Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \geq \frac{n \cdot \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n} - 2 \cdot \sqrt{n} + 2}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $x_1, \ldots, x_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \geq \frac{m}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_m}}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\ &\geq \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\geq \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} \\
&= \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + 1 + \ldots + 1}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\geq \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} \\
&= \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + 1 + \ldots + 1} \\
&= \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Wir schreiben

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\geq \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}} \\
&= \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + 1 + \ldots + 1} \\
&= \frac{n}{\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2} \\
&= \frac{n \cdot \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n} - 2 \cdot \sqrt{n} + 2}.
\end{aligned}$$