Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige man die Abschätzung:

$$2 \leq x + \frac{1}{x}.$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl.

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$2$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$2 = x - x + 2$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 2 &= x - x + 2 \\ &= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right)
\end{aligned}$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2
\end{aligned}$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \underbrace{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Beweis: Erster Ansatz

Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann existiert $\sqrt{x} > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
2 &= x - x + 2 \\
&= x - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - x + 2 - \frac{1}{x} \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right) \\
&= x + \frac{1}{x} - \underbrace{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}_{\geq 0} \\
&\leq x + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ betrachten wir die Funktion:

Beweis: Zweiter Ansatz

Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ betrachten wir die Funktion:

$$f(x) := x + \frac{1}{x}.$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ betrachten wir die Funktion:

$$f(x) := x + \frac{1}{x}.$$

Die Funktion f ist differenzierbar mit der Ableitung:

Beweis: Zweiter Ansatz

Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ betrachten wir die Funktion:

$$f(x) := x + \frac{1}{x}.$$

Die Funktion f ist differenzierbar mit der Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Für eine positive reelle Zahl $x > 0$ betrachten wir die Funktion:

$$f(x) := x + \frac{1}{x}.$$

Die Funktion f ist differenzierbar mit der Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Mit der Ableitung untersuchen wir das Monotonieverhalten von f.

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$1 - \frac{1}{x^2} > 0$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |x| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (1, \infty) \text{ oder } x \in (-\infty, -1).
\end{aligned}
$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |x| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (1, \infty) \text{ oder } x \in (-\infty, -1).
\end{aligned}
$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |x| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (1, \infty) \text{ oder } x \in (-\infty, -1).
\end{aligned}
$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{1}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |x| > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (1, \infty) \text{ oder } x \in (-\infty, -1). \end{aligned}$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Damit ist die Funktion f streng monoton wachsend auf dem Intervall $(1, \infty)$.

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

$$1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1,\ x \neq 0$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| < 1,\ x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ oder } 0 < x < 1.
\end{aligned}
$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| < 1,\ x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ oder } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| < 1,\ x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ oder } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1.$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Ähnlich ergibt sich:

$$1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1,\ x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \text{ oder } 0 < x < 1.$$

Da wir nur positive x betrachten, erhalten wir:

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1.$$

Damit ist f streng monoton fallend auf dem Intervall $(0, 1)$.

Beweis: Zweiter Ansatz

Ist $x \in (0,1]$ so folgt, weil f auf $(0,1)$ streng monoton fallend ist:

Beweis: Zweiter Ansatz

Ist $x \in (0,1]$ so folgt, weil f auf $(0,1)$ monoton fallend ist:

$$f(1) \leq f(x).$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Ist $x \in (0, 1)$ so folgt, weil f auf $(0, 1)$ monoton fallend ist:

$$f(1) \leq f(x).$$

Ist $x \in (1, \infty]$ so folgt, weil f auf $(1, \infty)$ streng monoton wachsend ist:

Beweis: Zweiter Ansatz

Ist $x \in (0, 1]$ so folgt, weil f auf $(0, 1)$ monoton fallend ist:

$$f(1) \leq f(x).$$

Ist $x \in (1, \infty)$ so folgt, weil f auf $(1, \infty)$ streng monoton wachsend ist:

$$f(1) < f(x).$$

Beweis: Zweiter Ansatz

Ist $x \in (0, 1]$ so folgt, weil f auf $(0, 1)$ monoton fallend ist:

$$f(1) \leq f(x).$$

Ist $x \in (1, \infty)$ so folgt, weil f auf $(1, \infty)$ streng monoton wachsend ist:

$$f(1) < f(x).$$

Insgesamt also $2 \leq f(x)$ für alle positiven reellen Zahlen $x > 0$.

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$2$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$2 = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2\tilde{x}\tilde{y} \end{aligned}$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2\tilde{x}\tilde{y} \\ &\leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \end{aligned}$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 2\tilde{x}\tilde{y} \\ &\leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\ &= \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung

In meinem letzten Video habe ich, für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, die folgende Abschätzung gezeigt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Da $x > 0$ ist, existiert $\sqrt{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{x}$ und $\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ so folgt direkt:

$$\begin{aligned}
2 &= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= 2\tilde{x}\tilde{y} \\
&\leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\
&= \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= x + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Folgerung 1

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$.

Folgerung 1

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \frac{x}{y}$ in die eben gezeigte Abschätzung, so folgt:

Folgerung 1

Seien $\tilde{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{\tilde{x}}{x} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \frac{\tilde{x}}{x}$ in die eben gezeigte Abschätzung, so folgt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Folgerung 1

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \frac{x}{y}$ in die eben gezeigte Abschätzung, so folgt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}}$$

Folgerung 1

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \frac{x}{y}$ in die eben gezeigte Abschätzung, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} \\ &= \tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}} \end{aligned}$$

Folgerung 1

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \frac{x}{y}$ in die eben gezeigte Abschätzung, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} \\ &= \tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$.

