Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, positive reelle Zahlen und $\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Man zeige die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} \right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{\bar{x}_n}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Beweis

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$.

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} \right)^{n+1}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} - 1 \right)^{n+1}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right)^{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1)\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right)
\end{aligned}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right)^{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1)\cdot \left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right) \\
&= 1 + (n+1)\cdot \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - (n+1)
\end{aligned}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} \right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} - 1 \right)^{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1) \cdot \left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} - 1 \right) \\
&= 1 + (n+1) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1) \cdot \bar{x}_n} - (n+1) \\
&= 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{\bar{x}_n} - n - 1
\end{aligned}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right)^{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1)\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right) \\
&= 1 + (n+1)\cdot \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - (n+1) \\
&= 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{\bar{x}_n} - n - 1 \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{\bar{x}_n} - n
\end{aligned}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right)^{n+1} \\
&\geq 1 + (n+1)\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - 1\right) \\
&= 1 + (n+1)\cdot \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{(n+1)\cdot \bar{x}_n} - (n+1) \\
&= 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{\bar{x}_n} - n - 1 \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{\bar{x}_n} - n \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n\cdot \bar{x}_n}{\bar{x}_n}
\end{aligned}$$

Beweis

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \bar{x}_n}{\bar{x}_n}$$

Beweis

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \bar{x}_n}{\bar{x}_n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k}{\bar{x}_n}$$

Beweis

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \bar{x}_n}{\bar{x}_n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k}{\bar{x}_n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k}{\bar{x}_n}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \bar{x}_n}{\bar{x}_n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k}{\bar{x}_n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k}{\bar{x}_n} \\
&= \frac{x_{n+1}}{\bar{x}_n}.
\end{aligned}
$$