
A3: ESTRUCTURA ALAR, VIGAS 1D

Padilla, Pol

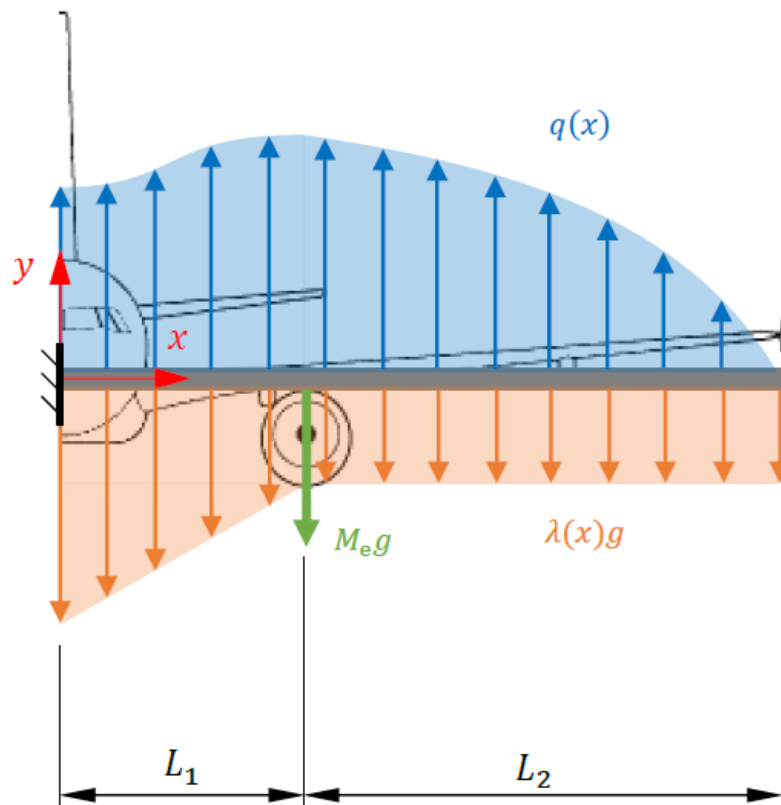
Baltanas, Arturo

2 de junio de 2022



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Curso: GrETA 2021-2022 / QP-QT
Asignatura: Estructuras Aeroespaciales
Docente: Cante Teran, Juan Carlos



Índice

1. Introducción	3
2. Resultados de las partes A y B	5
2.1. Parte A: Cálculo del centroide y la inercia I_{zz}	5
2.2. Parte B: Calcular el parametro l para conseguir equilibrio de fuerzas	6
2.3. Resolución analítica de la deflexión y rotación	6
3. Resolución de los esfuerzos mediante el método matricial	7
3.1. Representación gráfica de la deflexión, rotación, cortante y momento flector	7
3.2. Representación gráfica del error relativo entre la solución analítica y la del método matricial	8
4. Sección y el punto crítico de la estructura mediante tensiones de Von Mises	10
4.1. Calculo numérico de la tensión equivalente máxima por sección	10

1. Introducción

El problema presentado se basa en la influencia de ciertas cargas sobre un ala soportada por un larguero de sección uniforme pero con distintas cargas a lo largo su longitud. Se trabajará con el cajón formado por la sección intermedia del ala. Es decir, el cajón formado por los dos largueros en las partes laterales y por la piel del ala en las parte inferior y superior (ver figura 1). Esta aproximación es valida desde que el cajón intermedio es el que soporta la mayor carga estructural. Tanto los largueros como la piel presenta un modulo de Young de 85GPa.

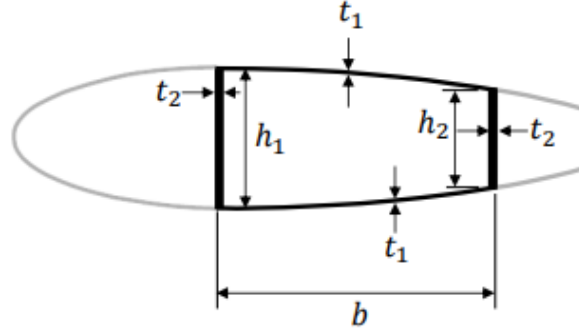


Figura 1: Sección del cajón de torsión del ala

Las cargas estructurales de estudio son las que aparecen en un vuelo a velocidad crucero con altitud constante. Estas cargas se componen por la carga distribuida aerodinámica ($q(x)$), la carga distribuida del peso del ala ($\gamma(x)$), y el peso puntual del motor ($M_e g$) (ver figura 2).

