Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k \leq n \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{n^2 + n - n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k-1} \cdot x_k &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{2k-1}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{n^2 + n - n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= n \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.
\end{aligned}
$$