Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}\right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$.

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} x_k \cdot \frac{y_k}{\sqrt{k}}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} x_k \cdot \frac{y_k}{\sqrt{k}} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} x_k\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k}{\sqrt{k}}\right)^2}\end{aligned}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} x_k \cdot \frac{y_k}{\sqrt{k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} x_k\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k}\right)^2 x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\left(\sqrt{k}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Dann folgt zunächst mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} x_k \cdot \frac{y_k}{\sqrt{k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} x_k\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{y_k}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k}\right)^2 x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\left(\sqrt{k}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Mit dieser Abschätzung folgt:

Beweis

Mit dieser Abschätzung folgt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2$$

Beweis

Mit dieser Abschätzung folgt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}\right)^2$$

Beweis

Mit dieser Abschätzung folgt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}\right)^2$$

Beweis

Mit dieser Abschätzung folgt:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 &\le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{k}\right).\end{aligned}$$