
A2: PLANEADOR COLGANTE 3D

Padilla, Pol

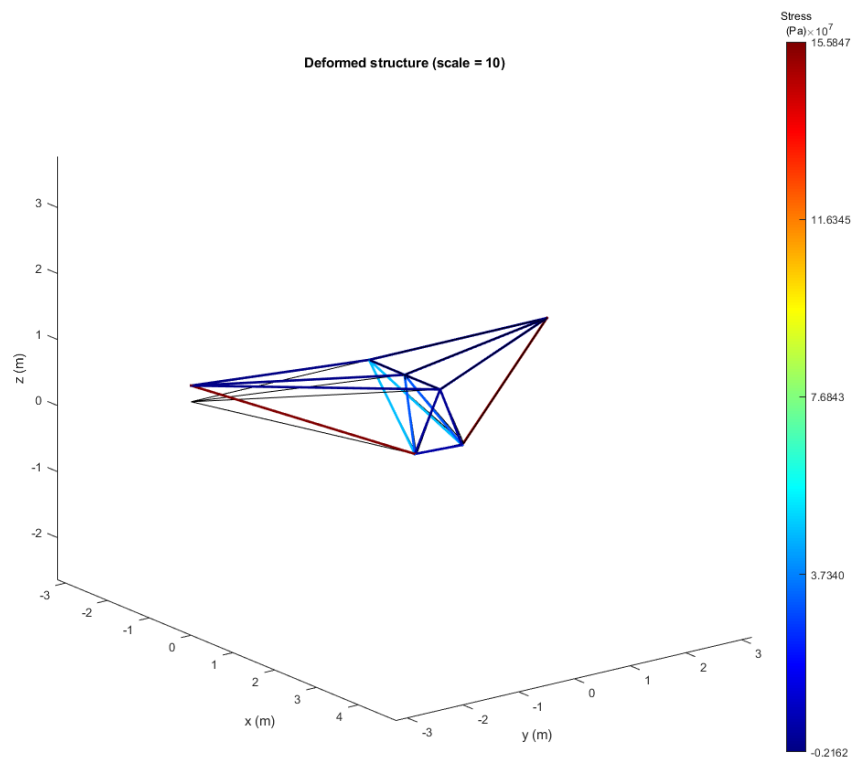
Baltanas, Arturo

2 de junio de 2022



**UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH**

Curso: GrETA 2021-2022 / QP-QT
Asignatura: Estructuras Aeroespaciales
Docente: Cante Teran, Juan Carlos



Índice

1. Introducción	3
2. Parte A: Validación del código	4
2.1. Resolución por código	5
2.2. Resolución analítica	6
2.3. Comparación resultados	8
3. Parte B: Estructura 3D del Planeador	9
3.1. B.1: Descenso a velocidad constante	9
3.1.1. Cálculo de las fuerzas externas	9
3.1.2. Restricciones de DOF's y reacciones	9
3.1.3. Tensiones, deformaciones y riesgo de pandeo (B.2)	10
3.2. B.3: Implementación de cargas inerciales	12
3.2.1. Cálculo de las fuerzas externas	12
3.2.2. Tensiones, deformaciones y riesgo de pandeo (B.2)	13

1. Introducción

El método matricial se puede aplicar para estructuras articuladas tridimensionales, haciendo las modificaciones pertinentes al código desarrollado para emplear el método matricial en estructuras bidimensionales. La estructura a estudiar en este informe es un planeador, compuesto por dos materiales distintos y en el que actúan distintas fuerzas, distribuidas a lo largo de los nodos de la manera especificada.

