Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \dots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gauß'sche Summenformel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt die Abschätzung:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \leq \frac{(a_1 + \ldots + a_p)^p}{p^p}.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$n!$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot n \\ &\leq \left(\frac{1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot n \\ &\leq \left(\frac{1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n}{n} \right)^n \\ &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2n} \right)^n \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot n \\ &\leq \left(\frac{1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n}{n} \right)^n \\ &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2n} \right)^n \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^n . \end{aligned}$$