Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\frac{n}{x} + x^n \geq n + 1.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x > 0$ die Abschätzung:

Hilfsabschätzung

Bermoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x > 0$ die Abschätzung:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Beweis

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\frac{n}{x} + x^n$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\frac{n}{x} + x^n = \frac{n}{x} + \left(1 + x - 1\right)^n$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{n}{x} + x^n &= \frac{n}{x} + (1 + x - 1)^n \\ &\geq \frac{n}{x} + 1 + n \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{n}{x} + x^n &= \frac{n}{x} + (1 + x - 1)^n \\ &\geq \frac{n}{x} + 1 + n \cdot (x - 1) \\ &= \frac{n}{x} + n \cdot x - n + 1\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{x} + x^n &= \frac{n}{x} + (1 + x - 1)^n \\
&\geq \frac{n}{x} + 1 + n \cdot (x - 1) \\
&= \frac{n}{x} + n \cdot x - n + 1 \\
&= \left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot n - n + 1
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{x} + x^n &= \frac{n}{x} + (1 + x - 1)^n \\
&\geq \frac{n}{x} + 1 + n \cdot (x - 1) \\
&= \frac{n}{x} + n \cdot x - n + 1 \\
&= \left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot n - n + 1 \\
&\geq 2 \cdot n - n + 1
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{x} + x^n &= \frac{n}{x} + (1 + x - 1)^n \\
&\geq \frac{n}{x} + 1 + n \cdot (x - 1) \\
&= \frac{n}{x} + n \cdot x - n + 1 \\
&= \left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot n - n + 1 \\
&\geq 2 \cdot n - n + 1 \\
&= n + 1.
\end{aligned}$$