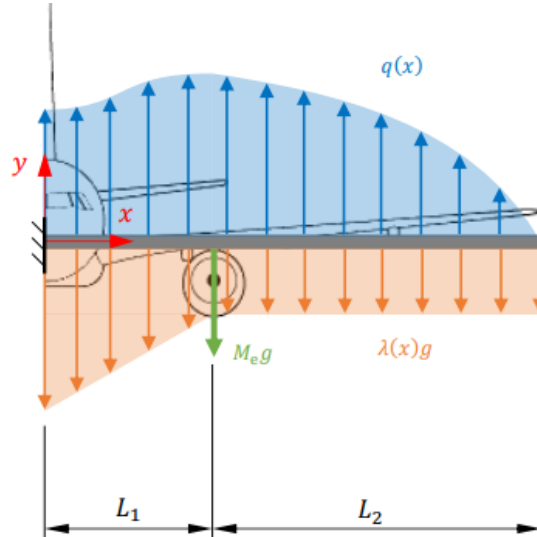


Figura 2: Cargas a la que está sometida el ala

La carga distribuida aerodinámica $q(x)$ se modeliza de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} l(0,8 - 0,2\cos(\frac{\pi x}{L_1})) & \quad \text{for } x < L_1 \\ l(1 - \frac{x-L_1}{L_2})(1 + \frac{x-L_1}{L_2}) & \quad \text{for } x \geq L_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

La carga distribuida del peso del ala $\gamma(x)$ se modeliza de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{4(L_1+L_2)} + \frac{3M}{2L_2^2}(L_1 - x) & \quad for \ x < L_1 \\ \frac{M}{4(L_1+L_2)} & \quad for \ x \geq L_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

La carga puntual debido al peso del motor se modeliza como $M_e g$ a una distancia L_1 del plano de simetría.

Las constante del avión son:

- $L_1 = 5m$
- $L_2 = 10m$
- $M = 35000kg$
- $M_e = 2550kg$

2. Resultados de las partes A y B

2.1. Parte A: Cálculo del centroide y la inercia I_{zz}

La sección del ala se simplifica como un trapecio, obsérvese la figura 3 para referencias.

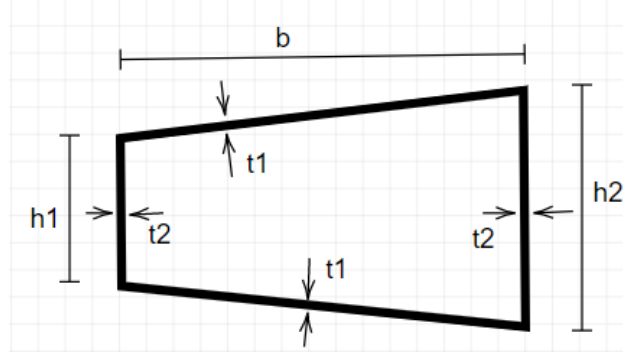


Figura 3: Sección del cajón de torsión del ala

Los parámetros de la sección son:

- $t1 = 1.5\text{mm}$
- $t2 = 4\text{mm}$
- $h1 = 500\text{mm}$
- $h2 = 250\text{ mm}$
- $b = 775\text{mm}$

Para comenzar los cálculos primero se ha de encontrar el valor del lado superior y inferior, así como el ángulo que forma con la horizontal:

$$bt = \sqrt{b^2 + \frac{(h1 - h2)^2}{2}} = 0,7850; \quad (3)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{b}{bt}\right) = 9,1616; \quad (4)$$

El área de la sección se calcula de la siguiente forma:

$$A = 2 \cdot t1 \cdot bt + t2 \cdot h1 + t2 \cdot h2 = 0,0054\text{m}^2 \quad (5)$$

Para el calculo del centroide primero se ha de definir la posición del centro de coordenadas. **Para facilitar los cálculos el eje Y estará superpuesto sobre el lado H2.** Por tanto la posición del centroide en z es:

$$C_z = \frac{(t2 \cdot h1 \cdot b + 2 \cdot t1 \cdot bt \cdot \frac{b}{2})}{A} = 0,4599\text{ mm}^4 \quad (6)$$

