Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Weiter seien $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Man zeige die Abschätzung:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}} \leq \sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \epsilon_1 \cdot \frac{x_1}{\epsilon_1} + \epsilon_2 \cdot \frac{x_2}{\epsilon_2} + \ldots + \epsilon_n \cdot \frac{x_n}{\epsilon_n}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= \epsilon_1 \cdot \frac{x_1}{\epsilon_1} + \epsilon_2 \cdot \frac{x_2}{\epsilon_2} + \ldots + \epsilon_n \cdot \frac{x_n}{\epsilon_n} \\ &\leq \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}}. \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige und $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= \epsilon_1 \cdot \frac{x_1}{\epsilon_1} + \epsilon_2 \cdot \frac{x_2}{\epsilon_2} + \ldots + \epsilon_n \cdot \frac{x_n}{\epsilon_n} \\ &\leq \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2} \cdot \sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}}. \end{aligned}$$

Teilt man nun durch $\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}$, so folgt die Abschätzung:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}} \leq \sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}}.$$

Bemerkung

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$.

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$. Die quadratische Funktion ist eine streng monoton wachsende Funktion auf den positiven reellen Zahlen. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$. Die quadratische Funktion ist eine streng monoton wachsende Funktion auf den positiven reellen Zahlen. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\frac{\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}$$

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$. Die quadratische Funktion ist eine streng monoton wachsende Funktion auf den positiven reellen Zahlen. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}} \right)^2$$

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$. Die quadratische Funktion ist eine streng monoton wachsende Funktion auf den positiven reellen Zahlen. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2} &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}} \right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}} \right)^2
\end{aligned}$$

Bemerkung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$. Die quadratische Funktion ist eine streng monoton wachsende Funktion auf den positiven reellen Zahlen. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2} &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots + \epsilon_n^2}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}}\right)^2 \\
&= \frac{x_1^2}{\epsilon_1^2} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\epsilon_n^2}.
\end{aligned}$$