Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Man zeige die Abschätzung:

$$\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} \geq 3.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Wir verwenden die Ungleichung für den Fall $p = 3$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Wir verwenden die Ungleichung für den Fall $p = 3$:

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} = 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} &= 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^3} \cdot \frac{y^4}{zx^3} \cdot \frac{z^4}{xy^3}} \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} &= 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^3} \cdot \frac{y^4}{zx^3} \cdot \frac{z^4}{xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{yz^3 \cdot zx^3 \cdot xy^3}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} &= 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^3} \cdot \frac{y^4}{zx^3} \cdot \frac{z^4}{xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{yz^3 \cdot zx^3 \cdot xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} &= 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^3} \cdot \frac{y^4}{zx^3} \cdot \frac{z^4}{xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{yz^3 \cdot zx^3 \cdot xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{1}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive rellee Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3} &= 3 \cdot \frac{\frac{x^4}{yz^3} + \frac{y^4}{zx^3} + \frac{z^4}{xy^3}}{3} \\
&\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^3} \cdot \frac{y^4}{zx^3} \cdot \frac{z^4}{xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{yz^3 \cdot zx^3 \cdot xy^3}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{x^4 \cdot y^4 \cdot z^4}} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{1} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$