Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Für $a > 0$ zeige man die Gültigkeit der Abschätzung:

$$a^x \geq 1 + \ln(a) \cdot x.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Grenzwert-Darstellung der Exponentialfunktion:

Hilfsabschätzung

Bernoulli-Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Grenzwert-Darstellung der Exponentialfunktion:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Beweis

Beweis

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ reelle Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)\cdot x}{n} = 0.$$

Beweis

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ reelle Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(a) \cdot x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{\ln(a) \cdot x}{n} \geq -1.$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a) \cdot x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{\ln(a) \cdot x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)\cdot x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{\ln(a)\cdot x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{\ln(a)\cdot x}{n}\right)^n$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(a) \cdot x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{\ln(a) \cdot x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{\ln(a) \cdot x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{\ln(a) \cdot x}{n}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)\cdot x}{n} = 0.$$

Hieraus folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $n_0(x) \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(x)$ gilt:

$$\frac{\ln(a)\cdot x}{n} \geq -1.$$

Für jedes solche n gilt zusammen mit der Bernoulli-Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\ln(a)\cdot x}{n}\right)^n &\geq 1+n\cdot\frac{\ln(a)\cdot x}{n}\\ &= 1+\ln(a)\cdot x.\end{aligned}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$a^x$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\ln(a)\cdot x} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln(a)\cdot x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\ln(a)\cdot x} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\ln(a)\cdot x}{n}\right)^n \\ &\geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \ln(a)\cdot x\right) \end{aligned}$$

Beweis

Aus der Betrachtung $n \to \infty$ folgt:

$$
\begin{aligned}
a^x &= e^{\ln(a)\cdot x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\ln(a)\cdot x}{n}\right)^n \\
&\geq \lim_{n\to\infty}(1 + \ln(a)\cdot x) \\
&= 1 + \ln(a)\cdot x.
\end{aligned}
$$