Willkommen in der guten Stube :D

Aufgabe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ zeige man die Abschätzung:

$$\frac{1}{2} \leq \sin^4(x) + \cos^4(x)\,.$$

Hilfsabschätzung

Hilfsabschätzung

Abschätzung

Für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Hilfsabschätzung

Abschätzung

Für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität:

Hilfsabschätzung

Abschätzung

Für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2\tilde{x}\tilde{y} \leq \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Beweis

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\frac{1}{2}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})^2
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right)
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right) \\
&= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2
\end{aligned}$$

Beweis

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Setzen $\tilde{x} = \sin^2(x)$ und $\tilde{y} = \cos^2(x)$. Dann folgt zusammen mit der Hilfsabschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\tilde{x} + \tilde{y})^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2\right) \\
&= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\
&= \sin^4(x) + \cos^4(x).
\end{aligned}$$