Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{\left(\sqrt[m]{n}\right)^{m-1}}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $x_1, \ldots, x_p > 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_p} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_p}{p}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\ &\leq \frac{\sqrt[m]{n} + \ldots + \sqrt[m]{n} + 1 + \ldots + 1}{n}\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\ &\leq \frac{\sqrt[m]{n} + \ldots + \sqrt[m]{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\ &= \frac{m \cdot \sqrt[m]{n} + n - m}{n} \end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt[m]{n} + \ldots + \sqrt[m]{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{m \cdot \sqrt[m]{n} + n - m}{n} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m \cdot \sqrt[m]{n}}{n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt[m]{n} + \ldots + \sqrt[m]{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{m \cdot \sqrt[m]{n} + n - m}{n} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m \cdot \sqrt[m]{n}}{n} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n^{1-\frac{1}{m}}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq m$. Wir schreiben

$$n = \underbrace{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n}}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}$$

und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt[m]{n} + \ldots + \sqrt[m]{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{m \cdot \sqrt[m]{n} + n - m}{n} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m \cdot \sqrt[m]{n}}{n} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n^{1-\frac{1}{m}}} \\
&= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{\left(\sqrt[m]{n}\right)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Folgerung

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

Folgerung

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n}$$

Folgerung

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{\left(\sqrt[m]{n}\right)^{m-1}}$$

Folgerung

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{\left(\sqrt[m]{n}\right)^{m-1}} < 1 + \frac{m}{\left(\sqrt[m]{n}\right)^{m-1}}.$$