

---

# A1: ESTRUCTURA DE CANTILEVER

---

Padilla, Pol

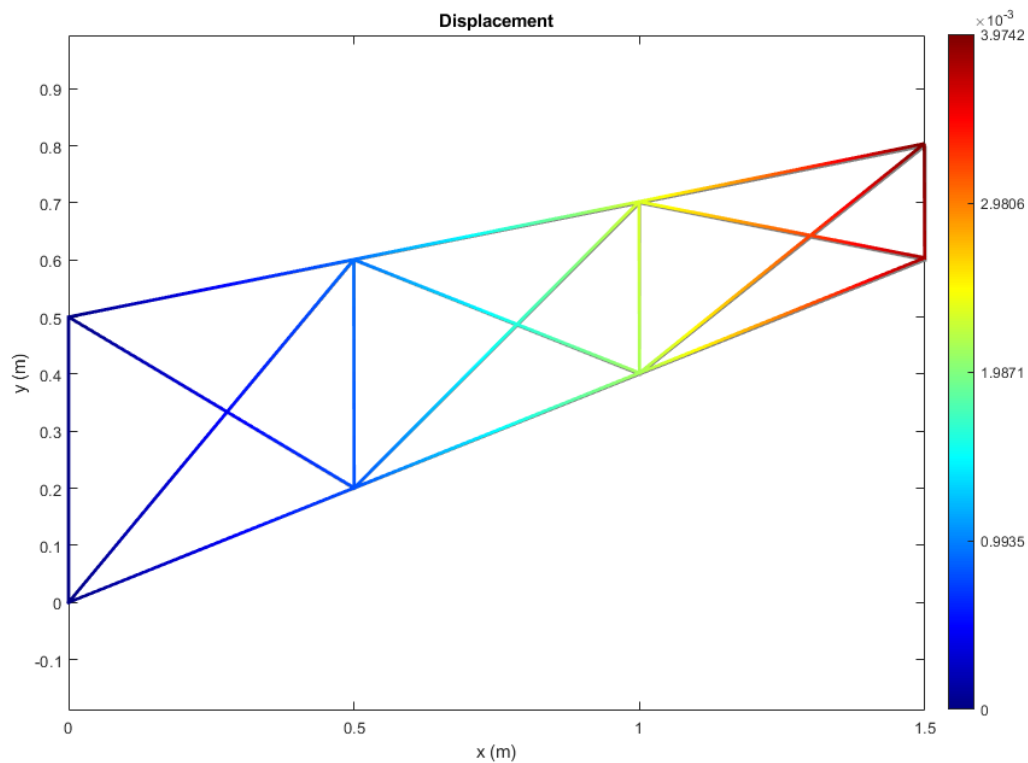
Baltanas, Arturo

2 de junio de 2022



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

**Curso:** GrETA 2021-2022 / QP-QT  
**Asignatura:** Estructuras Aeroespaciales  
**Docente:** Cante Teran, Juan Carlos

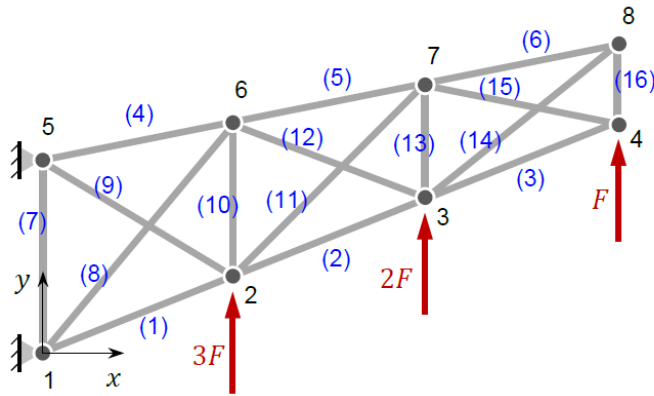


## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Parte A: condiciones de fuerzas externas</b>	<b>4</b>
<b>3. Parte B: expansiones térmicas</b>	<b>8</b>
3.1. B1. Incremento $\Delta T = 10^\circ$ y $F = 920 \text{ N}$ . . . . .	8
3.2. B1. Incremento $\Delta T = 10^\circ$ y $F = 0 \text{ N}$ . . . . .	9
3.3. B2. Incremento $\Delta T = -5^\circ$ y $F = 920 \text{ N}$ . . . . .	9
3.4. B2. Incremento $\Delta T = -5^\circ$ y $F = 0 \text{ N}$ . . . . .	10
<b>4. Anexo</b>	<b>11</b>

