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\right) \cdot e^{a \cdot x + b}\right] \\
&= \left(2a^n \cdot x + 2n \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} + a \cdot \left(a^n \cdot x^2 + 2n \cdot a^{n-1} \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} \\
&= \left(2a^n \cdot x + 2n \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} + \left(a^{n+1} \cdot x^2 + 2n \cdot a^n \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} \\
&= \left(2a^n \cdot x + 2n \cdot a^{n-1} + a^{n+1} \cdot x^2 + 2n \cdot a^n \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} \\
&= \left(a^{n+1} \cdot x^2 + 2n \cdot a^n \cdot x + 2a^n \cdot x + 2n \cdot a^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} \\
&= \left(a^{n+1} \cdot x^2 + 2 \cdot (n+1) \cdot a^n \cdot x + (2+n-1) \cdot n \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b} \\
&= \left(a^{n+1} \cdot x^2 + 2 \cdot (n+1) \cdot a^n \cdot x + (n+1) \cdot n \cdot a^{n-1}\right) \cdot e^{a \cdot x+b}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.8.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \frac{1+x}{1-x}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{8.15}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2 \cdot 1!}{(1-x)^{1+1}}.
\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{8.16}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.16)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}\right] \\
&= 2n! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right] \\
&= 2n! \cdot \frac{0 \cdot (1-x)^{n+1} - (-1) \cdot (n+1) \cdot (1-x)^{n}}{\left((1-x)^{n+1}\right)^{2}} \\
&= 2n! \cdot \frac{(n+1) \cdot (1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}} \\
&= \frac{2n! \cdot (n+1)}{(1-x)^{2n+2-n}} \\
&= \frac{2 \cdot (n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.9.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n}} + (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^{n}}. \tag{8.17}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] \\
&= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^{2}} \\
&= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2}{(1+x)\cdot(1-x)} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2\cdot(1+x)} + \frac{1}{2\cdot(1-x)} \right) \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \\
&= (-1)^{1-1} \cdot (1-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^1} + (1-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^1}.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}. \tag{8.18}
$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.18)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}\right] \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\right] + (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(1-x)^n}\right] \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)^{-n}\right] + (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x)^{-n}\right] \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot (1+x)^{-n-1} + (n-1)! \cdot (-n) \cdot (-1) \cdot (1-x)^{-n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot (n-1)! \cdot n \cdot (1+x)^{-n-1} + (n-1)! \cdot n \cdot (1-x)^{-n-1} \\
&= (-1)^{n} \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)} + n! \cdot (1-x)^{-(n+1)} \\
&= (-1)^{n} \cdot n! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} + n! \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.10.
Wir betrachten die Funktion

$$
f(x) := \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).
$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n}. \tag{8.19}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1 - \frac{x}{2}\right] \\ &= \frac{2}{2-x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{x-2} \\ &= (-1)^{1-1} \cdot \frac{(1-1)!}{x-2}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n}. \tag{8.20}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.20)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-2)^n}\right] \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(x-2)^n}\right] \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{(-n) \cdot (x-2)^{n-1}}{((x-2)^n)^2} \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{(x-2)^{n-1}}{(x-2)^{2n}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-2)^{2n-n+1}} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 8.11.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \sin(a \cdot x + b).$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x + b). \tag{8.21}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(2\cdot 0)}(x) &= f^{(0)}(x) \\ &= f(x) \\ &= \sin(a \cdot x + b) \\ &= (-1)^0 \cdot a^{2\cdot 0} \cdot \sin(a \cdot x + b). \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x + b). \tag{8.22}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[f^{(2n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.22)}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x + b)\right] \\ &= (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sin(a \cdot x + b)\right] \\ &= (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a \cdot \cos(a \cdot x + b)\right] \\ &= (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos(a \cdot x + b)\right] \\ &= (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot (-1) \cdot a \cdot \sin(a \cdot x + b) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot a^{2n+2} \cdot \sin(a \cdot x + b). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.12.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \sinh(a \cdot x + b).$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(2n)}(x) = a^{2n} \cdot \sinh(a \cdot x + b). \tag{8.23}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(2\cdot 0)}(x) &= f^{(0)}(x) \\ &= f(x) \\ &= \sinh(a \cdot x + b) \\ &= a^{2\cdot 0} \cdot \sinh(a \cdot x + b). \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(2n)}(x) = a^{2n} \cdot \sinh(a \cdot x + b). \tag{8.24}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f^{(2n+2)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[f^{(2n)}(x)\right] \\ &\overset{(8.24)}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[a^{2n} \cdot \sinh(a \cdot x + b)\right] \\ &= a^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sinh(a \cdot x + b)\right] \\ &= a^{2n} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a \cdot \cosh(a \cdot x + b)\right] \\ &= a^{2n+1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cosh(a \cdot x + b)\right] \\ &= a^{2n+1} \cdot a \cdot \sinh(a \cdot x + b) \\ &= a^{2n+2} \cdot \sinh(a \cdot x + b). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.13.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Funktion