Dado que se trata de una sección simétrica se sabe que el centroide en y será:

$$C_y = 0 \quad (7)$$

Para el calculo de la inercia I_{zz} primero se calculara la inercia local por lado y mediante *Steiner* se calcula la inercia total.

$$I_{zz1} = \frac{1}{12} \cdot t1 \cdot bt^3 \cdot (\sin(\theta))^2 = 1,5332e - 06\text{ mm}^4$$

$$I_{zz2} = \frac{1}{12} \cdot t2 \cdot h1^3 = 4,1667e - 05 \text{ mm}^4$$

$$I_{zz3} = \frac{1}{12} \cdot t1 \cdot bt^3 \cdot (\sin(\theta))^2 = 1,5332e - 06 \text{ mm}^4$$

$$I_{zz4} = \frac{1}{12} \cdot t2 \cdot h2^3 = 5,2083e - 06 \text{ mm}^4$$

Finalmente aplicando *Steiner* sobre el centroide la inercia total queda como:

$$I_{zz} = I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3} + I_{zz4} + 2 \cdot t1 \cdot bt \cdot \left(\frac{h1 + h2}{4}\right)^2 \quad (8)$$

$$I_{zz} = 1,3274e - 4 \text{ mm}^4 \quad (9)$$

2.2. Parte B: Calcular el parametro l para conseguir equilibrio de fuerzas

La fuerza total generada por el peso repartido es el resultado de integrar la ecuación 2 en función de la envergadura del ala:

$$F_\gamma = \int_0^{L1+L2} \gamma(x) dx \quad (10)$$

De la misma forma, la fuerza total generada por la carga aerodinámica repartida es el resultado de integrar la ecuación 1 en función de la envergadura del ala, sin embargo, a diferencia de la expresión anterior, el resultado está en función de la incógnita buscada:

$$F_q = \int_0^{L1+L2} q(x) dx \quad (11)$$

Mediante herramientas numéricas (*vpasolve*) se integran las expresiones y se iguala el *lift* con el peso repartido del ala y del motor ($(F_\gamma + M_e) \cdot g = F_q$) obteniendo:

$$l = 16427,917 \quad (12)$$

Por tanto, la fuerza total que ejerce el avión y la fuerza generada por el peso repartido es:

$$F_q = 1,7523e + 05 N \quad (13)$$

Como se puede comprobar el avión genera un *lift* dentro de lo esperado para sus dimensiones.

2.3. Resolución analítica de la deflexión y rotación

Una vez conocido el parámetro l , se procede a encontrar la solución analítica. Integrando las distribución de cargas conocidas se puede encontrar el esfuerzo cortante F_{yan} .

$$F_{yan}(x) = \int_x^{L1+L2} q(x) dx ; \quad M_{yan}(x) = \int_x^{L1+L2} F_{yan}(x) dx \quad (14)$$

Luego, aplicando los teoremas de Mohr desde el empotramiento fijo:

$$\theta_{zan}(x) = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \int_0^x M_{yan} dx ; \quad U_{yan}(x) = \frac{1}{E \cdot I_{zz}} \int_0^{x_B} M_{yan}(x_B - x) dx \quad (15)$$

3. Resolución de los esfuerzos mediante el método matricial

3.1. Representación gráfica de la deflexión, rotación, cortante y momento flector

Mediante el código desarrollado para una resolución matricial 1D (con axiles, cortantes y flectores), se encuentran las distribuciones de los esfuerzos. Estos se presentan gráficamente junto a los resultados obtenidos mediante el cálculo analítico, discretizado en 96 elementos.

