Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Eigenschaften

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ gilt: $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.

Beweis

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Beweis

Induktionsschritt:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - 1\right)$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n - 1}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n - 1}$$
$$= (-2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{2n + 1}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n-1\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\frac{1}{2}-n-1} \\ &= (-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2n+1} \\ &= (-2)\cdot\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-n-1\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\frac{1}{2}-n-1} \\
&= (-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2n+1} \\
&= (-2)\cdot\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{(2n+2)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-n-1\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\frac{1}{2}-n-1} \\
&= (-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2n+1} \\
&= (-2)\cdot\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{(2n+2)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{2\cdot(n+1)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)!}\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-n-1\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\frac{1}{2}-n-1} \\
&= (-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2n+1} \\
&= (-2)\cdot\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{(2n+2)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{2\cdot(n+1)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(-4)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$