Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Abschätzung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Hilfsabschätzung

Abschätzung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Daraus folgt die Abschätzung:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 + x_{n+1-k}^2}{2}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 + x_{n+1-k}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}^2\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 + x_{n+1-k}^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1-k} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 + x_{n+1-k}^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2.
\end{aligned}$$