Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ die Abschätzung:

$$n \geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^k .$$

Hilfsmittel

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot x^{p-k} \cdot y^k.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$n$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$\begin{aligned} n &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$\begin{aligned} n &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$\begin{aligned}
n &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$
\begin{aligned}
n &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k .
\end{aligned}
$$

Folgerung 1

Für $m = 1$ folgt die Abschätzung:

Folgerung 1

Für $m = 1$ folgt die Abschätzung:

$$n$$

Folgerung 1

Für $m = 1$ folgt die Abschätzung:

$$n \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k$$

Folgerung 1

Für $m = 1$ folgt die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
n &\geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\
&= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^1
\end{aligned}
$$

Folgerung 1

Für $m = 1$ folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\ &= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^1 \\ &= 1 + n \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right). \end{aligned}$$

Folgerung 2

Für $m = 2$ folgt die Abschätzung:

Folgerung 2

Für $m = 2$ folgt die Abschätzung:

$$n$$

Folgerung 2

Für $m = 2$ folgt die Abschätzung:

$$n \geq \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k$$

Folgerung 2

Für $m = 2$ folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\ &= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Folgerung 2

Für $m = 2$ folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^k \\ &= \binom{n}{0} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \\ &> 1 + \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 . \end{aligned}$$