$$f_n(x) := x^n \cdot \ln(x).$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f_n, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f_n^{(n)}(x) = n! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right). \tag{8.25}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f_1^{(0)}(x) &= f(x) \\ &= \ln(x) \\ &= 0! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f_n:

$$f_n^{(n)}(x) = n! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right). \tag{8.26}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[f_{n+1}(x) \right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[x^{n+1} \cdot \ln(x) \right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(n+1) \cdot x^n \cdot \ln(x) + x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= (n+1) \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[x^n \cdot \ln(x) \right] + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[x^n \right] \\ &\overset{(8.1)}{=} (n+1) \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[x^n \cdot \ln(x) \right] + n! \\ &\overset{(8.26)}{=} (n+1) \cdot n! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) + n! \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) + n! \\
&= (n+1)! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) + \frac{(n+1)!}{n+1} \\
&= (n+1)! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= (n+1)! \cdot \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right).
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.14.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{ax+b}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}. \tag{8.27}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) \\
&= \frac{1}{ax+b} \\
&= (-1)^0 \cdot \frac{a^0 \cdot 0!}{(ax+b)^{0+1}}.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}. \tag{8.28}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(8.28)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^n \cdot a^n \cdot n! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(ax+b)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^n \cdot a^n \cdot n! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(ax+b)^{-n-1}\right] \\
&= (-1)^n \cdot a^n \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot a \cdot (ax+b)^{-n-2} \\
&= (-1)^n \cdot (-1) \cdot a^n \cdot a \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (ax+b)^{-n-2} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)}{(ax+b)^{n+2}}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.15.
Sei $b \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := (e^x - b)^2.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} - 2b \cdot e^x. \tag{8.29}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 2 \cdot (e^x - b) \cdot e^x \\
&= 2 \cdot e^{2x} - b \cdot e^x.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} - 2b \cdot e^x. \tag{8.30}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.30)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2^n \cdot e^{2x} - 2b \cdot e^x\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^n \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{2x}\right] - 2b \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{x}\right] \\
&= 2^n \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2b \cdot e^x \\
&= 2^{n+1} \cdot e^{2x} - 2b \cdot e^x.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.16.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \ln(x).$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{8.31}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right] \\
&= \frac{1}{x} \\
&= (-1)^{1-1} \cdot \frac{(1-1)!}{x^n}.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{8.32}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.32)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}\right] \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^n}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-n}\right] \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot (n-1)! \cdot n \cdot x^{-n-1} \\
&= (-1)^{n} \cdot n! \cdot x^{-n-1} \\
&= (-1)^{n} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 8.17.
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{2-x}.$$

Man zeige, dass für die n-te Ableitung von f, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n!}{(x-2)^{n+1}}. \tag{8.33}$$

Beweis.
Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right] \\
&= \frac{1 \cdot (2-x) - x \cdot (-1)}{(2-x)^2} \\
&= \frac{2 - x + x}{(x-2)^2} \\
&= \frac{2}{(x-2)^2} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot \frac{2 \cdot 1!}{(x-2)^{1+1}}.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für die n-te Ableitung von f:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n!}{(x-2)^{n+1}}. \tag{8.34}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{(n)}(x)\right] \\
&\overset{(8.34)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n!}{(x-2)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^{n+1}\cdot 2n!\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^{n+1}\cdot 2n!\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-2)^{-n-1}\right] \\
&= (-1)^{n+1}\cdot 2n!\cdot(-n-1)\cdot(x-2)^{-n-2} \\
&= (-1)^{n+1}\cdot(-1)\cdot 2n!\cdot(n+1)\cdot(x-2)^{-n-2} \\
&= (-1)^{n+2}\cdot\frac{2\cdot(n+1)!}{(x-2)^{n+2}}.
\end{aligned}$$