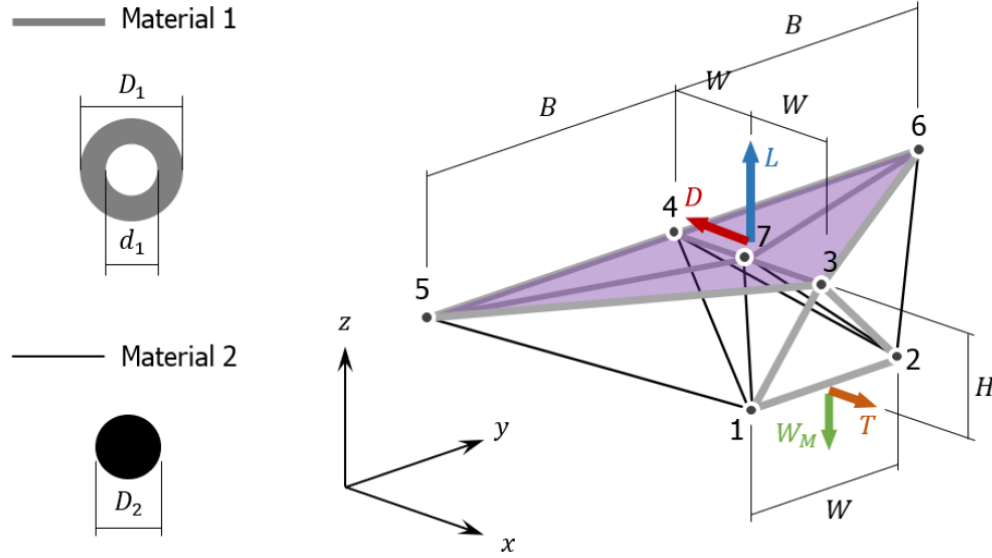


Figura 1: Esquema 3D de la estructura del planeador y sus cargas externas, a la derecha las secciones de los materiales.

Actuaciones, fuerzas y distribuciones especificadas:

- Massa de carga ($M = 150 \text{ Kg}$), su peso se distribuye equitativamente entre los nodos 1 y 2.
- Massa de los elementos no es negligible, se distribuye equitativamente entre sus dos nodos.
- Lift (L) y drag (D), se distribuyen uniformemente sobre los nodos superiores (3,4,5,6,7).
- Fuerza (T), se aplica para impedir rotaciones en eje z'' , se distribuye equitativamente entre nodos 1 y 2.
- Descenso a velocidad constante, aceleración nula.

Las características estructurales de los materiales y la estructura empleada son las siguientes:

	Young, E [Pa]	Densiad, ρ [kg/m^3]	Propiedades de la sección
Material 1	$7,50 \cdot 10^{10}$	3350	$D_1 = 18\text{mm}$, $d_1 = 7,5\text{mm}$
Material 2	$1,47 \cdot 10^{11}$	950	$D_2 = 3\text{mm}$, $d_2 = 0\text{mm}$

Tabla 1: Propiedades de los materiales.

Las dimensiones de la estructura, para fijar la posición de los nodos (vease figura 5):

H	$0,90 \text{ m}$
W	$0,85 \text{ m}$
B	$3,20 \text{ m}$

Tabla 2: Dimensiones de los materiales.

Se ha seleccionada la siguiente enumeración de los elementos, considerando los nodos que se unen:

Elemento, e	Nodo 1, a	Nodo 2, b
1	1	2
2	1	3
3	2	3
4	3	7
5	4	7
6	4	5
7	3	5
8	3	6
9	4	6
10	5	7
11	6	7
12	1	4
13	1	5
14	1	7
15	2	4
16	2	6
17	2	7

Tabla 3: Propiedades de los materiales.

2. Parte A: Validación del código

La validación del código y el correcto funcionamiento del método matricial se realizara mediante un problema estructural que se resolverá analíticamente y mediante el código para poder comparar los resultados. La estructura a trabajar se presenta a continuación:

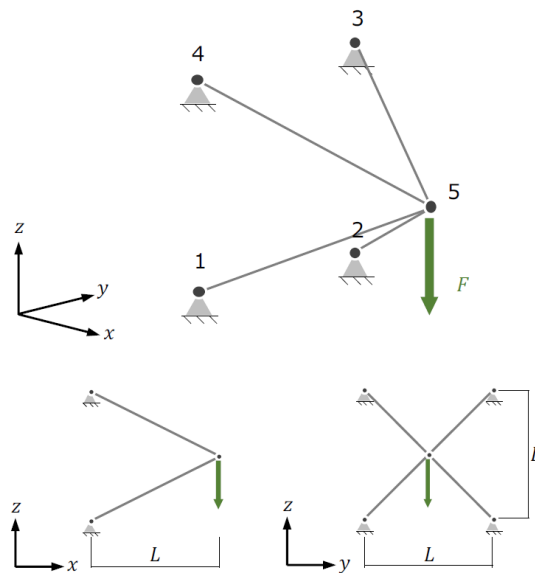


Figura 2: Esquema 3D de la estructura del validación y sus carga externa.

