Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Теории Вероятностей

Отчёт
студента 409 группы
Сидоренко Артура Павловича

Пять разностных схем для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка

Москва, 2020

1 Постановка задачи

Дана задача Коши
$$y' + Ay = 0, y(0) = 1, \tag{1}$$
где $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_+$. Известно, что тогда $y = e^{-Ax}$. Для определённости положим и $x \in [0, 10]$.

Предлагается исследовать пять разностных схем для решения этого уравнения:
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, \tag{2}$$
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1, \tag{3}$$
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + A\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = 0, y_0 = 1, \tag{4}$$
$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = y_0 - Ah, \tag{5}$$
$$\frac{1.5y_{k+1} - 2y_k + 0.5y_{k-1}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = y_0 - Ah. \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

У нас имеется дифференциальная задача с неизвестной в подпространстве достаточно гладких функций в L_2 и семейство разностных задач с параметром h в пространствах $\mathbb{R}^{N(h)+1}$ с нормой $L(2, h)$, порождённым скалярным произведением вида $(f, g)_h = \sum f_k g_k h$. Пространства непрерывные и дискретные связаны между собой опреатором проектирования на дельта-функции: $(y)_h = (y_k)_{k=0,\dots,N(h)}$, $y_k = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_k)y(x)dx$, $x_k = x_0 + kh$. Нетрудно видеть, что нормы в L_2 и $L(2, h)$ согласованы, так как норма $L(2, h)$ будет интегральной суммой Римана.

Требуется провести исследование сходимости численного приближения задачи Коши к непрерывному решению. Именно, мы имеем численное решение $y_h^c \in \mathbb{R}^{1+N(h)}$ и точное решение $y(x)$. Надо проверить $||(y)_h - y_h^c||_h \le Ch^p$, и с каким показателем p.

2 Теоретическое решение

Я буду руководствоваться определениями в [1], стр. 254-259 и [2], стр.27-32.

Theorem 2.1. *Разностные схема (2) и (3) суть аппроксимации задачи (1) на решении с порядком 1.*

Доказательство. Остновимся на схеме (2). Проверим локальную аппрокимацию. По формуле Тейлора $y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k + \xi)h^3$. Учитывая, что после проектирования $y_k = y(x_k)$, получим левую часть в (2) в виде
$$y'(x_k) + y''(x_k)\frac{h}{2} + y'''(x_k + \xi)\frac{h^2}{6} + Ay(x_k). \tag{8}$$

Но на решении $y'(x_k) + Ay(x_k) = 0$, отсюда получаем, что левая часть в (2) будет равна $0.5y''(x_k)h + O(h^2)$. Далее, так как при достаточно высокой гладкости y'' ограничена на $[0, 10]$, то мы получаем $||L_h(y)_h - 0||_h = O(h)$, где $L_h f = \frac{f_{k+1} - f_k}{h} + Af_k$. Начальные условия у нас точные, так что проверять их аппроксимацию не надо. Для схемы (3) проверки абсолютно аналогичны. □

Theorem 2.2. *Разностная схема (4) имеет второй порядок аппроксимации на решении.*

Доказательство. Аналогично с предыдущей теоремой, выпишем формулу Тейлора

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \xi)h^4 \tag{9}$$

и подставим в левую часть (4), приняв $y_k = y(x_k)$:

$$y'(x_k) + y''(x_k)\frac{h}{2} + y'''(x_k)\frac{h^2}{6} + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \xi)h^3 + Ay(x_k)+ \\ \frac{1}{2}A(y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \xi)h^4). \tag{10}$$

Но на решении $y'(x_k) + Ay(x_k) = 0$ и $y''(x_k) + Ay'(x_k) = 0$. Тогда получаем

$$y'''(x_k)\frac{h^2}{6} + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \xi)h^3 + \frac{1}{2}A(\frac{1}{2}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \xi)h^4), \tag{11}$$

то есть $O(h^2)$. Аналогичные с предыдущим доказательством соображения приводят к $||L_h(y)_h - 0||_h = O(h^2)$. □

Theorem 2.3. *Схемы (5) и (6) имеют второй и первый порядок аппроксимации соответственно.*

