# Die Gammafunktion und ihre Eigenschaften

erstellt von Artur Sanin.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

# 1 Gammafunktion

## 1.1 Definition Gammafunktion

In diesem Abschnitt wird die Gammafunktion sowohl über das Eulersche Integral der zweiten Gattung als auch über die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion definiert.

**Definition 1.1** (Gammafunktion)**.**
Für postive reelle Zahlen $x > 0$ wird die Gammafunktion durch das folgende Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t\,. \tag{1.1}$$

Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ ist die Gammafunktion ebenfalls durch das Integral definiert:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t\,. \tag{1.2}$$

Mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion wird der Definitionsbereich auf alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$ erweitert:

$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}. \tag{1.3}$$

## 1.2 Integraldarstellungen der Gammafunktion

In diesem Abschnitt werden einige Integraldarstellungen der Gammafunktion durch verschiedene Substitutionen im Integral (1.1) hergeleitet.

Doch zunächst leiten wir durch Aufteilen des Integrals (1.2) die folgende Darstellung her:

**Aufgabe 1.1.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ gilt:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(z+k) \cdot k!} + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t\,. \tag{1.4}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit positiven Realteil $Re(z) > 0$. Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{z-1} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot t^k}{k!}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot t^{z+k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 \frac{(-1)^k \cdot t^{z+k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot t^{z+k}}{(z+k)\cdot k!}\Bigg|_0^1 + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot 1^{z+k}}{(z+k)\cdot k!} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cdot 0^{z+k}}{(z+k)\cdot k!} + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(z+k)\cdot k!} + \int_1^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 1.2** (Gammafunktion Integraldarstellung 2)**.**
Für positive reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$
\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u\,. \tag{1.5}
$$

**Beweis.**
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Mit der Substitution $u = e^{-t}$ gilt $t = -\ln(u)$ und $\mathrm{d}t = -e^t\,\mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = e^{-0} = 1$ und die obere Integrationsgrenze $u = e^{-t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^0 (-\ln(u))^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot e^t\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_1^0 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}
$$

Das letzte Integral lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$
\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{u}\right)^{x-1}\,\mathrm{d}u\,.
$$

□

**Aufgabe 1.3** (Gammafunktion Integraldarstellung 3)**.**
Für positive reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x \cdot u - e^u} \, \mathrm{d}u \, . \tag{1.6}$$

**Beweis.**
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Mit der Substitution $u = \ln(t)$ gilt $t = e^u$ und $\mathrm{d}t = t \, \mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = \ln(t) \overset{t \to 0}{\longrightarrow} -\infty$ und die obere Integrationsgrenze $u = \ln(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot t \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^{x} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x \cdot \ln(t)} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x \cdot \ln(t) - t} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x \cdot u - e^u} \, \mathrm{d}u \, .
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 1.4** (Gammafunktion Integraldarstellung 4)**.**
Für positive reelle Zahlen $x, s > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = s^x \cdot \int_0^{\infty} u^{x-1} \cdot e^{-s \cdot u} \, \mathrm{d}u \, . \tag{1.7}$$

**Beweis.**
Seien $x, s > 0$ zwei positive reelle Zahl. Mit der Substitution $u = t/s$ gilt $t = s \cdot u$ und $\mathrm{d}t = s \, \mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = 0/s = 0$ und die obere Integrationsgrenze $u = t/s \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} (s \cdot u)^{x-1} \cdot e^{-s \cdot u} \cdot s \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} s^{x-1} \cdot u^{x-1} \cdot e^{-s \cdot u} \cdot s \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} s^{x} \cdot u^{x-1} \cdot e^{-s \cdot u} \, \mathrm{d}u \\
&= s^x \cdot \int_0^{\infty} u^{x-1} \cdot e^{-s \cdot u} \, \mathrm{d}u \, .
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 1.5** (Gammafunktion Integraldarstellung 5)**.**
Für positive reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = 2 \cdot \int_0^\infty u^{2x-1} \cdot e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \,. \tag{1.8}$$

**Beweis.**
Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Mit der Substitution $t = u^2$ gilt $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = \sqrt{0} = 0$ und die obere Integrationsgrenze $u = \sqrt{t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot \int_0^\infty u \cdot \left(u^2\right)^{x-1} \cdot e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= 2 \cdot \int_0^\infty u \cdot u^{2x-2} \cdot e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= 2 \cdot \int_0^\infty u^{2x-1} \cdot e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \,.
\end{aligned}$$

□

# 2 Funktionalgleichung der Gammafunktion

In diesem Abschnitt wird die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ der Gammafunktion bewiesen.

**Lemma 2.1.**
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \tag{2.1}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Für positive reelle Zahlen erhalten wir mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{e^x} &= \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} \\
&\leq \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} \\
&= \frac{x^n \cdot (n+1)!}{x^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)!}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt der Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

□

**Aufgabe 2.1** (Funktionalgleichung der Gammafunktion für natürliche Zahlen)**.**
Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n). \tag{2.2}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^{n+1-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^n \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{t^n}{e^t}\bigg|_0^R + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{R^n}{e^R} + \frac{0^n}{e^0} + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{R^n}{e^R} + n \cdot \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\lim_{R\to\infty} \frac{R^n}{e^R} + n \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&\overset{(??)}{=} n \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= n \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= n \cdot \Gamma(n) .
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 2.2** (Funktionalgleichung der Gammafunktion für positive reelle Zahlen)**.**

Für alle positiven reellen Zahlen $x > 0$ gilt die folgende Funktionalgleichung:

$$
\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) . \tag{2.3}
$$

**Beweis.**
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n+1 > x+1$ gilt. Für nicht negative Werte $R \geq 0$ folgt zusammen mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{R^x}{e^R} &= \frac{R^x}{\sum_{k=0}^\infty \frac{R^k}{k!}} \\
&\leq \frac{R^x}{\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}} \\
&= \frac{R^x \cdot (n+1)!}{R^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)!}{R^{n+1-x}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit diesem Grenzwert erhalten wir:

$$
\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^R + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{R^x}{e^R} + \frac{0^x}{e^0} + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left( -\frac{R^x}{e^R} + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\lim_{R\to\infty} \frac{R^x}{e^R} + x \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= x \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= x \cdot \Gamma(x)\,.
\end{aligned}
$$

□

Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) lässt sich die Funktionalgleichung (2.4) auf komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ erweitern.