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}\end{aligned}$$

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}} \\ &= \tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}}\end{aligned}$$

Folgerung 2

Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei reelle Zahlen mit $\frac{x}{y} > 0$. Setzen wir $\tilde{x} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, dann folgt auf die selbe Weise die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}} \\
&= \tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}} \\
&\geq 2.
\end{aligned}$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen.

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Andererseits folgt aus den Logarithmus Gesetzen:

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Andererseits folgt aus den Logarithmus Gesetzen:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Andererseits folgt aus den Logarithmus Gesetzen:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(y)} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(y)$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Andererseits folgt aus den Logarithmus Gesetzen:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} &= \frac{1}{\ln(y)} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(y) \\ &= \ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}}\right) + \ln\left(y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)\end{aligned}$$

Folgerung 3

Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ zwei reelle Zahlen. Dann sind $\ln(x), \ln(y) > 0$ und es gilt:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \geq 2.$$

Andererseits folgt aus den Logarithmus Gesetzen:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\ln(y)} + \frac{\ln(y)}{\ln(x)} &= \frac{1}{\ln(y)} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(y) \\ &= \ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}}\right) + \ln\left(y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \\ &= \ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right).\end{aligned}$$

Folgerung 3

Damit ist:

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Die Funktion $\tilde{x} \mapsto e^{\tilde{x}}$ ist streng monoton wachsend.

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Die Funktion $\tilde{x} \mapsto e^{\tilde{x}}$ ist streng monoton wachsend. Damit folgt schließlich:

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Die Funktion $\tilde{x} \mapsto e^{\tilde{x}}$ ist streng monoton wachsend. Damit folgt schließlich:

$$e^2$$

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Die Funktion $\tilde{x} \mapsto e^{\tilde{x}}$ ist streng monoton wachsend. Damit folgt schließlich:

$$e^2 \leq e^{\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)}$$

Folgerung 3

Damit ist:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right) \geq 2.$$

Die Funktion $\tilde{x} \mapsto e^{\tilde{x}}$ ist streng monoton wachsend. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} e^2 &\leq e^{\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)} \\ &= x^{\frac{1}{\ln(y)}} \cdot y^{\frac{1}{\ln(x)}}. \end{aligned}$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^x > 0$ und erhalten die Abschätzung:

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^{x} > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\cosh(x)$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^x > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^x > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \end{aligned}$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^{x} > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x} + \frac{1}{e^{x}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}}\right)
\end{aligned}$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^{x} > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + \frac{1}{e^{x}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}}\right)\\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 2\end{aligned}$$

Folgerung 4

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Kosinus hyperbolicus wie folgt definiert:

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $\tilde{x} = e^x > 0$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{x} + \frac{1}{\tilde{x}}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{x} = \left|\sin(x)\right|$ und erhalten die Abschätzung:

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{x} = \left|\sin(x)\right|$ und erhalten die Abschätzung:

$$2\left|\sin(x)\right| \leq 1 + \left|\sin(x)\right|^2$$

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{x} = \left|\sin\left(x\right)\right|$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2\left|\sin\left(x\right)\right| &\leq 1 + \left|\sin\left(x\right)\right|^2 \\ &= 1 + \sin^2\left(x\right). \end{aligned}$$

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{x} = |\sin(x)|$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2|\sin(x)| &\leq 1 + |\sin(x)|^2 \\ &= 1 + \sin^2(x). \end{aligned}$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir weiter $\tilde{x} = |\cos(x)|$ und erhalten auf die gleiche Weise die Abschätzung:

Folgerung 5

Für $\tilde{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt direkt die Abschätzung:

$$2\tilde{x} \leq 1 + \tilde{x}^2.$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $\tilde{x} = \left|\sin(x)\right|$ und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2\left|\sin(x)\right| &\leq 1 + \left|\sin(x)\right|^2 \\ &= 1 + \sin^2(x). \end{aligned}$$

Für eine beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ setzen wir weiter $\tilde{x} = \left|\cos(x)\right|$ und erhalten auf die gleiche Weise die Abschätzung:

$$2\left|\cos(x)\right| \leq 1 + \cos^2(x).$$

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$2\left(|\cos(x)| + |\sin(x)|\right)$$

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$2\left(\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|\right) \leq 1 + \cos^2(x) + 1 + \sin^2(x)$$

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2\left(|\cos(x)| + |\sin(x)|\right) &\leq 1 + \cos^2(x) + 1 + \sin^2(x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2\left(\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|\right) &\leq 1 + \cos^2(x) + 1 + \sin^2(x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

Folgerung 5

Bringen wir die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2\left(|\cos(x)| + |\sin(x)|\right) &\leq 1 + \cos^2(x) + 1 + \sin^2(x) \\ &= 3 \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$|\cos(x)| + |\sin(x)| \leq \frac{3}{2}.$$