Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z).$$

Gauß'sche Darstellung der Gammafunktion

Gauß'sche Darstellung der Gammafunktion

Für den Beweis verwenden wir die Gauß'sche Darstellung der Gammafunktion:

Gauß'sche Darstellung der Gammafunktion

Für den Beweis verwenden wir die Gauß'sche Darstellung der Gammafunktion:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Beweis

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl.

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} = \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^{z}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^{z}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}\\ &= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!\, n^{z}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\
&= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\ &= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\Gamma(z+1)$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\ &= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)(z+1+n)}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! n^{z}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\
&= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n! n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n! n^{z}}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\
&= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)(z+1+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\
&= z \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n!n^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\ &= \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)(z+1+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\ &= z \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \\ &= z \cdot \Gamma(z).\end{aligned}$$