Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, positive reelle Zahlen. Man zeige, die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right).$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für alle $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Beweis

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$.

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$n^2$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right)^2$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2 \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$
\begin{aligned}
n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Beweis

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ positive reelle Zahlen. Dann existieren die Quadratwurzeln der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und es gilt $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$. Wir schätzen wie folgt mit der Cauchy-Schwazschen Ungleichung ab:

$$
\begin{aligned}
n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).
\end{aligned}
$$