Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige man die Abschätzung:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für alle $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt die Abschätzung:

$$\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann folgt zunächst:

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann folgt zunächst:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann folgt zunächst:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann folgt zunächst:

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{y} &= \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x+y\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\left(x+y\right)\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann folgt zunächst:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} &= \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} (x + y) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} (x + y) \\
&= \frac{1}{2} (x + y) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right).
\end{aligned}$$

Beweis

Damit erhalten wir:

Beweis

Damit erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

Beweis

Damit erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = \frac{1}{x+y} \cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

Beweis

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} &= \frac{1}{x+y}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\\ &\leq \frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{2}\left(x+y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\end{aligned}$$

Beweis

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} &= \frac{1}{x+y}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\\
&\leq \frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{2}\,(x+y)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right).
\end{aligned}
$$