## 1. Introducción

La estructura articulada de cantilever se puede definir mediante el método matricial, trabajando en 2D, con 2 DOF por cada nodo. En el caso de estudio, la estructura consiste de 16 elementos conectados por 8 nodos, dos de ellos fijos, con los desplazamientos restringidos (los nodos 1 y 5).



Node	$x$ (m)	$y$ (m)
1	0	0
2	0.5	0.2
3	1	0.4
4	1.5	0.6
5	0	0.5
6	0.5	0.6
7	1	0.7
8	1.5	0.8

Figura 1: Esquema 2D de los elementos de la estructura de cantilever estudiada.

Las características estructurales del material y la estructura empleada son las siguientes:

- Fuerza aplicada,  $F = 920 \text{ N}$ .
- Módulo de Young,  $E = 75000 \text{ MPa}$ .
- Área de sección circular,  $A = 120 \text{ mm}^2$ .
- Momento del área,  $I = 1400 \text{ mm}^4$ .
- Coeficiente de expansión térmica,  $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

## 2. Parte A: condiciones de fuerzas externas

Los resultados obtenidos de trabajar la estructura presentada con el método matricial se muestran en las figuras que se muestran a continuación:

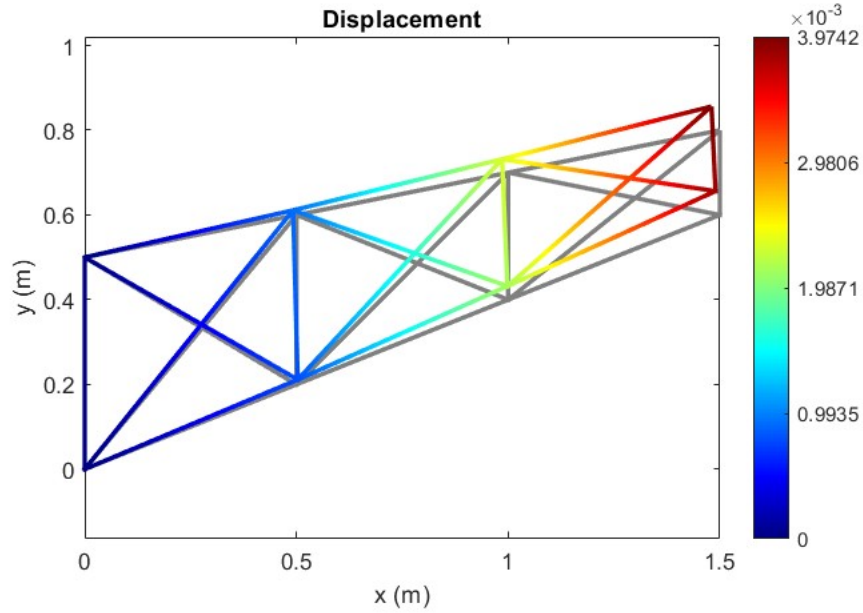


Figura 2: Desplazamiento de la estructura en metros a escala 1:15

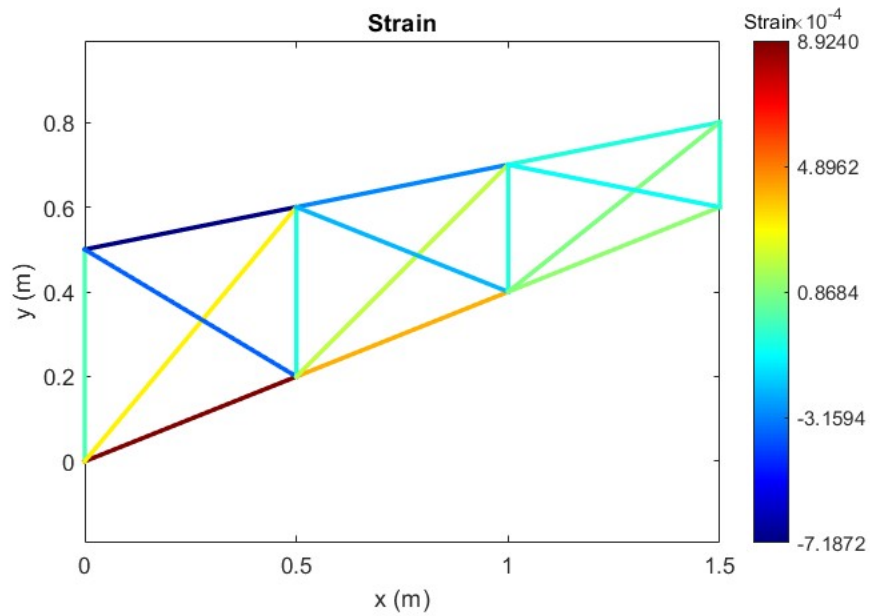


