Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Man zeige die Gültigkeit der folgenden Abschätzung:

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt hieraus die Abschätzung:

$$p \cdot \sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq a_1 + \ldots + a_p.$$

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt hieraus die Abschätzung:

$$p \cdot \sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq a_1 + \ldots + a_p.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gauß'sche Summenformel:

Hilfsabschätzung

Für den Beweis verwenden wir die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

Hilfsabschätzung

Für alle $a_1, \ldots, a_p \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$, gilt die Abschätzung:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_p}{p}.$$

Insbesondere folgt hieraus die Abschätzung:

$$p \cdot \sqrt[p]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_p} \leq a_1 + \ldots + a_p.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl.

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}} \\
&\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\ldots+2n}}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}} \\ &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\ldots+2n}}} \\ &= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}}}}\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}} \\
&\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\ldots+2n}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n \cdot (2n+1)}{2}}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot x^{\frac{2n \cdot (2n+1)}{2 \cdot (2n+1)}}}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}} \\
&\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\ldots+2n}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot x^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2\cdot(2n+1)}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot x^n}
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche und $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann schätzen wir ab:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} &\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}} \\
&\leq \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{1+2+\ldots+2n}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2}}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot x^{\frac{2n\cdot(2n+1)}{2\cdot(2n+1)}}} \\
&= \frac{x^n}{(2n+1) \cdot x^n} \\
&= \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}
$$