**Aufgabe 2.3** (Funktionalgleichung der Gammafunktion für komplexe Zahlen)**.** Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ gilt die Funktionalgleichung:

$$
\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)\,. \tag{2.4}
$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ eine komplexe Zahl. Dann gilt zunächst:

$$
\begin{aligned}
\frac{n! \cdot n^{z+1}}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\cdot(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \\
&= z \cdot \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{z+1}}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\cdot(z+1+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ z \cdot \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \right] \\
&= z \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \right] \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \right] \\
&= z \cdot \Gamma(z)\,.
\end{aligned}
$$

□

Durch Anwendung von (2.4) erhält man induktiv:

**Aufgabe 2.4** (Folgerung aus der Funktionalgleichung der Gammafunktion).
Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}. \tag{2.5}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zusammen mit (2.4) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+n+1) &\overset{(2.4)}{=} (z+n) \cdot \Gamma(z+n) \\
&\overset{(2.4)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z+n-1) \\
&\overset{(2.4)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \Gamma(z+n-2) \\
&\vdots \\
&\overset{(2.4)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \ldots \cdot (z+2) \cdot (z+1) \cdot \Gamma(z+1) \\
&\overset{(2.4)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \ldots \cdot (z+2) \cdot (z+1) \cdot z \cdot \Gamma(z).
\end{aligned}$$

Durch die Wahl von $z$ sind alle Linearfaktoren auf der rechten Seite der Gleichung ungleich 0. Teilt man die Gleichung durch die Linearfaktoren, so folgt:

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} = \Gamma(z).$$

□

**Bemerkung 2.1.**
Die folgende Formel kann verwendet werden, um spezielle Werte der Gammafunktion zu berechnen:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot (z+n-3) \cdot \ldots \cdot (z+2) \cdot (z+1) \cdot z \cdot \Gamma(z) \tag{2.6}$$

# 3 Produktdarstellungen der Gammafunktion

Aus der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion lassen sich durch verschiedene Umformungen der Funktionenfolge

$$\frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \tag{3.1}$$

mehrere Produktdarstellungen ableiten. Dabei werden vier Darstellungen hergeleitet, einschließlich der Weierstraßschen Produktdarstellung. Wir beginnen mit der folgenden Produktdarstellung:

**Aufgabe 3.1** (Produktdarstellung der Gammafunktion 1)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Es gilt:

$$n^z = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^z}{k^z} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z. \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot n^z \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot n^z \cdot \frac{1}{\frac{(z+1)}{1} \cdot \frac{(z+2)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(z+n-1)}{(n-1)}} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot n^z \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{z}{n-1}\right)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot n^z \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{z}{n-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot n^z \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \\
&\overset{(3.3)}{=} \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1}.$$

Mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &\overset{(1.3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{n}{z+n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n} \right] \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Man kann den der Faktor $1/z$ in der Produktdarstellung (3.2) mithilfe der Funktionalgleichung (2.3) eliminieren.

**Aufgabe 3.2** (Produktdarstellung der Gammafunktion 2)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{z-1} \cdot \left(1 + \frac{z-1}{k}\right)^{-1}. \tag{3.4}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Mit (2.3) und der Produktdarstellung (3.2) ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &\overset{(2.3)}{=} z \cdot \Gamma(z) \\
&\overset{(2.3)}{=} z \cdot \frac{1}{z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z \cdot \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Mit dieser Produktdarstellung von $\Gamma(z+1)$ ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \Gamma(z - 1 + 1) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{z-1} \cdot \left(1 + \frac{z-1}{k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 3.3** (Produktdarstellung der Gammafunktion 3)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}. \tag{3.5}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Es gilt:

$$\ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right). \tag{3.6}$$

Damit lässt sich die Funktionenfolge (3.1) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} &= n^{-z} \cdot \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{z+n}{n} \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&\overset{(3.6)}{=} z \cdot e^{-z \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-z \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &\overset{(1.3)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[ z \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \right] \\
&= z \cdot \left[ \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] \cdot \left[ \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)} \right] \\
&= z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-z \cdot \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.1** (Euler-Mascheroni-Konstante)**.**
Die folgende Folge ist konvergent:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n). \tag{3.7}$$

Der Grenzwert $\gamma$ der Folge heißt die Euler-Mascheroni-Konstante.

**Aufgabe 3.4** (Weierstraßsche Produktdarstellung der Gammafunktion)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \cdot e^{\gamma \cdot z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}}. \tag{3.8}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Die Weierstraßsche Produktdarstellung ergibt sich wie folgt aus der Gaußschen Darstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} &= n^{-z} \cdot \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{z+n}{n} \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\
&= z \cdot e^{-z \cdot \ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - z \cdot \ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot e^{-z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{z}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $w \mapsto e^{z \cdot w}$ ist stetig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} &= e^{\lim_{n \to \infty} z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \\
&= e^{\gamma \cdot z}.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left[ z \cdot e^{z\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}} \right] \\
&= z \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} e^{z\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \right] \cdot \left[ \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}} \right] \\
&= z \cdot e^{\gamma\cdot z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}
$$

□

**Bemerkung 3.1.**
Aus der Weierstraßschen Produktdarstellung folgt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$:

$$
\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma\cdot z}}{z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{k}}. \tag{3.9}
$$

# 4 Eulerscher Ergänzungssatz

**Lemma 4.1** (Produktdarstellung der Sinusfunktion).
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^k}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}. \tag{4.1}$$

**Beweis.**
Vgl. (Eberhard Freitag, 2000, S. 213 ff.). □

**Aufgabe 4.1** (Eulerscher Ergänzungssatz).
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{4.2}$$

gilt.

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n^{1-z} \cdot n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z) \cdot (n+1-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{n!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{n!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\frac{(z+1)}{1} \cdot \frac{(z+2)}{2} \cdot \frac{(z+3)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(z+n)}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{(1-z)}{1} \cdot \frac{(2-z)}{2} \cdot \frac{(3-z)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-z)}{n}} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{z}{n}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{n}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right) \cdot \left(1-\frac{z^2}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{z^2}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-z}\cdot n!}{(1-z)\cdot(2-z)\cdot(3-z)\cdot\ldots\cdot(n-z)\cdot(n+1-z)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\cdot\frac{n^{1-z}\cdot n!}{(1-z)\cdot(2-z)\cdot(3-z)\cdot\ldots\cdot(n-z)\cdot(n+1-z)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{z\cdot(n+1-z)}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\right)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{z\cdot(n+1-z)}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\right)\\
&\overset{(4.1)}{=}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\\
&=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}}\\
&=\frac{1}{z}\cdot\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\\
&=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 4.2** (Folgerung aus dem Eulerschen Ergänzungssatz)**.**
Für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ gilt:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\cdot\sin(\pi z)}. \tag{4.3}$$