Figura 3: Deformación de la estructura en metros

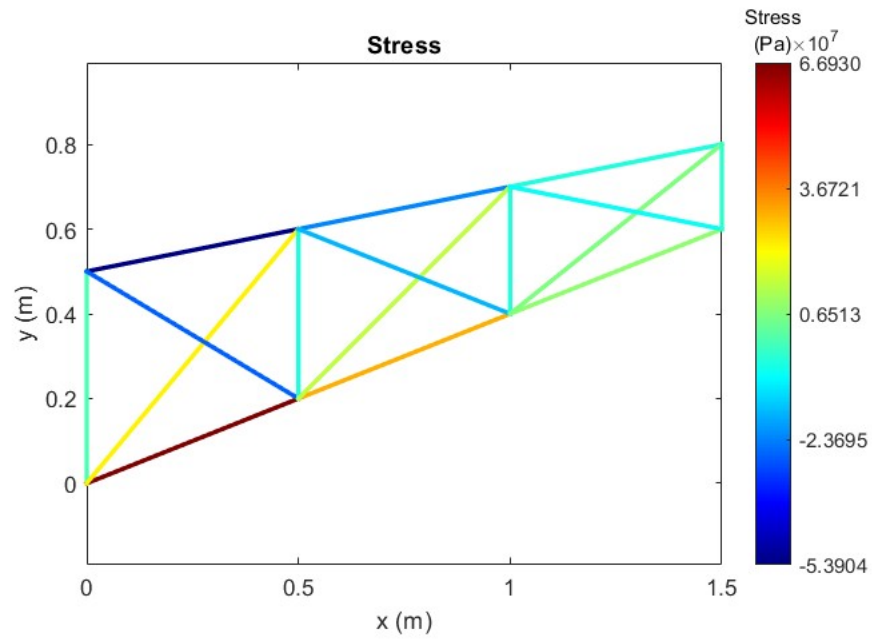


Figura 4: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura sin deformar

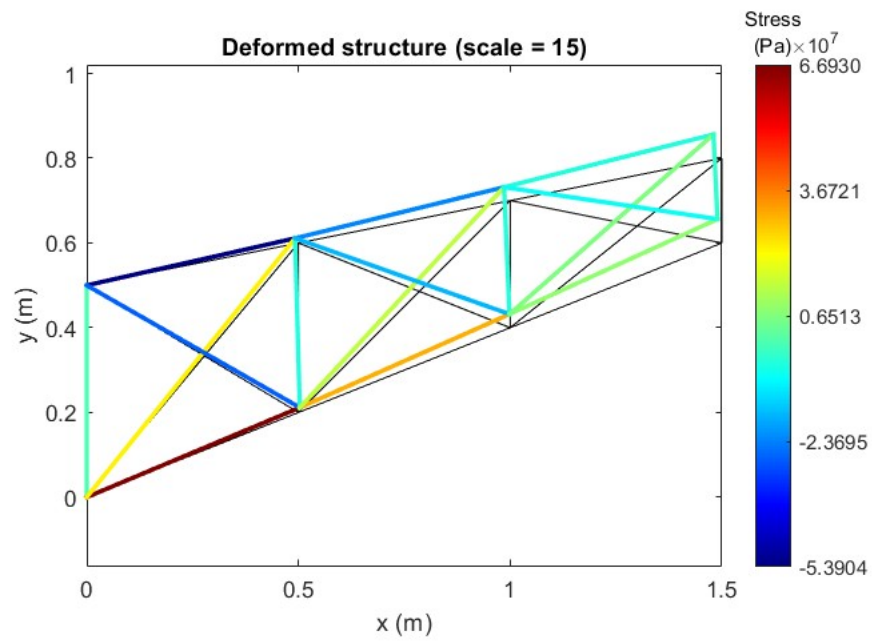


Figura 5: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada a escala 1:15

Se obtiene un desplazamiento del nodo 4, situado en el extremo libre de la estructura, siendo  $u_7$  el desplazamiento horizontal del nodo 4 y  $u_8$  el desplazamiento vertical del nodo 4:

$$u_1^4 = u_7 = -6,8218 \cdot 10^{-4} m$$

$$u_2^4 = u_8 = 37,57 \cdot 10^{-4} m$$

Las reacciones que se generan en los nodos restringidos 1 y 5. Siendo  $R_1$  la reacción horizontal del nodo 1,  $R_2$  la reacción vertical del nodo 1,  $R_9$  la reacción horizontal del nodo 5,  $R_{10}$  la reacción vertical del nodo 5:

$$R_1^1 = R_1 = -9,2 \cdot 10^3 N$$

$$R_2^1 = R_2 = -5,0743 \cdot 10^3 N$$

$$R_1^5 = R_9 = 9,2 \cdot 10^3 N$$

$$R_2^5 = R_{10} = 0,4457 \cdot 10^3 N$$

La tabla que se presenta a continuación muestra las tensiones que presenta cada elemento:

$e$	$\sigma$ [Pa]
1	$6,6930 \cdot 10^7$
2	$3,0891 \cdot 10^7$
3	$8,3136 \cdot 10^6$
4	$-5,3904 \cdot 10^7$
5	$-2,2874 \cdot 10^7$
6	$-5,1590 \cdot 10^6$
7	0
8	$2,2687 \cdot 10^7$
