Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} &= \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1} \\
&= \left(\sqrt[n-1]{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1}} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} &= \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1} \\
&= \left(\sqrt[n-1]{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1}} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}}{n-1} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} &= \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1} \\
&= \left(\sqrt[n-1]{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1}} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}}{n-1} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine natürliche Zahl. Dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n} &= \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1} \\
&= \left(\sqrt[n-1]{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n-1}} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}}{n-1} \right)^{n-1} \\
&\leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1} \right)^{n-1} .
\end{aligned}$$