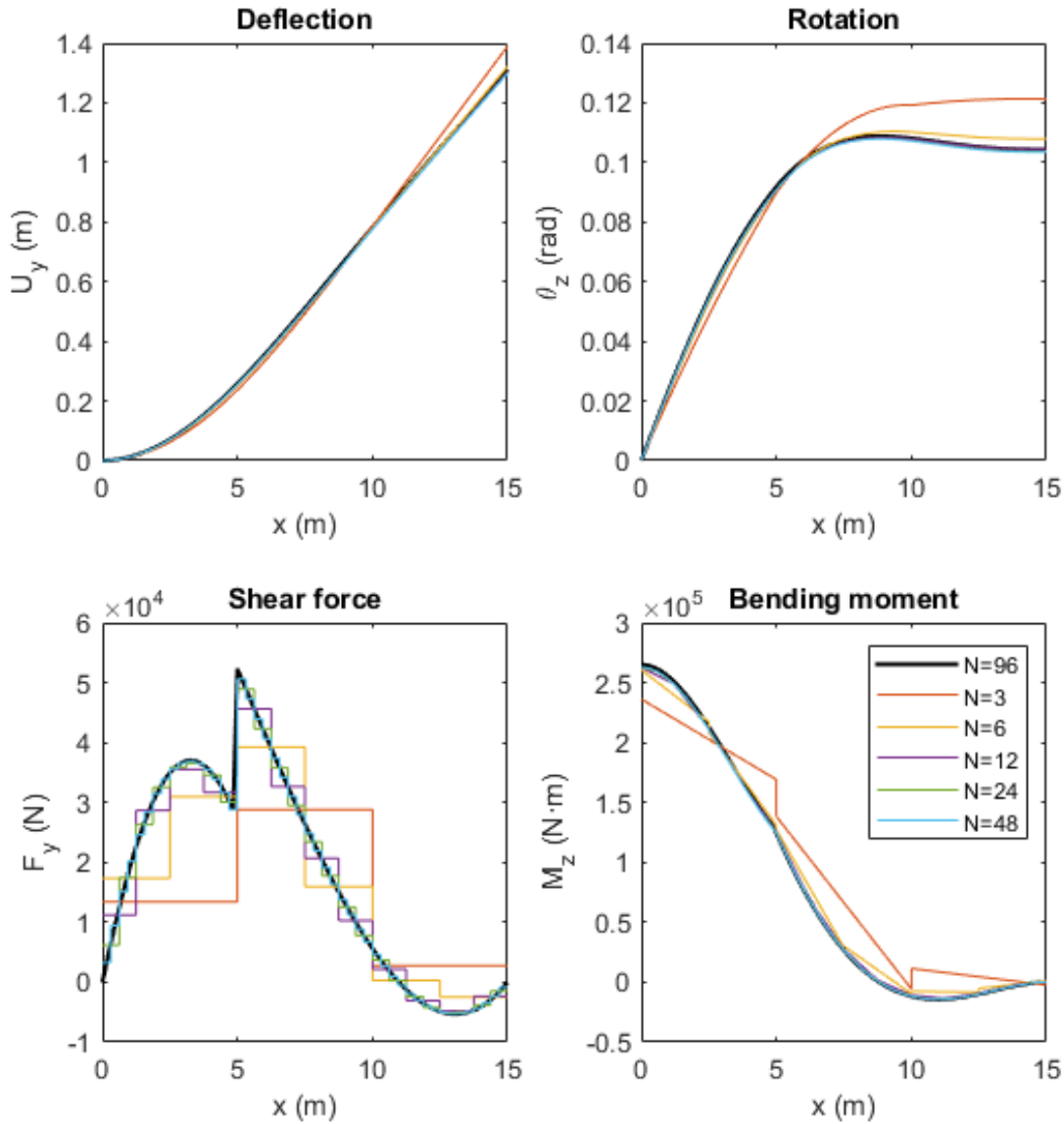


Figura 4: Deflexión, rotación, cortante y momento flector con solución analítica ($N=96$) y diversas discretizaciones del método matricial

Se puede ver en la progresión de los resultados que a medida que se incrementa el número de nodos, tanto el esfuerzo cortante como el momento flector se solapan sobre la distribución exacta ($N=96$). En las distribuciones de desplazamientos y rotaciones se va ajustando desde unos valores ligeramente superiores a unos más precisos hasta que en la propia representación gráfica resultan indistinguibles los resultados matriciales con $N=48$ de los analíticos. En

$x=5\text{m}$ se puede apreciar con claridad el pico que genera el peso concentrado del motor (Me) y como a medida que se incrementa el número de elementos, se va definiendo mejor la forma con los segmentos del método matricial.

Los resultados son coherentes con los valores esperados. Por un lado, vemos como a medida que aumenta la envergadura alar, la deflexión aumenta, obteniendo una deflexión de 1.3m a los 15 metros. Por otro lado, se observa una rotación constante a partir de la posición del motor de $5,72^\circ$, por tanto, la posición del motor es determinante en el comportamiento del ala. La fuerza cortante presenta el comportamiento esperado, apareciendo un pico a los 5 metros debido al peso puntual del motor. Finalmente el momento flector, tiene un gran importancia en los primeros metros pero acercándose a valores de 0 a los 10 metros, relación que se explica por la fuerza tangencial cercana a valores 0 o negativa entre 10 a 15m.

3.2. Representación gráfica del error relativo entre la solución analítica y la del método matricial

El error relativo se calcula en el extremo del ala, en $x=15\text{m}$, y se toma la distribución con $N=96$ de la solución analítica como la solución exacta ($u_y^*|_{x=L_1+L_2}$). Las distancias medidas h_{el} son [5 2.5 1.25 0.625 0.3125]m, que se corresponden respectivamente a [3 6 12 24 48] elementos para media ala de 15m.

$$\varepsilon(h_{el}) = \frac{u_y^{h_{el}}|_{x=L_1+L_2} - u_y^*|_{x=L_1+L_2}}{u_y^*|_{x=L_1+L_2}} \quad (16)$$

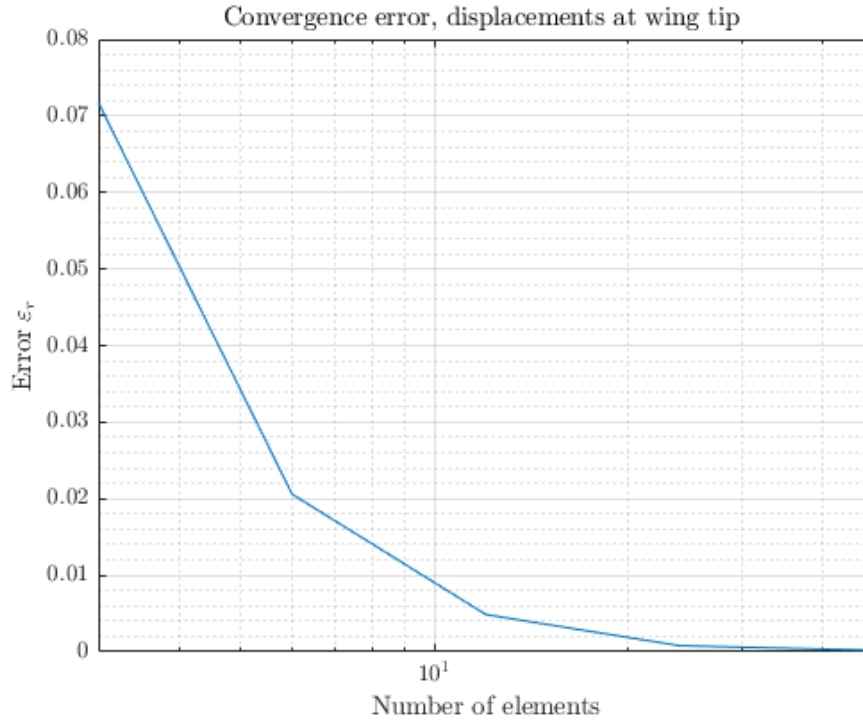


Figura 5: Error relativo entre el desplazamiento en la punta del ala analítico y el obtenido mediante método matricial en función del número de elementos

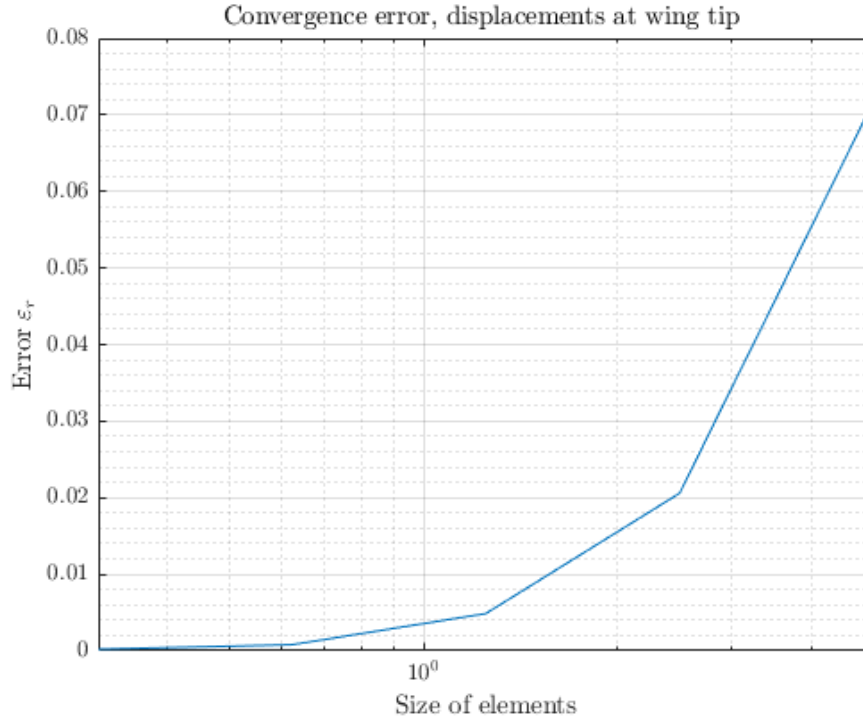


Figura 6: Error relativo entre el desplazamiento en la punta del ala analítico y el obtenido mediante método matricial en función del tamaño de los elementos

Presentado con escala logarítmica en el eje de los elementos, observamos la progresión del error relativo. Cabe destacar que con 3 elementos el error es de 0.0717 (7.2 %), dependiendo de la aplicación podría servir para una primera estimación. Pero al alcanzar una longitud de elemento $h_{el} = 0,3125m$, considerando que la longitud del ala entera es de 15m, es decir, con 48 elementos, el error es de 0.0002, una precisión prácticamente exacta y suficiente para hacer un análisis del comportamiento de la estructura.

Es importante ver cómo sin recurrir a los 48 elementos con 6 elementos ya se alcanza un grado de error muy pequeño (0.02, 2 %), indicando que con esos pocos elementos ya se ha conseguido la convergencia de resultados y las próximos incrementos de elementos simplemente consumen potencia computacional sin ofrecer un incremento de precisión considerable.

4. Sección y el punto crítico de la estructura mediante tensiones de Von Mises

Para la realización de este apartado tomaremos como datos los esfuerzos analíticos, discretizados con $N=96$.

La determinación de la sección más crítica se realiza comparando los esfuerzos cortantes, y los momentos flectores a lo largo del ala. Hay dos posibles puntos de interés, en $x = 0$ (flector máximo) y en $x = L_1$ (cortante máximo). Pero si se observa, el orden de magnitud del momento flector es de 10^5 y el del cortante de 10^4 (véase la figura 4), añadido a que en estructuras largas como el ala, el momento tienen un efecto mucho más dominante, podemos asegurar que la sección más solicitada es la unión del ala con el fuselaje, en $x = 0$.

En dicha sección, $x = 0$:

$$M_z = 2,65e5 ; \quad F_y = 0 \quad (17)$$

Se puede calcular la tensión causada por el momento flector, recordando que solamente hay M_z e $I_z y=0$ debido a la simetría de la sección:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y \quad (18)$$

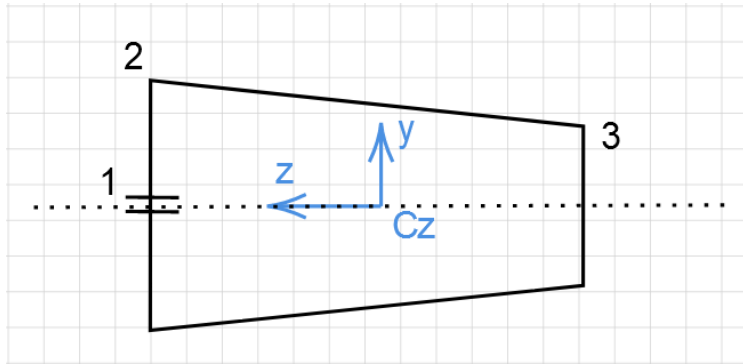


Figura 7: Sección del ala, con los ejes de referencia partiendo desde el centroide

Se puede observar que el **punto 2** de la sección es el más solicitado, ya que es la distancia $y_{max} = \frac{h_1}{2}$.

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot \frac{h_1}{2} = 499,08 \text{ MPa} \quad (19)$$

$$\tau_{max} = \frac{S_y}{I_{zz}} \int_0^{\frac{h_1}{2}} y \cdot dA = 0 \quad (20)$$

$$\sigma_{VonMises} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_{max} = 499,08 \text{ MPa} \quad (21)$$

Se puede entonces concluir que el punto más solicitado, por donde rompería primero el ala si esa tensión es superior a la tensión límite, es en la sección $x = 0$ y $y = \frac{h_1}{2}$.

4.1. Cálculo numérico de la tensión equivalente máxima por sección

Para calcular la tensión equivalente en cada sección primero se debe calcular la distribución de flujo tangencial sobre la sección. En este caso, se considerará que el cortante se aplica sobre el centroide.

Primero se calcula la distribución en sección abierta. La sección se abrirá en el punto 1. Dado que se trata de una sección simétrica solo se calculará la distribución de la parte superior.

$$q_{12abierto} = -\frac{S_y}{I_z} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot t_2 \quad (22)$$

$$q_{23abierto} = -\frac{S_y}{I_z} \cdot s \cdot t_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} - 0,5 \cdot s \cdot \sin(\theta) \right) + q_2$$

(23)

$$q_{34abierto} = -\frac{Sy}{I_z} \cdot s \cdot t_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2} - \frac{s}{2}\right) + q_3 \quad (24)$$

Una vez calculada la distribución tangencial en sección abierta ya se podrá calcular la misma distribución pero en sección cerrada:

$$2 \cdot A_{in} \cdot q_{s0} = \oint q(s)_{open} \cdot r_{tan} ds \quad (25)$$

Donde r_{tan} es la distancia entre el centroide y la tangente del punto de estudio. El r_{tan} de cada parte de la sección sera:

$$r_{12tan} = b - centz \quad (26)$$

$$r_{23tan} = \frac{\tan(\theta) \cdot centz + \frac{h_2}{2}}{\sqrt{(1 + (\tan(\theta))^2)}} \quad (27)$$

$$r_{34tan} = centz \quad (28)$$

Una vez ya calculado la distancias tangenciales se procede a calcular la integral total:

$$\begin{aligned} \oint q(s)_{open} \cdot r_{tan} ds &= \int_0^{\frac{h_1}{2}} q(s)_{12abierto} \cdot r_{12tan} ds + \\ &+ \int_0^{bt} q(s)_{23abierto} \cdot r_{23tan} ds + \int_0^{\frac{h_2}{2}} q(s)_{34abierto} \cdot r_{34tan} ds \end{aligned} \quad (29)$$

$$A_{in} = \frac{(h_1 + h_2)}{2} \cdot b; \quad (30)$$

$$q_{s0} = \frac{\oint q(s)_{open} \cdot r_{tan} ds}{2 \cdot A_{in}} \quad (31)$$

La distribución de flujo tangencial a lo largo de la sección cerrada sera:

$$q_{12}(s) = q_{12o}(s) + q_{s0} \quad q_{23}(s) = q_{23o}(s) + q_{s0} \quad q_{34}(s) = q_{34o}(s) + q_{s0} \quad (32)$$

Finalmente, la tensión tangencial será:

$$\tau(s) = \frac{q(s)}{t} \quad (33)$$

Por otro lado, como ya se ha explicado, la tensión normal sobre la sección sigue la siguiente distribución:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y \quad (34)$$

El punto más solicitado en la sección corresponderá al punto con mayor tensión equivalente (tensión de Von Mises):

$$\sigma_{VonMises} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (35)$$

Es por ello, que para calcular la tensión equivalente máxima en cada sección, se debe calcular la tensión equivalente en cada punto de la sección. Como la distribución tangencial a lo largo de la sección está definida por 3 ecuaciones, habrán

3 ecuaciones para poder definir la tensión equivalente en cada punto de la sección. Dado que la tensión de Von Mises es una combinación entre la tensión normal y la tangencial, dicha tensión máxima estará directamente relacionada con la relación entre fuerza cortante y flector. Como tanto la fuerza cortante y el flector varían conforme a la sección, la tensión de Von Mises también lo hará. Debido al volumen de cálculo, se ha de recurrir a herramientas computacionales (véase el código).



Figura 8: Tensión equivalente de Von Mises a lo largo de la envergadura del ala.

Estos resultados concuerdan con la parte numérica, donde se ha calculado la tensión equivalente a lo largo de la envergadura (ver figura 8). El pico de tensión máxima ocurre en la raíz del ala a 499 MPa (dato que cuadra con el cálculo analítico). Por otro lado, en la gráfica también se observa un pico en la posición del motor además de que a partir de los 10m la tensión equivalente se estabiliza. Observando la gráfica 8 se observa como el momento flector es el determinante en la tensión equivalente máxima. Esto es visible, por la gran semejanza en la forma entre la gráfica del momento flector (figura 4) y la de la tensión equivalente a lo largo del ala (figura 8).