Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Man zeige die Abschätzung:

$$x + y + z \leq 2 \cdot \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$x + y + z$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$x + y + z = \sqrt{y+z} \cdot \frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y} \cdot \frac{z}{\sqrt{x+y}}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$x + y + z = \sqrt{y+z} \cdot \frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y} \cdot \frac{z}{\sqrt{x+y}}$$
$$\leq \sqrt{\left(\sqrt{y+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+y}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$\begin{aligned}
x+y+z &= \sqrt{y+z}\cdot\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z}\cdot\frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y}\cdot\frac{z}{\sqrt{x+y}} \\
&\leq \sqrt{\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2} \\
&= \sqrt{y+z+x+z+x+y}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= \sqrt{y+z} \cdot \frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y} \cdot \frac{z}{\sqrt{x+y}} \\
&\leq \sqrt{\left(\sqrt{y+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+y}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2} \\
&= \sqrt{y+z+x+z+x+y} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}} \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x+y+z} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Wir schätzen zunächst ab:

$$\begin{aligned} x+y+z &= \sqrt{y+z}\cdot\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z}\cdot\frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y}\cdot\frac{z}{\sqrt{x+y}} \\ &\leq \sqrt{\left(\sqrt{y+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+z}\right)^2 + \left(\sqrt{x+y}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2} \\ &= \sqrt{y+z+x+z+x+y}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}} \\ &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y+z}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}. \end{aligned}$$

Teilt man nun beide Seiten der Ungleichung durch $\sqrt{x+y+z}$ so folgt die Abschätzung:

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}$$

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen.

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen. Damit folgt schließlich:

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$x + y + z$$

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$x+y+z = \left(\sqrt{x+y+z}\right)^2$$

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x+y+z &= \left(\sqrt{x+y+z}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}\right)^2 \end{aligned}$$

Beweis

$$\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}.$$

Die quadratische Funktion streng monoton wachsend für positive reelle Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x+y+z &= \left(\sqrt{x+y+z}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}}\right)^2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right). \end{aligned}$$