Доказательство. В (5) и (6) нужно проверять аппроксимации для y_k и y_1 отдельно. Аппроксимация для y_1 имеет второй порядок. В (5) мы имеет аппроксимацию второго порядка для y_k. Посмотрим теперь на (6). Используя 9 по аналогии с предыдущими выкладками, получим

$$y'(x_k) + \frac{1}{h}(y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}(y^{IV}(x_k + \xi) + y^{IV}(x_k + \eta))h^4)+ \\ A(y(x_k) - y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k + \eta)h^4). \tag{12}$$

После учёта $y' + Ay = 0$, будет

$$\frac{1}{h}(y''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}(y^{IV}(x_k+\xi) + y^{IV}(x_k+\eta))h^4)+$$
$$A(-y'(x_k)h + \frac{1}{2}y''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_k)h^3 + \frac{1}{24}y^{IV}(x_k+\eta)h^4). \quad (13)$$

Получаем в итоге $O(h)$.

□

Теперь исследуем устойчивость решений. Схемы (2)-(6) суть линейные разностные уравнения, так что не надо использовать определение. Достаточно будет только лишь посмотреть на собственные значения: они все должны быть в единичном круге, а на единичной окружности не должно быть кратных.

Theorem 2.4. *Схема (2) условно устойчива, т.е. устойчива при $h \leq 2/A$. Схемы (3) и (4) абсолютно устойчивы.*

Доказательство. Для (2) выпишем характеристический многочлен:

$$\frac{\lambda - 1}{h} + A = 0 \quad (14)$$

. Его корень
$$\lambda = 1 - Ah. \quad (15)$$

Тогда $|\lambda| \leq 1$ т.т.т.к. $h \leq 2/A$. В случае (3) получаем корень

$$\lambda = \frac{1}{1 + Ah}, \quad (16)$$

который всегда не превосходит единицы. В случае (4) имеем

$$\lambda = \frac{1 - 0.5Ah}{1 + 0.5Ah}, \quad (17)$$

что тоже не превосходит единицы по модулю. □

Theorem 2.5. *Схема (5) неустойчива.*

Доказательство. Имеем характеристический многочлен

$$\frac{\lambda^2 - 1}{h} - A\lambda = 0. \quad (18)$$

Исследуя его корни, можно найти, что оба корня вещественны. Также находим, что либо там кратный корень 1, либо есть корень, строго больший единицы по модулю. □

Theorem 2.6. *Схема (6) условно устойчива при* $h \le (\sqrt{5}+1)/(6A)$.

Доказательство. Характеристический многочлен имеет корни

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{1-6Ah}}{3}. \tag{19}$$

Рассматриваем вещественный и комплексный случаи отдельно. В вещественном случае собственные значения всегда в единичном круге, а в комплексном - только при $h \le (\sqrt{5}+1)/(6A)$. □

Теорема Филиппова позволяет объединить аппроксимацию и устойчивость для случая линейных дифференциальных операторов и получить вывод о сходимости приближённых решений к настоящему.

Theorem 2.7. *Схемы (2), (3) и (6) имеют первый порядок сходимости в области их устойчивости. Схема (4) имеет второй порядок сходимости. Схема (5) не сходится.*

Доказательство. Первые два утверждения немедленно следуют из теоремы Филиппова. Последнее утверждение верно, потому что устойчивость является необходимым условием сходимости, см. [1], стр.259. □

3 Численное решение

Все эти пять методов были реализованы мной численно на языке C++. Использовались $A = 1, \ldots, 10$ и $h = 10^{-k}$, $k = 1, \ldots, 5$. Результаты прилагаются в файле output.txt. В нём представлена таблица из колонок. *Met.num* - номер разностной схемы в том порядке,в котором они перечислены в (2)-(6). В колонке x записано число 10, в колонке y - $y(10)$, в колонке *exact* - e^{-10A}. Колонка *delta* - это $L(2,h)$-норма разности между точным и приближёнными решениями, а *delta * power* - произведение нормы разности на h^p, где p всегда единица, кроме метода 3: там $p = 2$. Численные подсчёты подтверждают теоретические выкладки.

Список литературы

[1] Н.С. Бахвалов, А.А, Корнев, Е.В. Чижонков, *Численные методы. Задачи и упражнения*, Москва, Дрофа, 2009.

[2] А.А. Корнев, *Лекции по курсу 'Численные методы'*, Москва, Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2018.