Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reellen Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \leq \frac{1}{2}\left(x+y+z\right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 2$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 2$:

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right)$$

woraus folgt:

$$2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2,$$

für alle $a_1, a_2 \geq 0$

Beweis

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\ &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y}\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{yz} + \frac{1}{2}\sqrt{xz} + \frac{1}{2}\sqrt{xy}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{yz} + \frac{1}{2}\sqrt{xz} + \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(y+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y)
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{yz} + \frac{1}{2}\sqrt{xz} + \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(y+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \\
&= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{yz} + \frac{1}{2}\sqrt{xz} + \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(y+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \\
&= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei postive reelle Zahlen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{y+z} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} &\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{x+z} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{x+y} \\
&\leq \frac{yz}{2\sqrt{yz}} + \frac{xz}{2\sqrt{xz}} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{yz} + \frac{1}{2}\sqrt{xz} + \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(y+z\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x+z\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(x+y\right) \\
&= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\
&= \frac{1}{2}\left(x+y+z\right).
\end{aligned}$$