Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot x_k \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \\
&= \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.
\end{aligned}$$