Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(Re(z)).$$

Hilfsmittel

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$.
2. Es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale: $|\int f(z) \,\mathrm{d}z| \leq \int |f(z)| \,\mathrm{d}z$.

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$.
2. Es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale: $|\int f(z) \,\mathrm{d}z| \leq \int |f(z)| \,\mathrm{d}z$.
3. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$.

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$.
2. Es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale: $|\int f(z) \,\mathrm{d}z| \leq \int |f(z)| \,\mathrm{d}z$.
3. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$.
4. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ist: $a^z = e^{z \ln(a)}$. Insbesondere ist für alle $w, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a^{w+z} &= e^{(w+z)\ln(a)} \\ &= e^{w \ln(a) + z \ln(a)} \\ &= e^{w \ln(a)} \cdot e^{z \ln(a)} \\ &= a^w \cdot a^z. \end{aligned}$$

Hilfsmittel

Für den Beweis verwenden wir folgende Hilfsmittel:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale: $\left|\int f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int |f(z)|\,\mathrm{d}z$.
3. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$.
4. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ist: $a^z = e^{z\ln(a)}$. Insbesondere ist für alle $w, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a^{w+z} &= e^{(w+z)\ln(a)} \\ &= e^{w\ln(a)+z\ln(a)} \\ &= e^{w\ln(a)} \cdot e^{z\ln(a)} \\ &= a^w \cdot a^z. \end{aligned}$$

5. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\left|e^{i\cdot x}\right| = 1$. Daraus folgt für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ $\left|a^{i\cdot x}\right| = 1$.

Beweis

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$.

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$|\Gamma(z)|$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$|\Gamma(z)| = \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right|$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z) + i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{z} t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{z} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z) + i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z) + i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} \right| \left| t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z) + i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} \right| \left| t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{Re(z)-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z) + i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{Re(z)} \right| \left| t^{i \cdot Im(z)} \right| t^{-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{Re(z)-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \Gamma(Re(z)).
\end{aligned}$$