Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma\left(n\right).$$

Eigenschaften

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Eigenschaften

Für den Beweis verwenden wir die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ gilt: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Beweis

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1\right)$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(1\right)\end{aligned}$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}}\cdot\Gamma\left(1\right).\end{aligned}$$

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(1)\\ &= \sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}}\cdot\Gamma(1).\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}}\cdot\Gamma\left(1\right).\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

Beweis

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}}\cdot\Gamma\left(1\right).\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right).$$

Beweis

Induktionsschritt:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\\ &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right)
\end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}}\cdot n\cdot\Gamma\left(n\right)
\end{aligned}$$

Induktionsschritt:
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}}\cdot n\cdot\Gamma\left(n\right)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}}\cdot\Gamma\left(n+1\right).
\end{aligned}$$

Bemerkung

Bemerkung

Die Formel

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right)$$

Bemerkung

Die Formel

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\cdot\Gamma\left(n\right)$$

ist ein Spezialfall der Legendreschen Verdopplungsformel

Bemerkung

Die Formel

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n)$$

ist ein Spezialfall der Legendreschen Verdopplungsformel

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \cdot \Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$