**Beweis.**
Sei $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ eine komplexe Zahl. Zusammen mit dem Eulerschen Ergänzungssatz (4.2) und (2.4) gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\cdot\Gamma(-z)&=\frac{1}{-z}\cdot\Gamma(z)\cdot(-z)\cdot\Gamma(-z)\\
&\overset{(2.4)}{=}\frac{1}{-z}\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)\\
&\overset{(4.2)}{=}-\frac{\pi}{z\cdot\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

□

**Definition 4.1** (Sinus, Kosinus, Sinus hyperbolicus, Kosinus hyperbolicus)**.**
Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den komplexen Sinus, Kosinus, Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus wie folgt:

$$\sin(z) := \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{iz} - e^{-iz}\right); \tag{4.4}$$

$$\cos(z) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{iz} + e^{-iz}\right); \tag{4.5}$$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{z} - e^{-z}\right). \tag{4.6}$$

$$\cosh(z) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{z} + e^{-z}\right). \tag{4.7}$$

Insbesondere sind für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ der reelle Sinus, Kosinus, Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus gegeben durch:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right); \tag{4.8}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right); \tag{4.9}$$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x} - e^{-x}\right). \tag{4.10}$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x} + e^{-x}\right). \tag{4.11}$$

**Lemma 4.2.**
Zwischen den eben definierten Funktionen besteht der folgende Zusammenhang:

1. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh(x) = \cos(ix) \tag{4.12}$$

2. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sinh(x) = -i \cdot \sin(ix). \tag{4.13}$$

**Beweis.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(ix) &\overset{(4.5)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i\cdot(ix)} + e^{-i\cdot(ix)}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x} + e^{x}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x} + e^{-x}\right) \\
&\overset{(4.7)}{=} \cosh(x).
\end{aligned}$$

2. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
-i \cdot \sin(ix) &\overset{(4.4)}{=} -i \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{i\cdot(ix)} - e^{-i\cdot(ix)}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (e^{-x} - e^{x}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (e^{x} - e^{-x}) \\
&\overset{(4.6)}{=} \sinh(x).
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 4.3** (Anwendung des Eulerschen Ergänzungssatz)**.**
Es gilt:

$$
\Gamma\left(\frac{1}{4} + iy\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4} - iy\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\cosh(\pi y) + i \cdot \sinh(\pi y)}. \tag{4.14}
$$

**Beweis.**
Mit dem Eulerschen Ergänzungssatz (4.2) folgt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{4} + iy\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4} - iy\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{4} + iy\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{4} - iy\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{4} + iy\right) \cdot \Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{4} + iy\right)\right) \\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \left(\frac{1}{4} + iy\right)\right)} \\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\pi y\right)} \\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(i\pi y) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(i\pi y)} \\
&= \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(i\pi y) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(i\pi y)} \\
&= \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(i\pi y) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(i\pi y)} \\
&= \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\cos(i\pi y) + \sin(i\pi y)} \\
&\overset{(4.12)}{=} \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\cosh(\pi y) + \sin(i\pi y)} \\
&\overset{(4.13)}{=} \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\cosh(\pi y) - \frac{1}{i} \cdot \sinh(\pi y)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\cosh\left(\pi y\right) + i \cdot \sinh\left(\pi y\right)}.$$

$\square$

# 5 Legendresche Verdopplungsformel

**Aufgabe 5.1** (Legendresche Verdopplungsformel für natürlichen Zahlen)**.**
Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) \,. \tag{5.1}$$

gilt.

**Beweis.**

Beweis per vollständiger Induktion nach $n$.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}} \cdot \Gamma(1) \,.\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) \,. \tag{5.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ &\overset{(2.4)}{=} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ &\overset{(5.2)}{=} \frac{n}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}} \cdot n \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}} \cdot \Gamma(n+1) \,.\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 5.2** (Legendresche Verdopplungsformel).
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \cdot \Gamma(z) . \tag{5.3}$$

gilt.

**Bemerkung 5.1** (Variation der Legendresche Verdopplungsformel).
Setzt man in (5.3) $z = 2w$, wobei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt, so ergibt sich die folgende Formel:

$$\Gamma(w) \cdot \Gamma\left(w + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2w-1}} \cdot \Gamma(2w) \tag{5.4}$$

bzw.

$$\Gamma(2w) = (2\pi)^{-1/2} \cdot 2^{2w-1/2} \cdot \Gamma(w) \cdot \Gamma\left(w + \frac{1}{2}\right).$$

# 6 Spezielle Werte der Gammafunktion

**Aufgabe 6.1** (Wert der Gammafunktion für natürliche Zahlen)**.**
Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{6.1}$$

**Beweis.**
Beweis mittels vollständiger Induktion nach $n$.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(0+1) &= \Gamma(1) \\
&= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R} - \left(e^{-0}\right)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R} + 1\right) \\
&= 1 - \lim_{R\to\infty} e^{-R} \\
&= 1 \\
&= 0!.
\end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{6.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+2) &= \Gamma(n+1+1)\\ &\overset{(2.1)}{=} (n+1)\cdot\Gamma(n+1)\\ &\overset{(6.2)}{=} (n+1)\cdot n!\\ &= (n+1)!.\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 6.1.**
Mit der bekannten Darstellung der eulerschen Zahl $e$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

und ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad = e$$

**Bemerkung 6.2** (Gammafunktion als Verallgemeinerung der Fakultät)**.**
Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät, wie die zuletzt gezeigte Eigenschaft zeigt. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ setzt man:

$$z! := \Gamma(z+1).$$

Damit hat die Formel (2.6) die Gestalt:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n+1) &= (z+n)\cdot(z+n-1)\cdot(z+n-2)\cdot\ldots\cdot(z+2)\cdot(z+1)\cdot\Gamma(z+1)\\ &= (z+n)\cdot(z+n-1)\cdot(z+n-2)\cdot\ldots\cdot(z+2)\cdot(z+1)\cdot z!.\end{aligned}$$

Der verallgemeinerte Binomialkoeffizient wird definiert als:

$$\binom{z}{w} := \frac{z!}{w!\cdot(z-w)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\cdot\Gamma(z-w+1)}.$$

Insbesondere folgt für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\binom{z}{k} &= \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(z-k+1)}\\ &= \frac{z\cdot(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-k+2)\cdot(z-k+1)\cdot\Gamma(z-k+1)}{k!\cdot\Gamma(z-k+1)}\\ &= \frac{z\cdot(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-k+2)\cdot(z-k+1)}{k!}.\end{aligned}$$

**Lemma 6.1** (Gaußsche Integral).
Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}. \tag{6.3}$$

**Aufgabe 6.2** (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle 1/2).
Es gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{6.4}$$

