Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ nicht-negative reelle Zahlen. Man zeige die Abschätzung:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right) \geq 25abcde.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Wir verwenden die Ungleichung für den Fall $p = 5$:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \dots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Wir verwenden die Ungleichung für den Fall $p = 5$:

$$\sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}.$$

Beweis

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen.

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
&\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right) \\
&= 25 \cdot \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right)}{5} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)\cdot\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)\\
&= 25\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)}{5}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}\\
&\geq 25\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right) \\
&= 25 \cdot \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right)}{5} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \sqrt[5]{a^3 b^3 c^3 d^3 e^3}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right) \\
&= 25 \cdot \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right)}{5} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \sqrt[5]{a^3 b^3 c^3 d^3 e^3} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{(abcde)^2} \cdot \sqrt[5]{(abcde)^3}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)\cdot\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)\\
&= 25\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)}{5}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}\\
&\geq 25\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}\\
&\geq 25\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2}\cdot\sqrt[5]{a^3b^3c^3d^3e^3}\\
&\geq 25\sqrt[5]{(abcde)^2}\cdot\sqrt[5]{(abcde)^3}\\
&= 25\sqrt[5]{(abcde)^2\cdot(abcde)^3}
\end{aligned}$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right) \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right) \\
&= 25 \cdot \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2\right)}{5} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3\right)}{5} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2 d^2 e^2} \cdot \sqrt[5]{a^3 b^3 c^3 d^3 e^3} \\
&\geq 25 \sqrt[5]{(abcde)^2} \cdot \sqrt[5]{(abcde)^3} \\
&= 25 \sqrt[5]{(abcde)^2 \cdot (abcde)^3} \\
&= 25 \sqrt[5]{(abcde)^5}
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $a, b, c, d, e \geq 0$ beliebige nicht-negative reelle Zahlen. Wir schätzen wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)\cdot\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)\\
&= 25\cdot\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)}{5}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}\\
&\geq 25\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2}\cdot\frac{\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)}{5}\\
&\geq 25\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2}\cdot\sqrt[5]{a^3b^3c^3d^3e^3}\\
&\geq 25\sqrt[5]{(abcde)^2}\cdot\sqrt[5]{(abcde)^3}\\
&= 25\sqrt[5]{(abcde)^2\cdot(abcde)^3}\\
&= 25\sqrt[5]{(abcde)^5}\\
&= 25abcde.
\end{aligned}
$$