Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ zeige man die Abschätzung:

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Hilfsmittel

1. Für alle $p \in \mathbb{R}$ ist $p^2 \geq 0$.

1. Für alle $p \in \mathbb{R}$ ist $p^2 \geq 0$.
2. Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ ist $(p - q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$.

Beweis: Erster Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen.

Beweis: Erster Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann ist:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Beweis: Erster Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann ist:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Beweis: Erster Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann ist:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$$

Beweis: Erster Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann ist:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen.

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$2xy$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$2xy = x^2 - x^2 + 2xy$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2xy &= x^2 - x^2 + 2xy \\ &= x^2 - x^2 + 2xy + y^2 - y^2 \end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2xy &= x^2 - x^2 + 2xy \\ &= x^2 - x^2 + 2xy + y^2 - y^2 \\ &= x^2 + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
2xy &= x^2 - x^2 + 2xy \\
&= x^2 - x^2 + 2xy + y^2 - y^2 \\
&= x^2 + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\
&= x^2 + y^2 - (x - y)^2
\end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
2xy &= x^2 - x^2 + 2xy \\
&= x^2 - x^2 + 2xy + y^2 - y^2 \\
&= x^2 + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\
&= x^2 + y^2 - \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2xy &= x^2 - x^2 + 2xy \\ &= x^2 - x^2 + 2xy + y^2 - y^2 \\ &= x^2 + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\ &= x^2 + y^2 - \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \\ &\leq x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Folgerung 1

Aus der eben gezeigten Abschätzung folgt direkt:

Folgerung 1

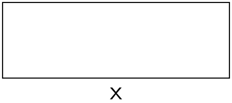
Aus der eben gezeigten Abschätzung folgt direkt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

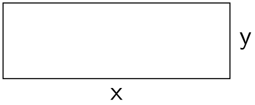
Geometrische Interpretation der Abschätzung

Geometrische Interpretation der Abschätzung

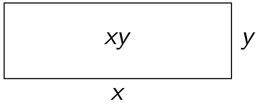
Geometrische Interpretation der Abschätzung



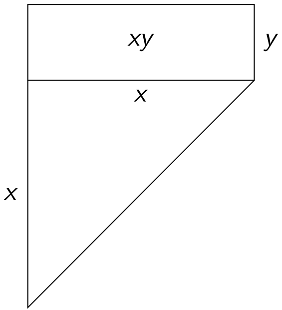
Geometrische Interpretation der Abschätzung



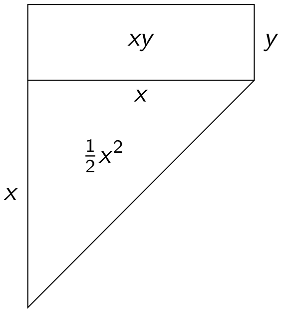
Geometrische Interpretation der Abschätzung



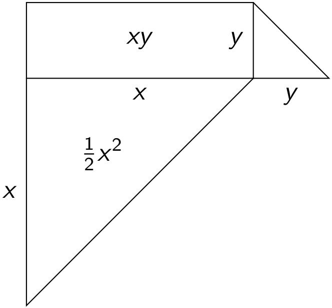
Geometrische Interpretation der Abschätzung



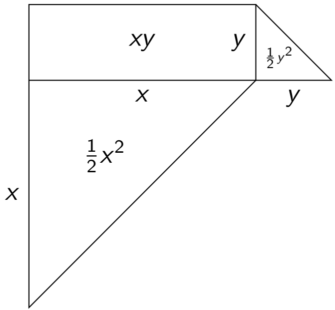
Geometrische Interpretation der Abschätzung



Geometrische Interpretation der Abschätzung



Geometrische Interpretation der Abschätzung



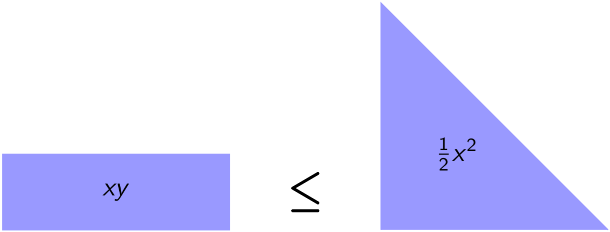
Geometrische Interpretation der Abschätzung