**Beweis.**
Wir Substitution $u = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $t = u^2$ und $\mathrm{d}t = 2\sqrt{t}\,\mathrm{d}u$. Für die untere Integrationsgrenze gilt $u = \sqrt{0} = 0$ während die obere Integrationsgrenze $u = \sqrt{t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ lautet. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&\overset{(6.3)}{=} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6.3** (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle $1/n$).
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.5}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir substituieren $u = t^n$. Daraus folgt $t = u^{\frac{1}{n}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{n}t^{1-n}\,\mathrm{d}u\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$n \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t = n \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{n} t^{1-n} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 6.4** (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle $1/\alpha$)**.**
Für alle positiven reellen Zahlen $\alpha > 0$ gilt:

$$
\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.6}
$$

**Beweis.**
Sei $\alpha > 0$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir substituieren $u = t^\alpha$. Daraus folgt $t = u^{1/\alpha}$ und:

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\,\mathrm{d}u\,.
$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot \int_0^\infty e^{-t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \alpha \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 6.5.**
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.7}
$$

**Beweis.**

Beweis mittles vollständiger Induktion nach $n$.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$
\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.
$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) &\overset{(2.3)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&\overset{(6.8)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1) \cdot (2n)!}{2 \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{2 \cdot (2n+2) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2 \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4 \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 6.3.**
Wir berechnen mit der Formel (6.7) einige Werte der Gammafunktion.

1. Für $n = 1$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2!}{4^1 \cdot 1!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

2. Für $n = 2$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4!}{4^2 \cdot 2!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}.$$

3. Für $n = 3$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{6!}{4^3 \cdot 3!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi}.$$

4. Für $n = 4$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{8!}{4^4 \cdot 4!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{105}{16} \cdot \sqrt{\pi}.$$

5. Für $n = 5$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{10!}{4^5 \cdot 5!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{945}{32} \cdot \sqrt{\pi}.$$

**Aufgabe 6.6.**
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.9}$$

**Beweis.**

Beweis per vollständiger Induktion nach $n$.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi}. \tag{6.10}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus (2.3) folgt:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{6.11}$$

Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) &\overset{(6.11)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n - 1} \\
&= (-2) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{2n+1} \\
&\overset{(6.10)}{=} (-2) \cdot \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= (-2) \cdot \frac{(2n+2) \cdot (-4)^n \cdot n!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2) \cdot \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (-4)^n \cdot n!}{(2n+2)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(-4)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

□

**Bemerkung 6.4.**
Wir berechnen mit der Formel (6.9) einige weitere Werte der Gammafunktion.

1. Für $n = 1$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-4)^1 \cdot 1!}{2!} \cdot \sqrt{\pi} = -2 \cdot \sqrt{\pi}.$$

2. Für $n = 2$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{(-4)^2 \cdot 2!}{4!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\pi}.$$

3. Für $n = 3$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{(-4)^3 \cdot 3!}{6!} \cdot \sqrt{\pi} = -\frac{8}{15} \cdot \sqrt{\pi}.$$

4. Für $n = 4$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{(-4)^4 \cdot 4!}{8!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{16}{105} \cdot \sqrt{\pi}.$$

5. Für $n = 5$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{(-4)^5 \cdot 5!}{10!} \cdot \sqrt{\pi} = -\frac{32}{945} \cdot \sqrt{\pi}.$$

**Bemerkung 6.5.**
Aus den Formeln (6.7) und (6.9) ergibt sich Folgendes:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) &\overset{(6.7)}{=} \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \\
&\overset{(6.9)}{=} \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \cdot 4^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= (-1)^n \cdot \pi.
\end{aligned}
$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)} &\overset{(6.7)}{=} \frac{\frac{(2n)!}{4^n \cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)} \\
&\overset{(6.9)}{=} \frac{\frac{(2n)!}{4^n \cdot n!}\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!}\cdot\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{(2n)!\cdot(2n)!}{4^n \cdot n! \cdot (-4)^n \cdot n!} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{((2n)!)^2}{4^{2n}\cdot(n!)^2}.
\end{aligned}$$

3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} &= \frac{1}{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{4^{2n}\cdot(n!)^2}{((2n)!)^2}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.7.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n}(3k-2)\right]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n}. \tag{6.12}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit der Formel (2.6) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &\overset{(2.6)}{=} \left(\frac{1}{3}+n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+n-3\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{3}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{3n+1-3}{3}\cdot\frac{3n+1-6}{3}\cdot\frac{3n+1-9}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{6+1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= (3n-2)\cdot(3n-5)\cdot(3n-8)\cdot\ldots\cdot 7\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n} \\
&= 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-8)\cdot(3n-5)\cdot(3n-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n} \\
&= 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2\cdot 3-2)\cdot(3n-1\cdot 3-2)\cdot(3n-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n} \\
&= 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3\cdot(n-2)-2)\cdot(3\cdot(n-1)-2)\cdot(3n-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n}(3k-2)\right]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6.8.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}(4k-3)\right]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}. \tag{6.13}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit der Formel (2.6) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &\overset{(2.6)}{=} \left(\frac{1}{4}+n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+n-3\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{4n+1-4}{4}\cdot\frac{4n+1-8}{4}\cdot\frac{4n+1-12}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1+8}{4}\cdot\frac{1+4}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\\
&= (4n-3)\cdot(4n-7)\cdot(4n-11)\cdot\ldots\cdot 9\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}\\
&= 1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-11)\cdot(4n-7)\cdot(4n-3)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}\\
&= 1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-4\cdot 2-3)\cdot(4n-4\cdot 1-3)\cdot(4n-3)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}\\
&= 1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4\cdot(n-2)-3)\cdot(4\cdot(n-1)-3)\cdot(4n-3)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}\\
&= \left[\prod_{k=1}^{n}(4k-3)\right]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4^n}.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 6.9.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}(m\cdot k-(m-1))\right]\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m^n}. \tag{6.14}$$