2.1. Resolución por código

Aplicando la geometría, con una $L = 5$ m y $F = 10000$ N, y empleando el material 1 que se muestra en la tabla 1 para la cuatro barras, se obtienen los siguientes resultados mediante el código:

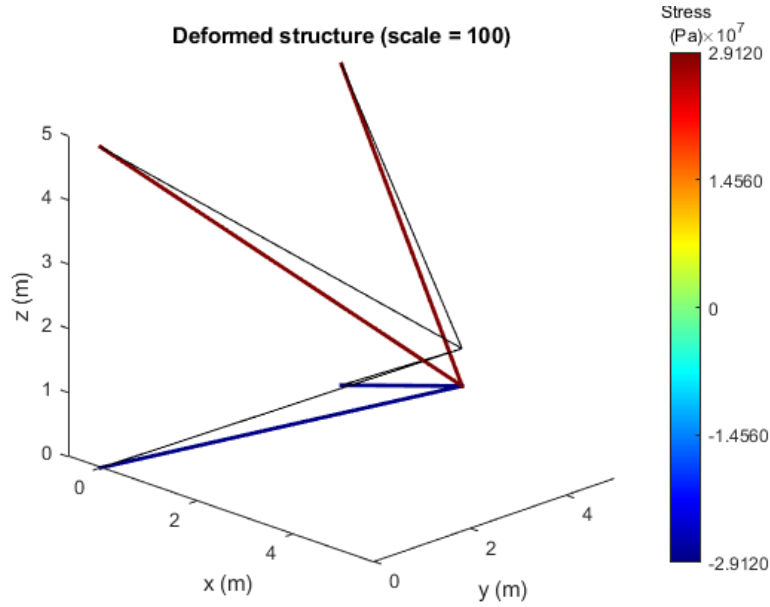


Figura 3: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada a escala 1:100.

A continuación se presentan las deformaciones y fuerzas de reacción que aparecen en los nodos obtenidas mediante el código:

DOF, n_{dof}	Desplazamiento, u [m]	Reacción, R [N]
1	0	5000
2	0	2500
3	0	2500
4	0	5000
5	0	-2500
6	0	2500
7	0	-5000
8	0	2500
9	0	2500
10	0	-5000
11	0	-2500
12	0	2500
13	0	0
14	0	0
15	-0.0058	0

Tabla 4: Desplazamientos y reacciones de los grados de libertad.

2.2. Resolución analítica

Para la resolución del problema por métodos analíticos nos apoyaremos en la simetría de la geometría. Al tratarse de un problema de 3 dimensiones se deberá de descomponer la fuerza en dirección x,y,z. Como las barras solo transmitirán axiles, las reacciones tendrán la misma dirección que las barras. Es por ello que primero se deberá de parametrizar la dirección de las barras en función de dos ángulos θ y β . Estos ángulos se obtendrán a partir de la geometría del problema.

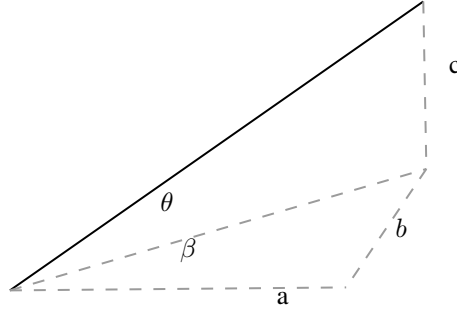


Figura 4: Parametrización en el espacio de la barra 15 en función de los ángulos θ y β . $a = L$; $b = \frac{L}{2}$; $c = \frac{L}{2}$

A partir de la geometría se puede deducir que:

$$\tan(\beta) = \frac{1}{2} \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como se ha comentado antes, las reacciones tendrán la misma dirección que las barras, por tanto se descompondrán en función de los ángulos ya encontrados.

