Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt{3 - \frac{2}{n}}. \tag{1}$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $x_1, \dots, x_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_m^2}{m}}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{n + n + 1 + \ldots + 1}{n}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{n + n + 1 + \ldots + 1}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{2n + n - 2}{n}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$
und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{n + n + 1 + \ldots + 1}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{2n + n - 2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{3n - 2}{n}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und quadratischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&\leq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{n + n + 1 + \ldots + 1}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{2n + n - 2}{n}} \\
&= \sqrt{\frac{3n - 2}{n}} \\
&= \sqrt{3 - \frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 1

Die Abschätzung die wir gezeigt haben, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1

Die Abschätzung die wir gezeigt haben, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Den es ist:

Bemerkung 1

Die Abschätzung die wir gezeigt haben, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Den es ist:

$$\sqrt[1]{1}$$

Bemerkung 1

Die Abschätzung die wir gezeigt haben, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Den es ist:

$$\sqrt[1]{1} = 1$$

Bemerkung 1

Die Abschätzung die wir gezeigt haben, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Den es ist:

$$\sqrt[1]{1} = 1 = \sqrt{3 - \frac{2}{1}}.$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Daraus folgt:

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Daraus folgt:

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Daraus folgt:

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \ldots + 1}{n}$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \dots, x_m) = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \dots, x_m).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \dots + 1}{n} \\ &= AM(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \ldots + 1}{n} \\ &= AM(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1) \\ &\leq QM(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1,\dots,x_m) = \frac{x_1+\dots+x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{m}} = QM(x_1,\dots,x_m).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1\dots+1}{n} \\
&= AM(\sqrt{n},\sqrt{n},1,\dots,1) \\
&\leq QM(\sqrt{n},\sqrt{n},1,\dots,1) \\
&= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2+\left(\sqrt{n}\right)^2+1^2+\dots+1^2}{n}}
\end{aligned}$$

Bemerkung 2

Es gilt zusätzlich die Abschätzung:

$$AM(x_1, \ldots, x_m) = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{m}} = QM(x_1, \ldots, x_m).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \ldots + 1}{n} \\
&= AM(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1) \\
&\leq QM(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1) \\
&= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}{n}} \\
&= \sqrt{3 - \frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Folgerung 1

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$.

Folgerung 1

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$. Mit der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

Folgerung 1

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$. Mit der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n}$$

Folgerung 1

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$. Mit der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt{3 - \frac{2}{n}}$$

Folgerung 1

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$. Mit der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt{3 - \frac{2}{n}} < \sqrt{3}.$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$:

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 - \frac{2}{n}}$$

Folgerung 2

Weiter gilt für den Grenzwert der Folge $w_n = \sqrt[n]{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 - \frac{2}{n}} = \sqrt{3}.$$