**Beweis.**
Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen. Zusammen mit der Formel (2.6) folgt:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right)\\
&\overset{(2.6)}{=} \left(\frac{1}{m}+n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{m}+n-2\right)\cdot\left(\frac{1}{m}+n-3\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{m}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{m}+1\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\\
&= \frac{m\cdot n+1-m}{m}\cdot\frac{m\cdot n+1-2m}{m}\cdot\frac{m\cdot n+1-3m}{m}\cdot\ldots\cdot\frac{1+2m}{m}\cdot\frac{1+m}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

$$= (m \cdot n - (m-1)) \cdot (m \cdot n - m - (m-1)) \cdot (m \cdot n - 2m - (m-1)) \cdot \ldots \cdot (2m+1) \cdot (m+1) \cdot 1 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m^n}$$
$$= 1 \cdot (m+1) \cdot (2m+1) \cdot \ldots \cdot (m \cdot n - 2m - (m-1)) \cdot (m \cdot n - m - (m-1)) \cdot (m \cdot n - (m-1)) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m^n}$$
$$= 1 \cdot (m+1) \cdot (2m+1) \cdot \ldots \cdot (m \cdot (n-2) - (m-1)) \cdot (m \cdot (n-1) - (m-1)) \cdot (m \cdot n - (m-1)) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m^n}$$
$$= \left[\prod_{k=1}^{n} (m \cdot k - (m-1))\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m^n}.$$

□

**Bemerkung 6.6** (Anwendung von (6.14))**.**
Durch Anwendung von (6.14) erhalten wir die folgenden Formeln:

1. Für $m = 5$ gilt:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{5}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (5k-4)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{5^n}$$

2. Für $m = 6$ gilt:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (6k-5)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{6^n}$$

3. Für $m = 7$ gilt:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{7}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (7k-6)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)}{7^n}$$

4. Für $m = 8$ gilt:
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{8}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (8k-7)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{8^n}$$

**Aufgabe 6.10.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (3k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n}. \tag{6.15}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit der Formel (2.6) folgt:

$$\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right) \overset{(2.6)}{=} \left(\frac{2}{3} + n - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + n - 2\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + n - 3\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2}{3} + 2\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3n+2-3}{3} \cdot \frac{3n+2-6}{3} \cdot \frac{3n+2-9}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2+6}{3} \cdot \frac{2+3}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= (3n-1) \cdot (3n-4) \cdot (3n-7) \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n} \\
&= 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-7) \cdot (3n-4) \cdot (3n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n} \\
&= 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-3\cdot 2-1) \cdot (3n-3\cdot 1-1) \cdot (3n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n} \\
&= 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3\cdot(n-2)-1) \cdot (3\cdot(n-1)-1) \cdot (3n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n} (3k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^n}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 6.11.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} (4k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n}. \tag{6.16}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Zusammen mit der Formel (2.6) folgt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right) &\overset{(2.6)}{=} \left(\frac{3}{4}+n-1\right) \cdot \left(\frac{3}{4}+n-2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}+n-3\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{4}+2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}+1\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{4n+3-4}{4} \cdot \frac{4n+3-8}{4} \cdot \frac{4n+3-12}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{3+8}{4} \cdot \frac{3+4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= (4n-1) \cdot (4n-5) \cdot (4n-9) \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n} \\
&= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-9) \cdot (4n-5) \cdot (4n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n} \\
&= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-4\cdot 2-1) \cdot (4n-4\cdot 1-1) \cdot (4n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n} \\
&= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4\cdot(n-2)-1) \cdot (4\cdot(n-1)-1) \cdot (4n-1) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n} \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n} (4k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4^n}.
\end{aligned}
$$

□

Zwischen den Werten $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$ besteht der folgende Zusammenhang:

**Aufgabe 6.12** (Zusammenhang zwischen $\Gamma(1/3)$ und $\Gamma(1/6)$).
Es gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 2^{-1/3} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2. \tag{6.17}$$

**Beweis.**
Aus der Legendrschen Verdopplungsformel (5.3) ergibt sich für $z = 1/3$ der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}+1}{2}\right) \\
&\overset{(5.3)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/3-1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Aus dieser Identität und dem Eulerschen Ergänzungssatz für $z = 1/3$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) &= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)} \\
&\overset{(4.2)}{=} 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 2^{2/3-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 2^{-1/3} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

□

# 7 Asymptotisches Verhalten

**Definition 7.1** (Asymptotische Gleichheit)**.**
Zwei Folgen komplexer Zahlen $w_k, z_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, heißen asymptotisch gleich, bezeichnet durch $w_k \sim z_k$, falls gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{w_k}{z_k} = 1.$$

Zwei Funktionenfolgen $f_k, g_k$ heißen asymptotisch gleich, bezeichnet durch $f_k \sim g_k$, falls für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k(z)}{g_k(z)} = 1.$$

**Aufgabe 7.1.**
Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \cdot \Gamma(n)} = 1. \tag{7.1}$$

Insbesondere ist;

$$\Gamma(z+n) \sim n^z \cdot \Gamma(n).$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ eine komplexe Zahl. Mit (9.12) folgt:

$$\Gamma(z+n) = z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z). \tag{7.2}$$

Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \cdot \Gamma(n)} &\overset{(7.2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z)}{n^z \cdot \Gamma(n)} \\
&\overset{(6.1)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z)}{n^z \cdot (n-1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z)}{n^z \cdot n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n}{z+n} \cdot \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot (z+n) \cdot \Gamma(z)}{n^z \cdot n!} \right) \\
&= \Gamma(z) \cdot \left( \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n} \right) \cdot \left( \lim_{n\to\infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n-1) \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(z) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)\cdot(z+n)}{n^z\cdot n!}\\
&= \Gamma(z) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)\cdot(z+n)}}\\
&= \Gamma(z) \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)\cdot(z+n)}}\\
&\overset{(1.3)}{=} \Gamma(z)\cdot\frac{1}{\Gamma(z)}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 7.2.**
Für reelle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|\cdot n^{\alpha+1} = \left|\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right|. \tag{7.3}$$

Insbesondere ist:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\cdot n^{\alpha+1} \sim \left|\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right|.$$

**Beweis.**
Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ eine reelle Zahl. Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) erhält man:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\cdot n^{\alpha+1}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}\cdot n^{\alpha+1}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n!}\cdot\frac{n^{\alpha+1}}{(\alpha-n)}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n^{-\alpha}\cdot n!}\cdot\frac{n}{(\alpha-n)}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-\alpha)\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n^{-\alpha}\cdot n!}\cdot\frac{n}{(\alpha-n)}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot((n-1)-\alpha)\cdot(n-\alpha)}{n^{-\alpha}\cdot n!}\cdot\frac{n}{(\alpha-n)}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot((n-1)-\alpha)\cdot(n-\alpha)}{n^{-\alpha}\cdot n!}\cdot\frac{n}{(\alpha-n)}\right|\\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot((n-1)-\alpha)\cdot(n-\alpha)}{n^{-\alpha}\cdot n!}\cdot\frac{n}{(\alpha-n)}\right]\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot((n-1)-\alpha)\cdot(n-\alpha)}{n^{-\alpha}\cdot n!} \right|$$
$$\overset{(1.3)}{=} \left| \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right|$$

