Man Zeige:

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}$$

Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Hilfsmittel

1. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $x \mapsto \sqrt[m]{x}$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Hilfsmittel

1. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $x \mapsto \sqrt[m]{x}$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x + y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot x^{m-k} \cdot y^k.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\ &= \binom{n}{0}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0+\binom{n}{1}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1+\binom{n}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} \\
&= 1 + n - 1
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zunächst folgt aus dem binomischen Lehrsatz die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&= 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\
&> 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} \\
&= 1 + n - 1 \\
&= n.
\end{aligned}$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n}$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n} = 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}$$

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = 1$$

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = 1$$

Wegen $1 \leq \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

Folgerung

Für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = 1$$

Wegen $1 \leq \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Verallgemeinerung

Aufgabe

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir:

$$\left(1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^n$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir:

$$\left(1+\sqrt[m]{\frac{m!\cdot(n-m)!}{n\cdot(n-2)!}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\sqrt[m]{\frac{m!\cdot(n-m)!}{n\cdot(n-2)!}}\right)^k$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir:

$$\left(1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^k$$

$$= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^1$$

$$+ \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^2 + \ldots$$

$$+ \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^m$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^k$$

Beweis

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k$$

Beweis

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k$$

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k \\
&> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m \\
&= 1 + \binom{n}{m} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k$$

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m$$

$$= 1 + \binom{n}{m} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}$$

$$= 1 + \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}$$

Beweis

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k$$

$$> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m$$

$$= 1 + \binom{n}{m} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}$$

$$= 1 + \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}$$

$$= 1 + n - 1$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^k \\
&> 1 + \binom{n}{m} \cdot \left(\sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}} \right)^m \\
&= 1 + \binom{n}{m} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!} \\
&= 1 + \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!} \\
&= 1 + n - 1 \\
&= n.
\end{aligned}
$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^n}$$

Beweis

Mit der strengen Monotonie der Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ erhalten wir:

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}\right)^n} = 1 + \sqrt[m]{\frac{m! \cdot (n-m)!}{n \cdot (n-2)!}}.$$