Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ zwei Zahlen, die als Summe zweier quadrate ganzer Zahlen geschrieben werden können. Man zeige, es existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ab = k^2 + l^2$.

Beweis

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$ab$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$ab = \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right)$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ab &= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right) \\ &= m^2p^2 + m^2q^2 + n^2p^2 + n^2q^2 \end{aligned}$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ab &= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right) \\ &= m^2 p^2 + m^2 q^2 + n^2 p^2 + n^2 q^2 \\ &= (mp)^2 + (mq)^2 + (np)^2 + (nq)^2 \end{aligned}$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ab &= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right) \\ &= m^2p^2 + m^2q^2 + n^2p^2 + n^2q^2 \\ &= (mp)^2 + (mq)^2 + (np)^2 + (nq)^2 \\ &= (mp)^2 + (nq)^2 + (mq)^2 + (np)^2 \end{aligned}$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
ab &= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right) \\
&= m^2 p^2 + m^2 q^2 + n^2 p^2 + n^2 q^2 \\
&= (mp)^2 + (mq)^2 + (np)^2 + (nq)^2 \\
&= (mp)^2 + (nq)^2 + (mq)^2 + (np)^2 \\
&= (mp)^2 + 2mpnq + (nq)^2 + (mq)^2 - 2mqnp + (np)^2
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$ für $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
ab &= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right) \\
&= m^2 p^2 + m^2 q^2 + n^2 p^2 + n^2 q^2 \\
&= (mp)^2 + (mq)^2 + (np)^2 + (nq)^2 \\
&= (mp)^2 + (nq)^2 + (mq)^2 + (np)^2 \\
&= (mp)^2 + 2mpnq + (nq)^2 + (mq)^2 - 2mqnp + (np)^2 \\
&= (mp + nq)^2 + (mq - np)^2 .
\end{aligned}$$