Die Gammafunktion und ihre Eigenschaften

erstellt von Artur Sanin.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1 Gammafunktion

In diesem Abschnitt wird die Gammafunktion sowohl über das Eulersche Integral der zweiten Gattung als auch über die Gaußsche Darstellung der Gammafunktion definiert.

Definition 1.1 (Gammafunktion)**.**
Für postive reelle Zahlen $x > 0$ wird die Gammafunktion durch das folgende Integral definiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \,. \tag{1.1}$$

Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ ist die Gammafunktion ebenfalls durch das Integral definiert:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \,. \tag{1.2}$$

Mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion wird der Definitionsbereich auf alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$ erweitert:

$$\Gamma(z) := \lim_{n \to \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}. \tag{1.3}$$

Für die reelle Gammafunktion werden nun durch Substitution zwei weitere Integraldarstellungen hergeleitet.

Aufgabe 1.1 (Gammafunktion Integraldarstellung 2)**.**
Für positive reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln(u)) \,\mathrm{d}u \,. \tag{1.4}$$

Beweis.
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Mit der Substitution $u = e^{-t}$ gilt $t = -\ln(u)$ und $\mathrm{d}t = -e^t \,\mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = e^{-0} = 1$ und die obere Integrationsgrenze $u = e^{-t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^0 (-\ln(u))^{x-1} \, e^{-t} e^{t} \,\mathrm{d}u \\
&= -\int_1^0 (-\ln(u))^{x-1} \,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Das letzte Integral lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln(u))^{x-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{u}\right)^{x-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

□

Aufgabe 1.2 (Gammafunktion Integraldarstellung 3)**.**
Für positive reelle Zahlen $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu-e^u}\,\mathrm{d}u\,. \tag{1.5}$$

Beweis.
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Mit der Substitution $u = \ln(t)$ gilt $t = e^u$ und $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}u$. Die untere Integrationsgrenze ist $u = \ln(t) \xrightarrow{t\to 0} -\infty$ und die obere Integrationsgrenze $u = \ln(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}t\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{x}e^{-t}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\ln(t)}e^{-t}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\ln(t)-t}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu-e^u}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

□

2 Funktionalgleichung der Gammafunktion

Aufgabe 2.1 (Funktionalgleichung der Gammafunktion für positive reelle Zahlen)**.**

Für alle positiven reellen Zahlen $x > 0$ gilt die folgende Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{2.1}$$

Beweis.
Sei $x > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n+1 > x+1$ gilt. Für nicht negative Werte $R \geq 0$ folgt zusammen mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\frac{R^x}{e^R} &= \frac{R^x}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}} \\
&\leq \frac{R^x}{\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}} \\
&= \frac{R^x \cdot (n+1)!}{R^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)!}{R^{n+1-x}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Zusammen mit diesem Grenzwert erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^R + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^x}{e^R} + \frac{0^x}{e^0} + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^x}{e^R} + x \cdot \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= -\lim_{R\to\infty} \frac{R^x}{e^R} + x \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= x \cdot \Gamma(x) .
\end{aligned}$$

□

Zusammen mit der Gaußschen Darstellung der Gammafunktion (1.3) lässt sich die Funktionalgleichung (2.2) auf komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ erweitern.

Aufgabe 2.2 (Funktionalgleichung der Gammafunktion für komplexe Zahlen)**.**
Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt die Funktionalgleichung:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) . \tag{2.2}$$

Beweis.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{n! \cdot n^{z+1}}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\cdot(z+1+n)} &= \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \\
&= z \cdot \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} .
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{z+1}}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)\cdot(z+1+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[z \cdot \frac{n}{z+n+1} \cdot \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \right] \\
&= z \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} \right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} \right] \\
&= z \cdot \Gamma(z) .
\end{aligned}$$

□

Durch Anwendung von (2.2) erhält man induktiv:

Aufgabe 2.3 (Folgerung aus der Funktionalgleichung der Gammafunktion)**.**
Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)} . \tag{2.3}$$

Beweis.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ eine komplexe Zahl. Zusammen mit (2.2) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+n+1) &\overset{(2.2)}{=} (z+n) \cdot \Gamma(z+n) \\
&\overset{(2.2)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot \Gamma(z+n-1) \\
&\overset{(2.2)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \Gamma(z+n-2) \\
&\vdots \\
&\overset{(2.2)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \ldots \cdot (z+2) \cdot (z+1) \cdot \Gamma(z+1) \\
&\overset{(2.2)}{=} (z+n) \cdot (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \ldots \cdot (z+2) \cdot (z+1) \cdot z \cdot \Gamma(z).
\end{aligned}$$

Durch die Wahl von z sind alle Linearfaktoren auf der rechten Seite der Gleichung ungleich 0. Teilt man die Gleichung durch die Linearfaktoren, so folgt:

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} = \Gamma(z).$$

$\square$

3 Euler'sche Produktdarstellung der Gammafunktion

Lemma 3.1 (Euler-Mascheroni-Konstante)**.**
Die folgende Folge ist konvergent:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n). \tag{3.1}$$

Der Grenzwert γ der Folge heißt die Euler-Mascheroni-Konstante.