9	$-2,7766 \cdot 10^7$
10	$-4,9815 \cdot 10^6$
11	$1,3650 \cdot 10^7$
12	$-1,7129 \cdot 10^7$
13	$-4,6338 \cdot 10^6$
14	$6,4784 \cdot 10^6$
15	$-7,8719 \cdot 10^6$
16	$-3,0353 \cdot 10^6$

Tabla 1: Tensiones de cada elemento de la estructura de cantilever.

La estructura deformada con la tensión que presenta cada barra se puede encontrar en la figura 5. Como se observa, las barras donde incide las fuerzas externas (1,2,3) se encuentran a tracción, con tensión positiva, mientras las barras traseras (4,5,6) actúan a compresión, con tensión negativa. Por otro lado, las barras mas cercanas a los nodos fijos están sometidas a los valores mas altos de tensión pero a medida que el elemento se encuentra mas alejado de los nodos fijos, el valor de la tensión se va reduciendo a valores mas bajos. Sin embargo, se observa un mayor desplazamiento en los elementos mas alejados. La barra 7 no sufre tensión debido a que tiene los 4 grados de libertad de sus 2 nodos restringidos (donde actúan las reacciones), no hay deformación, y por ley de Hooke no presenta tensión. Para finalizar, mencionar que el comportamiento de la estructura se encuentra dentro de lo esperado, lo que indica el correcto funcionamiento del algoritmo.