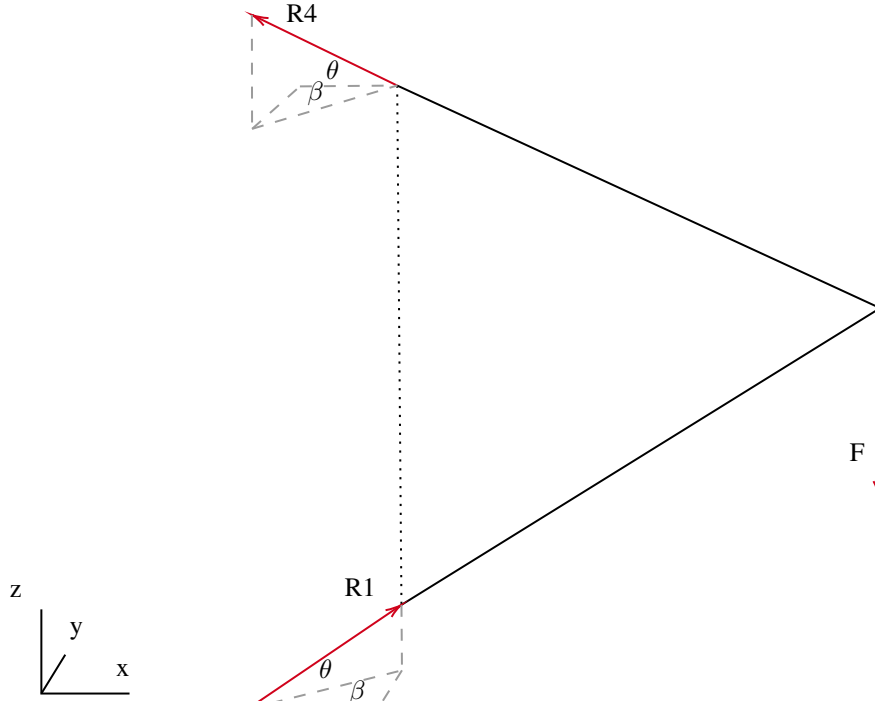


Figura 5: Esquema 3D de las reacciones del sistema (simetría del sistema)

Por tanto las ecuaciones que relacionen la descomposición de las reacciones se puede definir como:

$$\frac{F_y^1}{F_x^1} = \tan(\beta) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{F_y^4}{F_x^4} = \tan(\beta) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{F_z^1}{\sqrt{(F_y^1)^2 + (F_x^1)^2}} = \tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$\frac{F_z^4}{\sqrt{(F_y^4)^2 + (F_x^4)^2}} = \tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

Dado que se trata de un problema estático se deberá imponer un sumatorio de fuerzas para cada dirección.

Al tratarse de una geometría simétrica, la reacciones en los nodos 2 y 3 serán del mismo modulo pero de dirección simétrica respecto el plano ZX. Por tanto, para tener en cuenta las reacciones de los nodos 2 y 3 se multiplicará por 2 el sumatorio de fuerzas en dirección x.

$$\sum F_x = 2F_x^4 - 2F_x^1 = 0$$

$$F_x^4 = F_x^1 = F_x \quad (5)$$

$$\sum F_z = 2F_z^4 + 2F_z^1 - F = 0 \quad (6)$$

A partir de las ecuaciones 6, 3 y 4:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{(F_y^1)^2 + (F_x^1)^2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{(F_y^4)^2 + (F_x^4)^2} - F$$

Aplicando las ecuaciones 1 y 2:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{F_x^1}{2}\right)^2 + (F_x^1)^2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{F_x^4}{2}\right)^2 + (F_x^4)^2} - F$$

Aplicando la relación 5:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{F_x}{2}\right)^2 + (F_x)^2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{F_x}{2}\right)^2 + (F_x)^2} - F$$

A partir de este momento tenemos una ecuación con una solo incógnita, F_x . Si despejamos la ecuación obtenemos las relaciones F_x, F_y y F_z en función de F :

$$0 = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{F_x}{2}\right)^2 + (F_x)^2} - F$$

$$F_x = \frac{F}{2}$$

$$F_y = \frac{F}{4}$$

$$F_z = \frac{F}{4}$$

Finalmente se definirá el signo de las componentes de cada reacción.

Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4
$F_1^z +$	$F_2^z +$	$F_3^z +$	$F_4^z +$
$F_1^y +$	$F_2^y -$	$F_3^y +$	$F_4^y -$
$F_1^x +$	$F_2^x +$	$F_3^x -$	$F_4^x -$

2.3. Comparación resultados

Como se puede observar, los resultados analíticos y numéricos coinciden perfectamente, además de tener el comportamiento esperado. Si se hace el módulo de las fuerzas de los nodos, que actúan sobre el axil y se divide entre el área del material 1, con una fuerza de $F=10000$ N se puede hacer una comparación de tensiones:

e	σ_{num} [Pa]	σ_{an} [Pa]
1 – 5	$-2,9120 \cdot 10^7$	$-2,9120 \cdot 10^7$
2 – 5	$-2,9120 \cdot 10^7$	$-2,9120 \cdot 10^7$
3 – 5	$2,9120 \cdot 10^7$	$2,9120 \cdot 10^7$
4 – 5	$2,9120 \cdot 10^7$	$2,9120 \cdot 10^7$

Tabla 5: Tensiones de cada elemento de la estructura de validación, numéricas y analíticas.

