Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Abschätzung:

$$(1 - x)^n < \frac{1}{1 + nx}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $0 < x < 1$ die Abschätzung:

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für $0 < x < 1$ die Abschätzung:

$$\frac{1}{1-x} > 1.$$

Beweis

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$(1 - x)^n$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$(1-x)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n}\end{aligned}$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1-x} - 1\right)^n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1-x} - 1\right)^n} \\
&\leq \frac{1}{1 + n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1-x} - 1\right)^n} \\
&\leq \frac{1}{1 + n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{1 + n \cdot \frac{x}{1-x}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{1-x}-1\right)^n} \\
&\leq \frac{1}{1+n\cdot\left(\frac{1}{1-x}-1\right)} \\
&= \frac{1}{1+n\cdot\frac{x}{1-x}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{1-x}\cdot n\cdot x}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $0 < x < 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(1-x)^n &= \left(\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1-x} - 1\right)^n} \\
&\leq \frac{1}{1 + n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{1 + n \cdot \frac{x}{1-x}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1-x} \cdot n \cdot x} \\
&< \frac{1}{1 + nx}.
\end{aligned}
$$