El fallo posible que se puede producir esta regido por el pandeo. La tensión a la que se ha de someter la barra para que ocurra dicho efecto (tensión crítica) se puede calcular mediante la ecuación:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A}$$

Cabe mencionar que el pandeo solo podrá ocurrir para en aquellas barras que estén sometidas a compresión.

Conociendo los datos de la tensión que presenta cada barra y la tensión crítica que puede soportar cada una se ha podido elaborar un código (véase anexo) para identificar aquellas barras que tienen riesgo de pandear. Los resultados obtenidos indican un riesgo de falla por pandeo la **barra 4** y la **barra 9**, ambas conectadas al nodo 5.

### 3. Parte B: expansiones térmicas

En base a la linealidad del problema, las expansiones térmicas se pueden trabajar como elongaciones impuestas. Se puede entonces considerar que las elongaciones y las deformaciones totales son la suma de las causadas por las expansiones térmicas y las producidas por las fuerzas externas aplicadas en los nodos.

Las elongaciones causadas por las expansiones térmicas derivan en unas fuerzas externas ya conocidas que trabajan en los axiles de cada elemento. En caso de ser un elemento en dos dimensiones, esta fuerza en la dirección del axil ha de ser descompuesta en los ejes de los grados de libertad.

Sabiéndose conocidas esas fuerzas externas causadas por las expansiones térmicas se pueden sumar a las fuerzas externas impuestas (véase anexo), haciendo uso de la linealidad, consiguiendo un vector global  $F_{ext}$  que imponga las elongaciones térmicas además de las fuerzas impuestas. Al resolverse, los desplazamientos obtenidos ya contendrán aquellos determinados por el incremento de temperatura.

Considerando una barra única en numeración local:

$$P^e = AE \cdot \varepsilon_0 = AE \cdot \alpha \Delta T$$

$$F_{2x}^e = P^e \cdot \cos(\varphi^e);$$

$$F_{2y}^e = P^e \cdot \sin(\varphi^e);$$

$$F_{1x}^e = -F_{2x}^e$$

$$F_{1y}^e = -F_{2y}^e$$

En las figuras 7 y 9 se puede observar que las tensiones son de tracción y compresión respectivamente. Resultados que se corresponden con los ordenes de magnitud estimados e indican el correcto funcionamiento de la aplicación de los efectos térmicos. Un incremento de temperatura conlleva una expansión y por lo tanto un efecto de tracción; y una disminución de temperatura genera una reducción de longitud, es compresión.

#### 3.1. B1. Incremento $\Delta T = 10^\circ$ y $F = 920$ N

En estas condiciones, se presentan las tensiones máximas y mínimas, y la estructura deformada con las tensiones de cada elemento:

$$\sigma_{max} = \sigma^1 = 8,5934 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{min} = \sigma^4 = -3,4993 \cdot 10^7 Pa$$

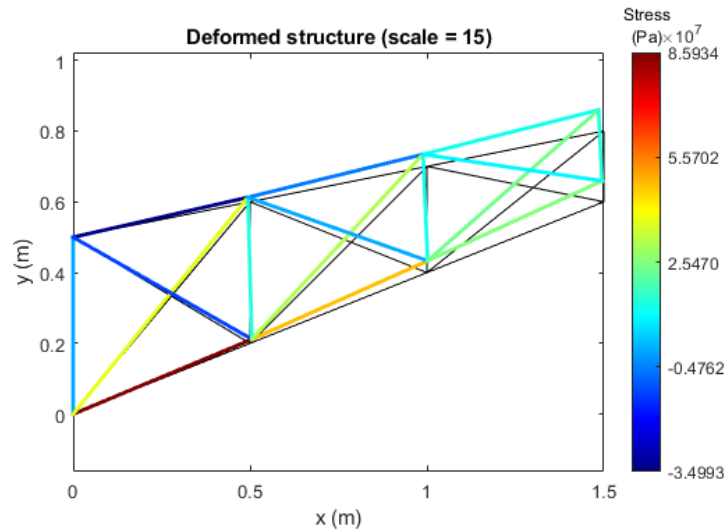


Figura 6: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada 1:15



### 3.2. B1. Incremento $\Delta T = 10^\circ$ y $F = 0$ N

En estas condiciones, se presentan las tensiones máximas y mínimas, y la estructura deformada con las tensiones de cada elemento:

