Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{8}{xyz}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 2$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere gilt für $p = 2$:

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2\right)$$

woraus folgt:

$$2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2,$$

für alle $a_1, a_2 \geq 0$

Beweis

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}}\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}}\\
&= 8\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{xz}}\frac{1}{\sqrt{xy}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\
&= 8\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{xz}}\frac{1}{\sqrt{xy}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{yzxzxy}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}}\\
&= 8\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{xz}}\frac{1}{\sqrt{xy}}\\
&= \frac{8}{\sqrt{yzxzxy}}\\
&= \frac{8}{\sqrt{x^2y^2z^2}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}}\\
&= 8\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{xz}}\frac{1}{\sqrt{xy}}\\
&= \frac{8}{\sqrt{yzxzxy}}\\
&= \frac{8}{\sqrt{x^2y^2z^2}}\\
&= \frac{8}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{z^2}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x, y, z > 0$ drei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{yz}}2\sqrt{\frac{1}{xz}}2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\
&= 8\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{xz}}\frac{1}{\sqrt{xy}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{yzxzxy}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{z^2}} = \frac{8}{xyz}.
\end{aligned}$$