Aufgabe 3.1 (Euler'sche Produktdarstellung der Gammafunktion)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$ gilt:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n}}. \tag{3.2}$$

Beweis.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$ eine komplexe Zahl. Die Euler'sche Produktdarstellung folgt wie folgt aus der Gaußschen Darstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} &= n^{-z} \cdot \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \\
&= z \cdot e^{-z \ln(n)} \cdot \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{z+n}{n} \\
&= z \cdot e^{-z \ln(n)} \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right) \\
&= z \cdot e^{-z \ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - z \cdot \ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot e^{-z \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{z}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $w \mapsto e^{z \cdot w}$ ist stetig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} &= e^{\lim_{n\to\infty} z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \\ &= e^{\gamma \cdot z}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)}{n^z \cdot n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[z \cdot e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}} \right] \\ &= z \cdot \left[\lim_{n\to\infty} e^{z \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \cdot e^{-\frac{z}{k}} \right] \\ &= z \cdot e^{\gamma z} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n}}. \end{aligned}$$

□

4 Eulerscher Ergänzungssatz

Lemma 4.1 (Produktdarstellung der Sinusfunktion).
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^k}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}. \tag{4.1}$$

Beweis.
Vgl. (Eberhard Freitag, 2000, S. 213 ff.). □

Aufgabe 4.1 (Eulerscher Ergänzungssatz).
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{4.2}$$

gilt.

Beweis.
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine komplexe Zahl. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^z \cdot n!}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n^{1-z} \cdot n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z) \cdot (n+1-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{n!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{n!}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{n!}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(z+1) \cdot (z+2) \cdot \ldots \cdot (z+n)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(1-z) \cdot (2-z) \cdot (3-z) \cdot \ldots \cdot (n-z)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\frac{(z+1)}{1} \cdot \frac{(z+2)}{2} \cdot \frac{(z+3)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(z+n)}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{(1-z)}{1} \cdot \frac{(2-z)}{2} \cdot \frac{(3-z)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-z)}{n}} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{z}{n}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{z}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{z}{n}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right) \cdot \left(1-\frac{z^2}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{z^2}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{n}{z \cdot (n+1-z)} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-z}\cdot n!}{(1-z)\cdot(2-z)\cdot(3-z)\cdot\ldots\cdot(n-z)\cdot(n+1-z)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\cdot\frac{n^{1-z}\cdot n!}{(1-z)\cdot(2-z)\cdot(3-z)\cdot\ldots\cdot(n-z)\cdot(n+1-z)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{z\cdot(n+1-z)}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\right)\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{z\cdot(n+1-z)}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\right)\\
&\overset{(4.1)}{=}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\\
&=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}}\\
&=\frac{1}{z}\cdot\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\\
&=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}
$$

□

5 Legendresche Verdopplungsformel

Aufgabe 5.1 (Legendresche Verdopplungsformel für natürlichen Zahlen)**.**
Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) . \tag{5.1}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-1}} \cdot \Gamma(1) . \end{aligned}$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) . \tag{5.2}$$

III. **Induktionsschritt:**

Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ &\overset{(2.2)}{=} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ &\overset{(5.2)}{=} \frac{n}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}} \cdot n \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n}} \cdot \Gamma(n+1) . \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.2 (Legendresche Verdopplungsformel)**.**
Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \cdot \Gamma(z)\,. \tag{5.3}$$

gilt.

Bemerkung 5.1 (Variation der Legendresche Verdopplungsformel)**.**
Setzt man in (5.3) $z = 2w$, wobei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ gilt, so ergibt sich die folgende Formel:

$$\Gamma(w) \cdot \Gamma\left(w + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2w-1}} \cdot \Gamma(2w)\,.$$

6 Spezielle Werte der Gammafunktion

Lemma 6.1 (Gaußsche Integral)**.**
Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}. \tag{6.1}$$

Aufgabe 6.1 (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle 1/2)**.**
Es gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{6.2}$$

Beweis.
Wir Substitution $u = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $t = u^2$ und $\mathrm{d}t = 2\sqrt{t}\,\mathrm{d}u$. Für die untere Integrationsgrenze gilt $u = \sqrt{0} = 0$ während die obere Integrationsgrenze $u = \sqrt{t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ lautet. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&\overset{(6.1)}{=} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.2 (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle $1/n$)**.**
Man zeige, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.3}$$