$$\sigma_{max} = \sigma^1 = 19,0038 \cdot 10^6 Pa$$

$$\sigma_{min} = \sigma^7 = 0 Pa$$

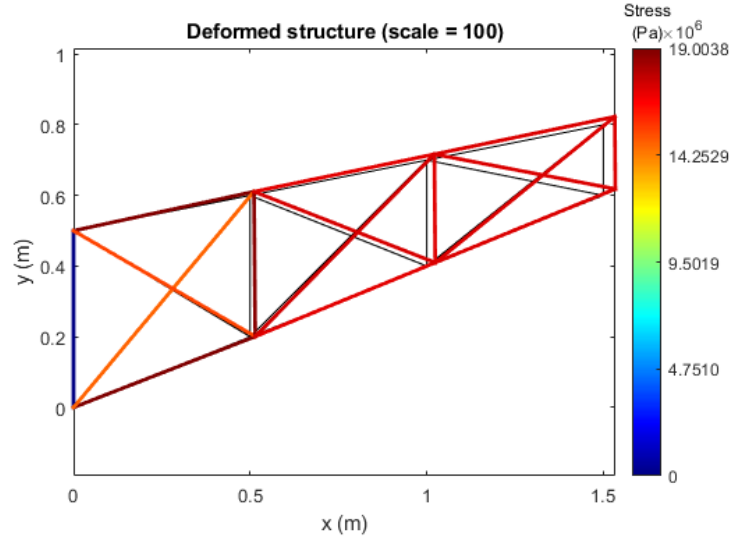


Figura 7: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada 1:100

### 3.3. B2. Incremento $\Delta T = -5^\circ$ y $F = 920$ N

En estas condiciones, se presentan las tensiones máximas y mínimas, y la estructura deformada con las tensiones de cada elemento:

$$\sigma_{max} = \sigma^1 = 5,7428 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{min} = \sigma^4 = -6,3359 \cdot 10^7 Pa$$

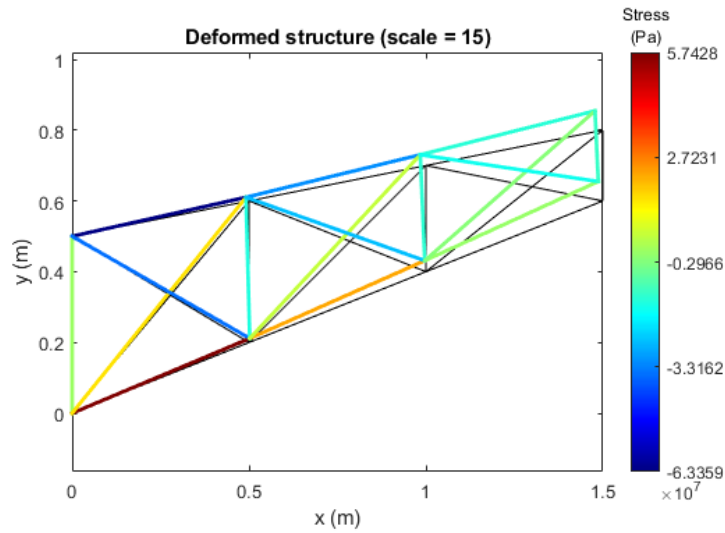


Figura 8: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada 1:15

### 3.4. B2. Incremento $\Delta T = -5^\circ$ y $F = 0 \text{ N}$

En estas condiciones, se presentan las tensiones máximas y mínimas, y la estructura deformada con las tensiones de cada elemento:

$$\sigma_{max} = \sigma^7 = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{min} = \sigma^1 = -9,5019 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