□

**Aufgabe 7.3.**
Für komplexe Zahlen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ gilt:

$$\binom{\alpha}{n} \cdot n^{\alpha+1} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(-\alpha)}. \tag{7.4}$$

**Beweis.**
Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ eine komplexe Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{n} \cdot n^{\alpha+1} &= \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!} \cdot n^{\alpha+1} \\
&= \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n!} \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{(\alpha-n)} \\
&= \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n^{-\alpha}\cdot n!} \cdot \frac{n}{(\alpha-n)} \\
&= (-1)\cdot \frac{(-\alpha)\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}{n^{-\alpha}\cdot n!} \cdot \frac{n}{(\alpha-n)} \\
&= (-1)^{n+1}\cdot \frac{(-\alpha)\cdot(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot((n-1)-\alpha)\cdot(n-\alpha)}{n^{-\alpha}\cdot n!} \cdot \frac{n}{(\alpha-n)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{\alpha}{n}\cdot n^{\alpha+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(-\alpha)}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\alpha-n)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

# 8 Betrag der Gammafunktion

**Definition 8.1** (Betrag einer komplexen Zahl)**.**
Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{8.1}$$

mit $\bar{z} = x - i \cdot y$.

Der Betrag der Gammafunktion für komplexe Zahlen mit positivem Realteil lässt sich wie folgt durch die reelle Gammafunktion abschätzen:

**Aufgabe 8.1** (Abschätzung des Betrags der Gammafunktion)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, $z = x+i \cdot y$, mit $x > 0$ gilt die folgenden Abschätzung:

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x). \tag{8.2}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $Re(z) > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^z t^{-1} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty |t^z| \, t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^{x+i \cdot y} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left| t^x t^{i \cdot y} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty |t^x| \left| t^{i \cdot y} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty |t^x| \left| e^{i \cdot y \cdot \ln(t)} \right| t^{-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \Gamma(x).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 8.1.**
Die Konvergenz des komplexen Integrals (1.2) folgt mit der eben gezeigten Abschätzung aus der Konvergenz des reellen Integrals (1.1).

Im nachfolgenden wollen wird gezeigt, dass die Konjugation der Gammafunktion an der Stelle $z$ gleich der Gammafunktion an der Stelle $z$ konjugiert ist. Für den Beweis brauch wir die Stetigkeit der komplexen Funktion $z \mapsto \bar{z}$.

**Lemma 8.1.**
Die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ist stetig.

**Beweis.**
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl. Für eine beliebige positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ setze $\delta := \epsilon$. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |\overline{z} - \overline{z_0}| \\ &= |\overline{z - z_0}| \\ &= |z - z_0| \\ &< \delta \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 8.2** (Konjugation der Gammafunktion)**.**
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ gilt:

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}). \tag{8.3}$$

**Beweis.**
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma(z)} &= \overline{\lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \overline{\frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \overline{n^z}}{\overline{z} \cdot (\overline{z}+1) \cdot (\overline{z}+2) \cdot \ldots \cdot (\overline{z}+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \overline{e^{z \ln(n)}}}{\overline{z} \cdot (\overline{z}+1) \cdot (\overline{z}+2) \cdot \ldots \cdot (\overline{z}+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot e^{\overline{z} \cdot \ln(n)}}{\overline{z} \cdot (\overline{z}+1) \cdot (\overline{z}+2) \cdot \ldots \cdot (\overline{z}+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{\overline{z}}}{\overline{z} \cdot (\overline{z}+1) \cdot (\overline{z}+2) \cdot \ldots \cdot (\overline{z}+n)} \end{aligned}$$

$$= \Gamma\left(\overline{z}\right).$$

□

**Aufgabe 8.3** (Betrag der Gammafunktion für rein imaginäre Argumente)**.**
Für alle reellen Zahlen $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \cdot \sinh(\pi y)}. \tag{8.4}$$

**Beweis.**
Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine beliebige reelle Zahl ungleich 0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(iy)|^2 &\overset{(8.1)}{=} \left(\sqrt{\Gamma(iy) \cdot \overline{\Gamma(iy)}}\right)^2 \\
&= \Gamma(iy) \cdot \overline{\Gamma(iy)} \\
&\overset{(8.3)}{=} \Gamma(iy) \cdot \Gamma(-iy) \\
&= \frac{\Gamma(iy) \cdot (-iy) \cdot \Gamma(-iy)}{-iy} \\
&\overset{(2.4)}{=} \frac{\Gamma(iy) \cdot \Gamma(1 - iy)}{-iy} \\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\pi}{-iy \cdot \sin(\pi \cdot (iy))} \\
&= \frac{\pi}{y \cdot (-i \cdot \sin(i\pi y))} \\
&\overset{(4.13)}{=} \frac{\pi}{y \cdot \sinh(\pi i y)}
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 8.4** (Betrag der Gammafunktion für komplexe Zahlen mit Realteil 1/2)**.**
Für alle reellen Zahlen $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}. \tag{8.5}$$

**Beweis.**
Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine beliebige reelle Zahl ungleich 0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 &\overset{(8.1)}{=} \left(\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \cdot \overline{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)}}\right)^2 \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \cdot \overline{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(8.3)}{=} \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)\\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-iy\right)\\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\cdot\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right)\\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\pi}{\sin\left(\pi\cdot\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right)}\\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\pi y\right)}\\
&= \frac{\pi}{\cos\left(i\pi y\right)}\\
&\overset{(4.12)}{=} \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 8.5** (Betrag der Gammafunktion für komplexe Zahlen mit Realteil 1)**.**
Für alle reellen Zahlen $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt:

$$
|\Gamma(1+iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}. \tag{8.6}
$$

**Beweis.**
Sei $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ eine beliebige reelle Zahl ungleich 0. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(1+iy)|^2 &\overset{(8.1)}{=} \left(\sqrt{\Gamma(1+iy)\cdot\overline{\Gamma(1+iy)}}\right)^2\\
&= \Gamma(1+iy)\cdot\overline{\Gamma(1+iy)}\\
&\overset{(8.3)}{=} \Gamma(1+iy)\cdot\Gamma(1-iy)\\
&\overset{(2.4)}{=} iy\cdot\Gamma(iy)\cdot\Gamma(1-iy)\\
&\overset{(4.2)}{=} iy\cdot\frac{\pi}{\sin(i\pi y)}\\
&= i^2\cdot\frac{\pi y}{i\cdot\sin(i\pi y)}\\
&= \frac{\pi y}{-i\cdot\sin(i\pi y)}\\
&\overset{(4.13)}{=} \frac{\pi y}{\sinh(\pi y)}
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 8.6** (Betrag der Gammafunktion Produktdarstellung)**.**
Es gilt:

$$\left|\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2 = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right)^{-1}. \tag{8.7}$$

