Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, positive reelle Zahlen. Weiter sei $s := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ die Summe der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man zeige die Abschätzung:

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \leq 1 + s + \frac{s^2}{2!} + + \frac{s^3}{3!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Ungleichung die Abschätzung:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Ungleichung die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \dots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Ungleichung die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Zusätzlich benötigen wir den binomischen Lehrsatz:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Ungleichung die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Zusätzlich benötigen wir den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \leq \frac{(1 + x_1 + 1 + x_2 + \ldots + 1 + x_n)^n}{n^n}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) &\le \frac{(1+x_1+1+x_2+\ldots+1+x_n)^n}{n^n} \\
&= \frac{(n+s)^n}{n^n}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) &\leq \frac{(1+x_1+1+x_2+\ldots+1+x_n)^n}{n^n}\\ &= \frac{(n+s)^n}{n^n}\\ &= \left(1+\frac{s}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) &\leq \frac{(1 + x_1 + 1 + x_2 + \ldots + 1 + x_n)^n}{n^n} \\
&= \frac{(n + s)^n}{n^n} \\
&= \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen und $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) &\leq \frac{(1 + x_1 + 1 + x_2 + \ldots + 1 + x_n)^n}{n^n} \\
&= \frac{(n + s)^n}{n^n} \\
&= \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{s^k}{n^k}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{s^k}{n^k}$$

Beweis

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{k!}$$

Beweis

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{s^k}{k!}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{s^k}{n^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{s^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{n^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\ldots\frac{(n-k+1)}{n}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{s^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{n^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\ldots\frac{(n-k+1)}{n}\,\frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{s^k}{k!} \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}
\end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{s^k}{n^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{s^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{s^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} \\
&= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + + \frac{s^3}{3!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}.
\end{aligned}$$