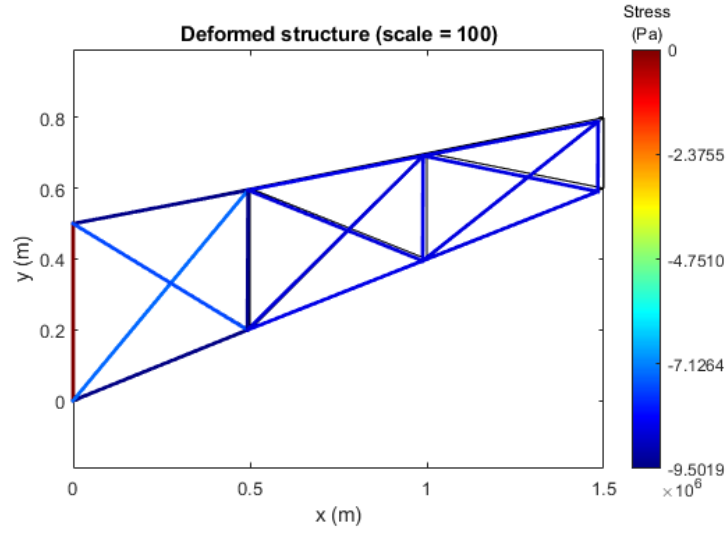


Figura 9: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada 1:100

## 4. Anexo

Función que calcula el riesgo de pandeo, implementada en código Matlab:

```

1 function [FB] = bucklingFailure(mat,Tmat,x,Tn,n_el, sig)
2 % Tn(e,a) = global nodal number associated to node a of element e
3 % x(a,j) = coordinate of node a in the dimension j
4 % Total number of elements
5 % Tmat(e) = Row in mat corresponding to the material associated to element e
6
7 % Material data
8 % mat(m,1) = Young modulus of material m
9 % mat(m,2) = Section area of material m
10
11
12 FB = zeros(n_el,1); %Bars that have failed
13 for e = 1:n_el
14
15     x1e = x(Tn(e,1),1);
16     y1e = x(Tn(e,1),2);
17     x2e = x(Tn(e,2),1);
18     y2e = x(Tn(e,2),2);
19     L = sqrt((x2e-x1e)^2+(y2e-y1e)^2);
20
21     E = mat(Tmat(e),1);
22     I = mat(Tmat(e),4);
23     A = mat(Tmat(e),2);
24
25     sigPan = ((pi^2)*E*I)/((L^2)*A); % Formula of buckling failure tension
26
27     if sig(e)<0
28         if abs(sig(e)) > sigPan
29             FB(e) = 1; %If the bars fails because buckling effect, 1 will appear
30         end
31     end
32 end
33 end

```

Añadido de la función *computeFm* que se utilizaba para el caso A, para implementar fuerzas internas debido a la expansión térmica, en código Matlab:

```

1 for e=1:n_el %internal forces thermal expansion
2     x1e=x(Tn(e,1),1);
3     y1e=x(Tn(e,1),2);
4     x2e=x(Tn(e,2),1);
5     y2e=x(Tn(e,2),2);
6     le=sqrt((x2e-x1e)^2+(y2e-y1e)^2);
7     se=(y2e-y1e)/le;
8     ce=(x2e-x1e)/le;
9
10     FdeltaT= mat(Tmat(e),2)*mat(Tmat(e),1)*mat(Tmat(e),3)*deltaT; % [A*E*epsilon]
11     Fcos=FdeltaT*ce;
12     Fsin=FdeltaT*se;
13
14     Fext(Tn(e,2)*2-1,1)=Fext(Tn(e,2)*2-1,1)+Fcos;
15     Fext(Tn(e,2)*2,1)=Fext(Tn(e,2)*2,1)+Fsin;
16     Fext(Tn(e,1)*2-1,1)=Fext(Tn(e,1)*2-1,1)-Fcos;
17     Fext(Tn(e,1)*2,1)=Fext(Tn(e,1)*2,1)-Fsin;
18 end

```