Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir als Hilfsmittel die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir als Hilfsmittel die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $x_1, \ldots, x_m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\ &\le \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \ldots + 1}{n}\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt{n} + n - 2}{n}
\end{aligned}
$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt{n} + n - 2}{n} \\
&= 1 - \frac{2}{n} + \frac{2 \cdot \sqrt{n}}{n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir schreiben $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}}$ und schätzen mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ab:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \\
&\leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \ldots + 1}{n} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt{n} + n - 2}{n} \\
&= 1 - \frac{2}{n} + \frac{2 \cdot \sqrt{n}}{n} \\
&= 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

Folgerung 1

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

Folgerung 1

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n}$$

Folgerung 1

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Folgerung 1

Aus der eben gezeigten Abschätzung erhalten wir insbesondere die Abschätzung:

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$.

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Wegen $1 \leq \sqrt[n]{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir:

Folgerung 2

Wir setzen $w_n := \sqrt[n]{n}$. Für den Grenzwert der Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Wegen $1 \leq \sqrt[n]{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$