**Beweis.**
Für den Betrag gilt zunächst:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2 &\overset{(8.1)}{=} \left(\sqrt{\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\cdot\frac{\overline{\Gamma(x+iy)}}{\overline{\Gamma(x)}}}\right)^2\\ &= \frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\cdot\frac{\overline{\Gamma(x+iy)}}{\overline{\Gamma(x)}}\\ &= \frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\cdot\frac{\Gamma(x-iy)}{\Gamma(x)}\\ &= \Gamma(x+iy)\cdot\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\Gamma(x-iy)\cdot\frac{1}{\Gamma(x)}.\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{n^{x+iy}\cdot n!}{(x+iy)\cdot(x+iy+1)\cdot(x+iy+2)\cdot\ldots\cdot(x+iy+n)}\cdot\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{n^x\cdot n!}\\ &=\frac{n^{iy}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{(x+iy)\cdot(x+1+iy)\cdot(x+2+iy)\cdot\ldots\cdot(x+n+iy)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&=\frac{n^{x-iy}\cdot n!}{(x-iy)\cdot(x-iy+1)\cdot(x-iy+2)\cdot\ldots\cdot(x-iy+n)}\cdot\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{n^x\cdot n!}\\ &=\frac{n^{-iy}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{(x-iy)\cdot(x+1-iy)\cdot(x+2-iy)\cdot\ldots\cdot(x+n-iy)}\end{aligned}$$

zusammen erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\frac{n^{iy}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{(x+iy)\cdot(x+1+iy)\cdot(x+2+iy)\cdot\ldots\cdot(x+n+iy)}\cdot\frac{n^{-iy}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{(x-iy)\cdot(x+1-iy)\cdot(x+2-iy)\cdot\ldots\cdot(x+n-iy)}\\ &=\frac{x^2\cdot(x+1)^2\cdot(x+2)^2\cdot\ldots\cdot(x+n)^2}{(x+iy)\cdot(x-iy)\cdot(x+1+iy)\cdot(x+1-iy)\cdot(x+2+iy)\cdot(x+2-iy)\cdot\ldots\cdot(x+n+iy)\cdot(x+n-iy)}\\ &=\frac{x^2\cdot(x+1)^2\cdot(x+2)^2\cdot\ldots\cdot(x+n)^2}{(x^2+y^2)\cdot\left((x+1)^2+y^2\right)\cdot\left((x+2)^2+y^2\right)\cdot\ldots\cdot\left((x+n)^2+y^2\right)}\\ &=\frac{1}{\frac{(x^2+y^2)}{x^2}\cdot\frac{\left((x+1)^2+y^2\right)}{(x+1)^2}\cdot\frac{\left((x+2)^2+y^2\right)}{(x+2)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\left((x+n)^2+y^2\right)}{(x+n)^2}}\\ &=\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{y^2}{(x+1)^2}\right)\cdot\left(1+\frac{y^2}{(x+2)^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right)}\end{aligned}$$

$$= \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{y^2}{(x+1)^2}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{y^2}{(x+2)^2}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right)^{-1}$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right)^{-1}.$$

Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2 &= \Gamma(x+iy) \cdot \frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \Gamma(x-iy) \cdot \frac{1}{\Gamma(x)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right)^{-1} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

□

# 9 Integrale mit Bezug zur Gammafunktion

## 9.1 Betafunktion

**Definition 9.1** (Betafunktion)**.**
Für positive reelle Zahlen $x, y > 0$ ist die Betafunktion durch das folgende Integral definiert:

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.1}$$

**Aufgabe 9.1.**
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 t^n \cdot (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}. \tag{9.2}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n \cdot (1-t)^n\,\mathrm{d}t &= \left.\frac{t^{n+1} \cdot (1-t)^n}{n+1}\right|_0^1 + \frac{n}{n+1} \cdot \int_0^1 t^{n+1} \cdot (1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \int_0^1 t^{n+1} \cdot (1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \left( \left.\frac{t^{n+2} \cdot (1-t)^{n-1}}{n+2}\right|_0^1 + \frac{n-1}{n+2} \cdot \int_0^1 t^{n+2} \cdot (1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{n \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \cdot \int_0^1 t^{n+2} \cdot (1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \cdot \left( \left.\frac{t^{n+3} \cdot (1-t)^{n-2}}{n+3}\right|_0^1 + \frac{n-2}{n+3} \cdot \int_0^1 t^{n+3} \cdot (1-t)^{n-3}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \cdot \int_0^1 t^{n+3} \cdot (1-t)^{n-3}\,\mathrm{d}t \\
&\vdots \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)}\cdot t^{2n+1}\Big|_0^1 \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{n!}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{n!\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 9.2.**
Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 t^n\cdot(1-t)^m\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}. \tag{9.3}$$

**Beweis.**
Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ zwei beliebige natürliche Zahl. Mit partieller Integration folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^n\cdot(1-t)^m\,\mathrm{d}t &= \frac{t^{n+1}\cdot(1-t)^m}{n+1}\Bigg|_0^1 + \frac{m}{n+1}\cdot\int_0^1 t^{n+1}\cdot(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\int_0^1 t^{n+1}\cdot(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\left(\frac{t^{n+2}\cdot(1-t)^{m-1}}{n+2}\Bigg|_0^1 + \frac{m-1}{n+2}\cdot\int_0^1 t^{n+2}\cdot(1-t)^{m-2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{m\cdot(m-1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\cdot\int_0^1 t^{n+2}\cdot(1-t)^{m-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{m\cdot(m-1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\cdot\left(\frac{t^{n+3}\cdot(1-t)^{m-2}}{n+3}\Bigg|_0^1 + \frac{m-2}{n+3}\cdot\int_0^1 t^{n+3}\cdot(1-t)^{m-3}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\cdot\int_0^1 t^{n+3}\cdot(1-t)^{m-3}\,\mathrm{d}t \\
&\;\vdots \\
&= \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\cdot\int_0^1 t^{n+m}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \cdot t^{n+m+1} \Big|_0^1 \\
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \\
&= \frac{m!}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \\
&= \frac{n! \cdot m!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \\
&= \frac{n! \cdot m!}{(n+m+1)!} \\
&= \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 9.3** (Betafunktion)**.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{9.4}$$

