Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Hilfsabschätzung

Als Hilfsmittel verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Als Hilfsmittel verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $x_1, \ldots, x_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\ &\leq \frac{n + 1 + \ldots + 1}{n} \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{n + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{n + n - 1}{n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{n + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{n + n - 1}{n} \\
&= \frac{2n - 1}{n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{n + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{n + n - 1}{n} \\
&= \frac{2n - 1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Folgerung 1

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$.

Folgerung 1

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Aus der eben gezeigten Abschätzung folgt, für alle $n \in \mathbb{N}$, für die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung:

Folgerung 1

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Aus der eben gezeigten Abschätzung folgt, für alle $n \in \mathbb{N}$, für die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung:

$$w_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Folgerung 1

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Aus der eben gezeigten Abschätzung folgt, für alle $n \in \mathbb{N}$, für die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung:

$$w_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Tatsächlich gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$