Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$$

Eigenschaften

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ gilt: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Beweis

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang:

Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Induktionsschritt:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}$$

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\ &= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot(2n+2)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot(2n+2)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2\cdot 2\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot(2n+2)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2\cdot 2\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{4\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot(2n+2)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2\cdot 2\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{4\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$