Geometrische Interpretation der Abschätzung

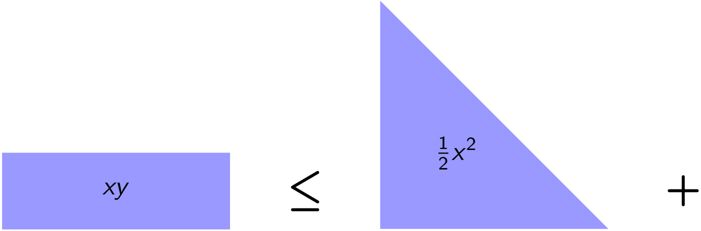
Geometrische Interpretation der Abschätzung

$\leq$

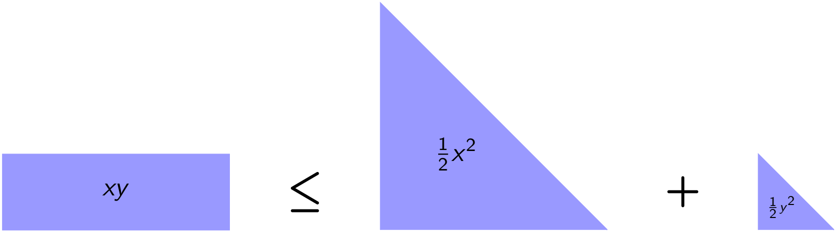
Geometrische Interpretation der Abschätzung



Geometrische Interpretation der Abschätzung



Geometrische Interpretation der Abschätzung



Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}}$$

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} = x \cdot y$$

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tilde{y}}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tilde{y}}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}.\end{aligned}$$

Folgerung 2

Wählen wir $x = \sqrt{\tilde{x}}$ und $y = \sqrt{\tilde{y}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sqrt{\tilde{x} \cdot \tilde{y}} &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tilde{y}}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}.\end{aligned}$$

Das ist die Abschätzung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel für zwei Zahlen.

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\sin(\tilde{x}) \cdot \cos(\tilde{x})$$

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\sin(\tilde{x}) \cdot \cos(\tilde{x}) = x \cdot y$$

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sin(\tilde{x}) \cdot \cos(\tilde{y}) &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2}\end{aligned}$$

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sin(\tilde{x}) \cdot \cos(\tilde{x}) &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\sin^2(\tilde{x}) + \cos^2(\tilde{x})}{2}\end{aligned}$$

Folgerung 3

Wählen wir $x = \sin(\tilde{x})$ und $y = \cos(\tilde{x})$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sin(\tilde{x}) \cdot \cos(\tilde{x}) &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\sin^2(\tilde{x}) + \cos^2(\tilde{x})}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$e^{\frac{\tilde{x}}{2} + \frac{\tilde{y}}{2}}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$e^{\frac{\tilde{x}}{2}+\frac{\tilde{y}}{2}} = e^{\frac{\tilde{x}}{2}} \cdot e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tilde{x}}{2}+\frac{\tilde{y}}{2}} &= e^{\frac{\tilde{x}}{2}} \cdot e^{\frac{\tilde{y}}{2}} \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tilde{x}}{2} + \frac{\tilde{y}}{2}} &= e^{\frac{\tilde{x}}{2}} \cdot e^{\frac{\tilde{y}}{2}} \\ &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tilde{x}}{2}+\frac{\tilde{y}}{2}} &= e^{\frac{\tilde{x}}{2}} \cdot e^{\frac{\tilde{y}}{2}} \\ &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{2}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\tilde{y}}{2}}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

Folgerung 4

Wählen wir $x = e^{\frac{\tilde{x}}{2}}$ und $y = e^{\frac{\tilde{y}}{2}}$, wobei $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ beliebig, so erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tilde{x}}{2}+\frac{\tilde{y}}{2}} &= e^{\frac{\tilde{x}}{2}} \cdot e^{\frac{\tilde{y}}{2}} \\ &= x \cdot y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &= \frac{\left(e^{\frac{\tilde{x}}{2}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\tilde{y}}{2}}\right)^2}{2} \\ &= \frac{e^{\tilde{x}} + e^{\tilde{y}}}{2}. \end{aligned}$$