□

9 Induktionsaufgaben zu Integralen

10 Induktionsaufgaben zur Gammafunktion

Lemma 10.1.
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt der folgende Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \tag{10.1}$$

Beweis.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Für positive reelle Zahlen erhalten wir mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{e^x} &= \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}\\ &\leq \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\\ &= \frac{(n+1)!}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

□

Aufgabe 10.1.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{10.2}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R}+1\right) \\
&= 1 \\
&= 0!.
\end{aligned}
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{10.3}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^n \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^n}{e^t}\Big|_0^R + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^n}{e^t}\Big|_0^R + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^n}{e^R} + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\lim_{R\to\infty} \frac{R^n}{e^R} + n \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(10.1)}{=} n \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(10.3)}{=} n \cdot (n-1)! \\
&= n!.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 10.2.
Für alle $x > 0$ gilt die folgende Gleichung:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \tag{10.4}$$

Beweis.
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n + 1 > x + 1$. Dann folgt zunächst der Grenzwert:

$$\begin{aligned}\frac{R^x}{e^R} &= \frac{R^x}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}} \\ &\leq \frac{R^x}{\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}} \\ &= \frac{(n+1)!}{R^{n+1-x}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^R + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^R + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^x}{e^R} + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= -\lim_{R\to\infty} \frac{R^x}{e^R} + x \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x \cdot \Gamma(x).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.2.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{10.5}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{10.6}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) &\overset{(10.4)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&\overset{(10.6)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1) \cdot (2n)!}{2 \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{2 \cdot (2n+2) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2 \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4 \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.3.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{10.7}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi}. \tag{10.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus (10.4) folgt:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{10.9}$$

Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) &\overset{(10.9)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n - 1} \\
&= (-2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{2n+1} \\
&\overset{(10.8)}{=} (-2) \cdot \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= (-2) \cdot \frac{(2n+2) \cdot (-4)^n \cdot n!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= (-2) \cdot \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (-4)^n \cdot n!}{(2n+2)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(-4)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

11 Induktionsaufgaben zur Fibonacci-Folge

Definition 11.1 (Fibonacci-Folge)**.**
Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch $f_1 = f_2 = 1$ und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \tag{11.1}$$

für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Weiter setzen wir $f_0 = 0$.

Aufgabe 11.1.
Wir betrachten die folgende 2×2 Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**
Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&\overset{(11.3)}{=} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot f_{n+1} + 1 \cdot f_n & 1 \cdot f_{n+1} + 0 \cdot f_n \\ 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n-1} & 1 \cdot f_n + 0 \cdot f_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} \\
&\overset{(11.1)}{=} \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n + f_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.2.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1 \tag{11.4}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} f_k = f_0 = 0 = 1 - 1 = f_2 - 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1. \tag{11.5}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} f_k &= \sum_{k=0}^{n} f_k + f_{n+1} \\ &\overset{(11.5)}{=} f_{n+2} - 1 + f_{n+1} \\ &\overset{(11.1)}{=} f_{n+3} - 1.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_k &= f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n \\ &= f_1 + f_2 + \ldots + f_n \\ &= 1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n - 1 \\ &= f_2 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_3 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_4 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_5 + f_4 + f_5 + \ldots + f_n - 1 \\ &\vdots \\ &= f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_n + f_{n-1} + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_{n+1} + f_n - 1 \\ &\overset{(11.1)}{=} f_{n+2} - 1.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.3.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1} \tag{11.6}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} = 1 = f_1.$$

