Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ zeige man die Abschätzung:

$$\frac{1}{2}\left(x+y+w+z\right)^2 \geq \left(x+w\right)\left(y+z\right)+2\left(xw+yz\right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung:

$$2uv \leq u^2 + v^2.$$

Beweis

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\frac{1}{2}\left(x + y + w + z\right)^2$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\frac{1}{2}\left(x+y+w+z\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(x+y\right)^2 + 2\left(x+y\right)\left(w+z\right) + \left(w+z\right)^2\right]$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right]\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x+y+w+z\right)^2 &= \frac{1}{2}\left[\left(x+y\right)^2 + 2\left(x+y\right)\left(w+z\right) + \left(w+z\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2\left(xw+xz+yw+yz\right) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2\left(xw+xz+yw+yz\right) + 2wz\right]
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw+xz+yw+yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw+xz+yw+yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw+xz+yw+yz) + 2wz\right]
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + 2yz + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right]
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + 2yz + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&= xw + xy + yz + xw + xz + yw + yz + wz
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + 2yz + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&= xw + xy + yz + xw + xz + yw + yz + wz \\
&= xy + xz + yw + wz + 2(xw + yz)
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + 2yz + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&= xw + xy + yz + xw + xz + yw + yz + wz \\
&= xy + xz + yw + wz + 2(xw + yz) \\
&= x(y+z) + w(y+z) + 2(xw + yz)
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+y+w+z)^2 &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 2(x+y)(w+z) + (w+z)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xy + y^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + w^2 + 2wz + z^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + w^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + y^2 + z^2 + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[2xw + 2xy + 2yz + 2(xw + xz + yw + yz) + 2wz\right] \\
&= xw + xy + yz + xw + xz + yw + yz + wz \\
&= xy + xz + yw + wz + 2(xw + yz) \\
&= x(y+z) + w(y+z) + 2(xw + yz) \\
&= (x+w)(y+z) + 2(xw + yz).
\end{aligned}$$