Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ zeige man die Abschätzung:

$$xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung:

$$uv \leq \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$xy + xz + yz$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$xy + xz + yz \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + xz + yz$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + xz + yz \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + yz \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + xz + yz \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+z^2}{2} + yz \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+z^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$
\begin{aligned}
xy + xz + yz &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + xz + yz \\
&\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + yz \\
&\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$
\begin{aligned}
xy + xz + yz &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + xz + yz \\
&\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + yz \\
&\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + xz + yz \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+z^2}{2} + yz \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+z^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$