Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n \cdot \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq n \cdot \max\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$n \cdot \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right)$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$n \cdot \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) = \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right)$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n \cdot \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n \cdot \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |x_k| \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n \cdot \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |x_k| \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k|\right)^2} \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
n \cdot \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \dots, |x_n|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |x_k| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k|\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
n \cdot \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) &= \sum_{k=1}^{n} \min\left(|x_1|, \ldots, |x_n|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |x_k| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k|\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Beweis

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n \cdot \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n \cdot \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n \cdot \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= n \cdot \max\left(\sqrt{x_1^2}, \ldots, \sqrt{x_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} &\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n \cdot \max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\max\left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)} \\
&= n \cdot \max\left(\sqrt{x_1^2}, \ldots, \sqrt{x_n^2}\right) \\
&= n \cdot \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).
\end{aligned}
$$