Weiter gilt für $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 = f_2.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} = f_n. \tag{11.7}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}. \tag{11.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} &= \binom{n+1-(n+1)}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \binom{0}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \binom{n+1-0}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{k} \\
&\overset{!!!}{=} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k} \right] \\
&\overset{\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}}{=} \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} + \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \\
&\overset{(11.8)}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} + f_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-(k+1)}{k} + f_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} + f_{n+1} \\
&\overset{(11.7)}{=} f_n + f_{n+1} \\
&= f_{n+2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.4.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1} \tag{11.9}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{0} f_k^2 = 0 = f_0 \cdot f_1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}. \tag{11.10}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + f_{n+1}^2 \\
&\overset{(11.10)}{=} f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\
&= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) \\
&\overset{(11.1)}{=} f_{n+1} \cdot f_{n+2}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
f_n \cdot f_{n+1} &= f_n \cdot (f_n + f_{n-1}) \\
&= f_n^2 + f_n \cdot f_{n-1} \\
&= f_n^2 + (f_{n-1} + f_{n-2}) \cdot f_{n-1} \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2} \cdot f_{n-1} \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2} \cdot (f_{n-2} + f_{n-3}) \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-2} \cdot f_{n-3} \\
&\vdots \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \ldots + f_3^2 + f_3 \cdot f_2 \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \ldots + f_3^2 + (f_2 + f_1) \cdot f_2 \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \ldots + f_3^2 + f_2^2 + f_1 \cdot f_2 \\
&\overset{f_1 = f_2}{=} f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \ldots + f_3^2 + f_2^2 + f_1 \cdot f_1 \\
&= f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \ldots + f_3^2 + f_2^2 + f_1^2.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.5 (Summe der ungeraden Folgenglieder der Fibonacci-Folge)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} = f_{2n} \tag{11.11}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{-1} f_{2k+1} = 0 = f_0 = f_{2\cdot 0}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} = f_{2n}. \tag{11.12}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1} + f_{2n+1}\\ &\overset{(11.12)}{=} f_{2n} + f_{2n+1}\\ &\overset{(11.1)}{=} f_{2n+2}.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned}f_{2n} &= f_{2n-1} + f_{2n-2}\\ &= f_{2n-1} + f_{2n-3} + f_{2n-4}\\ &= f_{2n-1} + f_{2n-3} + f_{2n-5} + f_{2n-6}\\ &\vdots\\ &= f_{2n-1} + f_{2n-3} + f_{2n-5} + \ldots + f_5 + f_4\\ &= f_{2n-1} + f_{2n-3} + f_{2n-5} + \ldots + f_5 + f_3 + f_2\\ &\overset{f_2 = f_1}{=} f_{2n-1} + f_{2n-3} + f_{2n-5} + \ldots + f_5 + f_3 + f_1\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+1}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.6 (Summe der geraden Folgenglieder der Fibonacci-Folge)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+2} = f_{2n+1} - 1 \tag{11.13}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{-1} f_{2k+1} = 0 = 1 - 1 = f_1 - 1 = f_{2\cdot 0+1} - 1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+2} = f_{2n+1} - 1. \tag{11.14}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_{2k+2} &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+2} + f_{2n+2} \\ &\overset{(11.14)}{=} f_{2n+1} - 1 + f_{2n+2} \\ &\overset{(11.1)}{=} f_{2n+3} - 1.\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann folgt:

$$\begin{aligned}f_{2n+1} - 1 &= f_{2n} + f_{2n-1} - 1 \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-3} - 1 \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-4} + f_{2n-5} - 1 \\ &\vdots \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-4} + \ldots + f_6 + f_5 - 1 \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-4} + \ldots + f_6 + f_4 + f_3 - 1 \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-4} + \ldots + f_6 + f_4 + f_2 + f_1 - 1 \\ &= f_{2n} + f_{2n-2} + f_{2n-4} + \ldots + f_6 + f_4 + f_2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{2k+2}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.7 (Identität von Cassini)**.**
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \tag{11.15}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = -1.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n . \tag{11.16}$$

III. **Induktionsschritt:**

Zunächst sei bemerkt, dass aus

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ f_n - f_{n+1} &= -f_{n-1} \end{aligned} \tag{11.17}$$

folgt. Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &\overset{(11.1)}{=} (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1}) + f_n^2 \\ &\overset{(11.17)}{=} -f_{n+1} \cdot f_{n-1} + f_n^2 \\ &= -\left(f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2\right) \\ &\overset{(11.16)}{=} -(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. In Aufgabe 11.1 wurde gezeigt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Weiter gilt für alle $m \times m$, $m \in \mathbb{N}$, Matrizen A, B für die Determinante:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) .$$