Beweis.
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir substituieren $u = t^n$. Daraus folgt $t = u^{\frac{1}{n}}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{n} t^{1-n}\, \mathrm{d}u\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\begin{aligned} n \cdot \int_0^\infty e^{-t^n}\, \mathrm{d}t &= n \cdot \int_0^\infty \frac{1}{n} t^{1-n} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{1-n}{n}} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{1}{n}-1} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.3 (Funktionswert der Gammafunktion an der Stelle $1/\alpha$)**.**
Für alle positiven reellen Zahlen $\alpha > 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \int_0^\infty e^{-t^\alpha}\, \mathrm{d}t\,. \tag{6.4}$$

Beweis.
Sei $\alpha > 0$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir substituieren $u = t^\alpha$. Daraus folgt $t = u^{1/\alpha}$ und:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \alpha t^{\alpha-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad dt = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha}\, \mathrm{d}u\,.$$

Mit dieser Substitution folgt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \int_0^\infty e^{-t^\alpha}\, \mathrm{d}t &= \alpha \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.4.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.5}$$

gilt.

Beweis.

Beweis mittles vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**
Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**
Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.6}$$

III. **Induktionsschritt:**
Dann folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &\overset{(2.1)}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{(6.6)}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}{2\cdot(2n+2)\cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2\cdot 2\cdot(n+1)\cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4\cdot(n+1)\cdot 4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\cdot(n+1)!} \cdot \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.1.
Wir berechnen mit der Formel (6.5) einige Werte der Gammafunktion.

1. Für $n = 1$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2!}{4^1 \cdot 1!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

2. Für $n = 2$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4!}{4^2 \cdot 2!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}.$$

3. Für $n = 3$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{6!}{4^3 \cdot 3!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \cdot \sqrt{\pi}.$$

4. Für $n = 4$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{8!}{4^4 \cdot 4!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{105}{16} \cdot \sqrt{\pi}.$$

5. Für $n = 5$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{10!}{4^5 \cdot 5!} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{945}{32} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 6.5.
Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi} \tag{6.7}$$

gilt.

Beweis.

Beweis per vollständiger Induktion nach n.

I. **Induktionsanfang:**

Für $n = 0$ gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

II. **Induktionsvoraussetzung:**

Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{\pi}. \tag{6.8}$$

III. **Induktionsschritt:**

Aus (2.1) folgt:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{6.9}$$

Damit folgt für $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}-n-1\right) &\overset{(6.9)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\frac{1}{2}-n-1} \\
&= (-2)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{2n+1} \\
&\overset{(6.8)}{=} (-2)\cdot\frac{(-4)^n\cdot n!}{(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{(2n+2)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= (-2)\cdot\frac{2\cdot(n+1)\cdot(-4)^n\cdot n!}{(2n+2)!}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(-4)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.2.

Wir berechnen mit der Formel (6.7) einige weitere Werte der Gammafunktion.

1. Für $n=1$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-4)^1\cdot 1!}{2!}\cdot\sqrt{\pi} = -2\cdot\sqrt{\pi}.$$

2. Für $n=2$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{(-4)^2\cdot 2!}{4!}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\pi}.$$

3. Für $n=3$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{(-4)^3\cdot 3!}{6!}\cdot\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\cdot\sqrt{\pi}.$$

4. Für $n=4$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{(-4)^4\cdot 4!}{8!}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{16}{105}\cdot\sqrt{\pi}.$$

5. Für $n = 5$ erhalten wir:

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{(-4)^5 \cdot 5!}{10!} \cdot \sqrt{\pi} = -\frac{32}{945} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Zwischen den Werten $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$ besteht der folgende Zusammenhang:

Aufgabe 6.6 (Zusammenhang zwischen $\Gamma(1/3)$ und $\Gamma(1/6)$)**.**
Es gilt:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 2^{-1/3} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2. \tag{6.10}$$

Beweis.
Aus der Legendrschen Verdopplungsformel (5.3) ergibt sich für $z = 1/3$ der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\frac{1}{3}+1}{2}\right) \\
&\overset{(5.3)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/3-1}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Aus dieser Identität und dem Eulerschen Ergänzungssatz für $z = 1/3$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) &= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)} \\
&\overset{(4.2)}{=} 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}} \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 2^{2/3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

$$= 2^{2/3-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= 2^{-1/3} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\square$

7 Integrale mit Bezug zur Gammafunktion

Aufgabe 7.1.
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 t^n (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}. \tag{7.1}$$