3. Parte B: Estructura 3D del Planeador

3.1. B.1: Descenso a velocidad constante

3.1.1. Cálculo de las fuerzas externas

El cálculo de las reacciones necesita primero la determinación correcta de las fuerzas externas que actúan sobre el planeador y su distribución en los nodos. En este caso se aplicaran las hipótesis enumeradas previamente en la introducción.

Las incógnitas son T , L y D . Considerando que es un descenso sin aceleraciones ni momento sobre el eje y (se elige el nodo 7 como referencia):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_z = 0 \\ \sum F_x = 0 \\ \sum M_{y7} = 0 \end{array} \right\}$$

Cada barra individual tiene su propio peso, aplicado en la dirección z y repartido de manera equitativa entre las dos nodos de cada barra. El criterio de signos se rige al considerar los momentos en el sentido del eje $y+$. Por tanto, el brazo palanca solo esta definido por la distancia en x :

$$M_{el} = \sum_{e=1}^{n_{el}} m_e = \sum_{e=1}^{n_{el}} l_e \rho_e A_e$$

$$\sum M_{o_{el}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} [(x_{2e} - x_7)m_e g/2 + (x_{1e} - x_7)m_e g/2] \quad (7)$$

Para los nodos superiores del ala:

$$\sum M_{o_L} = \sum_{n=3}^7 [(x_n - x_7)(-L/5)] \quad (8)$$

$$\sum M_{o_D} = \sum_{n=3}^7 [(z_n - z_7)(D/5)] \quad (9)$$

Para la barra inferior:

$$\sum M_{o_M} = \sum_{n=1}^2 [(x_n - x_7)(Mg/2)] \quad (10)$$

$$\sum M_{o_T} = \sum_{n=1}^2 [(z_n - z_7)(T/2)] \quad (11)$$

El sistema de ecuaciones definitivo a resolver queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} L - Mg - M_{el}g = 0 \\ T + D = 0 \\ \sum M_{o_{el}} + \sum M_{o_L} + \sum M_{o_D} + \sum M_{o_M} + \sum M_{o_T} = 0 \end{array} \right\}$$

3.1.2. Restricciones de DOF's y reacciones

Se esta trabajando una estructura articulada tridimensional, esto implica que se han de restringir 6 DOF, que consistirían en 3 desplazamientos lineales y 3 rotaciones. Las restricciones en los nodos solamente se pueden aplicar a los desplazamientos lineales, de manera que para bloquear las rotaciones se debe actuar en diversos nodos.

Una de las primeras posibilidades consideradas es la restricción de los 3 desplazamientos de 2 nodos, pero esto aun permitiría a la estructura rotar entorno al eje que forman estos dos nodos, así que se ve que se requiere implementar las restricciones en un mínimo de tres nodos distintos.

El nodo 4 (véase figura 5), se restringe totalmente, imponiendo desplazamiento nulo a sus tres DOF's. Se restringen los DOF's en y y z del nodo 3, permitiendo que las deformaciones se apliquen mediante una deformación a lo largo del eje x , de tal forma que se mantiene centrado la estructura en dicho eje. Finalmente se restringe el DOF z del nodo 6, permitiendo que las deformaciones actúen en el plano xy y evitando que la estructura se pueda rotar a lo largo del eje x . De este modo, cualquier tipo de rotación queda restringida pero sin sobre restringir el sistema al no fijar una dirección en dos nodos de una misma barra y perder información.

La matriz *fixNod* queda determinado de la siguiente manera en el código:

```
1 fixNod = [% Node   DOF   Magnitude
2           % Write the data here...
3           4 1 0
4           4 2 0
5           4 3 0
6           3 2 0
7           3 3 0
8           6 3 0
9 ];
```

Con estas restricciones, las fuerzas de reacción obtenidas son las que se muestran en la tabla 9. Su significado físico se manifiesta en el orden de magnitud de las reacciones. Estas son de un orden de 10^{-11} N o menor, lo cual quiere decir que son un 0 de máquina. El resultado implica que las fuerzas externas calculadas y aplicadas sobre la estructura están en equilibrio y las restricciones simplemente fijan la estructura, en estabilidad, pero no alteran su comportamiento y equilibrio.

