Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ positive reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k} \leq \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir
$m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \dots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \dots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \\ &= m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \\ &= m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \\
&= m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \\ &= m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot M \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$. Weiter setzten wir $m := \min\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ und $M := \max\left\{\frac{x_k}{y_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Es folgen die Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot m \\ &= m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \frac{x_k}{y_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot M \\ &= M \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k .\end{aligned}$$

Beweis

Daraus folgt schließlich:

Beweis

Daraus folgt schließlich:

$$m$$

Beweis

Daraus folgt schließlich:

$$m = \frac{m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$

Beweis

Daraus folgt schließlich:

$$m = \frac{m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$

Beweis

Daraus folgt schließlich:

$$m = \frac{m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{M \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k}$$

Beweis

Daraus folgt schließlich:

$$m = \frac{m \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{M \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} = M.$$