Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige man die Abschätzung:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Nutze die Ungleichung für den Fall $m = 3$: Für alle $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ ist

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen. Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt[4]{y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[4]{z} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} + \sqrt[4]{x} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \sqrt[4]{y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[4]{z} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} + \sqrt[4]{x} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}} \\
&\leq \sqrt{\left(\sqrt[4]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \sqrt[4]{y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[4]{z} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} + \sqrt[4]{x} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}} \\
&\le \sqrt{\left(\sqrt[4]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ drei positive reelle Zahlen.Dann sind $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{z} > 0$ und es folgt zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \sqrt[4]{y} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[4]{z} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}} + \sqrt[4]{x} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}} \\
&\leq \sqrt{\left(\sqrt[4]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}} \\
&= \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}} \\
&= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.
\end{aligned}
$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen.

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen. Damit folgt schließlich:

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}\\ &= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}}\\ &\le \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\cdot\sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}\\ &= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)^2$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}} \\
&= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.
\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} &= \left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)^2 \\
&\le \left(\sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}\right)^2
\end{aligned}$$

Beweis

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung für $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}.\end{aligned}$$

Die quadratische Funktion ist streng monoton wachsend auf den positiven reellen Zahlen. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} &= \left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}}\right)^2 \\ &= \frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$