Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Man zeige die Gültigkeit der Abschätzung:

$$e^x \geq 1 + x.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Grenzwert-Darstellung der Exponentialfunktion:

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Grenzwert-Darstellung der Exponentialfunktion:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Beweis

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{x}{n} \geq -1.$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} \\ &= 1 + x.\end{aligned}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$e^x$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &\geq \lim_{n\to\infty} (1 + x) \end{aligned}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &\geq \lim_{n\to\infty} (1 + x) \\ &= 1 + x. \end{aligned}$$