DOF, n_{dof}	Reacciones, R [N]
8	$1,615 \cdot 10^{-11}$
9	$-1,25 \cdot 10^{-12}$
10	0
11	$2,370 \cdot 10^{-13}$
12	$-2,21 \cdot 10^{-12}$
18	$2,273 \cdot 10^{-12}$

Tabla 6: Desplazamientos y reacciones de los grados de libertad.

3.1.3. Tensiones, deformaciones y riesgo de pandeo (B.2)

A continuación se muestran las tensiones de cada elemento bajo las condiciones impuestas anteriormente:

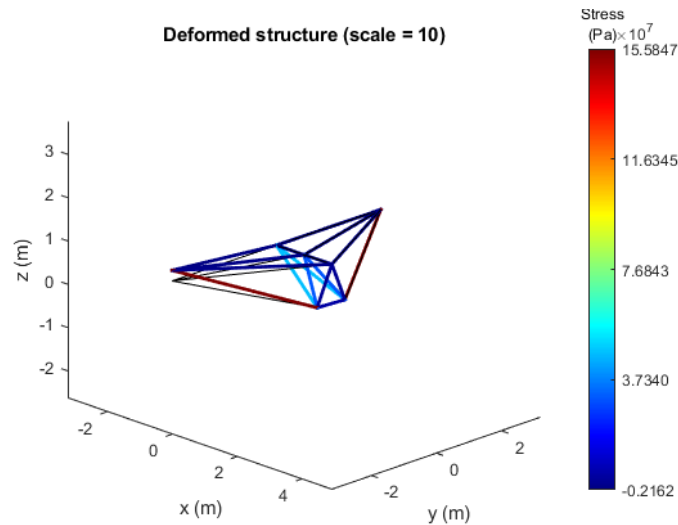


Figura 6: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada a escala 1:10.

e	σ [Pa]	σ_{cr} [Pa]
1	$3,2977 \cdot 10^6$	$-2,4349 \cdot 10^7$
2	$7,7282 \cdot 10^5$	$-1,7758 \cdot 10^7$
3	$7,7282 \cdot 10^5$	$-1,7758 \cdot 10^7$
4	$-1,0763 \cdot 10^6$	$-2,4349 \cdot 10^7$
5	$-8,5710 \cdot 10^5$	$-2,4349 \cdot 10^7$
6	$-2,1619 \cdot 10^6$	$-1,7179 \cdot 10^6$
7	$-8,4563 \cdot 10^5$	$-1,3398 \cdot 10^6$
8	$-8,4563 \cdot 10^5$	$-1,3398 \cdot 10^6$
9	$-2,1619 \cdot 10^6$	$-1,7179 \cdot 10^6$
10	$-1,4452 \cdot 10^6$	$-1,6047 \cdot 10^6$
11	$-1,4452 \cdot 10^6$	$-1,6047 \cdot 10^6$
12	$4,7003 \cdot 10^7$	$-2,1030 \cdot 10^5$
13	$1,5585 \cdot 10^8$	$-7,1583 \cdot 10^4$
14	$3,0853 \cdot 10^7$	$-4,7638 \cdot 10^5$
15	$4,7003 \cdot 10^7$	$-2,1030 \cdot 10^5$
16	$1,5585 \cdot 10^8$	$-7,1583 \cdot 10^4$
17	$3,0853 \cdot 10^7$	$-4,7638 \cdot 10^5$

Tabla 7: Tensiones de cada elemento de la estructura del planeador, junto con sus tensiones críticas de falla por pandeo (en rojo los elementos que fallan).

Observando la figura 7, se puede contemplar que las tensiones de los elementos del 2o material, mucho más delgados, actúan a tracción, sin riesgo de fallar por pandeo. Mientras, las barras superiores del ala se encuentran todas a compresión. De entre ellas, las barras 6 y 9 (las dos barras traseras del ala del planeador) fallan por pandeo, como se muestra en la tabla 8. Una posible solución al pandeo de estas dos barras sin alterar la geometría del planeador sería incrementar la sección de ambos elementos para reducir así su tensión e incrementar el momento de inercia, haciendo la tensión crítica mayor. Por otro lado, como era esperado se cumple la propiedad de simetría de la estructura en la matriz de tensiones, ya que la tensión de cada barra a un lado del plano simetría es la misma en la correspondiente barra de la otra parte de la simetría.

