Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige positive reelle Zahlen. Weiter sei $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Man zeige die Abschätzung:

$$\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} \geq n.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und
$\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} = n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} &= n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n} \\
&\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} \cdot \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}
\end{aligned}$$

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} &= n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n} \\
&\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} \cdot \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} &= n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n} \\
&\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} \cdot \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} &= n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n} \\
&\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} \cdot \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{1}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ beliebige positive reelle Zahlen und $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Permutation. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}} &= n \cdot \frac{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} + \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} + \ldots + \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}}{n} \\
&\geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{\pi(1)}} \cdot \frac{x_2}{x_{\pi(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{\pi(n)}}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_n}} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= n \cdot \sqrt[n]{1} \\
&= n.
\end{aligned}
$$