Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ zeige man die Abschätzung:

$$|\sin(x)| + |\cos(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Nutze die Ungleichung für den Fall $m = 2$: Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Beweis

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\sin(x)| + |\cos(x)|$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|\sin(x)| + |\cos(x)| = 1 \cdot |\sin(x)| + 1 \cdot |\cos(x)|$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\sin(x)| + |\cos(x)| &= 1 \cdot |\sin(x)| + 1 \cdot |\cos(x)| \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(|\sin(x)|\right)^2 + \left(|\cos(x)|\right)^2} \end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left|\sin(x)\right| + \left|\cos(x)\right| &= 1 \cdot \left|\sin(x)\right| + 1 \cdot \left|\cos(x)\right| \\
&\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\left|\sin(x)\right|\right)^2 + \left(\left|\cos(x)\right|\right)^2} \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\sin(x)| + |\cos(x)| &= 1 \cdot |\sin(x)| + 1 \cdot |\cos(x)| \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(|\sin(x)|\right)^2 + \left(|\cos(x)|\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1} \end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|\sin(x)| + |\cos(x)| &= 1 \cdot |\sin(x)| + 1 \cdot |\cos(x)| \\
&\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(|\sin(x)|)^2 + (|\cos(x)|)^2} \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1} \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$