La deformación que se contempla en la figura 7 parece indicar que solamente se pliega el ala derecha, aunque esto es debido a las restricciones necesarias, entendiéndose que el resultado es el mismo, independientemente de que restricciones se hayan impuesto (mientras estas respeten las condiciones de contorno establecidas). Sin embargo, se puede deducir que los nodos pertenecientes a las alas mas alejada son los que sufren una mayor deformación. El pliegue de las alas, con desplazamientos en dirección "z" mayoritariamente se debe principalmente a la actuación de la sustentación (L) que se aplica distribuida a lo largo de los nodos superiores. Aquí se hace visible la gran importancia que tienen los cables de la parte inferior que sujetan el ala por los extremos. A partir de esta información se puede deducir que un refuerzo de dichos cables contribuirían a una menor deformación en dichos nodos y se podría evitar el pandeo de las barras 6 y 9.

3.2. B.3: Implementación de cargas inerciales

3.2.1. Cálculo de las fuerzas externas

Para este caso del problema, tanto la sustentación como la resistencia aerodinámica aumentan un 10 % del valor anterior (ya calculado en el apartado A). Por otro lado, el vehículo mantiene un vuelo sin cabeceo, por tanto el empuje necesario para cumplir dicha condición se calculara a partir de la igualación a cero de la suma de momentos del sistema.

$$L_B = 1,1 \cdot L_A = 1808,21N$$

$$D_B = 1,1 \cdot D_A = -2162,59N$$

En este caso la estructura ya no se encuentra en un movimiento a velocidad constantes, por tanto la estructura esta sometida a unas aceleraciones en la dirección x y z . Debido a las aceleraciones aparecen en la estructura unas cargas inerciales asociadas a las masas de las barras. Para hayar las aceleraciones y la tracción necesaria para cumplir la condición de cabeceo nulo se deberá de replantear las ecuaciones de estaticidad. Dado que en este caso ,tanto la sustentación como el drag son conocidas, las incógnitas son a_x , a_z , T y se despejara a partir de las 3 ecuaciones de estaticidad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_z = (M + M_{el}) \cdot a_z = L_B - M \cdot g - M_{el} \cdot g \\ \sum F_x = (M + M_{el}) \cdot a_x = T_B + D_B \\ \sum M_{o_{el}} + \sum M_{o_{L_B}} + \sum M_{o_{D_B}} + \sum M_{o_M} + \sum M_{o_{T_B}} + \sum M_{o_{el\text{ inercial}}} + \sum M_{o_M\text{ inercial}} = 0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\sum M_{o_{el\text{ inercial}}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} [(x_{2_e} - x_7)(m_e a_z/2) + (x_{1_e} - x_7)(m_e a_z/2) + (z_{2_e} - z_7)(-m_e a_x/2) + (z_{1_e} - z_7)(-m_e a_x/2)] \quad (13)$$

$$\sum M_{o_M\text{ inercial}} = \sum_{n=1}^2 [(x_n - x_7)(M a_z/2) + (z_n - z_7)(-M a_x/2)] \quad (14)$$

Aplicando las relaciones 7,8,9,10,11 en la ecuación 12 y aplicando los sumatorios de momentos por las cargas inerciales reflejadas en las ecuaciones 13 y 14 ya se podrán despejar las variables buscadas. Una vez conocidas todas las fuerzas involucradas en el sistema ya se podrá elaborar el vector de fuerzas externas para cada grado de libertad.

$$T_B = 2162,59N$$

$$a_z = 0,981 \frac{m}{s}$$

$$a_x = 3,5577 \cdot 10^{-16} \frac{m}{s}$$

Se puede ver que la componente de la aceleración en x es casi nula y por tanto se puede entender que se trata de un ascenso acelerado.

Las cargas inerciales se aplican ahora al vector F_{ext} como fuerzas ficticias, $F_i = -m \cdot a$, en cada nodo que posea una masa y en su DOF correspondiente. para poder calcular las nuevas tensiones equivalentes.

3.2.2. Tensiones, deformaciones y riesgo de pandeo (B.2)

e	σ [Pa]	σ_{cr} [Pa]
1	$3,6275 \cdot 10^6$	$-2,4349 \cdot 10^7$
2	$8,5010 \cdot 10^5$	$-1,7758 \cdot 10^7$
3	$8,5010 \cdot 10^5$	$-1,7758 \cdot 10^7$
4	$-1,1840 \cdot 10^6$	$-2,4349 \cdot 10^7$
5	$-9,4281 \cdot 10^5$	$-2,4349 \cdot 10^7$
6	$-2,3780 \cdot 10^6$	$-1,7179 \cdot 10^6$
7	$-9,3019 \cdot 10^5$	$-1,3398 \cdot 10^6$
8	$-9,3019 \cdot 10^5$	$-1,3398 \cdot 10^6$
9	$-2,3780 \cdot 10^6$	$-1,7179 \cdot 10^6$
10	$-1,5897 \cdot 10^6$	$-1,6047 \cdot 10^6$
11	$-1,5897 \cdot 10^6$	$-1,6047 \cdot 10^6$
12	$5,1703 \cdot 10^7$	$-2,1030 \cdot 10^5$
13	$1,7143 \cdot 10^8$	$-7,1583 \cdot 10^4$
14	$3,3939 \cdot 10^7$	$-4,7638 \cdot 10^5$
15	$5,1703 \cdot 10^7$	$-2,1030 \cdot 10^5$
16	$1,7143 \cdot 10^8$	$-7,1583 \cdot 10^4$
17	$3,3939 \cdot 10^7$	$-4,7638 \cdot 10^5$

Tabla 8: Tensiones de cada elemento de la estructura del planeador, junto con sus tensiones críticas de falla por pandeo (en rojo los elementos que fallan).

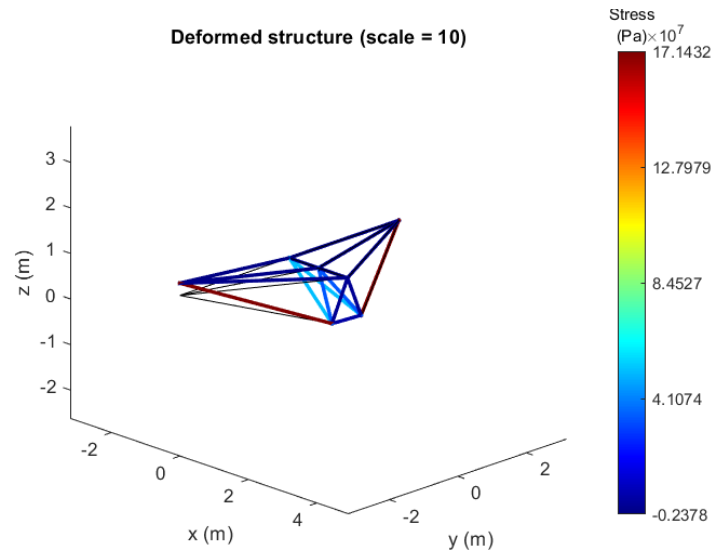


Figura 7: Tensión de la estructura mapeado sobre la estructura deformada a escala 1:10.

Como se puede observar los valores de tensión equivalente en cada barra han subido, sin embargo, se han conservados las proporciones. Por tanto, las barras que fallan por pandeo son las mismas que cuando se analizó la estructura sin las cargas inerciales. Las soluciones al problemas serian las mismas que las descritas en el punto 3.1.3.

DOF, n_{dof}	Reacciones, R [N]
8	$8,3522 \cdot 10^{-12}$
9	$-1,1312 \cdot 10^{-11}$
10	$-1,7053 \cdot 10^{-13}$
11	$1,7476 \cdot 10^{-13}$
12	$-2,5580 \cdot 10^{-12}$
18	$2,387s4 \cdot 10^{-12}$

Tabla 9: Desplazamientos y reacciones de los grados de libertad.

Las reacciones tienen órdenes de magnitud despreciables, indicando que el problema aplicando las cargas inerciales se encuentra en equilibrio de fuerzas, manteniendo la estabilidad y se respeta es sistema cuasiestático. Esto demuestra la validez de los cálculos de las fuerzas inerciales y su aplicación sobre los nodos.