Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl. Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man die Abschätzung:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k \leq \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{(1+1)^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{(1+1)^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{(1+1)^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&\leq \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \cdot x^k &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{(1+1)^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&= \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x^{2k}} \\
&\leq \sqrt{2^n} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}} \\
&= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$