Beweis.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine beliebige natürliche Zahl. Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n (1-t)^n \,\mathrm{d}t &= \left.\frac{t^{n+1}(1-t)^n}{n+1}\right|_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\left.\frac{t^{n+2}(1-t)^{n-1}}{n+2}\right|_0^1 + \frac{n-1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{(n+1)\cdot(n+2)}\left(\left.\frac{t^{n+3}(1-t)^{n-2}}{n+3}\right|_0^1 + \frac{n-2}{n+3}\int_0^1 t^{n+3}(1-t)^{n-3}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\int_0^1 t^{n+3}(1-t)^{n-3}\,\mathrm{d}t \\
&\ \vdots \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n}\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)}\left.t^{2n+1}\right|_0^1 \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{n!}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)} \\
&= \frac{n!\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 7.2.
Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$
\int_0^1 t^n (1-t)^m \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}. \tag{7.2}
$$

Beweis.
Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ zwei beliebige natürliche Zahl. Mit partieller Integration folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^n (1-t)^m \, \mathrm{d}t &= \left. \frac{t^{n+1}(1-t)^m}{n+1} \right|_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{m-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{m}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{m-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{m}{n+1} \left(\left. \frac{t^{n+2}(1-t)^{m-1}}{n+2} \right|_0^1 + \frac{m-1}{n+2} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{m-2} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{m \cdot (m-1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{m-2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{m \cdot (m-1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \left(\left. \frac{t^{n+3}(1-t)^{m-2}}{n+3} \right|_0^1 + \frac{m-2}{n+3} \int_0^1 t^{n+3} (1-t)^{m-3} \, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \int_0^1 t^{n+3} (1-t)^{m-3} \, \mathrm{d}t \\
&\vdots \\
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m)} \int_0^1 t^{n+m} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} t^{n+m+1} \Big|_0^1 \\
&= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \\
&= \frac{m!}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)} \\
&= \frac{n! \cdot m!}{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot (n+m+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n! \cdot m!}{(n+m+1)!} \\
&= \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)}.
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 7.3 (Betafunktion)**.**
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{7.3}$$

Beweis.
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. □

Aufgabe 7.4.
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\psi) \cos^{2y-1}(\psi) \, \mathrm{d}\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{7.4}$$

Beweis.
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Mit der Substitution $t = \sin^2(\psi)$, $\mathrm{d}t = 2\sin(\psi)\cos(\psi)\,\mathrm{d}\psi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\right)^{x-1} \left(1 - \sin^2(\psi)\right)^{y-1} \sin(\psi) \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(\psi)\right)^{x-1} \left(\cos^2(\psi)\right)^{y-1} \sin(\psi) \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2}(\psi) \cos^{2y-2}(\psi) \sin(\psi) \cos(\psi) \, \mathrm{d}\psi \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\psi) \cos^{2y-1}(\psi) \, \mathrm{d}\psi \, .
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 7.1.
Wir berechnen mit der Formel (7.5) einige Integrale.

1. Für $x = n+1$ und $y = m+1$, $n, m \in \mathbb{N}$, erhalten wir das Integral:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\psi) \cos^{2m+1}(\psi) \, \mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n)! \cdot (m)!}{(n+m+1)!}.
\end{aligned}
$$

2. Für $x = \frac{1}{2}$ und $y = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir das Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\psi)\,\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(n+1)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot 4^n\cdot n!\cdot n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(2n)!\cdot\sqrt{\pi}}\\ &= \frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

3. Für $x = n+1$ und $y = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir das Integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\psi)\,\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Aufgabe 7.5.
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{7.5}$$

Beweis.
Seien $x, y > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Mit der Substitution $t = 1 - \frac{1}{1+u}$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$ und $u = \frac{1}{1-t} - 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \left(1-\frac{1}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\left(1-\frac{1}{1+u}\right)\right)^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\frac{1}{(1+u)^{-2}}\frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7.6.
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Man zeige:

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\sqrt{1-u^n}}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n}. \tag{7.6}$$

Beweis.
Man setze in (7.3) $x = m/n$ und $y = 1/2$ und substituiere $t = u^n$, $\mathrm{d}t = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n} &\overset{(6.1)}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)} \\
&\overset{(7.3)}{=} \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}\,(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n} \cdot \int_0^1 \frac{u^{n\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot n \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{u^{m-n}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\sqrt{1-u^n}} \cdot u^{n-1}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

Eberhard Freitag, R. B. (2000). *Funktionentheorie 1* (3. Aufl.). Springer-Verlag.

Gammafunktion. (o. J.). Website. Zugriff auf https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion

Königsberger, K. (2001). *Analysis 1* (5. Aufl.). Springer-Verlag.