Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $s, t, u > 0$ drei positive reelle Zahlen mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u} \geq \frac{9}{s+t+u}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\frac{p}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_p}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\frac{p}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_p}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 3$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\frac{p}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_p}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 3$:

$$\frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

für alle $a_1, a_2, a_3 > 0$.

Beweis

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$.

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

$$\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u}$$

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

$$\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u}}{3}$$

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u} &= 3 \cdot \frac{\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u}}{3} \\ &\geq 3 \cdot \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{t+u-s}} + \frac{1}{\frac{1}{s+u-t}} + \frac{1}{\frac{1}{s+t-u}}} \end{aligned}$$

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u} &= 3 \cdot \frac{\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{t+u-s}} + \frac{1}{\frac{1}{s+u-t}} + \frac{1}{\frac{1}{s+t-u}}} \\
&= \frac{9}{t+u-s+s+u-t+s+t-u}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $s, t, u > 0$ mit $s \neq t + u$, $t \neq s + u$ und $u \neq s + t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u} &= 3 \cdot \frac{\frac{1}{t+u-s} + \frac{1}{s+u-t} + \frac{1}{s+t-u}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{t+u-s}} + \frac{1}{\frac{1}{s+u-t}} + \frac{1}{\frac{1}{s+t-u}}} \\
&= \frac{9}{t+u-s+s+u-t+s+t-u} \\
&= \frac{9}{s+t+u}.
\end{aligned}$$