Berechnet man nun die Determinanten beider Matrizen, so erhält man:

$$\begin{aligned} (-1)^n &= (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1)^n \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n \\
&\overset{(11.2)}{=} \det\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix} \\
&= f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n\cdot f_n \\
&= f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n^2.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 11.8.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) = f_{n+2} \tag{11.18}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) = 1 = f_2$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) = f_{n+2}. \tag{11.19}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) &= \left(1+\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) \\
&\overset{(11.19)}{=} \left(1+\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right)\cdot f_{n+2} \\
&= \frac{f_{n+2}+f_{n+1}}{f_{n+2}}\cdot f_{n+2} \\
&= f_{n+2}+f_{n+1} \\
&\overset{(11.1)}{=} f_{n+3}.
\end{aligned}
$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{f_k}{f_{k+1}}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{f_{k+1}+f_k}{f_{k+1}} \\
&\overset{(11.1)}{=} \prod_{k=1}^{n}\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \\
&= \frac{f_3}{f_2}\cdot\frac{f_4}{f_3}\cdot\ldots\cdot\frac{f_{n+1}}{f_n}\cdot\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \\
&= \frac{f_{n+2}}{f_2} \\
&= f_{n+2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 11.9.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) = \frac{1}{f_{n+2}} \tag{11.20}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{0}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) = 1 = \frac{1}{f_2}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) = \frac{1}{f_{n+2}}. \tag{11.21}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus dem Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge folgt:

$$f_{n+3} - f_{n+1} = f_{n+2}. \tag{11.22}$$

Damit erhalten wir für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) &= \left(1-\frac{f_{n+1}}{f_{n+3}}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) \\
&\overset{(11.21)}{=} \left(1-\frac{f_{n+1}}{f_{n+3}}\right)\cdot\frac{1}{f_{n+2}} \\
&= \frac{f_{n+3}-f_{n+1}}{f_{n+3}}\cdot\frac{1}{f_{n+2}} \\
&\overset{(11.22)}{=} \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}}\cdot\frac{1}{f_{n+2}} \\
&= \frac{1}{f_{n+3}}.
\end{aligned}$$

Direkter Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{f_k}{f_{k+2}}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{f_{k+2}-f_k}{f_{k+2}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}} \\
&= \frac{f_2}{f_3}\cdot\frac{f_3}{f_4}\cdot\ldots\cdot\frac{f_n}{f_{n+1}}\cdot\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \\
&= \frac{f_2}{f_{n+2}} \\
&= \frac{1}{f_{n+2}}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 11.1.
Man kann sehr viele weitere Identitäten für die Fibonacci-Zahlen zeigen, indem man mit deren Eigenschaften etwas spielt. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann folgt mit dem binomischen Lehrsatz zunächst:

$$\begin{aligned}
f_n^m &= (f_{n+1}-f_{n-1})^m \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot f_{n+1}^{m-k}\cdot f_{n-1}^k \\
&= (-1)^k\cdot f_{n-1}^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot f_{n+1}^{m-k}\cdot f_{n-1}^k \\
&= (-1)^m\cdot f_{n-1}^m + f_{n+1}^m\cdot\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot\binom{m}{k}\cdot\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}\right)^k.
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu der Gleichung:

$$\frac{f_n^m - (-1)^m \cdot f_{n-1}^m}{f_{n+1}^m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}\right)^k.$$

Literaturverzeichnis

Aufgabensammlung mathematik: Vollständige induktion. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Vollst%C3%A4ndige_Induktion

Binomialkoeffizient. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient

Fibonacci-folge. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge

Formelsammlung trigonometrie. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie

Gammafunktion. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion

Gerhard Merziger, D. W. T. W., Günter Mühlbach. (o. J.). *Formeln + hilfen höhere mathematik* (6. Aufl.). Binomi Verlag.

Induktion, vollständige. (o. J.). Website. Zugriff auf https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/aufgaben/I/induktion__vollstaendige.html

Kategorie:vollständige induktion/aufgaben. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikiversity.org/wiki/Kategorie:Vollst%C3%A4ndige_Induktion/Aufgaben

Königsberger, K. (2001). *Analysis 1* (5. Aufl.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Luis Murk, S. K. (o. J.). *Vollständige induktion.* Website. Zugriff auf https://www.max-academy.de/contentPool/5dcc45108ccf7300083489ef

Müller, R. (2007). *Aufgaben zur vollständigen induktion.* Website. Zugriff auf https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf