Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Man zeige, für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Hilfsmittel

Hilfsmittel

Die Gammafunktion ist für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ definiert als:

Hilfsmittel

Die Gammafunktion ist für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ definiert als:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \,.$$

Beweis

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl.

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^{\alpha}$.

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$.

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^{\alpha}$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^{\alpha}$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1}$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} \,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\int_0^\infty e^{-t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} \,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^{\alpha}$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir substituieren $x = t^\alpha$. Daraus folgt $t = x^{\frac{1}{\alpha}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).\end{aligned}$$