Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Man zeige die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}}\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}.
\end{aligned}$$