Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige man die Abschätzung:

$$x + y + z \leq \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung:

$$uv \leq \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$(x + y + z)\,xyz$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$(x + y + z)\, xyz = x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$\begin{aligned}(x+y+z)\,xyz &= x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\ &\leq x^2\left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) + xy^2z + xyz^2\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)\,xyz &= x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xyz^2
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$
\begin{aligned}
(x+y+z)\,xyz &= x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + z^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$
\begin{aligned}
(x+y+z)\,xyz &= x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + z^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2z^2}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+\frac{x^2z^2}{2}+\frac{y^2z^2}{2}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung zunächst:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)\,xyz &= x^2yz + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xy^2z + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + xyz^2 \\
&\leq x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + y^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + z^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^2z^2}{2} \\
&= y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2.
\end{aligned}$$

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$.

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

$$x + y + z$$

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

$$x + y + z = \frac{1}{xyz}\left(x + y + z\right) xyz$$

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{xyz}\left(x + y + z\right) xyz \\ &\le \frac{1}{xyz}\left(y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2\right) \end{aligned}$$

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{xyz}\,(x + y + z)\,xyz \\ &\leq \frac{1}{xyz}\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right) \\ &= \frac{y^2z^2}{xyz} + \frac{x^2z^2}{xyz} + \frac{x^2y^2}{xyz} \end{aligned}$$

Beweis

Wegen $x, y, z > 0$ ist auch $xyz > 0$. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{xyz}\,(x + y + z)\,xyz \\ &\leq \frac{1}{xyz}\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right) \\ &= \frac{y^2z^2}{xyz} + \frac{x^2z^2}{xyz} + \frac{x^2y^2}{xyz} \\ &= \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}. \end{aligned}$$