## 9.2 Betafunktion: Trigonometrische Substitution

**Aufgabe 9.4.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Es gilt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\psi) \cdot \cos^{2y-1}(\psi) \, \mathrm{d}\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{9.5}$$

**Beweis.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Mit der Substitution $t = \sin^2(\psi)$, $\mathrm{d}t = 2\sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\right)^{x-1} \cdot \left(1 - \sin^2(\psi)\right)^{y-1} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\right)^{x-1} \cdot \left(\cos^2(\psi)\right)^{y-1} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2}(\psi) \cdot \cos^{2y-2}(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\psi) \cdot \cos^{2y-1}(\psi) \, \mathrm{d}\psi \,.
\end{aligned}
$$

□

**Bemerkung 9.1.**
Wir berechnen mit der Formel (**??**) einige Integrale.

1. Für $x = n + 1$ und $y = m + 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, erhalten wir das Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\psi) \cdot \cos^{2m+1}(\psi)\,\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n)! \cdot (m)!}{(n+m+1)!}.\end{aligned}$$

2. Für $x = n + 1$ und $y = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, bzw. $x = \frac{1}{2}$ und $y = n + 1$ erhalten wir die Integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\psi)\,\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + 1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(n+1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 4^n \cdot n! \cdot n!}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (2n)! \cdot \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

3. Für $x = n + \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, bzw. $x = \frac{1}{2}$ und $y = n + \frac{1}{2}$ erhalten wir die Integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\psi)\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(\psi)\,\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + 1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!} \\ &\overset{(6.7)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{4^n \cdot n! \cdot n!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

## 9.3 Betafunktion: Weitere Substitution

**Aufgabe 9.5.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{9.6}$$

**Beweis.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Mit der Substitution $t = 1 - \frac{1}{1+u}$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$ und $u = \frac{1}{1-t} - 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(1-\frac{1}{1+u}\right)^{x-1}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{1+u}\right)\right)^{y-1}\cdot\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\cdot\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\cdot\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\cdot\frac{1}{(1+u)^{-2}}\cdot\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

□

Mit der Hilfe der Formel (9.6) lassen sich die folgenden Integrale berechnen.

**Aufgabe 9.6.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right). \tag{9.7}$$

Mit dem Euler'schen Ergänzungssatz (4.2) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \tag{9.8}$$

**Beweis.**
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit der Substitution $u = t^n$, $t = u^{1/n}$ und $\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot t^{1-n}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\cdot u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$ und dem einsetzten von $x = \frac{1}{n}$ und $y = 1 - \frac{1}{n}$ in (9.6) folgt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{(1+u)^{\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}}} \, \mathrm{d}u \\
&\overset{(9.6)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 9.7.**
Sei $0 < \alpha < 1$ eine reelle Zahl. Dann gilt

$$
\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \, \mathrm{d}u = \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha). \tag{9.9}
$$

Insbesondere folgt mit dem Euler'schen Ergänzungssatz (4.2):

$$
\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}. \tag{9.10}
$$

**Beweis.**
Sei $0 < \alpha < 1$ eine reelle Zahl. Wir setzen $x = \alpha$ und $y = 1-\alpha$ in (9.6). Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \, \mathrm{d}u &= \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+1-\alpha}} \, \mathrm{d}u \\
&\overset{(9.6)}{=} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \\
&= \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) \\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 9.8.**
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Man zeige:

$$
\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\sqrt{1-u^n}} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n}. \tag{9.11}
$$

**Beweis.**
Man setze in (9.4) $x = m/n$ und $y = 1/2$ und substituiere $t = u^n$, $\mathrm{d}t = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n} &\overset{(6.3)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)} \\
&\overset{(9.4)}{=} \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 \frac{u^{n\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot n \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{u^{m-n}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

□

**Aufgabe 9.9.**
Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\pi}. \tag{9.12}$$

**Beweis.**
Für $m = 1$ und $n = 3$ erhält man zusammen mit (9.11), der Legendresche Verdopplungsformel (5.4) und dem Eulerschen Ergänzungssatz (4.2):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^3}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{u^{1-1}}{\sqrt{1-u^3}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(9.11)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} \\
&\overset{(5.4)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\cdot\frac{1}{3}-1}}\cdot\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-1/3}}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt[3]{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt[3]{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}\\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt[3]{2}\cdot\pi}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\pi}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 3}{2\cdot\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\cdot\pi}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\pi}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\pi}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\pi}.
\end{aligned}
$$

□

**Aufgabe 9.10.**
Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{32\cdot\pi}}. \tag{9.13}$$

**Beweis.**
Für $m = 1$ und $n = 4$ erhält man zusammen mit (9.11) und der Legendresche Verdopplungsformel (5.4):

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{u^{1-1}}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{(9.11)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\\
&\overset{(5.4)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\cdot\frac{1}{4}-1}}\cdot\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{4}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-1/2}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2^{1/2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\\
&\overset{(6.4)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\\
&\overset{(6.4)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{32\cdot\pi}}.
\end{aligned}
$$

□

## 9.4 Zusammenhang zur riemannschen Zeta-Funktion

**Definition 9.2** (Riemannsche Zeta-Funktion)**.**
Für eine reelle Zahl $s > 1$ heißt die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} \tag{9.14}$$

die riemannsche Zeta-Funktion.

**Aufgabe 9.11** (Zusammenhang Gamma- und Zeta-Funktion)**.**
Für reellen Zahlen $s > 1$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s)\cdot\zeta(s). \tag{9.15}$$

**Beweis.**
Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Mit der Hilfe der Geometrischen Reihe entwickeln wir den Integranden:

$$\frac{t^{s-1}}{e^t-1} = \frac{t^{s-1}\cdot e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^{s-1} \cdot e^{-t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \cdot t} \\
&= t^{s-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1) \cdot t} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k \cdot t} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} t^{s-1} \cdot e^{-k \cdot t}.
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $u = k \cdot t$, $t = u/k$ und $\mathrm{d}t = 1/kdu$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t^{s-1} \cdot e^{-k \cdot t} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} \cdot e^{-k \cdot t} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^{s-1} \cdot e^{-u} \,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^{s-1}} \cdot \int_0^{\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} u^{s-1} \cdot e^{-u} \,\mathrm{d}u \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \\
&= \Gamma(s) \cdot \zeta(s).
\end{aligned}
$$

□

# Literaturverzeichnis


Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1948). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Bd. 55). US Government printing office.

Eberhard Freitag, R. B. (2000). *Funktionentheorie 1* (3. Aufl.). Springer-Verlag.

*Gammafunktion.* (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion

Königsberger, K. (2001). *Analysis 1* (5. Aufl.). Springer-Verlag.